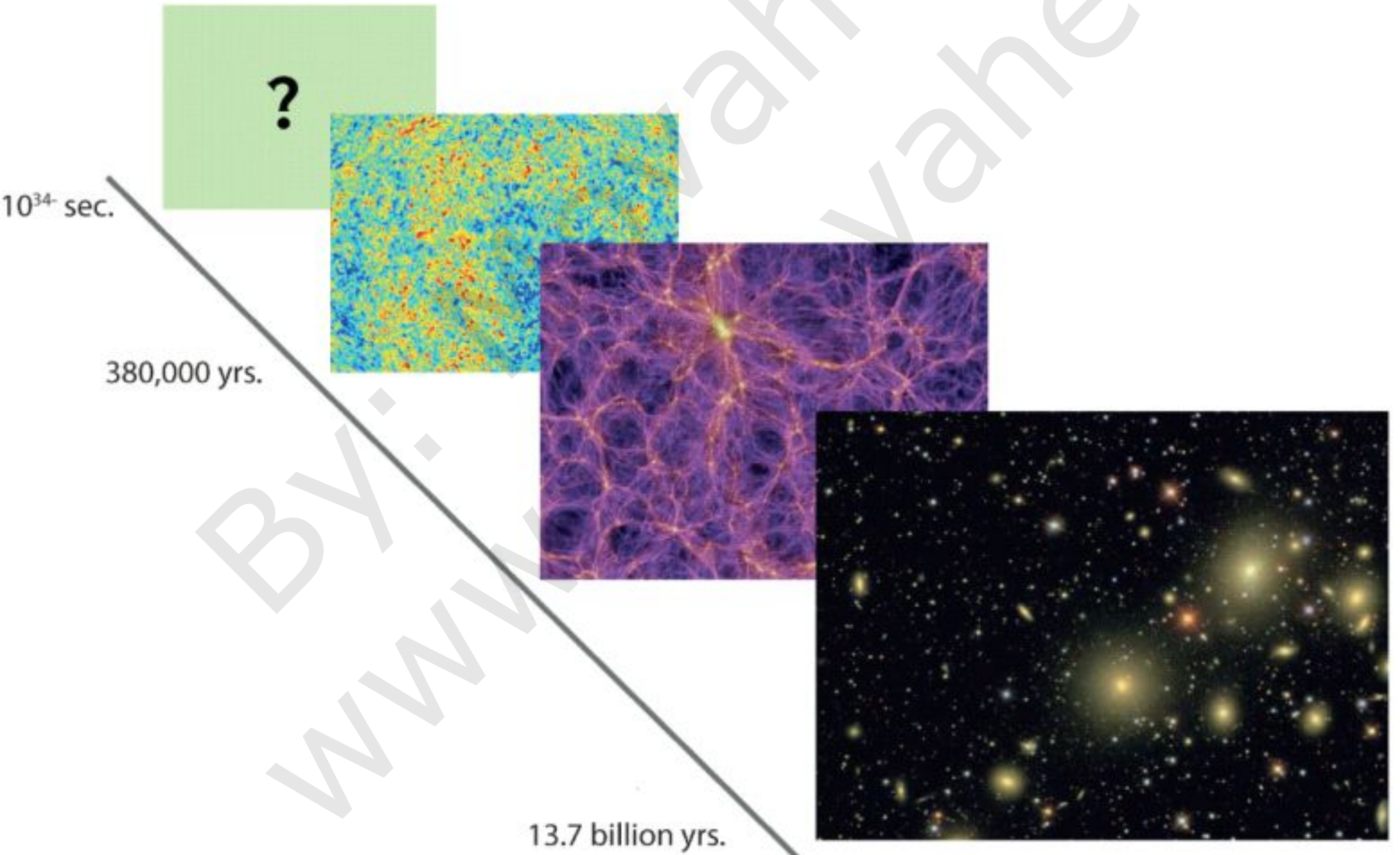


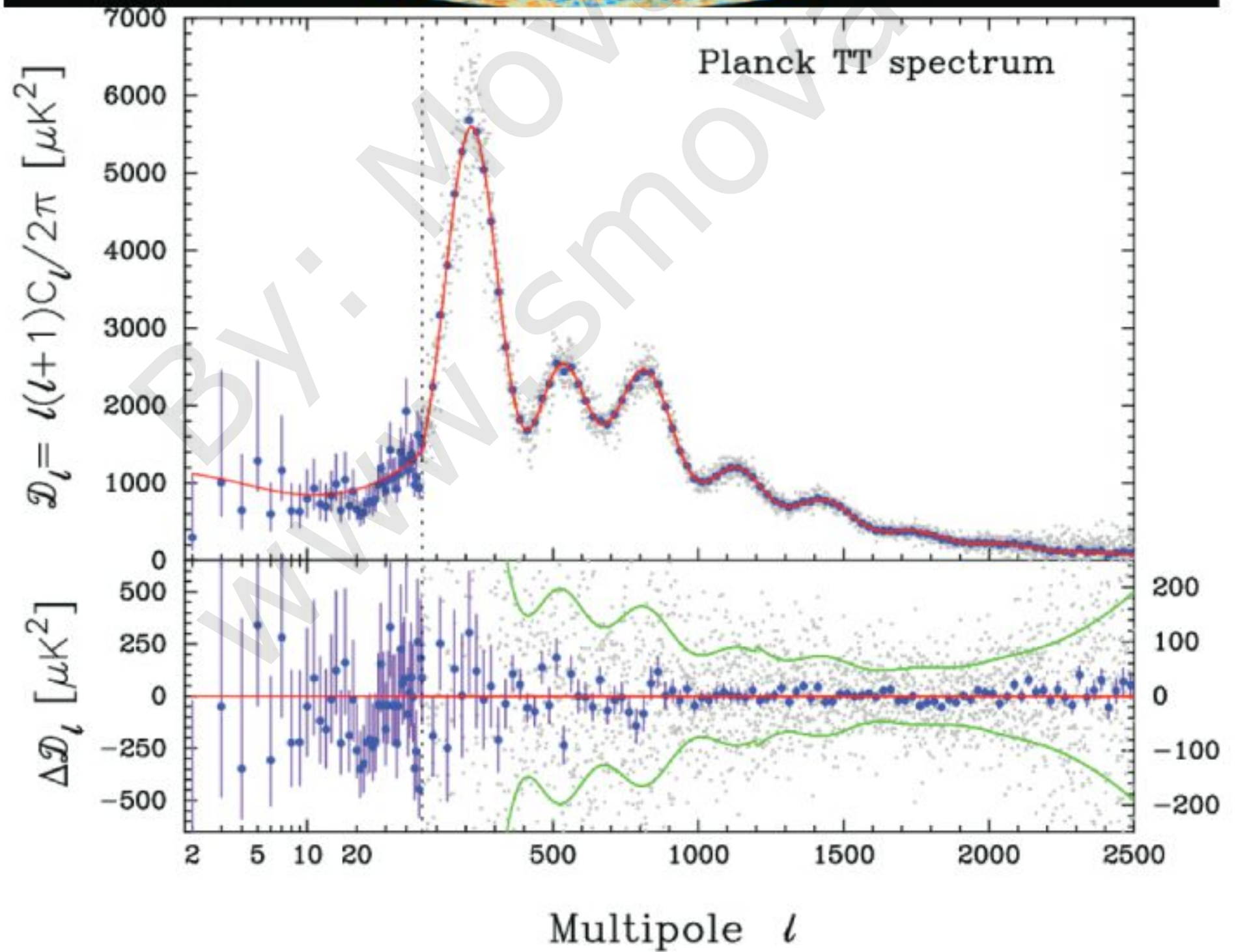
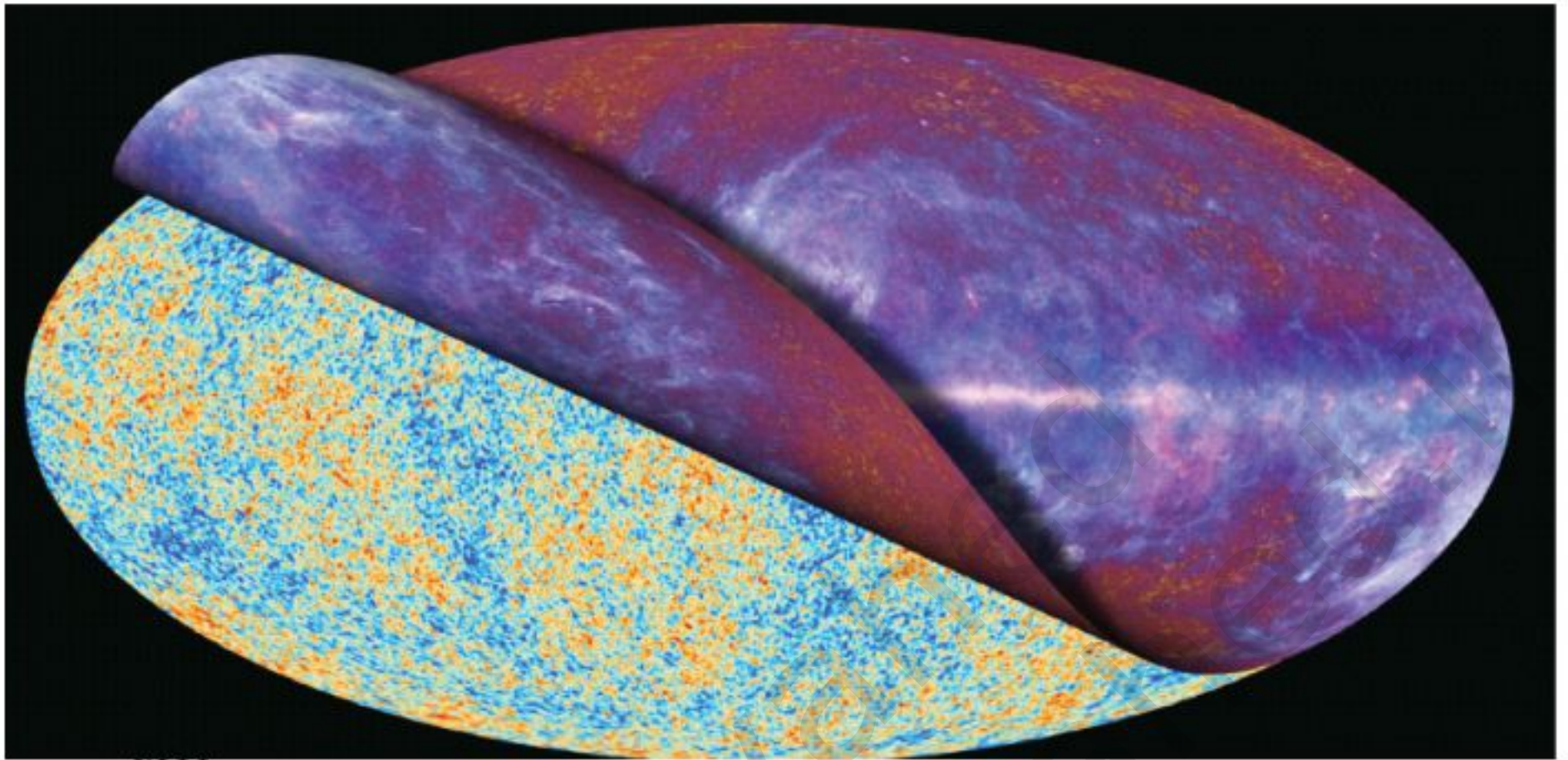
بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

## Physics of CMB

سید محمد صادق درحد  
دانشکده فیزیک - دانشگاه ایلدیش  
پژوهشکده فیزیک - پژوهشگاه دانش‌های بنیادی  
مدرس سرانش و کوانتاسی - آبان ۱۳۹۳



Credit: Daniel Baumann & Adam Solomon



## فهرست مطالب :

- ۱- برقی لزر ارجع مورد استفاده
- ۲- مقدمه و تاریخچه مدل CMB
- ۳- سوپ کیهانی
- ۴- معادله بولتزمن در نسبت عام
- ۵- میدان CMB
- ۶- اختلالات کیهانی
- ۷- شرایط اولیه
- ۸- معادله بولتزمن برابر فوتون و ماده
- ۹- عوامل ایجاد افت و غیربروی میدان CMB
- ۱۰- میدان تصادفی و طیف توان
- ۱۱- اثرات ISW ، Doppler و ISW
- ۱۲- زساعات صوتی
- ۱۳- اثر رسیانهای کیهانی بر روی طیف CMB
- ۱۴- اثر کمیت های کیهانشناسی بر روی طیف CMB
- ۱۵- قطبش CMB

برخی از مهم ترین مراجع

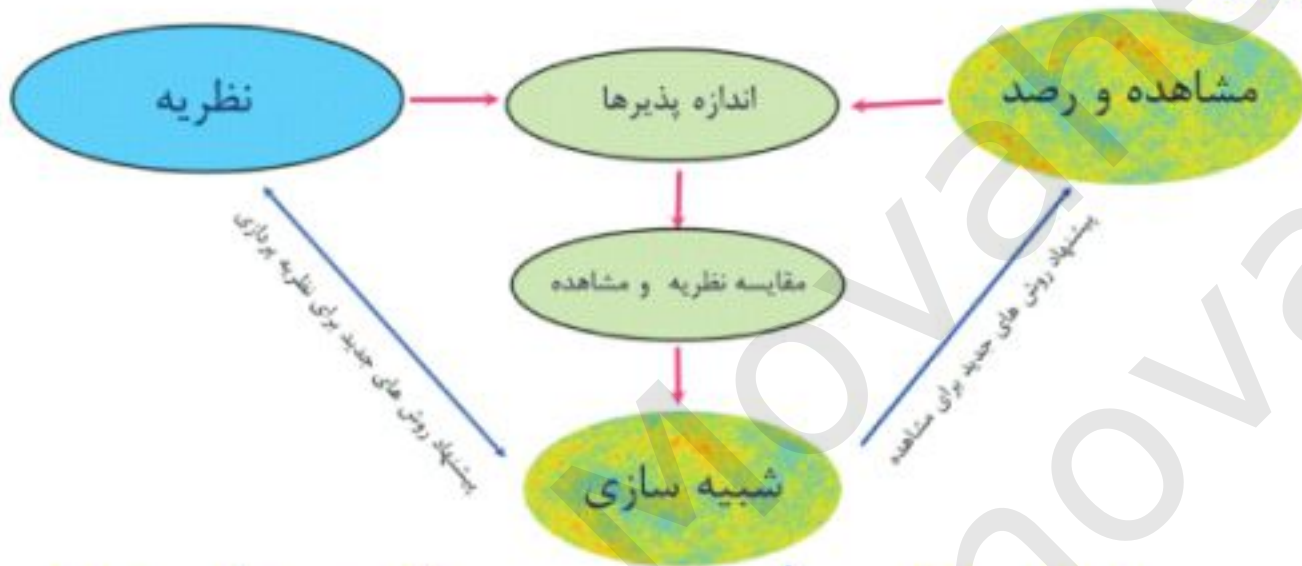
حاضر نشان می‌کنیم که در دنیا فقط برخی از آن را در دسترس

- 1) "Modern Cosmology" By S. Dodelson
- 2) "The Cosmic Microwave Background" By R. Durrer
- 3) "Physical Foundation of Cosmology" By V. Mukhanov
- 4) "Cosmology" By S. Weinberg
- 5) "Cosmological Physics" By J.A. Peacock
- 6) arXiv:1302.4640, By J. Lesgourgues
- 7) arXiv:astro-ph/0303072, By V. Mukhanov
- 8) "Statistics of Galaxy Distribution" By H. Mo et al.
- 9) [faculties.sbu.ac.ir/~mouahed](http://faculties.sbu.ac.ir/~mouahed)  
[www.smoahed.ir](http://www.smoahed.ir)

• لازم است اشاره کنیم به افعال وجودی غلط‌ها نوشتاری در معادلات وجود دارد بنابراین در صورت نیاز به منابع زیرشده مراجعه شود.

• مناسب است در هر مدخل مراجع مرتبط آورده شود البته اینها را نیز انجام شده است.

علم فیزیک، به هدف توصیف کمی از طبیعت با کمک ابزارهایی همچون ریاضیات در سبکهای  
 اضری با فزادونشیب های فزادینی همراه بوده و البته منوهد بود. برای دستیابی به یک مونت  
 علمی از چارچوبی که در آن از ابزار روشی برای مدل سازی برای توصیف رفتار طبیعت  
 استفاده می شود، مدلی برتر (نه لزوماً واضح تر) منوهد بود که به طور کلی ساده تر و اندازه گیری ها  
 مشاهدات درصد ها سازگارتر باشد. بنابراین می توان در اینجا مونت تناسی و روش شناسی  
 علمی را به صورت زیر نشان داد:



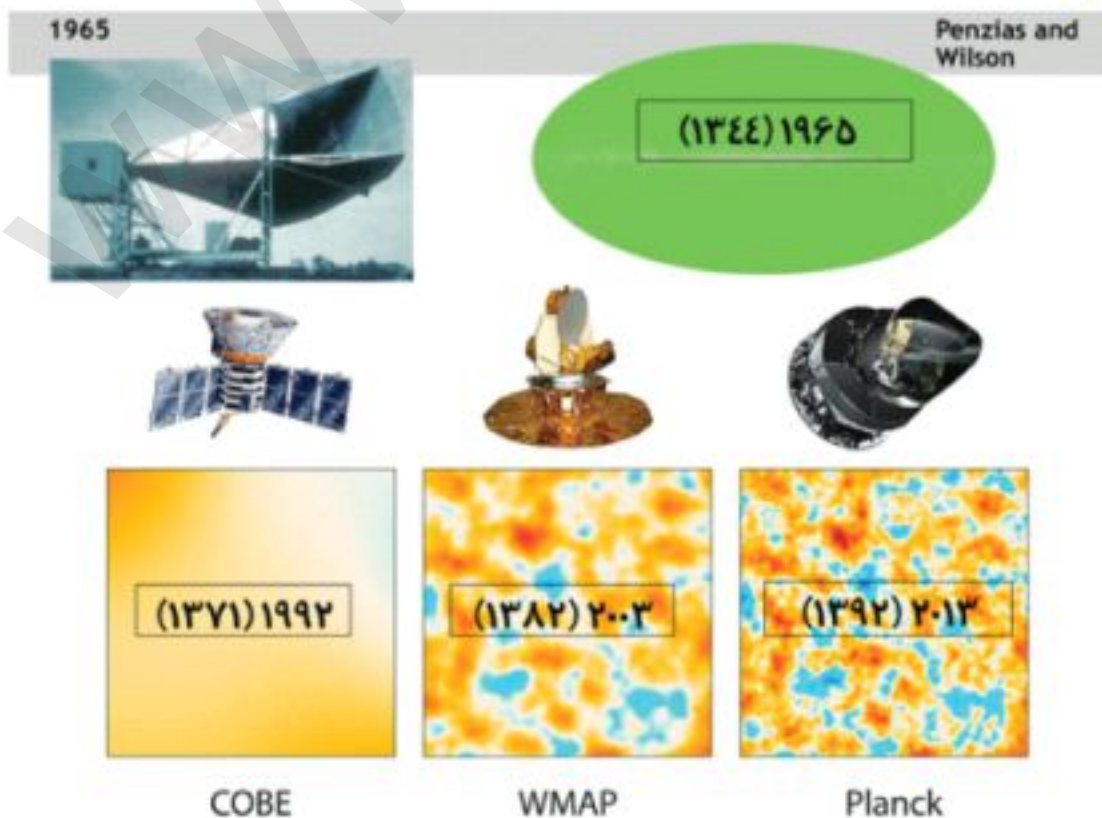
ها نظریه ملاحظه می شود برای پاسخ به سؤالاتی در خصوص طبیعت و ماهیت آن، کول واقعات  
 پیش بینی و صفت آینده آن باید مدلی بنا شود. در این مدل، بعضی مشاهده پذیرها و اندازه پذیرها  
 تعیین شوند. از رویی دیگر باید با کمک ابزارهای مناسب به رصد و مشاهده و اندازه گیری پرداخت.  
 با مقایسه مدل و مشاهده سازگاری مدل بررسی می شود. شبیه سازی نیز برای تکمیل نقطه نظرات  
 و بربر تمام محواسب نیز در ادامه انجام خواهد شد.

نبا بر گزارش ماهواره پلانک در فروردین ماه ۱۳۹۲ تا ۴۱۵ درصد از محتوی عالم قابل دیدن است  
 برای دستیابی به ماهیت کیوانی که در آن زندگی می کنیم علمی تخم نثرش های مطرح شده محدود  
 ۳۰ سال پیش در ابتدای راه هستیم. برای این منظور پروژه های بزرگ علمی تعریف و انجام شده اند

وحتی در حال طرح ریزی هستند که در آینده نزدیک پیاده سازی شوند.

6

در دهه ۱۹۴۰ (۱۳۱۹ شمسی) در ادامه تحقیقات آلفر، پنه و کاموف در خصوص هسته زایی اولیه، آلفر و همین نظریه انفجار اولیه را مطرح کردند. آنا نشان دادند که در صورتی که عالم از یک انفجار اولیه بزرگ شروع شده باشد اکنون باید یک تابش زمینه ای در همه جای عالم داشته باشیم. بعد از آن یکی نیز، همکارانش در سال ۱۹۴۶ (۱۳۲۵) زمانی برای این تابش زمینه محاسبه کردند. در همان سال کاموف زمانی در حدود ۵۰ کلوین برای این تابش محاسبه کرد. البته خیلی زود محاسبات توسط آلفر و همین تکرار شد و این بار زمانی در حدود ۵ کلوین برابر آن پیش بینی گردید. این تابش زمینه ای که Cosmic Microwave Background Radiation که به اختصار CMB نامیده می شود در سال ۱۹۶۴ توسط دو دانشمند به نامهای پنتزاس و ویسون که در تدارک ساخت یک آنتن رادیویی بودند کشف شد. در سال ۱۹۷۸ (۱۳۵۷) جایزه نوبل فیزیک به اینخ دو نفر اعطا شد. تلاش در خصوص شناخت این تابش ادامه یافت. در سال ۱۹۸۹ (۱۳۶۸) ماهواره COBE به فضا پرتاب شد. در سال ۲۰۰۲ نیز جایزه نوبل به مسئولان این پروژه هم اعطا گردید. در سال ۲۰۰۱ نیز ماهواره WMAP به فضا پرتاب شد. برای مطالعات دقیق تر در سال ۲۰۰۹ نیز ماهواره Planck پرتاب شد. در شکل زیر نتایج بهترین و جدیدترین پروژه های ذکر شده آمده است.



6

علاوه بر ماهواره های طراحی شده برابر اندازه گیری لاین تاش، آنتنهای ردی زمین نیز برای لاین کار طراحی شده اند که برخی از پروژه های اخیر عبارتند از: ACT، SPT و BICEP.

تلسکوپ BICEP در قطب جنوب در ۱۷ مارس ۲۰۱۴ طی مقاله ای مدعی شد که برای

اولین بار رد پای امواج گرانشی اولیه را رصد کرده است که تاکنون موضوع قابل مناقشه ای است با این تاریخچه عینی متفکران کنون وقت آن فرارسیده است که به موفی اصراری CMB برداریم.

از آنجا که هدف من در این درس مطالعه جنبه های CMB است بنابراین در این مقدمه

به طور کیفی مطالبی مطرح می گردد. در بخش های بعدی تا آنجا که امکان پذیر باشد فیزیک CMB

مورد بررسی قرار می گیرد. از آنجا که ما نظریه های دید شناخت ماهیت CMB نیازمند شناخت

جنبه های مختلف در گزارش کلی تناسبی دارد بنابراین نمی توان تمام جنبه های مرتبط با جزئیات پیش

را در نظر. از این جهت مؤلفان را به رجوع به سایر منابع ذکر شده برای فهم بیشتر هر مدخل،

توصیه می کنم. ضمناً مخاطران می سازم که اسکان وجود غلط های تایپی در بعضی دلائل که در این

درس می آید، در از انتظار نیست.

### فوتونهای CMB از کجا آمده اند؟

اینج تاش در باذوق کالنی ریز موج قابل درک است و بخش بسیار زیادی از بزرگ تلویزیون راینر

تکلی می دهد. ما نظریه اشاره شد از برای هم چون آلفا، هورن، کامو، بته و دینی پیش بینی

کردند که اگر عالم لزب اتقی اولیه بزرگ شروع شده باشد بنابراین در لحظات اولیه ای سوپ

کیانی وجود داشته است که بر اساس قوانین ترمودینامیک هم افزایی تشکیل دهنده این سوپ

کیانی که در واقع ذرات بیادری، فوتونها و نوترینوها هستند در تعادل گرمایی بوده اند بنابراین برابر است

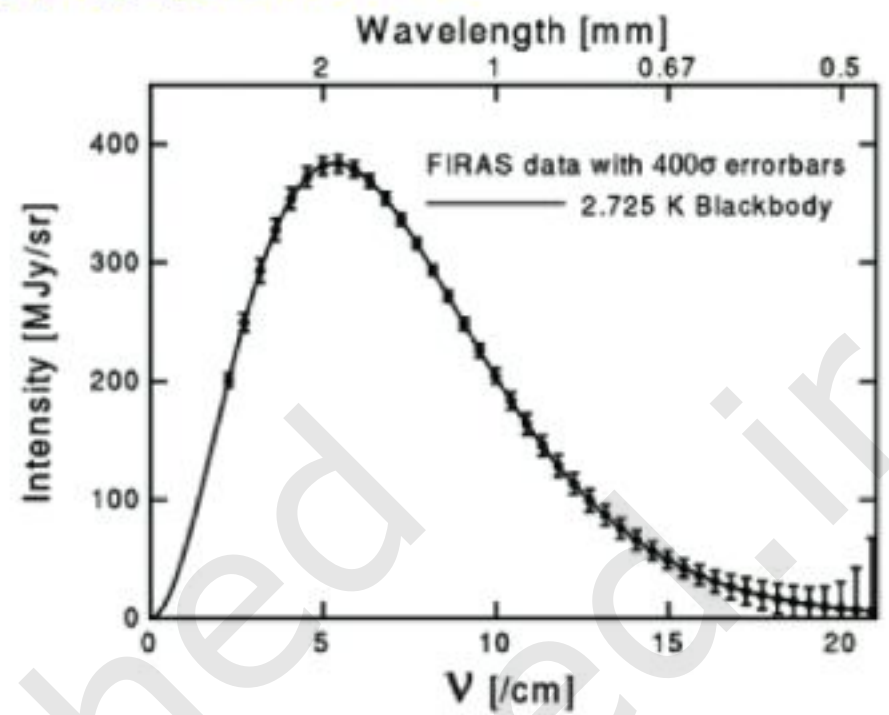
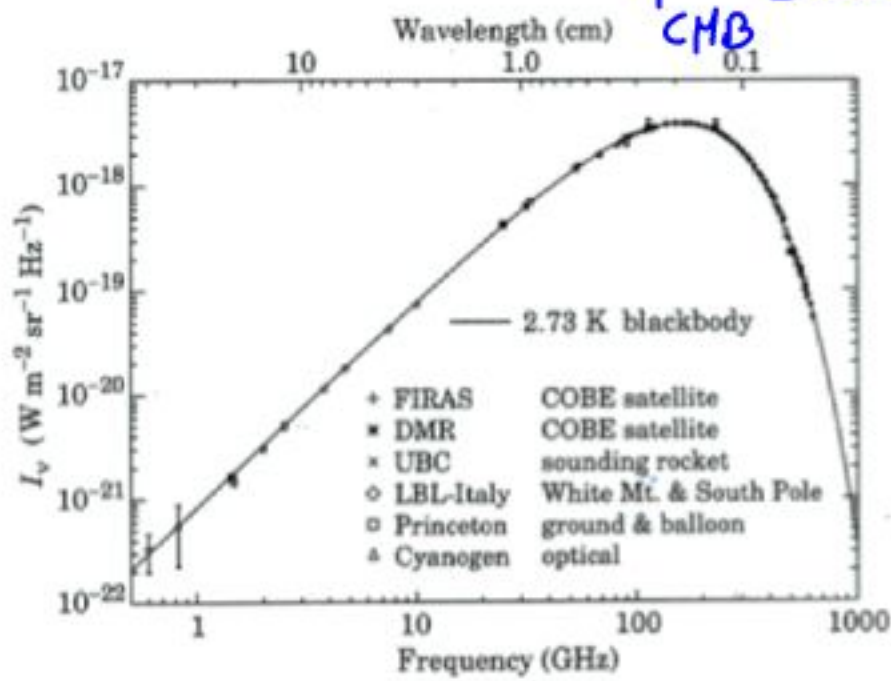
آمار بوز-اینشتین این فوتونها را در طیف تاش حجم سیاه هستند. طیف تاش حجم سیاه به صورت

$$I(\nu, T) = \frac{2hc^2 \nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

است. شکل زیر این طیف را نشان می دهد. در شکل سمت راست ملاحظا ۰۰ برابر بزرگ تر است (۷)

داده شده است. به خوبی مشاهده می شود که مشاهده ها با دقت فوق العاده ای با تئوری سازگار است. دمای این تابش زمینه همگن و همگند برابر است با:

$$T_{CMB} = 2.7255 \pm 0.0006 \text{ K}$$



در شکل زیر نیز به خوبی مشخص است که مشاهده این فوتونها در زمینه کیهان چیست. با گذشت زمان سرد شدن کیهان رفته رفته به همگن شدن بین گونه های مختلف کاهش می یابد. پس از گذشت در حدود ۳۰۰۰۰۰ سال از سن عالم دید فوتونها با سایر ذرات به طور غالب به همگن شدن نخواهند داشت و از این زمان به بعد اصطلاحاً عالم به یازد آلود و غنا طبعی شفاف خواهد شد. بعد از آن فوتونها بدون پراکندگی موثری مسافت خرد را در کیهان آغاز می کنند و با گذشت زمان در اثر اسباط کیهانی انتقال به سرخ پیدا می کنند و انرژی آنها رفته رفته کم می شود و از حدود  $eV$  به  $0.001 eV$  کاهش می یابد.





به طور دقیق تری تران پدیده طیف تابشی آبن زمین گویا در یک لیوان در حال

انبساط صورت زیر معقول می شود:

در لیوان اولیه انتظار داریم که چگالی ماده بیشتر و همچنین دمای آن خنتری باشد. به بیان دیگر اگر در زمان سفر کنیم یعنی به فواصل خنتری دور نگاه کنیم متوجه می شویم که در زمانی داشته ایم که دما بسیار بالا بوده است به حدی که اکثر ذرات نمی توانستند در کنار و بند حبه آب باشند یعنی هیچ اختلالی وجود نداشت. در آن دوران برخورد بین فوتونها و اکثر ذرات دیگر ذرات آنقدر به حدی بوده است که باعث شده است طول پدیده آزار دهنده یکنوع خنتری حرکت و آهنگ برخورد بسیار بزرگتر از آهنگ انبساط عالم باشد. در این حالت شرایط از نقطه نظر فیزیک آماری و ترمودینامیک به نحوی فراهم بوده است که تعادل گرمایی داشته باشیم. پس تعادل گرمایی بین فوتونها و ماده چگال دائم در لیوان اولیه بوده است. یعنی برآمار بوز - اینشتین چگالی تعداد فوتونها در تعادل ترمودینامیکی برای T در دما و فرکانسی  $\nu$  در  $\nu + d\nu$  به صورت زیر خواهد بود:

$$n_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (\text{تپانسی شمیه فوتونها در یک حبه})$$

لیج عبارت همان طیف تابش جسم سیاه است. حال، عبارت به انبساط لیوان در تقارن عالم معیاس در زمانهای مختلف  $a(t)$  می تران چگالی تعداد فوتونها را در زمانی به صورت زیر نوشت:

$$n(\nu, t) d\nu = \left( \frac{a(t_1)}{a(t)} \right)^3 n_1(t_1) \left( \nu \frac{a(t)}{a(t_1)} \right) d \left( \nu \frac{a(t)}{a(t_1)} \right)$$

$$= \frac{8\pi\nu^2}{e^{+h\nu/kT \frac{a(t_1)}{a(t)}} - 1} d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu$$

$$T' = T \frac{a(t_1)}{a(t)}$$

یعنی

نتیجه بالا را می توان از قانون اول ترمودینامیک به صورت زیر نیز برآورد:

انبساط آدیباتیک می شود  $dQ = 0$  ،  $dU = TdQ - PdV$

$$U = \sigma T^4 V \rightarrow T \sim a^{-1}$$

لذره های معادله یونسکی نیز می توانیم رایت:

$$\dot{\rho}_\gamma + \frac{3\dot{a}}{a} (\rho_\gamma + P_\gamma) = 0$$

$$P_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma$$

$$\rho_\gamma \sim \sigma T^4$$

$$T \sim a^{-1}$$

پس

$$a(t_0) = a_0 = 1 \text{ و } T_\gamma^0 = 2.725 \text{ K}$$

حال اگر در نظر بگیریم

$$\rho_\gamma^0 = \sigma T_\gamma^0 = 4.64 \times 10^{-34} \text{ gr/cm}^3$$

پس

$$\Omega_\gamma^0 = \frac{\rho_\gamma^0}{\rho_c} = 2.47 \times 10^{-4} \text{ h}^{-2}$$

و می توانی تعداد فوتونها در زمان حال برابر است با:

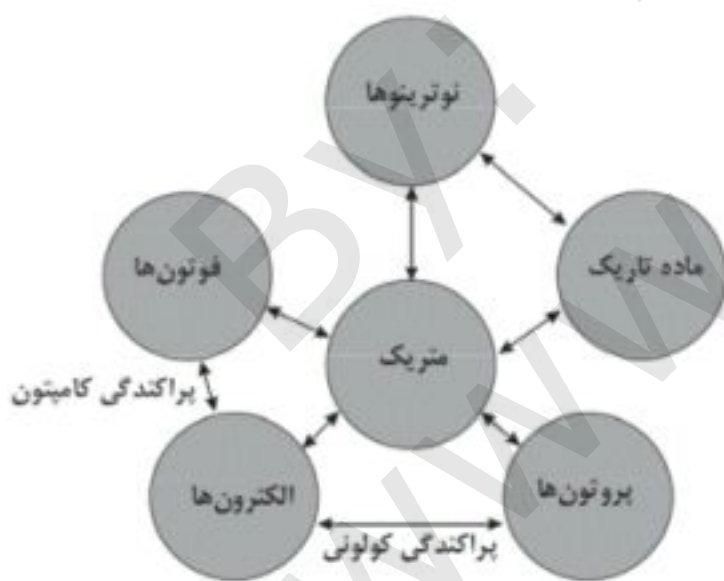
$$n_\gamma^0 = \int_0^\infty d\nu n_\gamma(\nu) = 30 \frac{\zeta(3) \sigma T_\gamma^0^3}{\pi^4 K} = 410 \text{ photons/cm}^3$$

سوپ کیهانی اولیه  
Primordial Cosmic Soup

به طور خلاصه می‌توان گفت که قبل از واغفندیگی (Decoupling) فوتونها از سایر ذرات  
سویور در کیهان اولیه بیگانه‌های ذرات بسیار بالا بوده است. همچنین دمای نیز بالا بوده است  
نیابراین آهنگ برعکس یعنی

$$\Gamma = \frac{1}{t_c} = \frac{c}{\lambda} = cn\sigma \gg \frac{1}{t_H} = H$$

یعنی مدت زمان متوسط بین هر برخورد لذسن کیهان در آن زمان بیشتر است  
یعنی طول پویش آزاد میانگین فوتونها همین که قطر لذ اندازه انوح در آن زمان است  
پن همه چیز فراهم است تا راه کیهانی در آن زمان در وضعیت تعادل قرار گیرد. شد.  
فوتونها کت تاثر ترکیب هستند همچنین با باریونها و لپتونها برعکس به صوت پراکنده  
کامیون دانند. ترکیب نیز کت تاثر نوترینوها (ν) پروتونها، اکزونها و ماده تاریک  
است. شکل زیر اجزای اصلی تشکیل دهنده کیهانی اولیه را نشان می‌دهد:



نیابراین اگر نخواهیم تحول توزیع اجزای مختلف در این  
سوپ کیهانی را به همراه دگرگونی‌های ترکیب برسر کنیم  
ناچاریم تمام معادلات حقت شو را حل کنیم.  
مطالعه سیماتیک چنین بلاسای توسط معادله بولتزمن

انجام می‌شود. قبل از اینکه به تفصیل وارد دوفنی معادله بولتزمن در سبب تمام شوم اجازه دهید  
انتشار آزاد فوتونها را در نظر بگیریم:

مبین تعداد ذرات در حقیقت  

$$dN = f(x, p, \eta) d^3x d^3p$$
 و  $\eta$  و  $\eta + d\eta$  بالندازه و کت  $\bar{p}$  و  $\bar{p} + dp$  در زمان هدییم

هم قضاى نازك برابرت؛ ارادى نك نوسان)

12

$$d\Omega = d^3x d^3p = dx^1 dx^2 dx^3 dp_1 dp_2 dp_3$$

هم قضاى نازك بيدلت نكسات ارادى (قضاى ليوويل) لى

$$d\Omega' = d\Omega$$

در صورتى كه  $N_{acts}$ ،  $f$  لى كارك قضا - زمان است لى

$$0 = \frac{Df(x^i(\eta), p_i(\eta); \eta)}{D\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

كه عبارت به  $\frac{dx^i}{d\eta}$  و  $\frac{dp_i}{d\eta}$  مبنى بر عبارات زوئدى نكسى مى شود.

قبل از اينكه ماهيت ماده، بله جان ماده پوترين رعباب كوكب برهنگش در خوردات  
را بشتر توصيف كنم اجازه دهيد قضاى ليوويل را لى بارادى برور كنم.

BY: www.sharh.com

## Liouville's Theorem

خواص کلی توزیع نقاط (ریزحالت ها) فضای فاز توسط قبه لیوویل رده می شود. بنا به توفیق متوسطی

$$\langle x \rangle_{ensemble} = \int d\Omega \times \rho(q, p, t)$$

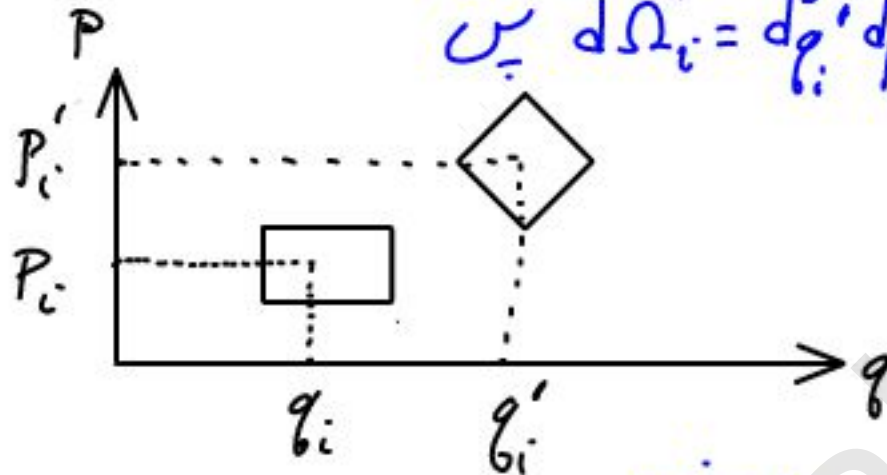
این حجم فضای فاز است،  $\rho(q, p, t)$  چگالی احتمال است.

$$d\Omega_i = d^3 q_i \cdot d^3 p_i$$

① این حجم فضای فاز در هر گایی  $(q_i, p_i)$  در زمان  $t$  به صورت

$$d\Omega'_i = d^3 q'_i \cdot d^3 p'_i$$

است در لحظه  $t + dt$  نیز داریم:



$$dq'_i = dq_i + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} dq_i \delta t + \sum_{j \neq i} \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} dq_j \delta t$$

یعنی

$$= dq_i + \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} dq_i \delta t$$

$$dp'_i = dp_i + \frac{\partial p'_i}{\partial p_i} dp_i \delta t$$

دوبار اندازه گرفت - خواهیم داشت:

$$d\Omega'_i = d^3 q'_i \cdot d^3 p'_i = d^3 q_i \cdot d^3 p_i \left[ 1 + \left( \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} + \frac{\partial p'_i}{\partial p_i} \right) \delta t + O(\delta t^2) \right]^3$$

یعنی:

$$\frac{\partial q'_i}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)$$

$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

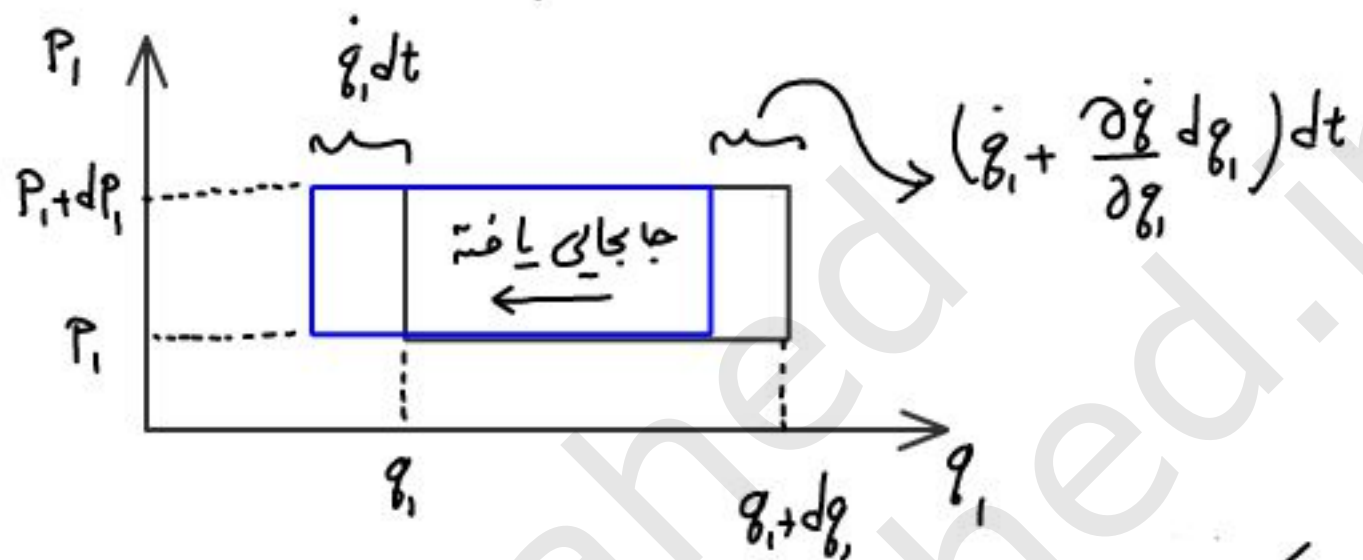
لذا عدالت گرفت خواهیم داشت:

$$d\Omega'_i = d^3 q'_i \cdot d^3 p'_i = d^3 q_i \cdot d^3 p_i$$

پس، جایگزین خواهیم داشت:

پس  
یعنی همان حجم فضای فاز درجه‌های نقطه با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. اکنون کمیت  
دستی را بر سر کنیم

۵) تغییر در تعداد حالت‌های قابل دسترس در حجم  $d\Omega$  با گذشت زمان به صورت زیر است:



تعداد نقاطی که از داخل سمت چپ وارد حجم می‌شوند:

$$\delta N_L = \rho(q_i, \dots, p_i, \dots, t) q_i dt dq_2 \dots dp_1 \dots$$

تعداد نقاطی که از داخل سمت راست خارج می‌شوند:

$$\delta N_R = \rho(q_i + dq_i, \dots, p_i, \dots, t) \left[ q_i + \frac{\partial q_i}{\partial t} dt \right] dt dq_2 \dots dp_1 \dots$$

پس تغییر در تعداد نقاط فضای فاز

$$\delta N = \delta N_L - \delta N_R = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\rho dq_2 \dots dp_1 \dots) \delta t$$

با جمع زدن درجه‌ها این را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dq_2 \dots dp_1 \dots \delta t = \delta N_L - \delta N_R$$

$$= - \left[ \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial}{\partial q_i} (\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (\rho \dot{p}_i) \right] dq_1 \dots dp_1 \dots \delta t$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[ \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \rho \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \right]$$

که عبارت است از:  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$  ,  $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  مقادیر را:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\{ \rho, H \}}_{\text{Poisson Bracket}}$$

Poisson Bracket

↑  
نه چسب داریم نه چسب  
این کول سرسری  $\rho$   
صورت

Liouville Eq

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \{ \rho, H \}$$

یعنی

$$i\hbar \dot{\rho} = - [\hat{\rho}, \hat{H}]$$

Von-Neumann Eq

که کول کوانتومی آن به صورت:

$\langle x \rangle_{ens}$  باز تغییر کند مطابق  $\rho$  خود  $X$  است

الکون به پیامدهای این قضیه می پردازیم

(A) در شرایط تعادل انتظار داریم که

دنیایی داشته باشد پس

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle_{ens} = \frac{d}{dt} \int d\Omega x \rho$$

$$= \int d\Omega \frac{\partial x}{\partial t} \rho + \int d\Omega x \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

در صورت  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  در آن صورت اگر  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  پس  $\langle X \rangle_{ens} = cts$  است

(B) اگر نیز  $\rho(H) = 0$  پس  $\rho(H) = 0$  در باره  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

یعنی ثابت حرکت خواهد بود پس در باره  $\langle X \rangle_{ens}$  ثابت خواهد شد

$$\frac{d\langle X \rangle_{ens}}{dt} = \int d\Omega X \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int d\Omega X \rho(H, X) \quad (C)$$

$$= - \int d\Omega \rho(H, X) = \langle \rho(H, X) \rangle$$

اشدال جزء، جز

پس؛ طور کلی می توان در وضعیت تعادل سیستمی توزیع ریاضیات هاراب صورت

$$\rho = \rho(H)$$

در نظر گرفت.



# Boltzmann Eq in GR

Ludwing Boltzmann (1872)

آنچه که باعث شده معادله بولتزمن را بر سر کنیم، نظریه لایمینگ است. نظریه بولتزمن بر این است که لایمینگ در این  
 بسیار حواله داده بود، این اجزای مختلف تئوری دهنده لایمینگ بسیار، بلکه بر همکنش داشته  
 و تعداد ذرات از گونه های مختلف در هر نقطه می تواند تغییر کند. قوتی که تئوری این اجزا را می ترکیب  
 قرار می گیرند همچنین با بارها بر همکنش دارند. چگونه ترکیب لایمینگ کننده بر روی لایمینگ است. و این ترکیب نیز  
 تحت تأثیر این عناصر تئوری دهنده و البته فوتونها و ماده، ترکیب قرار می گیرد. بنا بر این اگر بخواهیم  
 تئوری توزیع ماده و تابش را به همراه دیگری ها ترکیب کنیم، چارچام نام معادلات تئوری جهت شروع را حل کنیم.  
 یک روش سرد است برای تئوری تمام این اثرات را می بینیم این است که از معادله بولتزمن استفاده کنیم.

شکل اشتراک تئوری نده معادله بولتزمن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{force} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{diff} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$$

$$\frac{Df}{Dt} = C[f] \quad \text{Collision Term}$$

در شرایط هرگونه بر همکنش داریم، یعنی نه ذرات جدیدی خلق می شوند و نه از بین می روند

یعنی  $\frac{Df}{Dt} = 0$   $\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{3n}{a} = 0$  (عبارت را جدولی می کنیم)

در این حالت انبساط عبارت دوم سمت چپ

از طریق شدن مختصات مقدار را در زمینه در حال انبساط نشان دهد.

اجازه دهید ابتدا شکل

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{force} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{diff} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll}$$

را بر سر کنیم. جدولی است را تغییر در تابع توزیع به بی بی بزرگ های خارجی است. جدول دوم است را تغییر تابع توزیع  
 به بی بی فرکانس است و بعداً فرکانس بر خورده است

اگر در نقطه  $t$  تعدادی ذره در مکان  $r$  در حجم  $d^3r$  با اندازه حرکت  $\vec{p}$  در  $d^3p$  باشند.

الکون تصور کنید، ذرات تحت تأثیر  $F$  نیروی خارجی قرار بگیرند پس در زمان  $t + \Delta t$  در این مکان

و اندازه حرکت تغییر یافته، صورت زیر هستند:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \Delta \vec{r} = \vec{r} + \frac{\vec{p} \Delta t}{m}$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + \Delta \vec{p} = \vec{p} + \vec{F} \Delta t$$

در عین حال هر کون بر موزون خواهیم داشت:

$$f(\vec{r} + \frac{\vec{p}}{m} \Delta t, \vec{p} + \vec{F} \Delta t, t + \Delta t) d^3 r d^3 p|_{t+\Delta t} = f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 r d^3 p|_t$$

توجه کنید بر طبق قضیه لیبیل هم قضای نازیب است. حال اگر برخوردی انجام شود خواهیم داشت:

تقسیم طرفین بر  $\Delta t$ ،  $\Delta^3 r$  و  $\Delta^3 p$

$$\Delta N_{Cell} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{Cell} \Delta t \Delta^3 r \Delta^3 p \Rightarrow \frac{Df}{Dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{Cell}$$

از سوی دیگر می توانیم کامل  $f$  برابر است:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial f}{\partial p_y} dp_y + \frac{\partial f}{\partial p_z} dp_z \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{p}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \vec{\nabla} f \cdot \frac{\vec{p}}{m} dt + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \vec{F} dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial p_x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial p_y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial p_z}$$

توجه کنید در عبارت بالا داریم:

پس نهایتاً خواهیم داشت:

$$\frac{Df}{Dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{Cell}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} f + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{Cell}$$

$$\mathcal{L}f = C[f]$$

لعین نهایتاً داریم:

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} + \vec{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$$

لعین  
مملکرت بولترن  
مملکرت لیوویل

عبارة بالا در نسبت به م تعمیم می‌دهد و بعضی حالت‌ها طور قبلاً نوشتیم:

$$\frac{Df(\eta, x(\eta), p(\eta))}{D\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial p^\beta} \frac{\partial p^\beta}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta} = p^\alpha$$

بند: حالات زیرین زده یعنی

$$\frac{\partial p^\alpha}{\partial \eta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha p^\mu p^\beta = 0 \Rightarrow \frac{\partial p^\alpha}{\partial \eta} = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha p^\mu p^\beta$$

$$\frac{Df}{D\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^\beta} = C[f]$$

$$\frac{D}{D\eta} \equiv \frac{\partial}{\partial \eta} + p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta p^\mu p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\beta}$$

Ex: In Homogeneous and Isotropic expanding Universe

$$f(E, t) \rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{Df}{D\eta} = C[f]$$

$$E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^2 \frac{\partial f}{\partial E} = C[f]$$

لعین

الذرات طیف رادر  $g \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$  (حجم فضای فاز) ضرب کنیم و اشتراک میگیریم:

$$\int \frac{\mathcal{L}[f]}{E} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} g_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \left[ \int \frac{\partial f}{\partial t} d^3p - \int \frac{H P^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p \right]$$

$$= \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{C[f]}{E} d^3p$$

$p^2 = E^2 - m^2$

$d^3p = \sqrt{E^2 - m^2} E dE$

اینجا به ایند  
پس بعد

$$\int \frac{H P^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p = \int \frac{H P^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} \sqrt{E^2 - m^2} E dE$$

$$= \int \underbrace{H (E^2 - m^2)^{3/2}}_{\mu} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial E}}_{dv} dE = H (E^2 - m^2)^{3/2} f - \int H \frac{3}{2} 2E (E^2 - m^2)^{1/2} f dE$$

$$= -3H \int f H d^3p$$

همچنین با عبارت  $\rho$  تعریف فضای تعداد یعنی:

$$n_i(t) = \int f_i(\vec{p}, t, T) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} g_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\sqrt{E^2 - m^2} E}{e^{\frac{E - \mu_i}{T}} \pm 1} dE$$

$$\dot{a}^3 \frac{d}{dt} (n_i \dot{a}^3) = \dot{n}_i + 3H n_i = C_i$$

پس نهایتاً خواهیم داشت:

$$C_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{C[f]}{E} d^3p$$

که در آن

در جهش  $i \rightarrow j$  یا  $j \rightarrow i$  با سایر لفظ هاشان می دهد. اگر برعکس  $i \rightarrow j$  یا  $j \rightarrow i$

$$C_i = C_{kl \rightarrow ij} - C_{ij \rightarrow kl}$$

آفت ابودی  $ij \rightarrow kl$  آفت تولید  $kl \rightarrow ij$

راد نظر بگیریم پس

جمله را می توان به صورت زیر نوشت :

$$C_i \equiv \int d^3 p_i \int dE_i \delta_D(E_i^2 - p_i^2 - m_i^2) g_i$$

$$\int g_j d^3 p_j \int dE_j \delta_D(E_j^2 - p_j^2 - m_j^2) \int d^3 p_k \int dE_k \delta_D(E_k^2 - p_k^2 - m_k^2) g_k$$

$$\int g_l d^3 p_l \int dE_l \delta_D(E_l^2 - p_l^2 - m_l^2) \times \frac{1}{(2\pi)^{12}} |M|_{ij \rightarrow kl}^2 \times$$

$$\delta_D(\vec{p}_i + \vec{p}_j - \vec{p}_k - \vec{p}_l) \delta_D(E_i + E_j - E_k - E_l) \times$$

$$\left[ f_k f_l \{1 \pm f_i\} \{1 \pm f_j\} - f_i f_j \{1 \pm f_k\} \{1 \pm f_l\} \right]$$

که در آن  $|M|^2$  آنتی بکشنس،

$$f_k f_l \{1 \pm f_i\} \{1 \pm f_j\}$$

← افعال وجود ذرات K

افعال وجود جایی

خالی در سیستم

علامت (+) ← Bose Enhancement

علامت (-) ← Pauli Blocking

و نهایتاً خواهیم داشت :

$$C_i \equiv (2\pi)^4 \int \delta_D(\vec{p}_i + \vec{p}_j - \vec{p}_k - \vec{p}_l) \delta_D(E_i + E_j - E_k - E_l) \times \frac{g_i d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3} \frac{g_j d^3 p_j}{2E_j (2\pi)^3} \frac{g_k d^3 p_k}{2E_k (2\pi)^3} \frac{g_l d^3 p_l}{2E_l (2\pi)^3}$$

$$\times |M|^2 \left[ f_k f_l (1 \pm f_i) (1 \pm f_j) - f_i f_j (1 \pm f_k) (1 \pm f_l) \right]$$

Ex: Boltzmann Eq for Harmonic oscillator

1D Simple H. OS.

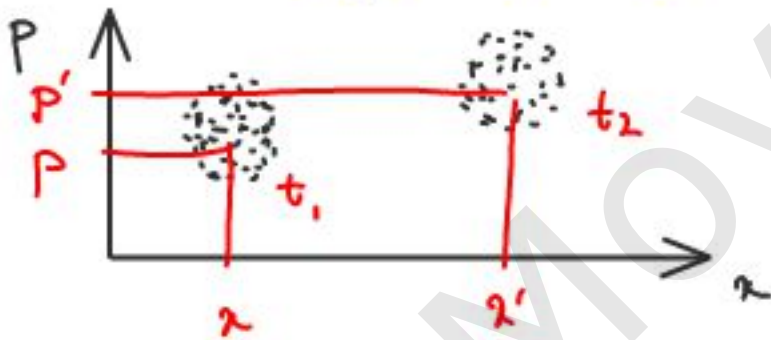
$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

تابع توزیع برابر اینجونی از  $p$  و  $x$  و  $t$  یعنی:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}$$

لذا باید هم برهنگی برابر اینجونی در نظر گرفته ایم پس  $\frac{Df}{Dt} = C[f] = 0$

یعنی طی تحول تعداد نقاط فضای فاز در زمان  $t_1$  در همایی  $(x, p)$  برابر تعداد نقاط فضای فاز در زمان  $t_2$  در همایی  $(x', p')$  است:



برای حل معادله بولتزمن داریم:

$$\frac{dp}{dt} = -kx \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - kx \frac{\partial f}{\partial p}$$

به چپا کفلی اندازیم و از دست می رهند

عقد سریع حرکت می کنند

پس  $f \rightarrow f_{EQ.}(E)$

همچنین با توجه به اینکه می دانیم در حالت تعادل انتظار داریم

$$0 = \frac{\partial f_{EQ.}}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f_{EQ.}}{\partial x} - kx \frac{\partial f_{EQ.}}{\partial p}$$

یعنی در حالت تعادل انتظار داریم که

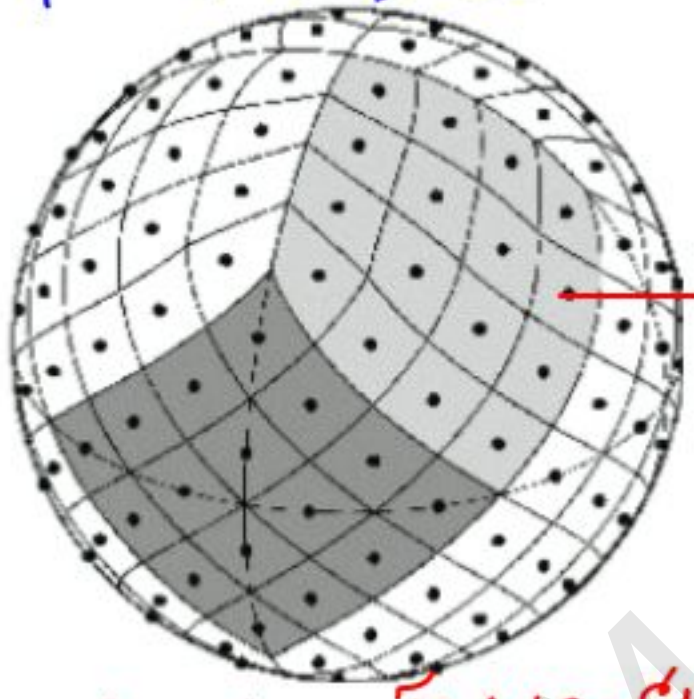
$$0 = \frac{\partial f}{\partial E} \left[ \frac{p}{m} \frac{\partial E}{\partial x} - kx \frac{\partial E}{\partial p} \right] = 0$$

$$f = f(E)_{EQ.}$$

# CMB field

تاکنون کب داده بوترمن سطح شد. اکنون می خواهیم انت و خیز تابش را بررسی سطح آفرینش بر الکتی را بررسی کنیم. به طور معمول مطالعه این میدان تصادفی (توضیح مفاهیم را در چرای گریم میدان تصادفی) در بخش مرتبه صفرم که مربوط به تحول زمینه برابر این میدان خواهد بود و در بخش مرتبه اول و بالاتر که مربوط به اختلالهای آن، داده پیدا می کنند.

اجازه دهید نشان دهم که می الاصول در مطالعه CMB به طور کلی دنبال تعیین چه کمیتی هستیم؟



نقطه دید را در نظر بگیرید:

$$T(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = T(\eta) [1 + \theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta)]$$

انت و خیز تابش

مقدار متوسط دمای CMB در زمان هدی  $\eta$  را نظریه دیدیم مقدار ایزوآن در زمان حال

برابری است!  $T_{CMB}(\eta_0) = (2.7255 \pm 0.0006) K$

می توان  $\theta$  را بر حسب چند جمله ای های لژاندر رابطه دهیم یعنی:

$$\theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(\vec{x}, \eta) Y_{\ell m}(\hat{p})$$

اگر از تبدیل فوریه نیز استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$a_{\ell m}(\vec{x}, \eta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{p}) \theta(\vec{k}, \hat{p}, \eta)$$

به طور کلی می توان از نقطه نظر مدل نویت:

$$\theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = \frac{\Delta T(\vec{x}, \hat{p}, \eta)}{T(\eta)} = \int d^3 x' \int_0^{\eta} d\eta' \sum_i K_i(\vec{x}, \hat{p}, \eta, \eta') S_i(\vec{x}', \eta')$$

تابع گرین که به طور کلی مستقل از شرایط اولیه است

جدید (یا در  $\hat{\eta}$ )  $\beta_i$  که تابع همیشه فونکشن است شامل اطلاعاتی که از شرایط اولیه و مخلوطی

گرفته است در واقع جواب معادلات پوزیترون خواهد بود. لذا این فونکشن اعضای تولیدکننده

انت و غیره را بر روی  $T$  است. (arXiv:1002.3173)

در شرایط خاص خواهیم داشت!

$$K_i = \beta_i \delta_D(\eta' - \eta_{CMB}) \delta_D(\vec{\kappa}' - \hat{n} R_{CMB})$$

یعنی انت و غیره را همراه با نوار گذار کنیم و حفظ کرده CMB از زمینه جدا شده است در آن صورت تابع کرنل به تابع دلتای ریاض خواهد بود. پس:

$$\Theta(\vec{\kappa}, \hat{p}, \eta) = \sum_i \beta_i \delta_D(\vec{\kappa}' = \hat{n} R_{CMB} \text{ و } \eta' = \eta_{CMB})$$

$$a_{em} = \int d\Omega Y_{em}^*(\hat{p}) \Theta(\vec{\kappa}, \hat{p}, \eta)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\vec{\kappa}) 4\pi i^l j_l(k R_{CMB}) Y_{em}^*(\hat{k})$$

$$\Theta(\vec{\kappa}) = \sum_i \beta_i \delta_D(\vec{\kappa}, \eta_{CMB})$$

که در آن

توجه کنید قصد استراحت اینجاست. ابتدا بگویم که دنبال چه کمیتی هستیم. حال می خواهم ضمن بررسی عوامل مختلفی که می تواند باعث انت و غیره باشد زمینه گیری باشد مهم هر کدام را کمی کنیم. البته

در بیان نشان می خواهم داد بنام است. ماهیت تصادفی بودن CMB این رهیافت عملیاتی نیست و باید روش مطالعه را تغییر دهیم. البته! توجه کنید که در این رهیافت بر خواهم گرفت روش جدید امکان پذیر خواهد بود.



مطالعه انت و خیزهای CMB یعنی  $\delta a_{em} \perp 0$ ؛ یعنی؛ وقت حاصل انجام شود. نکته قابل توجه این است که برخی از انت و خیزها ماهیت فیزیکی مستقیم منقش کننده فیزیک حاکم بر کیهان اولیه و CMB نیست. همین انت و خیزها را باید جدا کرد. البته لازم به ذکر است که ملاحظاتی انتاب احتمالات بیژان را نیز لحاظ خواهد شد. به حال برخی از اینخ اثرات؛ تغییر سیستم مختصات از بین خواهد گرفت.

اکنون یک کیهان کلن و هم در نظر بگیریم و می توان داریم صورت زیر نوشت:

$$T(x^\alpha, \hat{p}^i) = T(\eta_0) + \delta T(x^\alpha, \hat{p}^i)$$

که بدان  $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  و  $\hat{p}^i \equiv -\frac{\vec{p}^i}{\sum p_i^2}$  که علامت منفی به این سبب است تا زنگه که جهت از ناظر به جهت در نظر گرفته شود و فوراً از جهت به سمت ناظر حرکت می کنند

اکنون از سیستم  $O$  به سیستم  $O'$  می رویم یعنی  $\vec{x}^\alpha = \vec{x}^\alpha + \xi^\alpha$

انرژی فیزیکی می شود در هر سیستم مختصات یا معادل آن فرکانس آن؛ صورت زیر خواهد بود:

$$\omega = p_\alpha u^\alpha \rightarrow \text{world-velocity}$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{g_{00}}} \rightarrow \text{فرکانس در سیستم همراه همیشه}$$

$$\omega \rightarrow \bar{\omega} = \omega \left( 1 + \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta} \hat{p}^i \right) \quad \text{در سیستم } O' \text{ خواهیم داشت:}$$

با توجه به آنچه در خصوص تحول تابع توزیع ذرات در عیاب برخورد کرده است آردیم می توان نوشت:

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = f\left(\frac{\bar{\omega}}{T}\right)$$

$$\frac{\bar{\omega}}{T} = \frac{\omega}{T} \quad \text{و} \quad f = \frac{2}{e^{w/k} - 1}$$

همچنین می توان نشان داد که  $\delta T \rightarrow \delta \bar{T} = \delta T - T_0 \xi_0 + T_0 \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta} \hat{p}^i$

$$\bar{\delta T} = \underbrace{\delta T}_{\text{monopole}} - T_0 \epsilon_0 + \underbrace{T_0 \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \eta} \hat{p}_i}_{\text{Dipole}}$$

حالا نظریه که فلا حفظ می شود بخش مستقل از جهت تک قطبی نامیده می شود بخش واسه به جهت در قطب نامیده می شود  
 تغییر در سبب ارتعاشات می توان مهم تک قطبی را حذف کرد همچنین می توان در سیستمی قرار گرفت که مهم  
 سرعت در یک راستا را حذف کند پس مهم در قطبی هم حذف می شود پس

$a_{lm}$  برابر  $l=0$  (تک قطبی) و برابر  $l=1$  (دو قطبی) کنار گذاشته می شود

$$\Theta(\hat{p}, \eta) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\hat{p})$$

بین علامه مذکور به انت و غیره های CMB برابر  $l=2$  بر می کشیم.

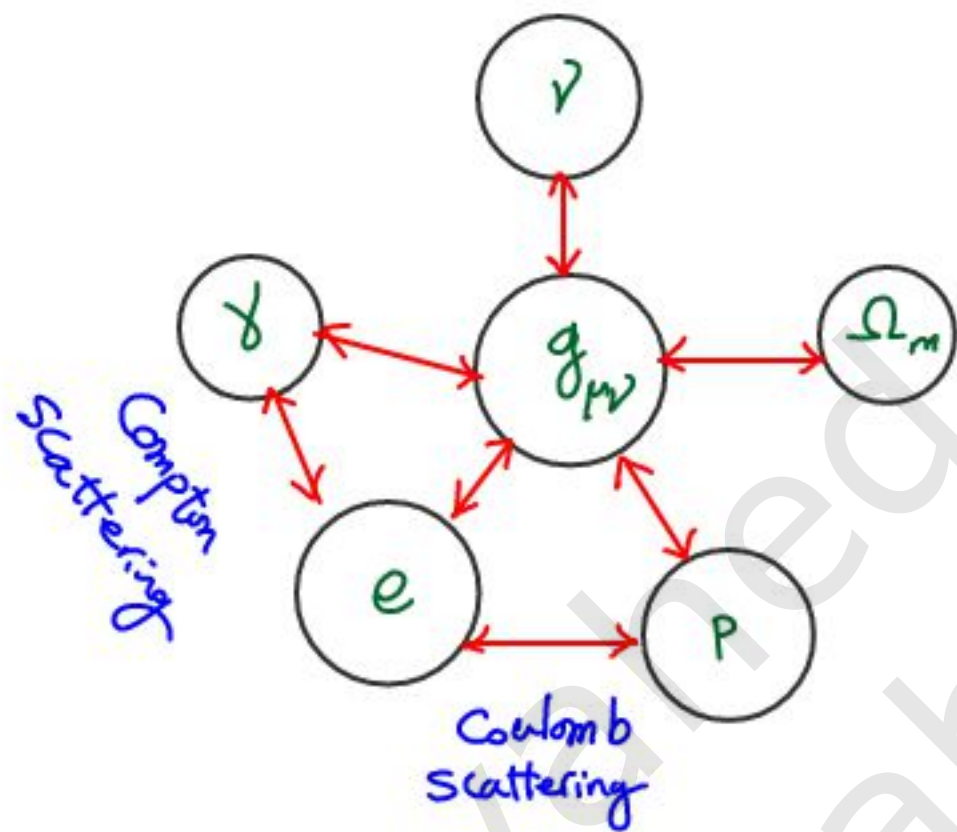
for CMB  $\rightarrow T_0 = (2.7255 \pm 0.0006) \text{ K}$   
 (Planck)

$$\delta T_{\text{dipole}} = 3.488 \text{ mK}$$

dipole

$$v_{\text{dipole}} = 384 \frac{\text{km}}{\text{s}} \pm 78 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

برای مطالعه انت و فنزهای دا بررسی سطح آفرین پرالذی نه تنها با رتس چطای اجزای تشکیل بدهه  
 شاره کوانتی بدهه تحول سراسری تابع توزیع آنا اینز برر کرد. هانظوره قبله نیز گفتیم برهکتشای  
 اسی دران شاره کوانتی بصورت زیر است:



در ادامه قصد داریم معادله بولتزمن را برای  $\gamma$ ،  $e$ ،  $p$ ،  $\Omega_m$  و  $\nu$  به دست آوریم پس!  
 اضافه کردن معادلات میدان نسبت به هم مجموعی از معادلات سلسله مراتبی را تشکیل می دهند  
 که به توجه به شرایط اولیه که قبل از نوسم به دست می آید حل می شوند. در شکل زیر این مجموعی را ملاحظه می کنید.

## Einstein-Boltzmann hierarchy equations

$$\frac{df}{dt} = C[f] \rightarrow$$

$$1) \dot{\Theta} + ik\mu\Theta = -\Phi - ik\mu\Psi - \tau[\Theta_0 - \Theta + \mu v_s - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi]$$

$$2) \dot{\Theta}_p + ik\mu\Theta_p = -\tau[-\Theta_p + \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P}_2(\mu))\Pi]$$

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{p2} + \Theta_{p0}$$

$$3) \dot{\delta} + ikv = -3\Phi$$

$$4) \dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = -ik\Psi$$

$$5) \dot{\delta}_s + ikv_s = -3\Phi$$

$$6) \dot{v}_s + \frac{\dot{a}}{a}v_s = -ik\Psi + \frac{\tau}{R}[v_s + 3i\Theta_1]$$

$$\frac{1}{R} = \frac{4\rho_r^{(0)}}{3\rho_b^{(0)}}$$

$$7) \dot{N} + ik\mu N = -\Phi - ik\mu\Psi$$

$$8) k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}(\Phi - \Psi\frac{\dot{a}}{a}) = 4\pi Ga^2[\rho_{CDM}\delta + \rho_s\delta_s + 4(\rho_r\Theta_0 + \rho_r N_0)]$$

$$9) k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi Ga^2(\rho_r\Theta_2 + \rho_r N_2)$$

Boltzmann equation

(1,2) Photon equations

(3,4) Dark matter

(5,6) Baryon

(7) Neutrino

(8,9) Einstein perturbed equations

## Cosmological Perturbations

به منظور مطالعه کیهان هگند پس از تعیین ترکیب به عنوان سینامیک  
و توجه به معادله میدان اینشتین می توان معادلات FRW یعنی:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$$

در اینجا  $P$  فشار و  $\rho$  چگالی انرژی است. معادله بولتزمن برابر چگالی تعداد ذرات در کیهان  
در حال انبساط بودن به خود و بدون اختلال نیز برابری است:

$$\bar{a}^3 \frac{d}{dt} (n \bar{a}^3) = C = 0 \Rightarrow n \sim \bar{a}^{-3}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + H P \frac{\partial f}{\partial P} = 0$$

در برابر فزونی

و چون  $f$  همان تابع توزیع بوز-اینشتین است پس

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial T} \frac{dT}{dt} = -\frac{P}{T} \frac{dT}{dt} \frac{\partial f}{\partial P}$$

$$0 = \left[ -\frac{P}{T} \frac{dT}{dt} - H P \right] \frac{\partial f}{\partial P} = 0$$

پس

$$\frac{dT}{T} = -\frac{da}{a} \rightarrow T \sim \bar{a}^{-1}$$

نکته ای که بایستی توجه کرد این است که کیهان در مقیاسهای کوچک نه تنها هگند هگند نیست بلکه  
بخارهایی ملاحظه می شود که به شدت غده خطن هستند و تابان چگالی آنها همین بزرگی است.

مطالعه چگونگی تحول آنرا با در نظر گرفتن معادلات

Mass - Conservation

Momentum - Conservation

Gravitational instability

Entropy - Conservation

Equation of state

بررسی مواردی که جزو بحث تشکیل ساختارها می آید. ردیابی این انت و غیرها و تاریخچه آنرا بررسی تا پیش زمینه کوانتی وجود دارد. با توجه به اینکه در دوران آفرینش پراکندگی هموزانت و غیرها فرصت تحول به اندازه کافی نداشته اند که آنها را به سمت غیرخطی شدن پیش ببرند بنابراین ملاحظه می کنیم که  $\left. \frac{\delta T}{T} \right|_{CMB} \sim 10^{-5}$  است. اینجاست و غیرها با گذشت زمان به دلیل نابرابری های گرانشی شروع به رشد می کنند تا اینکه تباین چگالی آنها غیر نزرده شود و ساختارهای غیرخطی شکل گیرند.

اینکه بدر این انت و غیرها که ادیم از کجا آمده است بحث است مناقشه ای نیست. ولی مدلهای نورسی و ریدرولا برای پاسخ، همین سؤالاتی مطرح شده اند. نوع این انت و غیرها و ماهیت آنها در کتب نورسی مطرح می شود.

در مقیاس های بزرگ مثلاً در حدود رافق ریزتر از آن و همچنین بزرگ تره های لینی مانند فوتونها و فوتونوها رهیافت اختلافی نیوتنی پاسخ گویند و با همین رهیافت نسبت عام را در نظر بگیریم. در اینجا قصد داریم که تئوری اختلافات کوانتی را به تفصیل مطالعه کنیم ولی به حد کفایت به آن می پردازیم.

اینها اصلی این است که اختلافات کوانتی حول ترکیب کلن هستند (ترکیب زمینه) در نظر بگیریم

دریغ معادلات میدان اینشتین، اختلالات مرکب، باره جفت می شود.

$$g_{\mu\nu}(t, \bar{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \bar{x}) \quad , \quad G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu}(t, \bar{x}) = \bar{T}_{\mu\nu}(t) + \delta T_{\mu\nu}(t, \bar{x})$$

با توجه به شکل انوی مرکب، اختلالات ربه ۳ دسته لنگار، بردار و انور تقسیم بندی می کنیم:

$$ds^2 = a^2(\eta) [g_{00} d\eta^2 + g_{0i} d\eta dx^i + g_{ij} dx^i dx^j]$$

که در آن

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= \bar{g}_{00} + \delta g_{00} \\ g_{0i} &= \bar{g}_{0i} + \delta g_{0i} \\ g_{ij} &= \bar{g}_{ij} + \delta g_{ij} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} g_{00} &= -(1+2\phi) \\ g_{0i} &= \bar{g}_{0i} + B_{0i} + S_i \\ g_{ij} &= \bar{g}_{ij} + 2\phi \delta_{ij} + 2E_{0ij} + F_{ij} + F_{ji} \\ &\quad + h_{ij} \end{aligned}$$

$B_{0i} \rightarrow$  Curl-less

که در آن

$S_i \rightarrow$  Divergence-less

$2E_{0ij} \rightarrow$  Curl-less

$F_{ij} + F_{ji} \rightarrow$  Divergence-less

Scalar-Type:  $\{ \psi, B, \phi, E \}$  (4) ۴

Vector-Type:  $\{ S_i, F_i \}$  (6)

Tensor-Type:  $\{ h_{ij} \}$  (6) Symmetric Tensor

یعنی تعداد (16) عضو دارد. بدلیل قیدهای زیر

$$h_{ii}^i = 0 \quad \text{و} \quad h_{z,ic}^i = 0 \quad \Rightarrow \quad (4) \text{ Constraints}$$

$$S_{zi} = F_{zii} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2) \text{ Constraint}$$

پس  $16 - 6 = 10 \rightarrow$  Degree-of-freedom

پس به بیابید برای مثال نوشت:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1+2\phi) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right]$$

$$B_i = \partial_i B + \hat{B}_i$$

$$h_{ij} = 2\phi \delta_{ij} + 2\partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} E + 2\partial_{(i} \hat{E}_{j)} + 2\hat{E}_{ij}$$

$$\partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} E \equiv \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E$$

$$\partial_{(i} \hat{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i \hat{E}_j + \partial_j \hat{E}_i)$$

$$\partial^i \hat{E}_i = 0 \quad \partial^i \hat{E}_{ij} = 0 \quad \hat{E}_i^i = 0$$

قبل از کشیدن یک دایره بهم بگویند پدیده اشاره کنیم. رهیافت نیوتن اختلافات برابر رژیم  $h_{ij}$  و  $\delta_{ij}$  و اشاره های غیرنسبتی کاربرد دارد این در حالی است که رهیافت نسبی فضای بازمی را برابر توصیف دارد. مقایسه نتایج به دست آمده از این رهیافت مانند آنچه در رهیافت نیوتن به دست می آید تفاوت نیست. یکی از مهم ترین مسائل در این چهارچوب آزادی های است که از انتخاب دستگاه ها کمالات به دست می آید. در واقع تا آنجا آزادی عمل داریم که در صورت حذف اختلافها چه چیز بستیم برهن اختلاف بازرورد. به طوری که در حضور نا همگنی ها، همگرایی ها

آزادی انتخاب سیم های مختصات یا همان آزادی پیمانه ای باعث می شود در برخی مواقع اختلالی  
 بهت آیدیم که نشان دهنده نداشتن نداشتن. فقط منعکس کننده خصوصیات رستگاه است که انتخاب کرده ایم.

فرض کنید یک کوانتوم در جهت  $\vec{r}$  داریم پس  $\phi(\vec{r}, t) = \phi(t)$

حال اگر سیم مختصات  $t \rightarrow t' = t + \delta t(\vec{r}, t)$  پس  $\phi(t', \vec{r}) = \phi(t(\vec{r}, t'))$

$$\phi(t) = \phi(t' - \delta t) = \phi(t') - \frac{\delta \phi}{\delta t} \delta t$$

$$= \underbrace{\phi(t')} + \underbrace{\delta \phi(\vec{r}, t')}$$

Background linear Perturbation

یعنی بخش اختلال ماهیت فیزیکی ندارد. فقط به رستگاه انتخاب شده مربوط می شود. اکنون در حالت  
 کلی برای اینکه تئوری قایل شویم بین اختلالات واقعی و غیر واقعی بخش اطلاعات کامل از میدان ماده و اختلالات  
 آن در دست باشد و همچنین اطلاعات کامل از ترکیب و اختلالات آن نیز مشخص باشد.

برای این منظور اساساً رد کار انجام می شود: ① ثابت کردن پیمانه و استفاده از معادلات خود زگار  
 ② تعریف کمیت های پیمانه ناورد که تحت تبدیل مختصات بدون تغییر باقی بماند. یافتن کمیت های  
 پیمانه ناوردا به طور مستقل برای بخش ترکیب و بخش ناورانزیری اندازه حرکت انجام می گیریم پس در نظریه گریم:

$$\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

حال تحت تبدیل مختصات به عبارت فوق نگاه می کنیم یعنی تحت تبدیل

$$\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}'_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta \bar{g}_{\mu\nu}$$

این اکنون بر می گزینیم که  $\delta \bar{g}_{\mu\nu}$  چه ارتباطی با  $\delta g_{\mu\nu}$  دارد؟ همین کار را برابر

$$\bar{G}_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}$$



$$G_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{G}_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta \tilde{G}_{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} \bar{T}_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu} \rightarrow \bar{T}_{\mu\nu} = \bar{\bar{T}}_{\mu\nu} + \delta \bar{T}_{\mu\nu} \end{cases}$$

انجام می دهیم

$$\Phi \equiv \phi + \frac{a'}{a} (B - E')$$

اختلالات انکاری پیرامون ناوردی عبارتند از:

$$\Psi = \psi - \frac{1}{a} [a(B - E)']$$

با توجه به اینکه در اینجا هدفم مطالعه CMB است در بخش غالب اختلالات انکاری نقش بازی می کنند

زیرا تنها بخشی که با ماده غنیست می شود همین است، مهم ترین بخش در تعیین اختلالات فوتونها همین بخش است

بخشهای غیرقطبی انکاری در پیرامون طولی را نیوتونی (صورت) در پیرامون نیوتنی  $B = E = 0$

پس ترکیب فقط در اثر اختلالات انکاری در پیرامون صورت زیر خواهد بود

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\psi) d\eta^2 + (1 + 2\Phi) dx_i^2 \right]$$

یعنی در تقریب میدان ضعیف  $\psi$  نقش پتانسیل نیوتنی را بازی می کند و  $\Phi$  اختلال در بخش قضایی ترکیب است. به بیان دیگر اختلال در آفتاب انبساط لیان را نشان می دهد. رباعیات: کمیت های پیرامون ناوردی داریم

$$\left. \begin{aligned} \Psi &\equiv \psi \\ \Phi &\equiv -\phi \end{aligned} \right\} \text{Bardeen's Potential (1980)}$$

حال اگر به کابل در نظر بگیریم همه (ii) حالات میدان مغزوب عبارت زیر خواهد شد:

$$\frac{2}{3} (k/a)^2 (-\phi - \psi) = 8\pi G \sum_i (\bar{\rho}_i + \bar{P}_i)$$

Shear و درغیاب برش  $\psi = -\phi$  خواهد بود یعنی قطب با یک کمیت اختلال توصیف می شود

همچنین توجه کنید همه  $\delta$  عبارات میدان مغزیه عبارت زیری شود:

$$\delta G_0^0 = 8\pi G \delta T_0^0$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{a^2} \left[ -k\phi + 3\frac{a'}{a} \left( -\phi' + \frac{a'}{a} \psi \right) \right] = -8\pi G \sum_i \rho_i \delta_i$$

داخل انتی یعنی  $H \gg k/a$  یعنی  $\lambda = \frac{2\pi}{k} a$  ,  $\lambda \ll d_L$

$$\rightarrow \lambda \ll \frac{1}{H} \Rightarrow k/a \gg H \rightarrow k \gg aH = a'/a$$

$$+\frac{k^2}{a^2} \phi = 4\pi G \delta \rho_{total}$$

این معادله (۵۵) برابری است!

که همان معادله پوانسون است زیرا اینکه انتظار داشتیم، جایی که  $\phi$  مقدار  $\psi$  را بیان می‌نویسد در تقویم میدان ضعیف است نه اینکه البته در داخل انتی می‌تران از  $\psi = 0$  پس  $\phi = \psi$  خواهد بود.

\* توصیف در فضا دلداس کتاب Dodelson

1302.4640 در حاله در مقاله

$$ds^2 = [-(1+2\phi)dt^2 + a^2(t)[1-2\psi]dx^i dx^j \delta_{ij}]$$

$$ds^2 = [-(1+2\psi)dt^2 + a^2(t)(1+2\phi)dx^i dx^j \delta_{ij}]$$

همچنین  $\psi(\mathbf{x}, t)$  در فضا دلداس Dodelson

در مقاله 1302.4640  $\psi(\mathbf{x}, t)$  است. من در اینجا فضا دلداس Dodelson را دنبال

می‌کنم. بر حسب پتانسیل‌ها که بارین را  $\psi = -\Phi_B$  و  $\psi = \Phi_B$  و حتی در پلانک نیز هستیم

Boltzmann Equation for photons

دریم به ماکرولترمن به صورت  $L[f] = C[f]$  است

در دنیا برای ذرات بدون جرم یعنی فوتونها، ماده بوترمن را بررسی کنیم. مرتبه زمينه را بصورت

در نظريه گریم. همانطور که ملاحظه شد مرتبه زمينه ممکن است به زمان وابسته بود و وابسته به جهت مکانی است.  
 $g_{\mu\nu} = (-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t))$

در حضور اختلالات به این نوشت  
 $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$   
 $= \bar{g}_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}$

که در آن  $\delta g_{\mu\nu}$  اختلالی که شامل بخش اسکالر، بخش برداری و البته بخش تانسوری است. زمينه کیهان

دریم:  $\left. \begin{array}{l} \text{Homogeneous} \\ \text{and} \\ \text{Isotropic} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(t) \rightarrow g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \vec{x})$   
 $\bar{T}_{\mu\nu}(t) \rightarrow T_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \bar{T}_{\mu\nu}(t) + \delta T_{\mu\nu}(t, \vec{x})$

توضیحات مفصل در حضور اختلالات درسته نبدي. مایه های کیهانی کول آنرا در بخش مربوط به تشکیل اختلالات است.  
 در دنیا بر روی اهمیت اختلالات اسکالر در مرتبه اول خود را محدود به  $\phi$  می کنیم که حال پتانسیل های

(8) Bardeen میوه میزنند هستند.

پس در یک مختل شده با احتساب حضور فقط اختلالات اسکالر در پهنه نیوتنی!  
 Longitudinal Gauge

$g_{00}(t, \vec{x}) = -[1 + 2\phi(t, \vec{x})]$   
 $g_{0i}(t, \vec{x}) = 0$   
 $g_{ij}(t, \vec{x}) = a^2(t) \delta_{ij} [1 + 2\phi(t, \vec{x})]$

که در واقع  $\phi$  مترادف با یک پتانسیل نیوتنی است.  $\phi$  نیز اختلال در انحنای فضایی است. یعنی اختلال در  
 حال معیاس برصفت است:  $a^2(t) [1 + 2\phi(t, \vec{x})] \rightarrow a^2(t)$

(یادآوری: وقتی انبساطناشد یعنی  $a=1$  در آن صورت تغییر مختل شده ذره بین میدان لانه میفت)

توجه کنید چون در زمان مورد علاقه برای بررسی هم اختلافاتی داریم که باید در این مورد به دقت نظر کنیم  
 قبل از اینکه وارد هم چند نکته در خصوص شکل ترکیب که انتخاب کرده ایم مطرح می کنیم. همچنین ما نظریه گنگه  
 بعضی از در خصوص اختلافات در تکیه ساختار است ولی در اینجا چند نکته از سئو اهمیت اختلافات در  
 بازیافت رفتن در اینها CMB مطرح می کنیم.

۱۱ به طور کلی اختلافات ترکیب در منحنی انکساری، کسب برداری، دینامیک تانوری  
 بسیاری از مدل های کیهانشناسی هستند بخش اختلافات را به حساب می آورند. برای مثال توهم اختلاف های تانوری  
 یا در تئوری کسب، در حالی که توافق توپولوژیکی مغز به تولید اختلافات برداری نزدیک می شوند. اما در اینجا  
 محدودیت بر اختلاف های انکساری تاکید می کنیم. به این دلیل که تنها بخشی که ما به حقیقت می نرسد و البته مهم ترین  
 بخشی که با اختلافات فوتمی حقیقت می شود دینامیک است.

۱۲ نکته دوم اینکه انتخاب  $\vec{E}$  نوشته شده در صفحه قبل رابطه انتخاب بیانه است. به سبب دینامیک نگاه  
 بر این هم آگاهی بیانه این رژیم به آنچه که در این رژیم، معنای طریح می شود است. در اینجا بیانه برداری  
 $A_\mu$  رشتن آن به من جمله اصطلاحات ممکن در خصوص  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  است. از آنجا که میدان های فیزیکی  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$   
 با هم اندازه گیری می کنند پس در واقع درجه آزادی در تقسیم شکل  $A_\mu$  وجود دارد.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\xi \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\xi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\nabla}\xi}{\partial t} = \vec{E}$$

حقه از نظر اختلافات انکساری در تئوری ما هم تعداد درجه های آزادی داریم. ولی با لیدر ایندیکس فیزیکی  
 با این محدودیت به نسبت به انتخاب بیانه نابرابری می توانیم انتخاب کرده است. با آنچه که نوشتیم متفاوت است  
 به طور کلی جواب های فیزیکی با آنچه که در اینجا به دست می آید یکسان است. خاطرات آن می کنیم بیانه ای که

در اینجا انتخاب شده اصطلاحاً *Conformal Newtonian Gauge* نامیده می شود.

از نقطه نظر تاریخی می‌توان گفت که در سال ۱۹۴۶ پیمان هگزانه

توسط Lifshitz برای برآورد اختلاف‌های لیزر مورد استفاده است. اما این روش پیمایش‌های دایره‌ای را  
کند، تکنیکی در سیستم مختصات راداری می‌شود و هم‌اکنون در هاک عجیب و غریب پیمان‌های ظاهر شوند.

نمایان بعد از آن که در سنجی توسط Bardeen (۱۹۸۵) و Sasaki (۱۹۸۶) انجام شد که این مشکلات را

بر طرف گذارد یعنی از هم‌گین روش‌ها فوگت‌هاک پیمان نامور را بود. همچنین راه دیگری برای حل این موضوع

استفاده از پیمان‌های راداری است. در دهه ۹۰ پیمان دیگری به نام پیمان نیوتنی یا طولی موندگرس

Ma and Bertschinger, A.J. 455 (۱۹۹۵)

به طور خاص این پیمان برای برآورد اختلاف‌های اسکالری بسیار مناسب است که در معایب با آنچه به نام نیوتنی‌های

Bardeen مورد بحث در مطالب متقی تفاوت ندارد.

## Initial Conditions

به طور کلی اینج صفت با جزئیات در بحث نوسان و بیان اولیه مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. اما من در اینجا نکات مورد نظر برابر دام کار را شرح می کنم.

قبل از اینکه این موضوع را شرح کنم به مفهوم و رای افق Super-Horizon و زیر افق Sub-Horizon می پردازم. این موضوع از آن جهت مهم است که نواحی مختلف با اندازه های مختلف در مقایسه با افق متفاوت متغیرات متغیر شده در نتیجه اثرات متفاوتی خواهد داشت. پس تعریف می کنیم:

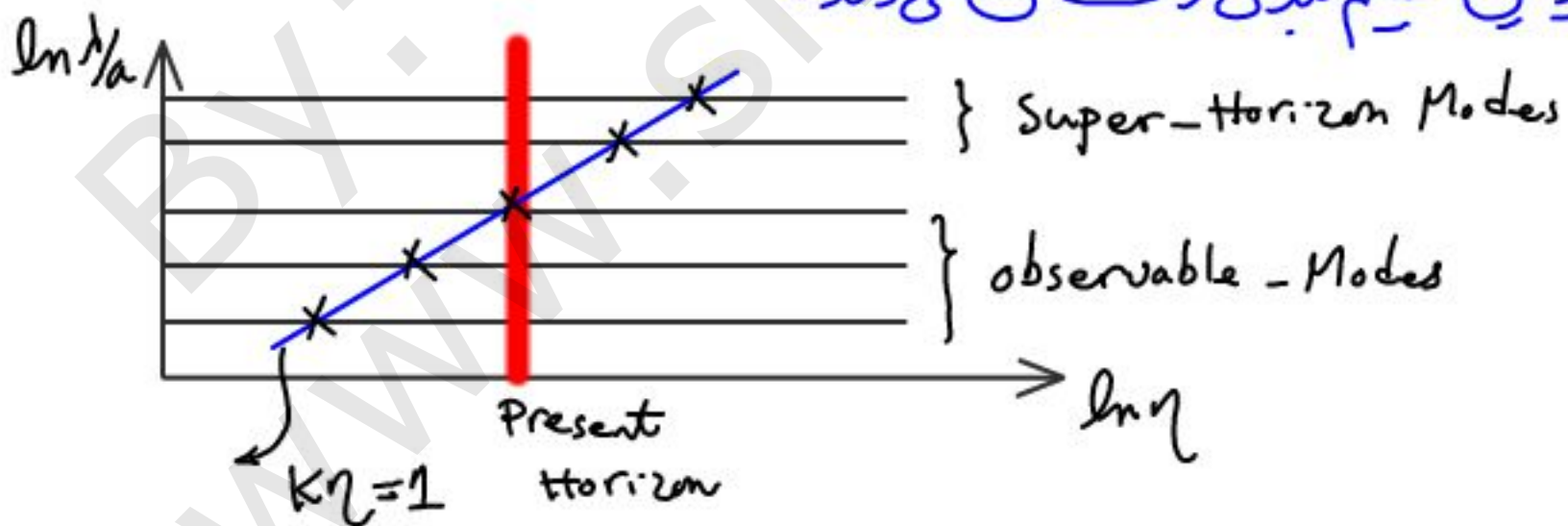
$$\lambda = \frac{2\pi a}{k} \quad \text{و} \quad d_H = H^{-1} \sim t$$

Super-Horizon  $\lambda \gg d_H \rightarrow \frac{2\pi a}{k} \gg t \rightarrow k\eta \ll 1$   $\leftarrow$   $\eta$   $\ll 1$

Sub-Horizon  $\lambda \ll d_H \rightarrow \frac{2\pi a}{k} \ll t \rightarrow k\eta \gg 1$   $\leftarrow$   $\eta$   $\gg 1$

و وقتی  $k\eta = 1$  یعنی زمان قطع افق است و Horizon-crossing نامیده می شود

فصل زیر این تقسیم بندی را نشان می دهد:



اختلافات اولیه انواع مختلف دارند که در نظریه ها ک مختلف قوی نمونه:

- اختلافات بی دردی

- اختلافات آنتروپی

کین از فزائیرترین مدارها بر اختلالات اولیه در تروگرنتس، نسبت به بونج آنزویں و وجود تباریح

هیکالی فمتت در نقاط فمتت نفا.

در این رهحافت به طور خلاصه می توان در تروگرنتس که در کیهان اولیه نواحی متعلق داریم که هیکالی ماده در آن نواحی مکیواحت است. به بیانی دیگر فرض می شود که ترکیب مواد درون صیه مکیان است و فقط مقدارشان از یک صیه به صیه دیگر فرق می کند پس از آنجا که درون صیه مکیان  $H \propto \rho^2$  پس تغییر در مقدار  $\rho$  یعنی تغییر در  $a$  درون صیه

پس می توان نوشت:

$$\begin{cases} \rho_i(\eta, \vec{r}) = \bar{\rho}_i(\eta + \delta\eta) = \bar{\rho}_i(\eta) + \bar{\rho}'_i(\eta) \delta\eta(\vec{r}) \\ P_i(\eta, \vec{r}) = \bar{P}_i(\eta + \delta\eta) = \bar{P}_i(\eta) + \bar{P}'_i(\eta) \delta\eta(\vec{r}) \end{cases}$$

$$\bar{\rho}'_i = -3 \frac{a'}{a} (\bar{\rho}_i + \bar{P}_i)$$

با عنایت به رابطه پیوستگی یعنی

خواهیم داشت:

$$\forall_i \frac{\delta \rho_i}{\bar{\rho}_i + \bar{P}_i} = -3 \frac{a'}{a} \frac{\delta \rho_i}{\bar{\rho}'_i} = -3 \frac{a'}{a} \delta \eta(\vec{r})$$

مشکل لذانه در این است

$$\forall_{i,j} \frac{\delta \rho_i}{\bar{\rho}_i + \bar{P}_i} = \frac{\delta \rho_j}{\bar{\rho}_j + \bar{P}_j}$$

یعنی

به بیانی دیگر با دانش انت در زیر مربوط به نوع (i) می توان انت و نیز مربوط به نوع (j) را یافت. همچنین توجه کنید که

$$\bar{P}_i(\eta + \delta\eta) - \bar{P}_i(\eta) = \bar{P}'_i \delta\eta$$

$$\delta P_i = \bar{P}'_i \delta\eta$$

$$\delta \rho_i = \bar{\rho}'_i \delta\eta \Rightarrow \delta\eta = \frac{\delta \rho_i}{\bar{\rho}'_i}$$



$$\begin{aligned} \delta P_i &= \bar{P}'_i \frac{\delta \rho_i}{\bar{\rho}'_i} \\ &= \frac{\bar{P}'_i}{\bar{\rho}'_i} \delta \rho_i \\ &= \nu_s^2 \delta \rho_i \end{aligned}$$

حال اگر رابطه بهت آمده در بخش قبل را با رابطه اصلی تغییرات فشار که از ترمودینامیک  
تجزیه می‌کند مقایسه کنیم خواهیم داشت:

$$\delta P_i = v_s^2 \delta \rho_i + \sigma \delta \kappa \quad \Rightarrow \quad \delta \kappa = 0 \text{ for } \sigma \neq 0$$

shear

→ آنچه ما بهت می‌خواهیم  $\delta P_i = v_s^2 \delta \rho_i + 0$

همین دلیل است که افت ویز داخلی در درجه صید می‌شود. یعنی برای نوع اختلالات  
داریم:

$$\delta_b = \frac{\delta \rho_b}{\bar{\rho}_b} = \delta_{CDM} = \frac{\delta \rho_{CDM}}{\bar{\rho}_{CDM}} = \frac{3}{4} \delta_\gamma = \frac{3}{4} \delta_\gamma$$

Adiabatic initial conditions

الکون تو کم کنید چه (00) معادلات اینشتین با در نظر گرفتن پیوستگی نیوتنی معبره عبارت زیر خواهد شد

$$\delta G_{00} = 8\pi G \delta T_{00} \rightarrow -2\psi = 2\phi = \delta_\gamma = cts$$

برای  $k \ll k_H$ . یعنی اختلال بی درجه در پیوستگی نیوتنی بزرگ است و فیزیک بزرگتر از آن

است، تب بزرگ اختلال را به دنبال خواهد داشت.  $Gorbando \leftarrow \delta^2$

همین نتایج برابر لبان ماده غایب هم بهت می‌کند یعنی:

$$-2\psi = 2\phi = \delta_{tot}$$

$$\delta_{tot} \sim \delta_b = \delta_{CDM} = \frac{3}{4} \delta_\gamma$$

نیاز برای تا اینها تمهید شده طیف اختلالات اولیه در دوران به اصطلاح نوسم به صورت دانه  
افت و فیزیک قرین یعنی  $\Phi_k^i$  در مقیاس بزرگتر از آن و در دوران تابش غایب در نظر گرفته  
می‌شود. پس می‌توان  $\Phi_k^f = T_r \Phi_k^i$  نوشت که در آن  $\Phi_k^f$  افت و فیزیک



نہایت از افت و فزہاکی لولیم  
ایڈیٹ و رابع اشغال کے رہاں ماریات  
مدیاں انیشین ہستند .

BY: Movahhed  
www.smovahhed.ir

قبل از ایند با توجه به اختلافات مطرح شده و شرایط ادلیه به طور خلاصه به توصیف آنها  
 پرداختیم معادلات بولتزمن را برای اجزای مختلف تشکیل دهند به سادگی کیوانی در درون  
 واجتیدی و سطح آفرینج پراکندگی محل کنیم نگاه به مفهوم  $\mu$  و  $\phi$  که به عنوان اختلافات  
 اسکالی ترکیب موزنی شده می اندازیم

برای فورته داریم

$$x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 = 0$$

به توجه به شکل  $g_{\mu\nu}$  مختل شد داریم:

$$0 = p^2 = -(1+2\mu)(p^0)^2 + p^2 = 0$$

یعنی نقطه کنونی فضای

$$p^2 \equiv g_{ij} p^i p^j$$

پس

$$p^{0^2} (1+2\mu) = p^2$$

$$p^0 = \frac{p}{\sqrt{1+2\mu}} = p(1-\mu)$$

توجه نباید بگرفت چاه پائین  $\mu < 0$  پس  $p = \frac{E}{(1-\mu)}$  و  $1-\mu > 0$   
 یعنی انرژی از دست می دهد و انتقال به سرخ پیدای کند.

حال توجه کنید به معادله بولتزمن می

$$C[f] = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{dp^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt}$$

که  $\hat{p}^i$  بردارکیست. در مرتبه صفرم تابع توزیع BE فترن  $f = \frac{g_i}{e^{-E/T} - 1}$   
 و فقط  $\hat{p}^i$  استبردارند. هت فورته این

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{dp^i}{dt}$$

و به یکبارت  $\frac{dx^i}{dt}$  و  $\frac{dp^i}{dt}$  را تعیین کنیم.

البتہ: غائب ہونے لگیں

$$\frac{D}{D\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} + P^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - T_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$$

متران سیکھا جا رہا ہے اور اس وقت ویں دراپنا باوجود بہ اعداد آرزو ہے، فیزیات ہوتے  
سندہ راہوں کی کہیں۔

پہلے  $\frac{dx^i}{dt}$  اور  $\frac{dp^i}{dt}$  کے حالات پر دراپنا فوٹن دراپنا ہوتے ہیں

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} = -T_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$$

$$p^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad , \quad p^\alpha = p(1-\gamma)$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} = \frac{dp^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = -T_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$$

$$= \frac{d}{dt} (p(1-\gamma)) p(1-\gamma) = -T_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$$

$$= \frac{d}{dt} [p(1-\gamma)] = - \frac{T_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}{p(1-\gamma)}$$

$$= (1-\gamma) \frac{dp}{dt} - p \frac{d\gamma}{dt} = - \frac{T_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}{p} (1+\gamma)$$

توجہ کیجئے: دیکھ لیتے ہیں  $\frac{dp}{dt}$  کی صورت

$$\frac{dp}{dt} = (1+\gamma) p \frac{d\gamma}{dt} - \frac{T_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}{p} (1+2\gamma)$$

$$\frac{dp}{dt} = (1+\gamma) p \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \right] - \frac{T_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}{p} (1+2\gamma)$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{p^i}{p^\alpha}$$

توجہ کیجئے: دیکھ لیتے ہیں  $\frac{dx^i}{dt}$  کی صورت

درین بخش خواهیم عبارت  $\frac{p^i}{p^0}$  را، از نویسی کنیم:

$$p^i = C \hat{p}^i$$

$$p^2 = g_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j c^2$$

$$= a^2 (1+2\phi) \delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j c^2$$

$$= a^2 (1+2\phi) c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{p^2}{a^2 (1+2\phi)}$$

یعنی

$$p^i = \frac{p}{a(1+2\phi)^{1/2}} \hat{p}^i$$

$$p^i = \frac{p \hat{p}^i (1-\phi)}{a}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dx^1} \frac{dx^1}{dt} = \frac{p^i}{p^0} = \frac{p \hat{p}^i (1-\phi)}{a} \cdot \frac{1}{(1+2\phi)^{1/2}}$$

$$= \frac{\hat{p}^i}{a} (1-\phi) (1+2\phi)^{1/2}$$

پس کمیت

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\hat{p}^i}{a} (1+\psi - \phi)$$

$$\psi = -\phi \text{ for } \sigma = 0$$

رابطه ای که خطای بالا،  $\psi$  یعنی تیرا نیل گرایی متغیر است، در  $(\phi)$  است. حرکت که کند سرخس که می برد، کمیت  $(1+\psi - \phi)$  نیز وقتی فوتون رزص فراچخال

پس

$$\frac{d\phi}{dt} = (1+\psi) \rho \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right] - \frac{T_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta}{p} (1+2\psi)$$

کارایی این معین جدا فرست را  $\rho$  است:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} [g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}]$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{p^\alpha p^\beta}{p} = \frac{g^{\nu\sigma}}{2} \left[ 2 \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right] \frac{p^\alpha p^\beta}{p}$$

$$g_{\nu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} (1+2\phi)$$

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta}$$

$$g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\nu \rightarrow g^{\nu\beta} = \frac{\delta_\alpha^\nu}{g_{\alpha\beta}}$$

$$g^{\nu\sigma} = \frac{\delta_\beta^\sigma}{g_{\nu\beta}} \Rightarrow g^{00} = \frac{1}{g_{00}} \quad \text{یعنی}$$

$$= -\frac{1}{1+2\phi} = -(1-2\phi)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{p^\alpha p^\beta}{p} = \frac{-1+2\phi}{2} \left[ 2 \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} \right] \frac{p^\alpha p^\beta}{p} \quad \text{پس}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \text{نقطه‌بازایی} \alpha=0 \text{ تغییر نمی‌کند} \Rightarrow \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = -\frac{2\partial\phi}{\partial x^\beta}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{p^\alpha p^\beta}{p} = -\frac{\partial g_{00}}{\partial t} \frac{p^0 p^0}{p} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \frac{p^i p^j}{p}$$

$$= -\frac{2\partial\phi}{\partial t} p - a^2 \delta_{ij} \left[ 2 \frac{\partial\phi}{\partial t} + 2H(1+2\phi) \right] \frac{p^i p^j}{p}$$

$$\text{رابطه} \quad p^i = p \hat{p}^i \frac{1-\phi}{a} \Rightarrow p^i p^j = \delta_{ij} \frac{p^2 (1-\phi)^2}{a^2}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{p^\alpha p^\beta}{p} = \frac{-1+2\phi}{2} \left[ -4 \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} p^\beta + 2p \frac{\partial\phi}{\partial t} - p \left\{ 2 \frac{\partial\phi}{\partial t} + 2H(1+2\phi) \right\} (1-2\phi) \right]$$

توجه کنید در تمام عبارتهای بالا، مرتبه لابل احتمالاً ندهد داشته‌ام

ہیں

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\circ} \frac{p^{\alpha} p^{\beta}}{p} = \frac{-1+2\phi}{2} \left[ -4 \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} p + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{p \hat{p}^i}{a} + 2p \frac{\partial \phi}{\partial t} - p \left\{ 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2H \right\} \right) \right]$$

$$= \{-1+2\phi\} \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial t} p - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{p \hat{p}^i}{a} - p \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + H \right\} \right]$$

اگنڈا کے بارے میں،  $\frac{dp}{dt}$  کے تعلق میں

$$\frac{dp}{dt} = p \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right\} - \frac{\partial \phi}{\partial t} p - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{p \hat{p}^i}{a} - p \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + H \right\}$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = -H - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

جبکہ اول سمت راست معادہ بالا = از دست دادن اندازہ وقت، بسبب انبساط کیونکہ

جبکہ دوم سمت راست معادہ بالا، فوٹون درجہ پیمائش محقق ٹھونڈے لٹری از دست میں دے

یعنی  $\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \rangle$  و  $\phi_{\lambda}$

جبکہ سوم سمت راست معادہ بالا: فوٹون کی کہ یوں چاہ میں رو رہیں  $\langle \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \hat{p}^i \rangle$  یعنی

انتقال بہ آبی دے۔ وقتیں کہ از چاہ بیرون میں آید رہیں

$\langle \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \hat{p}^i \rangle$  میں لٹری از دست میں دے و انتقال بسبب پیدا کی گند

اگنڈا کے بارے میں معادہ بولٹزمن برابر فوٹون نو بسبب یعنی

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - p \frac{\partial f}{\partial p} \left[ H + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right]$$

Gravity

Expansion

Continuity and Euler  
Eqs.

در مرتبه صفرم خواهیم داشت:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - H p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = 0 \Rightarrow T \propto a^{-1}$$

در مرتبه اول خواهیم داشت:

$$f(\vec{n}, \hat{p}, p, t) = \left[ \exp \left\{ \frac{p}{T(t)[1+\theta]} \right\} \right]^{-1}$$

$$C[f] = \frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right]$$

دائرختن مربوط به  $C[f]$  را پراگندگی کاپیتون در نظر میگیریم یعنی

$$C[f] = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} n_e \sigma_T \left[ \theta_0 - \theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot \mathbf{v}_0 \right]$$

که بدان

$$\text{Mono-pole} \leftarrow \theta_0(\vec{n}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \theta(\hat{p}, \vec{n}, t)$$

برای حالت همبستگی قوی tight coupling regime یعنی  $n_e \sigma_T \rightarrow \infty$   $\theta \rightarrow \theta_0$

البته  $\theta$  را هم در نظر گرفته ایم. یعنی در این رژیم انحراف کمی پیش می‌رود که هم در آن روند

پس نهایتاً خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\theta_0 - \theta + \hat{p} \cdot \hat{v}_b]$$

و در قضا که نور به خواهم داشت :

$$\tilde{\theta}' + i k \mu \tilde{\theta} + \tilde{\phi}' + i k \mu \tilde{\psi} = -\tau [\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta} + \mu \tilde{v}_b]$$

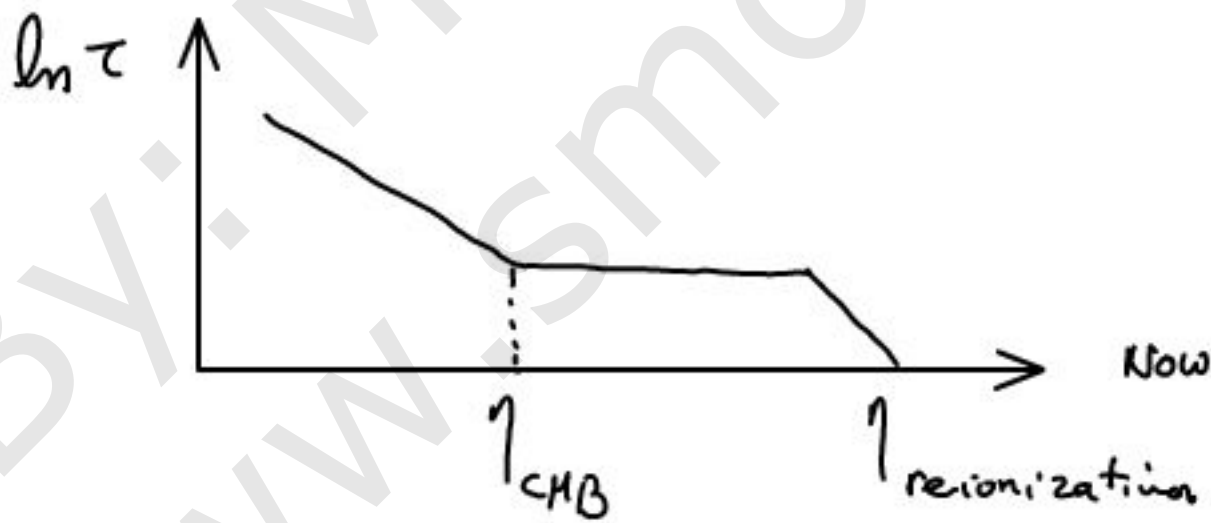
که بدان

عمق اپتیک  $\tau = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a$   $\Gamma$  (Interaction Rate)

optical Depth

مجموع عمق اپتیک نیز به سمت زیر است :

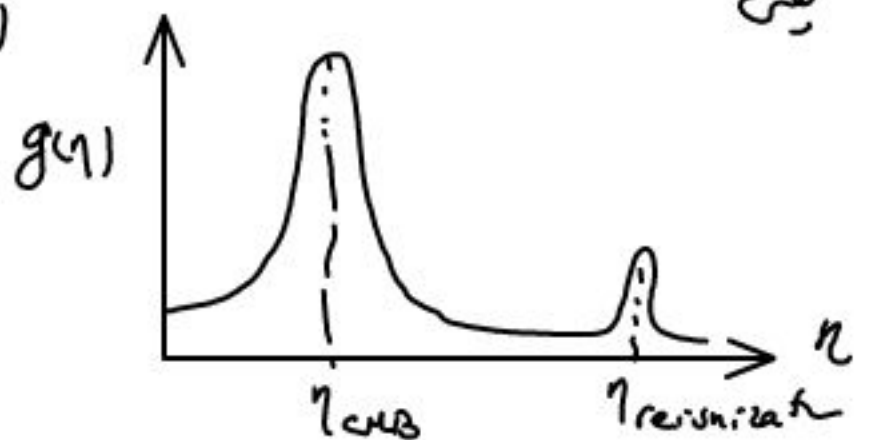
بیشتر زمانی که طی آن فوتون حداقل یک بار برخورد داشته است به بیابان تصویر کشیده  
فوتونی به ناظر می رسد اگر تا زمانی که این فوتون CMB است و در بین راه هیچ برخوردی نداشته است  
پس باید حداقل در زمان LSS یک بار برخورد داشته باشد پس می توان دید که



مبتنی بر  $\tau$  می توان گفت تابع مرتبه بودنی

visibility function

$$g(\eta) = \tau'(\eta) e^{-\tau(\eta)}$$





# Boltzmann Eq for CDM

در این بخش نیز داریم:

$$\underbrace{\frac{\delta n_{DM}}{\delta t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} (n_{DM} v^i)}_{\text{Continuity Eq}} + \underbrace{3 \left[ \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]}_{\substack{\text{Expansion} \\ \text{Perturbation}}} n_{DM} = 0$$

تا مرتبه صفرم خواهیم داشت:

$$n_{DM}^{(0)} + 3 \frac{\dot{a}}{a} n_{DM}^{(0)} = 0 \rightarrow n_{DM}^{(0)} \propto a^{-3}$$

برای مرتبه‌های بالاتر، بنویسیم:

$$n_{DM} = n_{DM}^{(0)} [1 + \delta(x, t)]$$

برای جغالی:

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

بر سرعت:

$$\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a} v + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

یا در فضای نوریه خواهیم داشت:

$$\dot{\delta} + ik \tilde{v} + 3 \dot{\Phi} = 0$$

$$\dot{\tilde{v}} + H \tilde{v} + ik \tilde{\Psi} = 0$$

معادلات مربوط به باریونها نیز مانند در بخش قبل پی گیری می شود فرایند بر هم کنش کوانتی بین  $e$  و  $p$  وجود دارد.  
 برای نوسانها هم همچنین به طور خلاصه معادلات زیر به دست می آیند.

## Einstein-Boltzmann hierarchy equations

$$\frac{df}{dt} = C[f] \rightarrow$$

$$1) \dot{\Theta} + ik\mu\Theta = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau}[\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi]$$

Boltzmann equation

(1,2) Photon equations

$$2) \dot{\Theta}_p + ik\mu\Theta_p = -\dot{\tau}[-\Theta_p + \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P}_2(\mu))\Pi]$$

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{p2} + \Theta_{p0}$$

(3,4) Dark matter

$$3) \dot{\delta} + ikv = -3\dot{\Phi}$$

$$4) \dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = -ik\Psi$$

$$5) \dot{\delta}_b + ikv_b = -3\dot{\Phi}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+2\Psi) & 0 \\ 0 & a(t)^2\delta_{ij}(1+2\Phi) \end{pmatrix}$$

(5,6) Baryon

$$6) \dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b = -ik\Psi + \frac{\dot{\tau}}{R}[v_b + 3i\Theta_1]$$

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{4\rho_\gamma^{(0)}}{3\rho_b^{(0)}}$$

(7) Neutrino

$$7) \mathcal{N} + ik\mu\mathcal{N} = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi$$

(8,9) Einstein perturbed equations

$$8) k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}(\Phi - \Psi\frac{\dot{a}}{a}) = 4\pi Ga^2[\rho_{CDM}\delta + \rho_b\delta_b + 4(\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\mathcal{N}_0)]$$

$$9) k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi Ga^2(\rho_\gamma\Theta_2 + \rho_\nu\mathcal{N}_2)$$

قبل از اینکه توابع همبسته معادلات، با راه حل کنیم می توانیم آنجا به امکان دارد اثر عوامل مختلف  
 را درس افت و نیز تابش زمینه کیهانی بررسی کرد. البته اینکه، متن مقدار کمی؛ حل معادلات  
 با امکان پذیر خواهد بود.  
 به طور کلی می توان عوامل مختلفی را که زیاد افت و نیز در مقدارهای تابش زمینه کیهانی نقش بازمی  
 به صورت زیر دسته بندی می شوند:

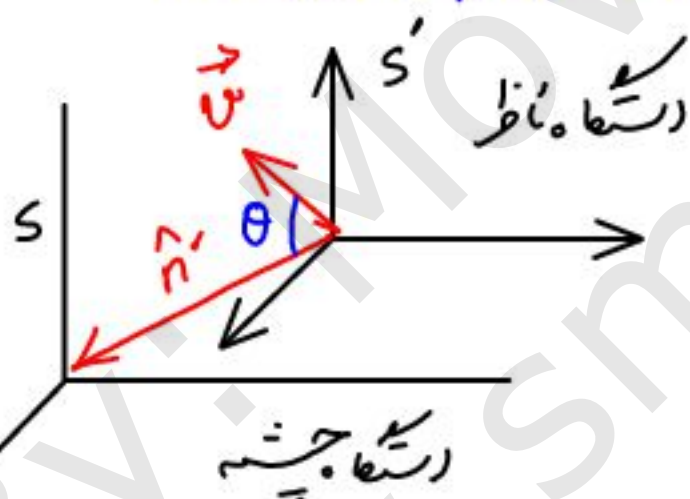
## Primary Effects

## ۱- اثرات اولیه

- اثر دوپلر: اینج اثر وقتی رخ می دهد که ناظر و نقطه مورد نظر بر سر موج آفرین پراکنده که فوتون لذت آن خارج می شود نسبت بهم در حال حرکت نسبی باشند. به بیانی دیگر بر روی سطح آفرین پراکنده به سبب انت و فیزهای اولیه تولید شده در دوران اصطلاح توری، سرعت در میدان گرانشی موضعی ایجا می شود. می توان این اثر را به صورت زیر نشان داد:

$$\theta \equiv \frac{\delta T}{T} (\hat{n}) = \hat{n} \cdot \vec{v}$$

البته توجه کنید این اثر را نباید با اثر حرکت ناظر نسبت به CMB یکسان در نظر گرفت چون حرکت ناظر نسبت به CMB تولید یک اثر دوپلری روی CMB می کند. یعنی آن بخش از CMB که در رو بردی ناظر قرار دارد انتقال به آبی نشان می دهد و آن بخش از CMB که در پشت سر ناظر وجود دارد انتقال به سرخ نشان می دهد. این اثر را خوب زیر عمل می شود:



$$E' = \gamma (E - \vec{p} \cdot \vec{v})$$

$$\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

$$\beta \equiv v/c$$

پس اثری فوتونی مشاهده شده در سیستم S که از سیستم S' بخش شده است به صورت زیر است:

$$h\nu' = \gamma (h\nu - \frac{h\nu}{c} \hat{p} \cdot \vec{v})$$

فوتون لذی S است و  $\vec{v}$  بردار سرعت نسبت به S است

پس  $\nu' = \gamma \nu (1 - \frac{\hat{p} \cdot \vec{v}}{c})$  در حالی که  $\beta \ll 1$  پس  $\gamma \approx 1$

یعنی  $\nu' \approx \nu (1 - \frac{\hat{p} \cdot \vec{v}}{c})$ . طیف زکانشی CMB ها نظیر که قبلاً گفتیم شبیه طیف بیش

جیم سیاه است یعنی بچگای زکانشی آن به صورت:

$$n(\nu) \propto \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}$$

تحت تبدلات لورنس این کمیت به صفت زیر عوض می شود!

$$\frac{n(\nu')}{\nu'^3} = \frac{n(\nu)}{\nu^3} \Rightarrow n(\nu') = \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^3 n(\nu)$$

$$n(\nu') = \frac{\nu'^3}{\exp\left(\frac{h\nu'}{kT}\right) - 1} = \frac{\nu'^3}{\exp\left(\frac{h\nu'}{kT\gamma(1-\hat{p}\cdot\vec{v}/c)}\right) - 1}$$

$$\boxed{T\gamma(1-\hat{p}\cdot\vec{v}/c) = T'}$$

$$T(\hat{n})\gamma(1-\hat{n}\cdot\beta) = T'(\hat{n}')$$

د: طوری که  $\hat{n} = \hat{p}$  یعنی در این انتشار سوز  $S$  و  $S'$  و  $\hat{n}'$  به نظر فردین را در نظر می گیرند

$$\hat{n}' = \left(\frac{\hat{n}\cdot\vec{v} + \beta}{1 + \hat{n}\cdot\vec{v}}\right)\hat{v} + \frac{\hat{n} - \hat{n}\cdot\hat{v}\hat{v}}{\gamma(1 + \hat{n}\cdot\vec{v})}$$

astro-ph/0112457

$$\delta T = T'(\hat{n}') - T(\hat{n}) = \underbrace{-T(\hat{n})\hat{n}\cdot\beta}_{\text{Dipole}} + \underbrace{\delta T'(\hat{n})\gamma(1-\hat{n}\cdot\beta)}_{\text{Modulation} \times (1+\hat{n}\cdot\beta)}$$

Deflection  
و اثر به دلیل:

$$\delta T \approx T' - T = -T\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c} = T\frac{\hat{n}'\cdot\vec{v}}{c}$$

با در نظر گرفتن اثر در تقابل داریم

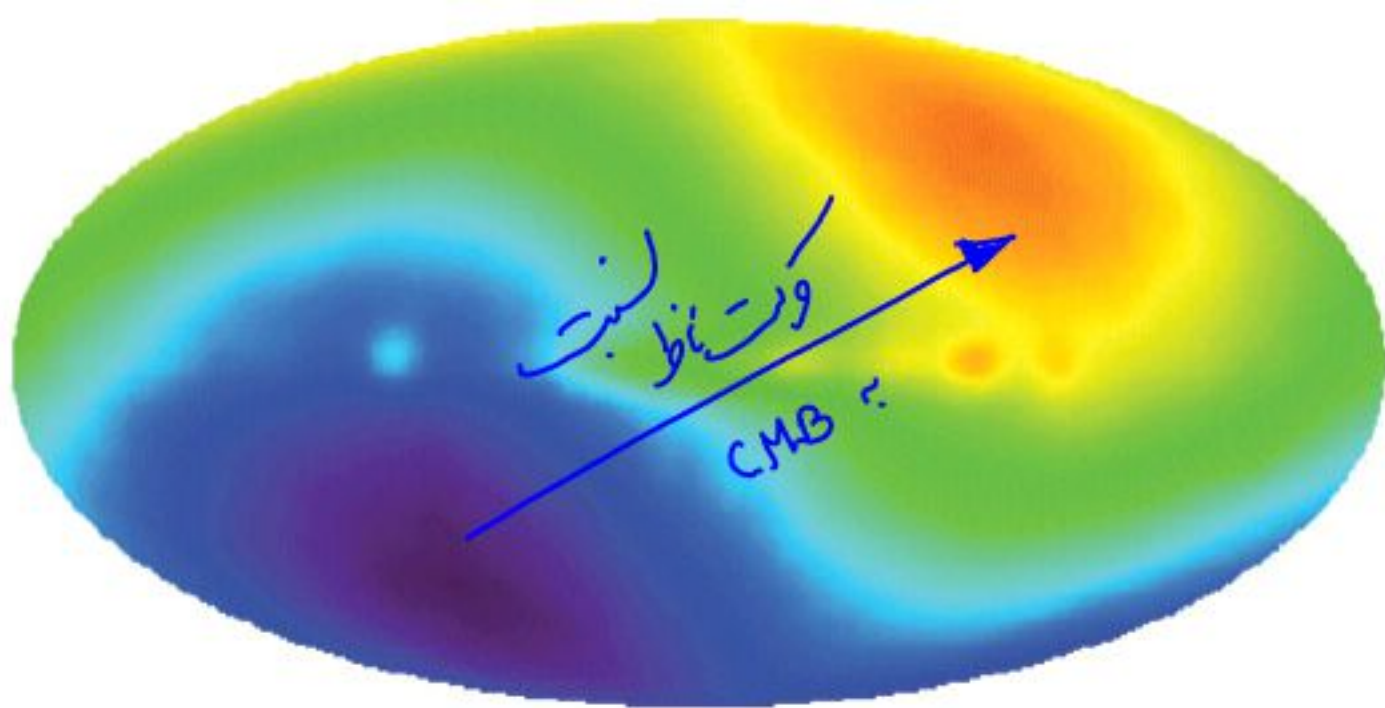
$$\frac{\delta T}{T} = \frac{v}{c} \cos \theta$$

$$\delta T|_{\text{dipole}} = 3.488 \text{ mK}$$

که برابر با شتاب پیک

$$v_{\text{dipole}} = 384 \text{ km/s} \pm 78 \text{ km/s}$$

در صفت  $(l=264^\circ, b=48^\circ)$  است. شکل زیر این در تقابل را نشان می دهد.



**- امت و فیزهای ذرات CMB:** امت و فیزهای ذرات بر روی سطح آخرین پراکندگی فسیلی برای اختلافات نخستین است که در دوران تورم ایجاد شده است. با در نظر گرفتن اختلاف بی در روی دلیتم که

در تصویر گاز ایده‌آل:

$$P \propto T^{\gamma} = c \rho^{\gamma}$$

$$T \propto \rho^{1-\gamma/c_p}$$

این هوای کیهانی زیاد شود برای آن هم بالای رود.

**- اثر Sachs-Wolf:** به سبب آنکه فوتونهای CMB هم در یک سطح پتانسیل گرانشی یکسان قرار نگرفته‌اند پس دامی متفاوتی خواهند داشت. فوتونهای که از نواحی با پتانسیل گرانشی عمیق تر به ما می‌رسند نسبت به آن‌ها که از نواحی با پتانسیل کمتری می‌رسند قرمزتر به نظر می‌رسند. به سادگی می‌توان

محاسبه کرد که آن انجام دارد. در دوران سطح آخرین پراکندگی یعنی  $z_{CMB} \approx 1100$  در زمانی را سپری می‌کنیم که ماده غائب است زیرا زمان برابری ماده و تابش در حدود  $z_{eq} = 10^4$

این با غنایت به سبب ایجاد بی در روی در دوران ماده غائب داریم:

$$\rho_r = T_r^4 \rightarrow \delta_r = 4 \frac{\delta T_r}{T_r} = 4 \theta$$

$$-2\psi = +2\phi = \delta_b = \frac{3}{4} \delta_r$$

$$\delta_r = -\frac{8}{3} \psi \rightarrow \theta_0 = -\frac{2}{3} \psi$$

$$\theta_{obs} = \theta_0 + \psi = -\frac{2}{3} \psi + \psi = \frac{1}{3} \psi_{CMB}$$

به صورت دیگری توان این عبارت را نشان داد. یعنی از بقای انرژی داریم

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_{obs} - \frac{\delta T}{T} \Big|_{CMB} = -\psi_{obs} + \psi_{CMB}$$

برای نشان داریم:  $T \propto a^{-1} \rightarrow \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta a}{a}$

در دوران ماده غالب داریم:  $a \propto t^{2/3} \rightarrow \frac{\delta a}{a} = \frac{2}{3} \frac{\delta t}{t}$   
 گذشتن ساعت‌ها نیز به صورت:  $\frac{\delta t}{t} \sim +\psi$

$$\frac{\delta a}{a} \sim +\frac{2}{3}\psi$$

پس  $\frac{\delta T}{T} \Big|_{CMB} = -\frac{\delta a}{a} \Big|_{CMB} = -\frac{2}{3}\psi \Big|_{CMB}$

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_{obs} = -\psi_{obs} + \psi_{CMB} - \frac{2}{3}\psi_{CMB}$$

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_{obs} = \frac{1}{3}\psi_{CMB}$$

که از  $\psi_{obs}$  نظر کردیم چون

همی راهی برای آشکار کردن آن نداریم

و با این توفیق داریم  $\frac{\delta T}{T} \Big|_{obs}$  را اندازه بگیریم

تا اینها مواردی که بر شد اثرات اولیه، فسیل می‌شوند. وقتی فوتون از سطح آفونیه برآید برای اولین بار  
 و به سمت ناظر حرکت می‌کند در بین راه نیز اثرات سر راهی وجود دارد به باعث تغییر در دمای آن  
 می‌شود و به اثرات ثانویه معروف است.

④ اثرات ثانویه Secondary Effects

— اثر Integrate Sachs-Wolfe

تغییرات زمانی پتانسیل‌های گرانشی بین راهی باعث تغییر در دمای فوتون‌ها می‌شود  
 تصور کنید فوتون دارد ناحیه‌ای می‌گذرد که طی گذر از آن ناحیه، جگای افزایش و سپس نیایش گرانشی به محض

ورد با حالتی که از آن خارج می شود تفاوت خواهد بود پس می توانیم بقی مانده بر روی انتقال به سرخ  
 فون خواهد گذاشت. اگر بدان ماه غالب را می کنیم آفت اسباط عام، آفت ریش  
 سرانته را خنثی می کند و در نتیجه اگر خاص بر سر فون باقی نمی ماند اما هنگامی که در دوران انرژی  
 بهیم پتانسیل انرژی هم شروع به کاهش می کنند پس در شگس - ولف پیوسته رخ می دهد.  
 در حالتی که ریش انرژی با هم می رود ساختارها در رژیم غیر خطی رشد خود شوند در آن صورت  
 در شگس - ولف پیوسته غیر خطی رخ می دهد که به اثر Reese-Sciama فون است  
 ظهور نشان خواهیم داد که این اثرات چگونه کمی می شوند.

### - اثر Sunyaev v - Zel'dovich

بر هکس فوتونهای CMB با گازهای داغ یونیزه سر راهی به صورت پراکنشی کامپتون معکوس  
 که طی آن دمای فوتونها بالا می رود به اثر سونیاوف - زلدوویچ فون است. در محدوده پراکنشی ریلی - جینز

تغییرات را عبارت است از

$$\frac{\delta T}{T} \approx -2K_B \frac{T_e}{m_e c^2}$$

مطالب مطرح شده باعث ایجاد نا هم ندری بر روی CMB می کنند. اثرات ریلی هم هستند سعی می کنند  
 این افت و فیضها را پاک کنند مانند: اثر ضرات سطح آفرین پراکنشی، پیرایی سلب، یونش دوباره

قبل از اینکه تو بهم مجموعه معادلات، با راه حل کنیم می توانیم آنگاه امکان دارد اثر عوامل مختلف  
 را در افت و فیضهاش زمینه کنونی بر سر کرد. البته اینکه، یون مقدار کمی؛ حل معادلات  
 امکان پذیر خواهد بود. برای این منظور کمیت زیر را تعریف می کنیم:

$$f \equiv e^{\tau} (0.4)$$

یاد آوری می کنیم که عملگر پوینکار برابر است با:

$$\frac{Df}{D\eta} = f' + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{d\hat{p}^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i}$$

در تقریب مرتبه اول به توان دقت گرفتیم، هم  $\frac{d\hat{p}^i}{d\eta}$ ؛ نیز این است

$$\frac{D}{D\eta} [e^\tau(\theta + \psi)] = e^{-\tau} [\theta' + \psi' + \hat{p} \cdot \vec{v}(\theta + \psi)]$$

$$- \tau' e^{-\tau} (\theta + \psi)$$

$\tau' \equiv \Gamma$  و  $g$  منبع رتبه اول است

که منظور از  $\tau$  قبل از کسره

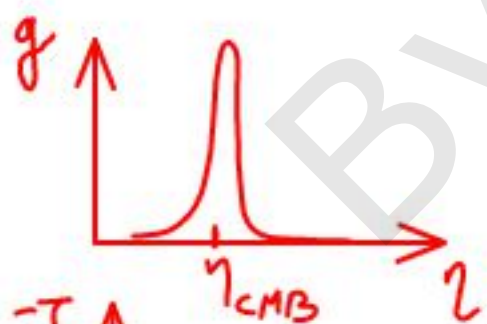
بین در تقریب خطی بهترین داریم

$$\frac{d}{d\eta} [e^\tau(\theta + \psi)] = g(\theta_0 + \psi + \hat{n} \cdot \vec{v}_b) + e^\tau (-\phi' + \psi')$$

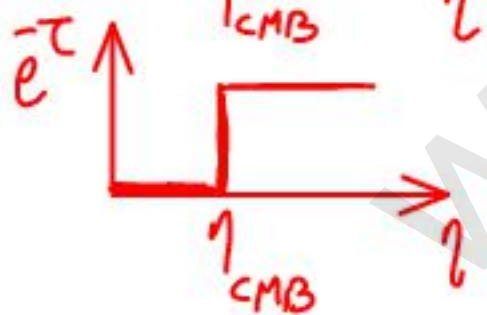
حال اگر از عبارت  $\tau$  در راستای خط واصل به اندازه  $\eta_{CMB}$  انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$(\theta + \psi)_{obs} = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta [g(\theta_0 + \psi + \hat{n} \cdot \vec{v}_b) + e^\tau (-\phi' + \psi')]$$

الآن می توانیم تقریب دیگری نیز بکار ببریم و آن این است که



$$g \equiv \delta_D(\eta - \eta_{CMB})$$



$$e^{-\tau} \equiv \Theta_{step}(\eta - \eta_{CMB})$$

Instantaneous  
Decoupling limit

$$(\theta + \psi)_{obs} = (\theta_0 + \psi + \hat{p} \cdot \vec{v}_b) \Big|_{CMB} + \int_{\eta_{CMB}}^{\eta_0} d\eta (-\phi' + \psi')$$

$$\theta_{obs} = (\theta_0 + \psi) \Big|_{CMB} + \hat{p} \cdot \vec{v}_b \Big|_{CMB} + \int_{\eta_{CMB}}^{\eta_0} d\eta (-\phi' + \psi') \quad \text{یعنی}$$



کے بارے میں سوچیں اور جانیں۔

$$\theta_{obs} = \underbrace{(\theta_s + \psi)}_{SW} + \underbrace{\hat{p} \cdot \vec{v}_b}_{Doppler} + \underbrace{\int_{\gamma_{CMB}}^{\gamma_0} d\eta (-\dot{\phi} + \dot{\psi})}_{ISW}$$

$$\rho_r \sim T_r^4 \rightarrow \delta_r = 4 \frac{\delta T_r}{T_r} = 4\theta_s$$

حالیہ طور پر قبلہ نیز نشان دار ہیں

دیکھنا کہ غائب

$$+ 2\dot{\phi} = -2\dot{\psi} = \delta_b$$

$$\delta_r = \frac{4}{3} \delta_b$$

$$\Rightarrow \delta_r = -\frac{8}{3} \dot{\psi}$$

لنت و نیز بہ دررو

$$(\theta_s + \psi)|_{CMB} = (-\frac{2}{3}\dot{\psi} + \dot{\psi})|_{CMB} = \frac{1}{3}\dot{\psi}|_{CMB}$$

درقیاسے ہی نیز بہ  $\hat{p} \cdot \vec{v}_b \sim$  چون سرعت در آن معیاساً غائب ہیں ہی تزلزل لنت:

$$\theta|_{obs - large scale} \sim \frac{1}{3}\dot{\psi}|_{CMB} = -\frac{1}{8}\delta_r$$

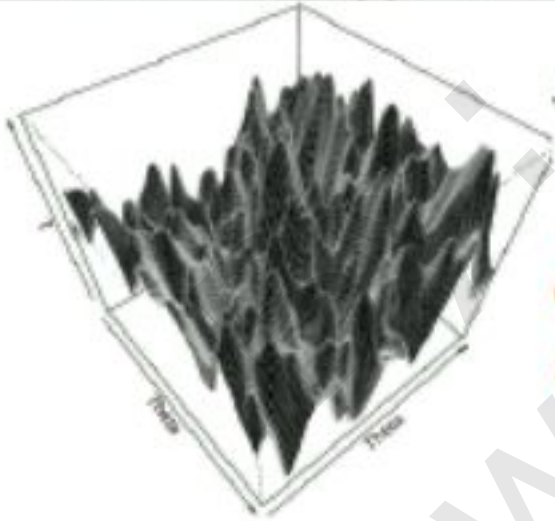
یعنی در CMB جایی نہ چاہ پتالیں لنت یعنی  $\psi$  میں  $\theta$  سردتر لنت  
 ورتیقاً معادل جایی است کہ چھالی انرژری تابش زیاد تر است

هر چند تاکنون به طور مشخص اثر هم‌زمان بودن را بررسی تولید افت و نوسان‌های ناشی از نوسان کیهانی را بررسی کرده‌ایم. رهیافت کاربردی را دنبال نکردیم. چرا؟!

چون اساس میدان انت و نیز CMB ماهیتی تصادفی دارد یعنی ما Stochastic field داریم. در شکل زیر برخی از دلایل وجود میدان تصادفی را آورده‌ایم.

## Why stochastic field?

- 1) Initial fluctuations are produced randomly in the position coordinate (due to quantum uncertainties)
  - On cosmological scales they are homogeneous and isotropic
  - There is no correlation between Fourier modes (Gaussian)
  - rms of perturbation during horizon entry is constant (Scale invariant)
- 2) But time dependance of perturbation is deterministic due to equations of motion
- 3) We don't ask how far is it the nearest large galaxy? Instead we ask, what is the typical separation between large galaxies?



$$\delta(a, \text{value})|_{\text{Horizon crossing}} \sim a [d_{H_0} a^{1/2}]^{-(3+n)/2}$$

if  $n = 1 \rightarrow \delta \sim \text{cts}$

credit by: Movahed



مانند در شکل بالا مشخص است که این نوسان‌ها به سبب عدم قطعیت‌های کوانتومی در دوران تورم و خروج آن‌ها از افق هابلی و کلاسیکی شدن آن‌ها به طور تصادفی در فضا ایجاد می‌شود. این نوسان‌ها ماهیت تصادفی دارند به این معنی که مقدار انت و نیز در مکان مشخص مورد علامت نیست. همچنین عموماً در نظر گرفته می‌شود که در فضای فوری و فدهای مختلف از یکدیگر مستقل هستند یعنی هیچ همبستگی نداریم:  $\langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ . این ویژگی ایجاب می‌کند که مبنی بر فرضیه حد درستی

تابع توزیع الفت و غیرها در فضای حقیقی (فصلت) لوسر خواهد بود. در شکل های زیر معنوم قضیه حد مرکزی نشان داده شده است.

قضیه حد مرکزی  
Central limit theorem

\* نتیجه می دهد که تابع توزیع متغیری که از جمع تعداد بی شماری عدد تصادفی مستقل که دارای مقدار متوسط و واریانس محدود هستند تشکیل شده است گوسی خواهد بود

- $x_1 \pm \sigma_1 \rightarrow P(x_1)$
- $x_2 \pm \sigma_2 \rightarrow P(x_2)$
- $x_3 \pm \sigma_3 \rightarrow P(x_3)$
- ...
- $x_n \pm \sigma_n \rightarrow P(x_n)$



$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow P(x) = \text{Gaussian}$

BY: Abraham de Moivre (1733)

در اینجا تابع مشخصه یعنی characteristic function

در واقع تبدیل فوری تابع توزیع است

$Z_x(\lambda) = \langle e^{i\lambda x} \rangle$   
 $= \int dx e^{i\lambda x} P(x)$

$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda e^{-i\lambda x} Z_x(\lambda)$

$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Moment  $\leftarrow M_n \equiv \langle x^n \rangle = \int dx x^n P(x)$

$Z_X(\lambda) = \langle e^{i\lambda X} \rangle = \langle e^{i\frac{\lambda x_1}{n}} e^{i\frac{\lambda x_2}{n}} e^{i\frac{\lambda x_3}{n}} \dots e^{i\frac{\lambda x_n}{n}} \rangle$

$= \left[ \frac{d}{d(i\lambda)} \right]_{\lambda=0}^n Z_{x_i}(\lambda)$

$= \left( 1 + i \frac{\langle x_1 \rangle}{n} \lambda - \frac{\langle x_1^2 \rangle}{2n^2} \lambda^2 + \dots \right) \left( 1 + i \frac{\langle x_2 \rangle}{n} \lambda - \frac{\langle x_2^2 \rangle}{2n^2} \lambda^2 + \dots \right) \times$

$\dots \left( 1 + i \frac{\langle x_n \rangle}{n} \lambda - \frac{\langle x_n^2 \rangle}{2n^2} \lambda^2 + \dots \right)$

$= \left( 1 - \frac{\langle x_1^2 \rangle}{2n^2} \lambda^2 + \dots \right)^n$

$Z_x(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} M_n$

$= \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n \right]$

$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_X(\lambda) = e^{-\frac{\sigma_m^2 \lambda^2}{2}} \quad \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$p(X) = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda e^{-\frac{\sigma_m^2 \lambda^2}{2}} e^{-i\lambda X} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} e^{-\frac{X^2}{2\sigma_m^2}}$

Cumulant

معادلات کول در اثر ناپایداری های شتابانی تعینی هستند بنابراین ماهیت تصادفی معمولاً از شرایط اولیه ظاهر می شود. به طور کلی می توان از این نقطه نظر فرآیندهای فیزیکی را به دسته ای زیر تقسیم بندی نمود:

## دسته بندی فرآیندها

۱) فرآیندهای تعینی (Deterministic)

۲) فرآیندهای تصادفی (Stochastic)

- فرآیندهای کاملاً کاتوره ای (Purely random)

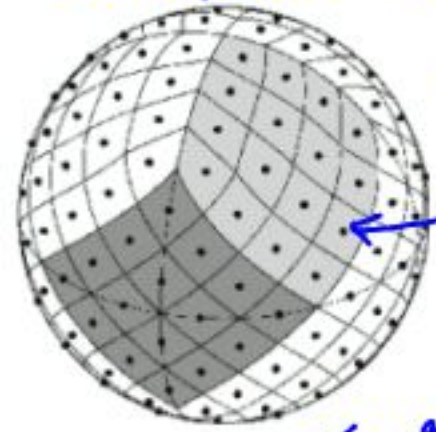
- فرآیندهای کاتوره ای وابسته (Dependent)

- فرآیندهای مارکوف (Markov)

۳) فرآیندهای آشوبی (Chaotic)

## CMB Spectrum

میدان تصادفی CMB بررسی می‌کند. این می‌تواند آنرا بر حسب جابجایی‌ها روی لبط دارد.


 $T(\theta, \varphi)$ 

البته از آنجا که داده‌های CMB به صورت گسسته هستند یعنی

پس تبدیل لژلندری را نیز تبدیل به تبدیل فوری اطلاعات دارد و واضحی که

استوچ پذیر نیستند خط نمی‌کنند بنابراین اطلاعاتی که میدان افت و فیز در فضای

حقیقی نشان می‌دهد با اطلاعاتی که همان میدان فضای تبدیل یافته به نمایش می‌گذارد یکسان نیست

اما تابع همبستگی یعنی  $C \equiv \langle T(\hat{n}) T(\hat{n}') \rangle$  برخلاف  $T(\hat{n})$  فضای پیوسته دارد و از

سوی کسری شرط لازم کافی برای وجود تبدیل را نیز عموماً دارد است. بنابراین به جای میدان  $T(\hat{n})$

از  $C$  استفاده می‌کنیم. برای این کار داریم:

$$\left. \frac{\delta T}{T} \right|_{obs} = \Theta(\eta_0, \vec{x}, -\hat{p}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\hat{p})$$

$$a_{lm} = \int d\Omega \Theta(\eta_0, \vec{x}, -\hat{p}) Y_{lm}^*(\hat{p})$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\vec{k}, \eta_0, -\hat{p})$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\vec{k}, \eta_0, -\hat{p}) 4\pi (-i)^l j_l(kR_{CHO}) Y_{lm}^*(\hat{p})$$

البته توجه کنید که برای  $l=0$  کمیت متوسط را به دست می‌آید که می‌توان با جابجایی میدان آنرا صفر کرد.

برای  $l=1$  در واقع فونک‌های قطبی است که با توجه به تقاضیات مطبوع شود در بخش دو قطبی این اثر

رابطه بروت نظریت مرجع CMB است. همچنین می توان نوشت:

$$\theta(\eta_0, \bar{x}, -\hat{p}) = \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \theta_l(\bar{k}, \eta_0) P_l(\cos\theta)$$

Legendre Polynomial

آنگون می توان تابع همبستگی را به صورت زیر نوشت:

$$C(\hat{n}, \hat{n}') = \langle \theta(\hat{n}) \theta(\hat{n}') \rangle$$

با فرض همبستگی همگامی آمار می توان نوشت:

$$C(\alpha) = \langle \theta(\hat{n}) \theta(\hat{n}') \rangle, \quad \alpha = \cos^{-1} |\hat{n} \cdot \hat{n}'|$$

به بیان دیگر:

$$C(\alpha) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \delta_0(\hat{n} \cdot \hat{n}' - \cos\alpha) \theta(\hat{n}) \theta(\hat{n}')$$

با گذاری مقادیر برای  $\theta$  در فضای طاقب ها که کردی داریم:

$$C(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos\alpha)$$

$$C_l \equiv \langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

کوتاه

$$C_l^{obs} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} C_l^{obs} = C_l^{Theory}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k} \theta_l^2(\bar{k}, \eta_0) P_l(k)$$

$$\theta_l(k, \eta_0) = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta S_T(\eta, \bar{k}) j_l(k(\eta_0 - \eta))$$

$$S_T \equiv \underbrace{g(\theta_0 + \psi)}_{SW} + \underbrace{(g \bar{k}^{-2} \bar{\nabla} \cdot v_b)}_{Doppler} + \underbrace{e^{-\tau} (-\phi' + \psi')}_{ISW}$$

که با برآورد توپیک  $a_{lm}$  توجه کنید

$$a_{lm} = (-i)^l \int \frac{d^3k}{2\pi^2} Y_{lm}^*(\hat{k}) \Theta_l(\eta_0, \vec{k})$$

و نشان از تطابق نظریه داریم:

شرایط اولیه  $\Theta_l(\eta_0, \vec{k})$  که شامل  $\rightarrow$  است. پس برای ما سبب  $\Theta_l$  در نهایت داریم:

$$C_l^{obs} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}^{obs}|^2 \quad (1) \text{ رصد:}$$

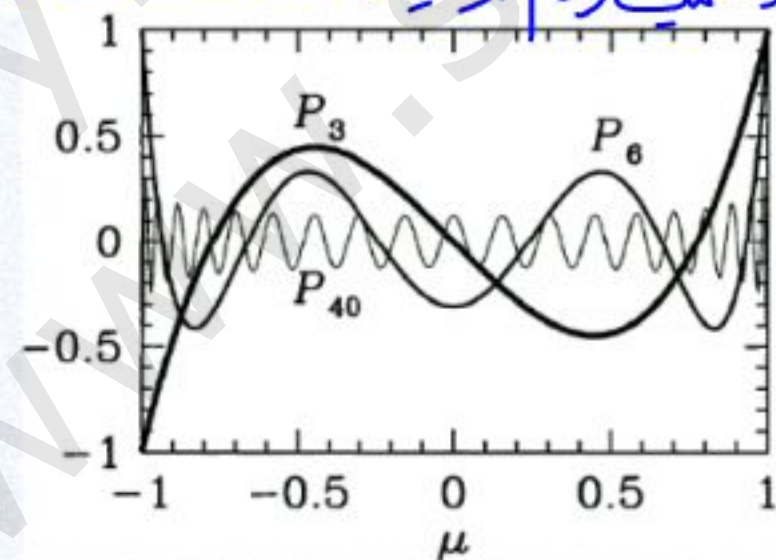
$$a_{lm}^{obs} = \int d\Omega \Theta(\eta_0, \hat{p}, -\hat{p}) Y_{lm}^*(\hat{p})$$

(2) رهیافت تئوری: در این بخش بعضی شرایط اولیه را فایز  $\rightarrow$  رانند  $\rightarrow$  را مشخص کنیم  $\left\{ \begin{array}{l} \text{تغییرات بولترمن} \end{array} \right.$

در سطح نزدیک به جبهه های لتر اندر و اهمیت هر کدام در معیارهای مختلف نشان می دهد:

$$k \propto \frac{1}{\lambda}$$

$$l = \frac{\pi}{\alpha}$$



Dodelson, modern Cosmology

به خوبی مشخص است که

برای  $l$  های بزرگتر چون

$P_l$  را در انت و فضا کوکود هستند

نیاز به این می تواند انت و فضا های

کوکی را توصیف کنند

$$\Theta_l \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_l(\mu) \Theta(\mu)$$

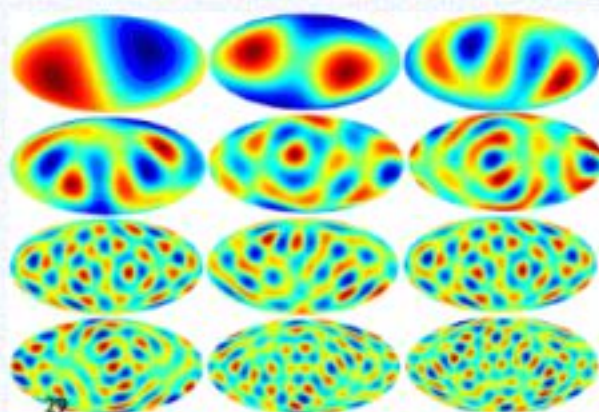


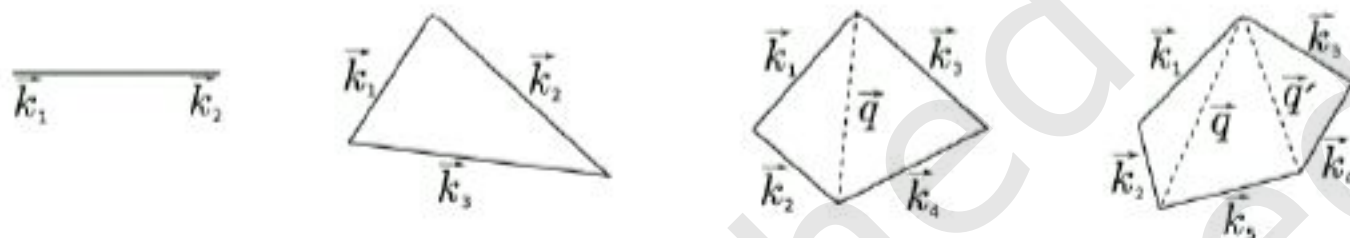
Figure by Ville Heikkilä.

## Correlation functions

$$\langle \Theta(\vec{x}_1) \Theta(\vec{x}_2) \dots \Theta(\vec{x}_N) \rangle \xrightarrow{\text{Homog.}} C_N(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N-1} - \vec{x}_N)$$

$$\langle \Theta(\vec{x}_1) \Theta(\vec{x}_2) \dots \Theta(\vec{x}_N) \rangle = \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 \dots d^3 k_N}{(2\pi)^{3N}} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_1} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_2} \dots e^{-i\vec{k}_N \cdot \vec{x}_N} \\ \times \langle \Theta(\vec{k}_1) \Theta(\vec{k}_2) \dots \Theta(\vec{k}_N) \rangle.$$

$$\langle \Theta(\vec{k}_1) \Theta(\vec{k}_2) \dots \Theta(\vec{k}_N) \rangle_H = (2\pi)^3 \tilde{N}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_N)$$



L. R. Abramo et. al., arXiv:1002.3173

در شکل زیر تابع همبستگی در نقطه‌ای در فضای هابیت‌ها کی مرتبه بالاتر از مرتبه اول است:

## In harmonic space

$$C(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \sum_{L, M} \sum_{\ell_1, \ell_2} \mathcal{A}_{\ell_1 \ell_2}^{LM} \mathcal{Y}_{\ell_1 \ell_2}^{LM}(\hat{n}_1, \hat{n}_2)$$

$$\mathcal{Y}_{\ell_1 \ell_2}^{LM}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = [Y_{\ell_1}(\hat{n}_1) \otimes Y_{\ell_2}(\hat{n}_2)]_{LM}$$

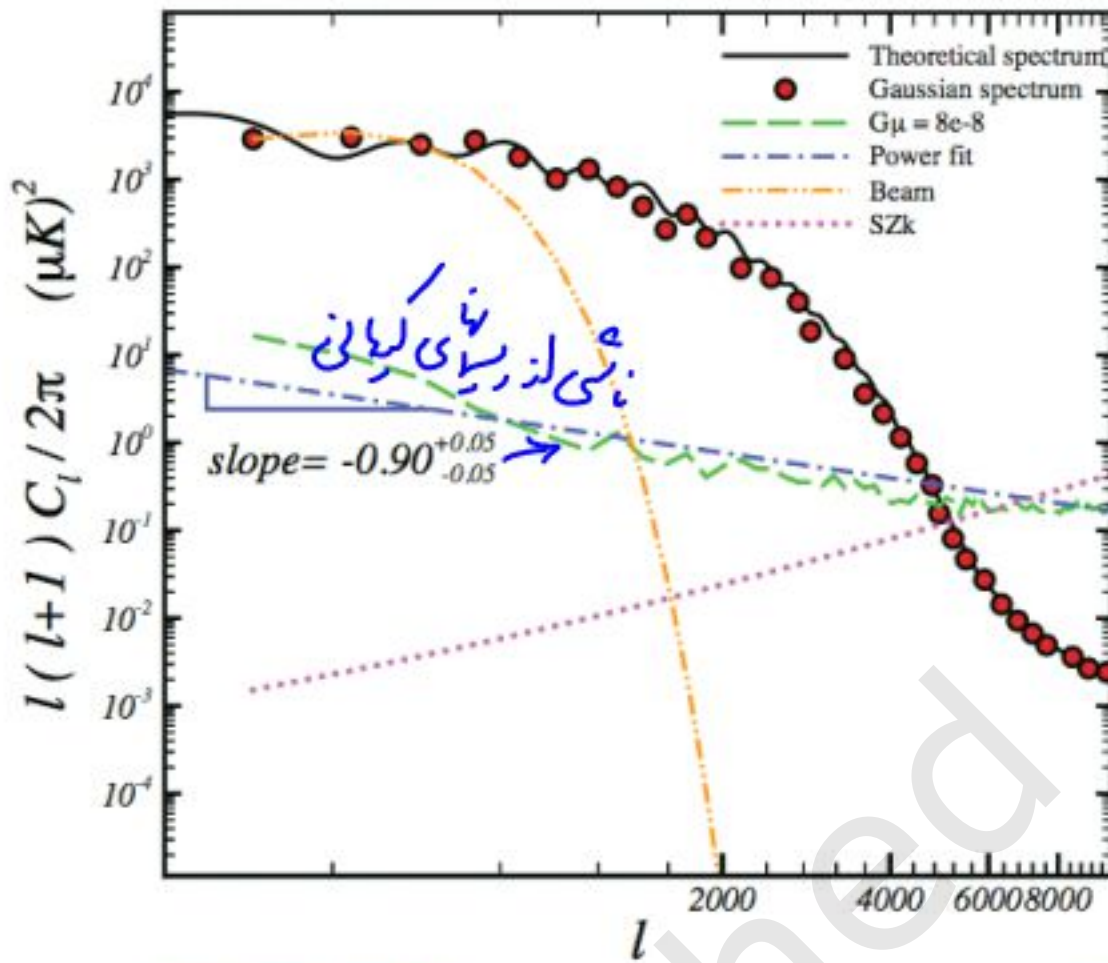
$$\mathcal{A}_{\ell_1 \ell_2}^{LM} = \sum_{m_1 m_2} \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} \rangle (-1)^{M+\ell_1-\ell_2} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix}$$

### Estimator from observations

$$\hat{C}_\ell \equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \hat{C}_\ell = C_\ell$$

A. Gangui et. al., astro-ph/9312033





### خطای کیهانی Cosmic Variance

لذا آنچه میدان CMB میدان آماری است بنابراین شاهد پذیرها مبتنی بر نمونه آماری آن قبل از پیدا می کنند. لذا سویی گسترده هم نقطه ای با  $C_l$  داریم همین امر باعث می شود که خطای ذاتی در سیستم داشته باشیم که در  $l$ های کوچک یا زوایای بزرگ به طور محافظه کارانه با نتایج برخورد کنیم. شکل زیر این مسئله را نشان می دهد.

خطای سیستماتیک ناشی از میانگین گیری

روی یک ریز حالت به جای میانگین گیری

$$T(\theta, \varphi) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$a_{lm} = \int d\Omega T(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$$

$$\langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle = \int d\Omega \int d\Omega' Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta', \varphi') \langle T(\theta, \varphi) T(\theta', \varphi') \rangle$$

$$C(\hat{n}, \hat{n}') = \langle T(\theta, \varphi) T(\theta', \varphi') \rangle \quad C(\hat{n}, \hat{n}') = C(\hat{n}, \hat{n}')$$

$$C(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}')$$

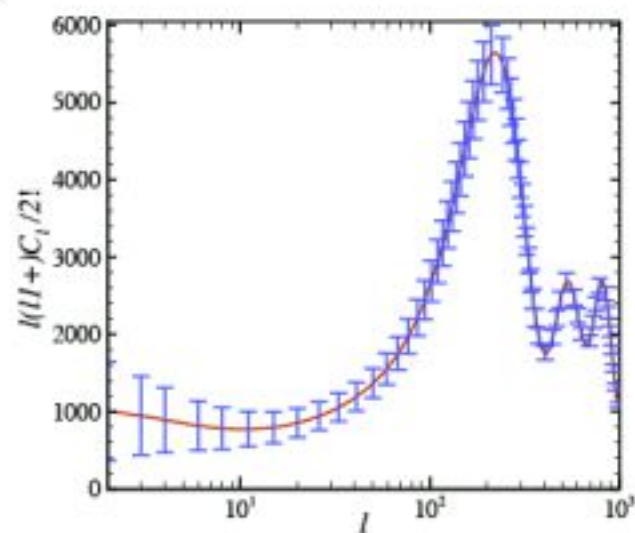
$$\langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} a_{lm}^*$$

$$\sigma_l^2 = \langle C_l^2 \rangle - \langle C_l \rangle^2$$

$$\langle C_l^2 \rangle = \frac{3}{(2l+1)^2} \sum_{mm'} \langle a_{lm} a_{lm} \rangle \langle a_{l'm'} a_{l'm'} \rangle = 3 \langle C_l \rangle^2$$

$$\sigma_l^2 = \langle C_l^2 \rangle - \langle C_l \rangle^2 = 2 \langle C_l \rangle^2$$

$$\sigma_{l, \text{mean}}^2 = \frac{\sigma_l^2}{N(l)} = \frac{2 \langle C_l \rangle^2}{2l+1} = \frac{2C_l^2}{2l+1}$$



اثر عوامل مختلف بر دسی طیف توان CMB

تمشخص شده برای بزرگسازان CMB در قدم اول، یعنی تابع توزیع تابع همبستگی در نقطه ای مطالعه شود که البته در این رهیافت رد پای تصادفی بودن لغت و غیره پیدا است. در اینجا تصدراهم مانند آنچه در بخش مربوط به اثرات مختلف بر دسی لغت و غیره ای CMB مطرح شد، اثر عوامل مختلف فیزیکی را بررسی

$C_\ell$  بزرگساز

Initial Conditions

یک بار دیگر توجه کنید:

$$① C_\ell = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k} \theta_\ell^2(k, \eta_0) P_R(k)$$

Evolutions: Boltzmann Eqs.

$$② \theta_\ell(k, \eta_0) = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta S_T(\eta, k) j_\ell(k(\eta_0 - \eta))$$

$$③ S_T \equiv \underbrace{g(\theta_0 + \psi)}_{SW} + \underbrace{(gk^{-2} \vec{v} \cdot \vec{v}_b)}_{Doppler} + \underbrace{e^{-\tau} (-\psi' + \psi)}_{ISW}$$

بر طبق عبارت ① تمشخص است طیف توان  $C_\ell$  وابسته است به رقصای حقیقی اطلاعات

مناسبتی در مقصد  $\theta(\eta, \vec{x}, \hat{n})$  از یک گرم. رهیافت است به نیز برابر کمیت در رقصای فوریه

ای فضای هانت های کردی انجام می شود. عبارت ② نشان می دهد که  $\theta_\ell(k, \eta)$

توسط پیش (Convolution) تابع به کردی  $\theta_\ell(k, \eta)$  تابع تابع یعنی  $S_T(\eta, k)$  که اصطلاحاً

تابع همیشه دایره‌ای Temperature Source function می‌شود، بدست می‌آید.  
 با در نظر گرفتن تقویب و جفتی‌گی آنی یعنی  $g \approx \delta_D (\eta_{CMB} - \eta)$  پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \theta_\ell(\eta_0, k) = & [\theta_0(\eta_{CMB}, k) + \psi(\eta_{CMB}, k)] j_\ell(k(\eta_0 - \eta_{CMB})) \\ & + \frac{\theta_b(\eta_{CMB}, k)}{k} j'_\ell(k(\eta_0 - \eta_{CMB})) \\ & + \int_{\eta_{CMB}}^{\eta_0} d\eta [-\phi(\eta, k) + \psi'(\eta, k)] j_\ell(k(\eta_0 - \eta)) \end{aligned}$$

الکون در عبارات بالا را در معادله ① قرار دهیم می‌توان  $C_\ell$  را استخراج کرد. با توجه به اینکه در عبارات ① کسب  $\theta_\ell(\eta, k)$  داریم پس در  $C_\ell$  ما ۶ عضو داریم:

	عضو ۱: $(SW)^2$
Correlation Terms	عضو ۲: $(Doppler)^2$
	عضو ۳: $(ISW)^2$
Cross-Correlation Terms	عضو ۴: $(SW \times Doppler)$
	عضو ۵: $(SW \times ISW)$
	عضو ۶: $(Doppler \times ISW)$

الکون می‌خواهیم بدون اینکه محاسبه دقیق انجام شود سهم تک تک اعضای بالا را برگیریم.  
 می‌دانیم که  $(SW) \propto \frac{1}{z}$  و  $(Doppler) \propto \frac{1}{z}$  و  $(ISW) \propto \frac{1}{z^2}$  در  $z \ll 1$  دژرین‌ها بزرگ هستند پس

• اثر عضو 1 در  $\theta$  برابر است:

$$C_l^{SW} \approx \left[ \theta (\eta_{CMB} K) + 4 (\eta_{CMB} K) \right]^2 P_R(K)$$

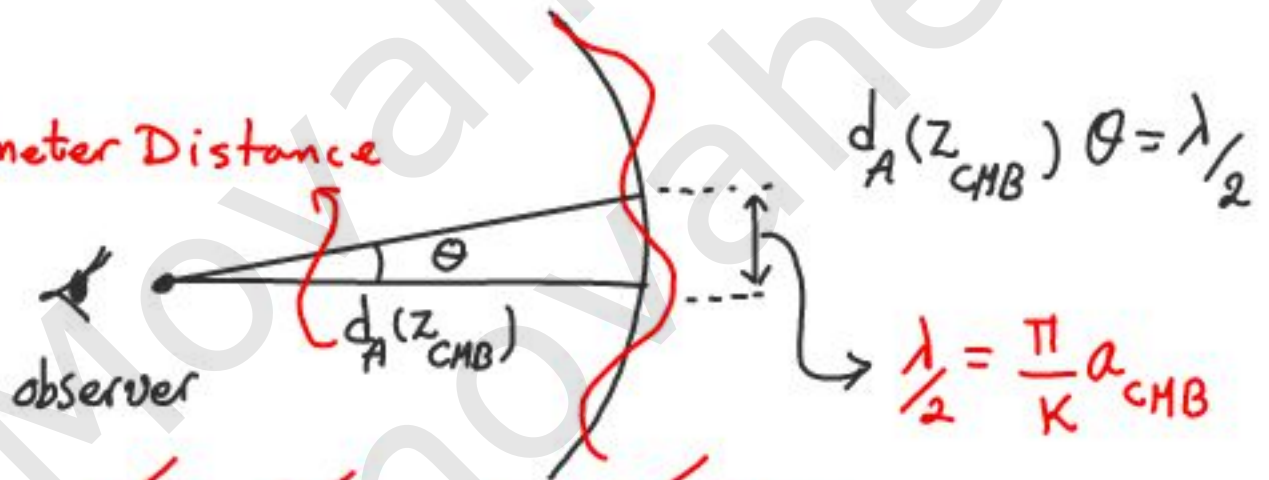
که در آن

$$K_{CMB} = \frac{l}{\eta_0 - \eta_{CMB}}$$

چرا؟!

**توجه کنید:** به واقع ضیف  $C_l$  همبستگی های بین ساختار دنیای موجود در ردی سطح آفرین پراکنده است که زاویه  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (توجه کنید  $\theta$  در اینجا زاویه مربوط به افت ضیف را اشتباه نگیرید) روی می خورد نشان می دهد یعنی

Angular Diameter Distance



دلیل ضیف  $\frac{1}{2}$  برای  $\theta = \frac{\pi}{2}$  این است که در فضای هابلی که  $\theta = \frac{\pi}{2}$  زاویه بین کمره بین دو کمره پی در پی است در حالی که در فضای نوریه فاصله بین کمره بین دو کمره نصف طول موج است. همچنین اندازه فاصله زاویه ای برابر است با:

$$d_A(z) = \frac{ac}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \text{Sinn} \left( \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right)$$

$$H(z) = \frac{H(z)}{H_0}, \quad \text{Sinn} = \begin{cases} \sin & \Omega_k > 0 \\ 1 & \Omega_k = 0 \\ \sinh & \Omega_k < 0 \end{cases}$$

$$d_A^{CMB} = a_{CMB} \int_{\eta_{CMB}}^{\eta_0} d\eta = a_{CMB} (\eta_0 - \eta_{CMB})$$

پس اگر عالم تخت فرض شود پس

$$d_A^{CMB} \theta = \frac{1}{2} = \frac{\pi a_{CMB}}{K}$$

$$a_{CMB} (\eta_0 - \eta_{CMB}) \frac{\pi}{l} = \frac{\pi}{k} a_{CMB}$$

$$k = \frac{l}{\eta_0 - \eta_{CMB}}$$

یعنی

از آنجا که سهم SW در زمان CMB است پس  $\theta$  در اینجا کوچک خواهد بود یعنی  $k$  کوچک خواهد بود. پس سهم SW در  $k$  بزرگ غالب است. البته این گفته به این معناست که در  $k$  بزرگ یا  $\theta$  بزرگ سهم SW ندارد. به واقع در دید  $k$  بزرگ یا  $\theta$  بزرگ  $k$  بزرگ است و این را به این معنی می‌توانیم درک کنیم که  $k = \frac{l}{\eta_0 - \eta_{CMB}}$  یعنی  $k$  بزرگ می‌دهد.

• اثر عضو ۲ و ۳ نیز می‌تواند به قبل خواهد بود یعنی:

$$C_{\ell}^{Doppler} \sim \langle |\theta_b|^2 \rangle_{(\eta, k) = (\eta_{CMB}, \frac{l}{\eta_0 - \eta_{CMB}})}$$

$$C_{\ell}^{ISW} = \int_{\eta_{CMB}}^{\eta_0} d\eta (\eta_0 - \eta) \langle | -\Phi' + \Psi' |^2 \rangle_{(\eta, k) = (\eta_{CMB}, \frac{l}{\eta_0 - \eta_{CMB}})}$$

• اثر اعضای ۴، ۵، ۶ با هم کامل است و باید که البته سهشان کمتر از ۳ خواهد بود است.

تا اینجا به طور کلی دانستیم که رابطه  $k$  با  $\theta$  چیست؟ پر کردن  $\theta$  در این معادله  $\theta$  در  $k$  چگونه رفتار می‌کند؟ در این بخش به طور کلی این بحث را دنبال می‌کنیم.

# Acoustic oscillations

## نوسانات صوتی

ریکٹ ترسور دنیا میکی کیان اولیہ، طور بعض بعض صفر صفر شاره و سوپ اولیہ در کیان کبھی می شود  
 اما محالاً توجه کنید؟ عنایت، هبگی قوی بین لا، Electrons و Baryons  
 برقرار است پس می توان آنرا به ما به یک شاره در نظر گرفت که هر موج چگالی در آن با سرعت

صوت یعنی  $C_s = \frac{\delta P_\gamma + \delta P_b}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b}$  منشر می شود.

پس  $\rho_\gamma \sim T^4$  ,  $\rho_b \sim T^3 \Rightarrow \delta \rho_\gamma = \frac{4}{3} \delta \rho_b$

و  $\vec{v}_\gamma \cdot \vec{v}_b = \vec{v} \cdot \vec{v}$  هم سرعت هستند (البته اینجایان معادلت، انت و فیزها در تقویب  
 وابستگی قوی غالباً توسط  $\theta_0$  (رشد نظری) در  $\theta_1$  (رشد نظری) (توجه) داده می شود.

با سرعت و فیزها به است کاهش پیش می روند چون بر هکش، بالادست و سیم به است هدما شدن  
 پیش می رود. بر نظر گرفتن  $|\delta P_b| \ll |\delta P_\gamma|$  داریم:

$$C_s^2 = \frac{1}{3(1+R)} \quad , \quad R \equiv \frac{4}{3} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma} \propto a$$

بهره گیری از معادلات اسیرو پویایی معادله وکت بر انت و فیزهای نوتران در تقویب لستنی قوی

به صورت زیر خواهد بود:

$$\underbrace{\theta_0'' + \frac{R'}{1+R} \theta_0'}_{\text{Damping}} + \underbrace{K^2 C_s^2 \theta_0}_{\text{Pressure force}} = \underbrace{-\frac{K^3}{3} \psi}_{\text{Gravitational Force}} - \underbrace{\frac{R'}{1+R} \phi' - \phi''}_{\text{Time dilation}}$$

اگر  $R = ct_s$  و هیچ منبع گرانشی موجود نباشد پس جواب معادله بالا نوسانات لستنی

$$\theta_0 = \theta_{ini} \cos(kc_s \eta + \varphi)$$

مبتنی بر شرایط اولیه بی دردد در  $\ll k\eta c_s$  یعنی خارج از افق انت دهندهای تابش و ماده ثابت هستند پس این شرط ايجاب می کند که  $\varphi = 0$ .

آنگون حالت هائیز را در نظر بگیرید:

Super-Horizon

(A)

در این رژیم  $\ll k\eta c_s$  پس  $\ll k\eta c_s$  و  $\theta_0 = -\frac{2}{3}\varphi$   
 یعنی همیشه است  $\theta_{obs} = \theta_0 + \varphi = \frac{1}{3}\varphi \Rightarrow \theta_0 = -\frac{2}{3}\varphi$

Horizon-crossing یعنی  $k\eta = 1$

(B)

در این وضعیت هم ترانس هم می شود پس نقطه تعادلی جایابی شود. تعیین مقدار همفر

نشان با در نظر گرفتن  $\theta'' = \theta' = 0 \leftarrow \theta_0 = -\frac{1}{3c_s^2}\varphi$

$$= -(1+R)\varphi = -\varphi$$

که البته بلذرت زمان این مقدار نشان به است مزوکت می کنند.

در این معیارن نوبت است محل  $\theta_0$  تادلی

Sub-Horizon

(C)

که البته به است همفریل می کند

Intermediate و Sub-Diffusive. که در حالت اول برای  $\eta$

در حالت دوم بعد از دامپنیدگی رخ می دهد.

به بیان دیگر در حالت (A) خارج از افق هستند پس  $\theta_0 = -\frac{2}{3}\varphi = c\delta$

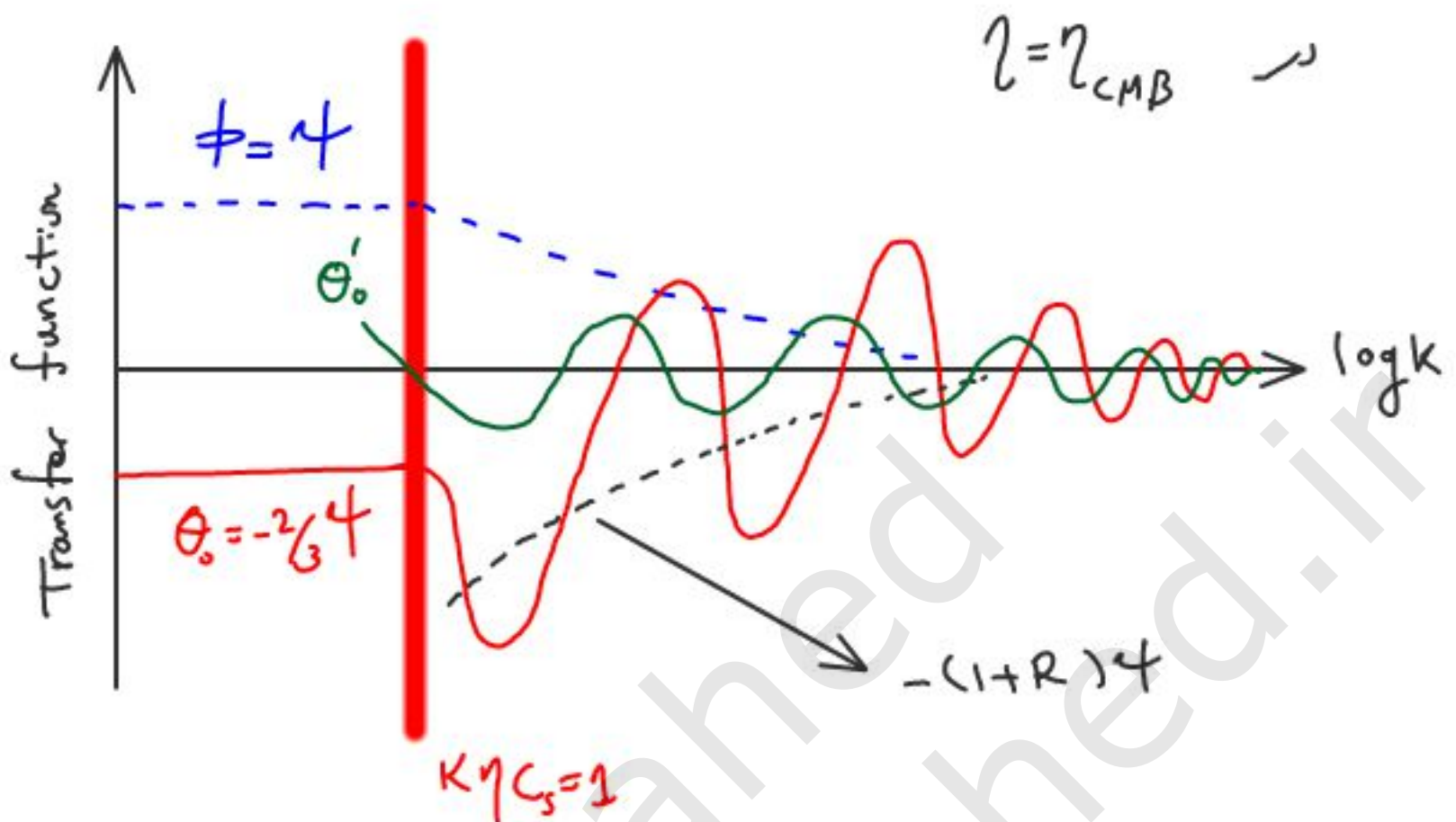
در حالت (B) نسبتاً مقدار نشان به مقدار  $\theta_0^E = -(1+R)\varphi$  حرکت می کند. در ابتدا هم

$$\theta_s^{Eg} = -4$$

R خنجر یک است پس

72

دکتر زیر تحول کمیت های مختلف در تابع انتقال نشان می دهد:



فصل اول:

$$\theta_0 + \phi = (-2/3 \phi - \phi) + \phi = -2/3 \phi$$

$$C_{\ell}^{SW} \sim \langle |\theta_0 + \phi|^2 \rangle = 4/3 \phi^2$$

فصل دوم:

$$\theta_0 + \phi \approx -2/3 \phi + \phi = -1/3 \phi$$

$$C_{\ell}^{SW} \sim \langle |\theta_0 + \phi|^2 \rangle = \frac{4^2}{9}$$

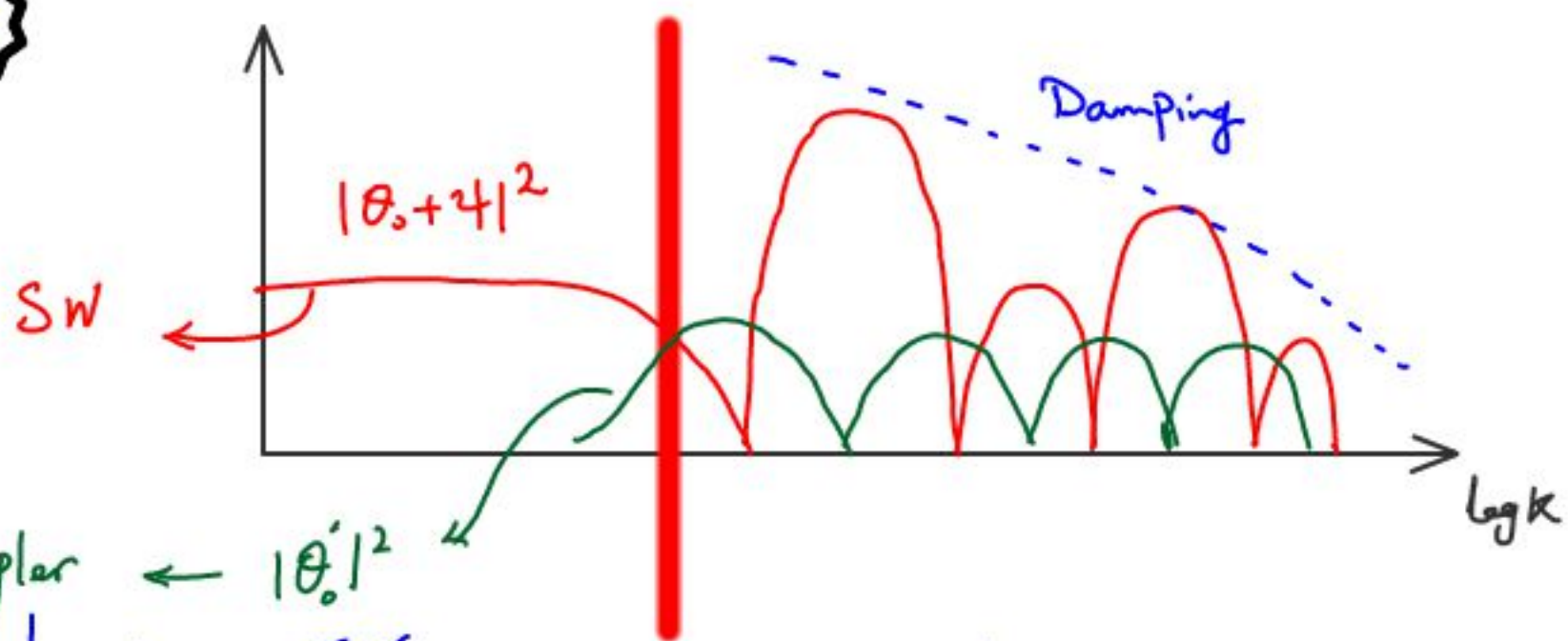
فصل سوم: به معنای به شکل  $\phi$  کاهش یافته است و  $\theta_0$  نیز تحول بخش نادری  $-(1+R)\phi$

تحول یافته است دی نه تنها؛ طور موثری تر از گفت که

$$|\theta_0 + \phi|^2_{2\text{-peak}} < |\theta_0 + \phi|^2_{3\text{-peak}}$$

این فله کمی فریبناز فله های زوج هستند. در شکل زیر هم SW در دپیر در  $C_{\ell}$  رسم شده است:

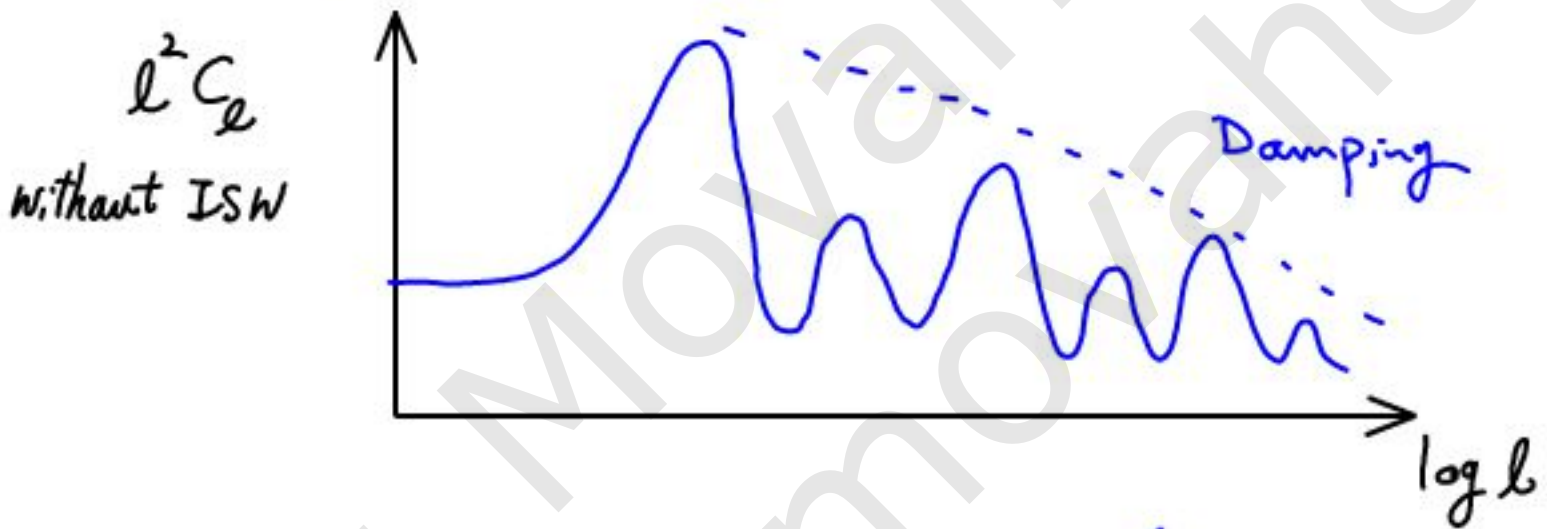




Doppler  $\leftarrow |\theta_0'|^2$

بنیادیت به رابطه  $k = \frac{l}{\eta - \eta_{CMB}}$  البته برای  $l$  های رقیب می توان چند

توان را به صورت شایب التیبه بدین سهم اثر ISW به صورت زیر رسم کرد:



$$C_l = \langle |\theta_0 + \phi|^2 \rangle_{CMB} + \langle |\theta_0'|^2 \rangle_{CMB} + \int_{\eta_{CMB}}^{\eta_0} d\eta \langle |1 - \phi' - \phi|^2 \rangle (\eta - \eta_0)$$

دکندن وقت آن رسیده است که سهم ISW را برر کنیم.

### ISW effect

گفتم که در عالمی که پانسی های رانشی در حال تحول باشند بنابراین میزان انتقال به سرخ و انتقال آبی قدرتمند از این لحاظها به طور مشهود در رانشی نمی کنند پس اثر ISW خواهیم داشت. پس تحول زمانی  $\phi$  تعیین کننده سهم این اثر خواهد بود.

توجه: عبارات میدان اینشتین خواهیم داشت:

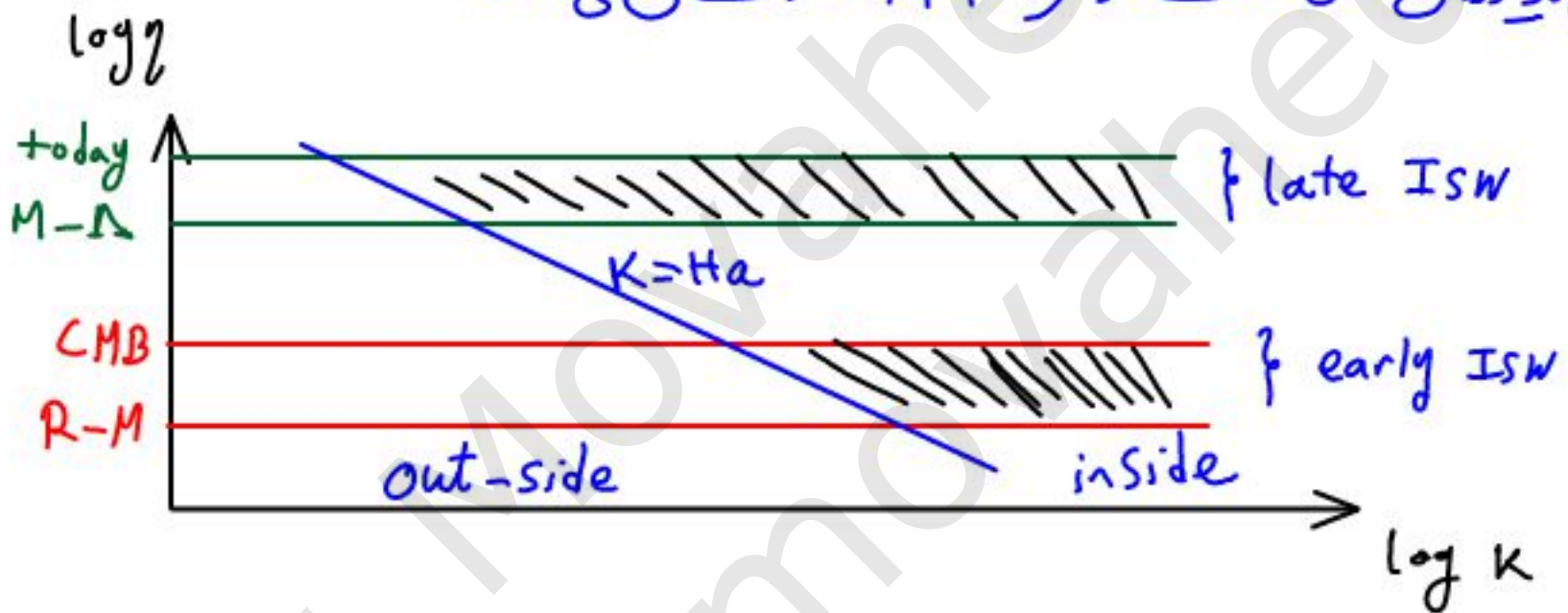
74

Radiation era :  $\frac{K^2}{a^2} \psi \sim \bar{\rho}_r \delta_r \sim a^{-4} \Rightarrow \psi \sim a^{-2}$

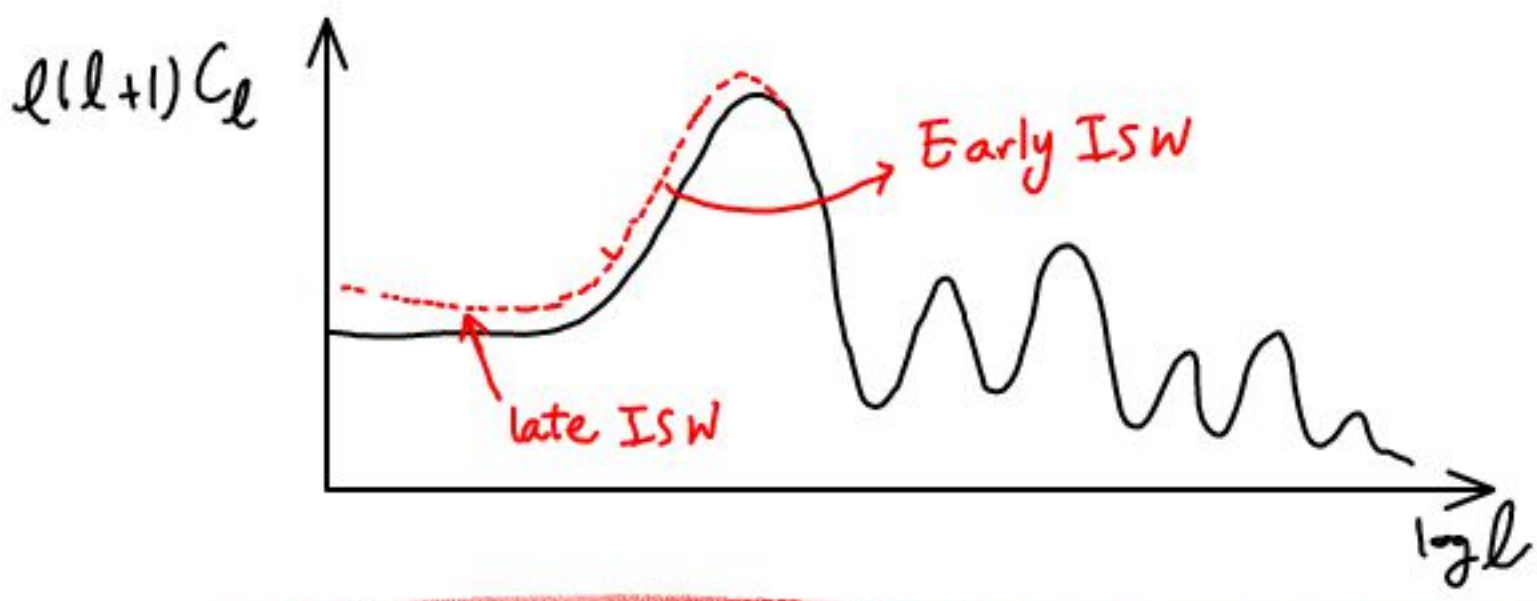
Matter era :  $\frac{K^2}{a^2} \psi \sim \bar{\rho}_m \delta_m \sim a^{-3} a \Rightarrow \psi \sim ct^2$

$\Lambda$  era :  $\frac{K^2}{a^2} \psi \sim \bar{\rho}_\Lambda = cts \Rightarrow \psi \sim a^2$

پس در میدان پیش و از زیر انتظار داریم هم ISW داشته باشیم.  
نکته زیر در آن های مختلف داریم  $\psi + \psi' - \psi''$  نشان می دهد:

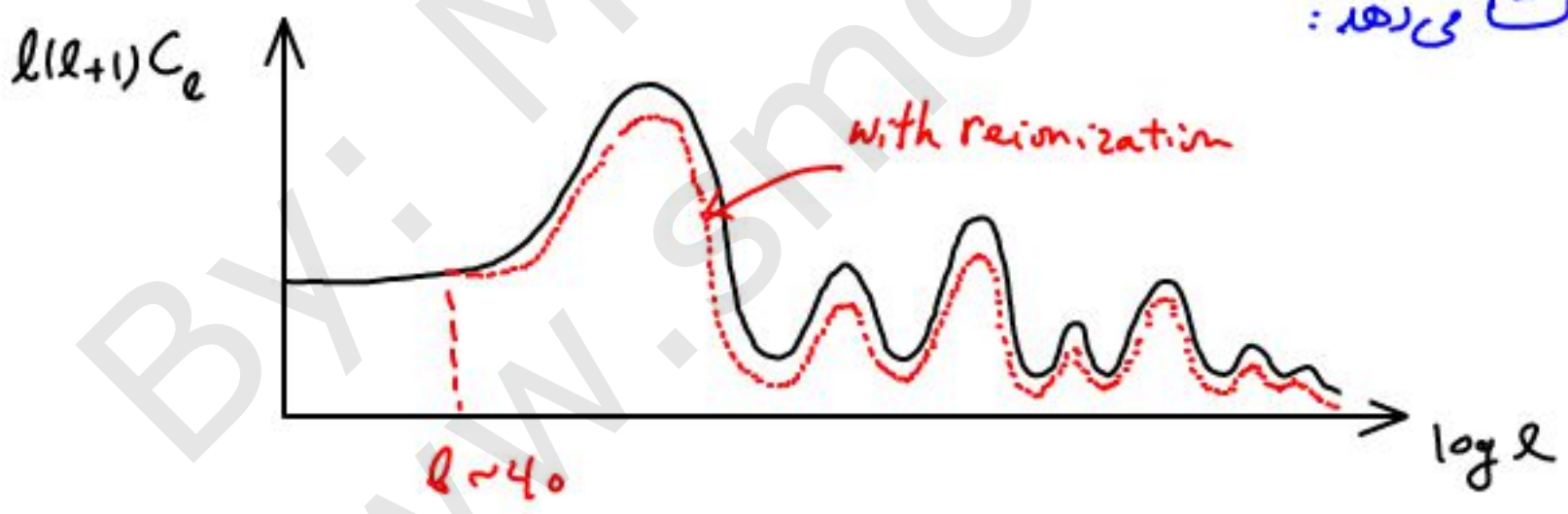


تجسای ها شور خورده هم ISW نشان می دهد. قبل از جدا شدن فوتون از زمینه، افت و خیزهای  
مترکب به محض ورود به افق صوتی شروع به کاهش می کنند. دهگی که در خارج از افق بچ زده کند. بنابراین در  
ابعاد افق صوتی یعنی  $l < 200$  هم ISW اولیه را خواهیم داشت. در میدان ماده غالب  
در رژیم خطی به خوبی مشاهده می شود که افت و خیزهای مترکب ثابت هستند. در دوران انرژی تاریک  
افت و خیزهای مترکب در تمام مقیاسها معمول می شوند و در نتیجه دوباره هم ISW خواهیم داشت.  
از آنجا که هم این افت و خیزها در نقطه ورود به افق اهمیت دارند بنابراین در دوران انرژی تاریک در مقیاسهای  
بزرگ هم ISW هم خواهد بود یعنی در نواحی بزرگ یعنی  $l$  های کوچک پس می توان اثر ISW  
را در شکل زیر نشان داد:



### Reionization Effect

یکی دیگر از اثرات مهم بر روی طیف CMB، اثر باز یونش است. قبلاً دیدیم که در  $l \approx 10$  یک قله دیدیم در تابع  $visibility$  ( $\eta$ ) وجود داشت یعنی انتقال پراکنده فوتونهای CMB، اثر گاز یونیزه شده سر راه افزایش می یابد. بنابراین می توان گفت که این اثر به طور موثر باعث هدایت کردن CMB می شود و در نتیجه طیف توان CMB کاهش می یابد. این کاهش تقریباً در حدود  $l \approx 15$  خواهد بود. محاسبات نشان می دهد که از  $l \approx 40$  این کاهش طیف اتفاق می افتد. شکل زیر این اثر را به طور شگفت انگیز نشان می دهد:



بنابر آن عوامل ذکر شده اثراتی همچون SZ ، SZ جنبشی ، اثر زناقص توپولوژیک مثل ریسر نای کربانی و اثر مربوط به دهانه تلسکوپ که اصطلاحاً Beam effect و نهایتاً اثرات نرنه ارتعاش در عوامل پس زمینه در طیف CMB سهم دارند.

## Beam effect

به سبب محدود بودن اندازه دهانه تلسکوپ و در محدوده های موجود در آشکارساز به محض اینکه بخواهیم از یک ناحیه اطلاعات جمع آوری کنیم بدان صورت اینج امکان وجود دارد که از نقاط دیگر که مورد توجه نیست فوتون وارد دهانه تلسکوپ شود و اصطلاحاً تصاویر مات شود. چگونگی مدل این فرآیند با در نظر گرفتن یک پیکس (Convolution) به صورت زیر انجام می شود:

$$T_B(\vec{k}, \Gamma) = \int d\vec{k}' B(\vec{k} - \vec{k}') T(\vec{k}')$$

که در این رابطه:

$$B(\vec{k} - \vec{k}'; \Gamma) \equiv \frac{1}{2\pi\Gamma^2} e^{-\frac{|\vec{k} - \vec{k}'|^2}{2\Gamma^2}}$$

FWHM  $\equiv$  Full-width at  
Half Maximum

$$\Gamma = \frac{FWHM}{\sqrt{8 \ln 2}}$$

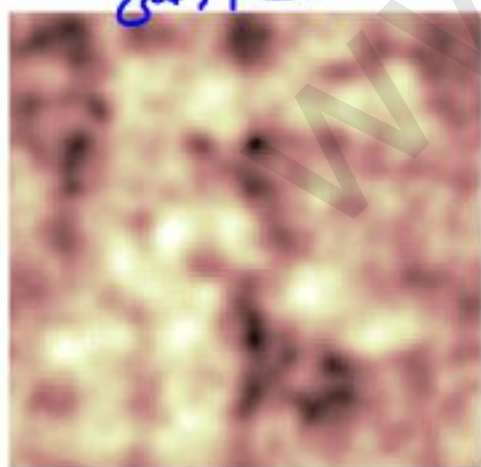
است. تابع همگی در حضور لایسم، صورت زیر خواهد بود:

$$C(\alpha; \Gamma) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) B_l C_l P_l(\cos \alpha)$$

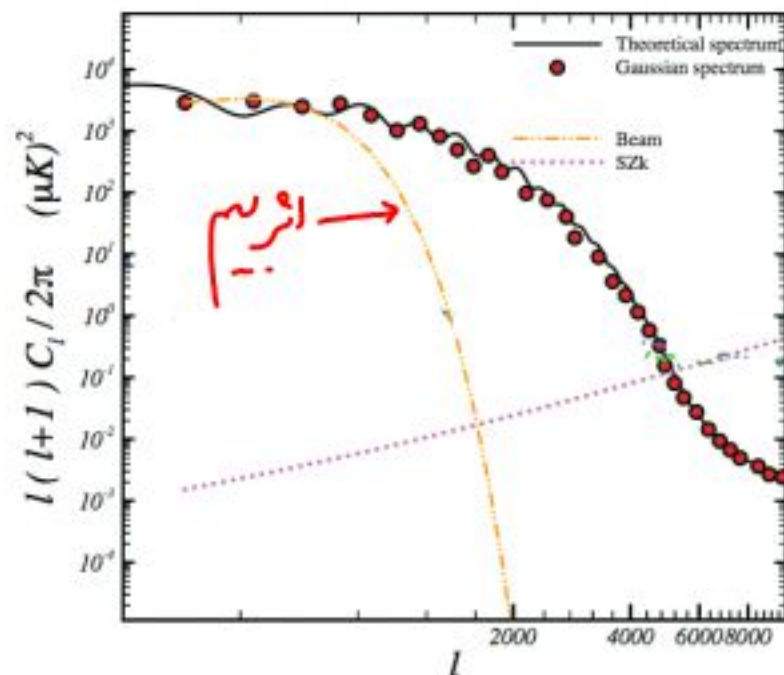
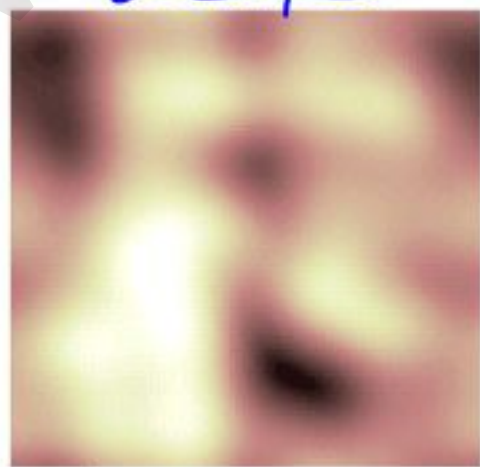
نگار زیر چگونگی تأثیر این اثر را نشان می دهد:

(FWHM = 2m')

نقشه اصلی



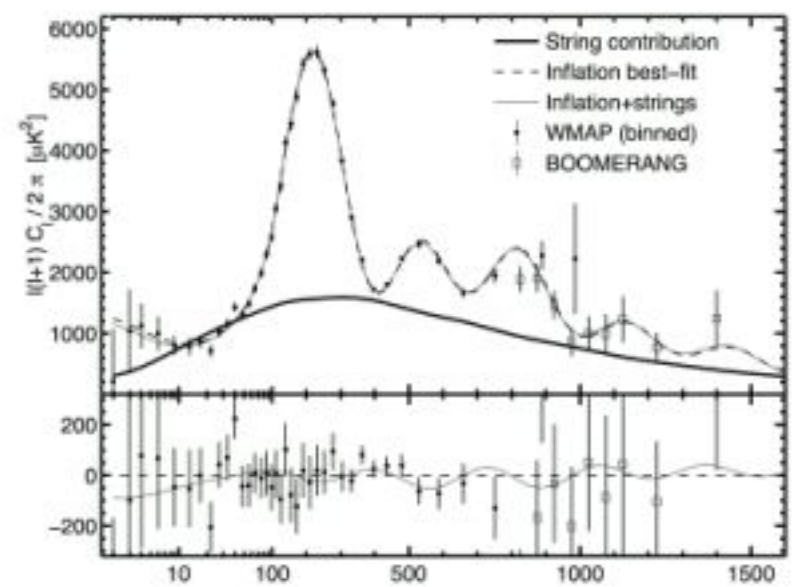
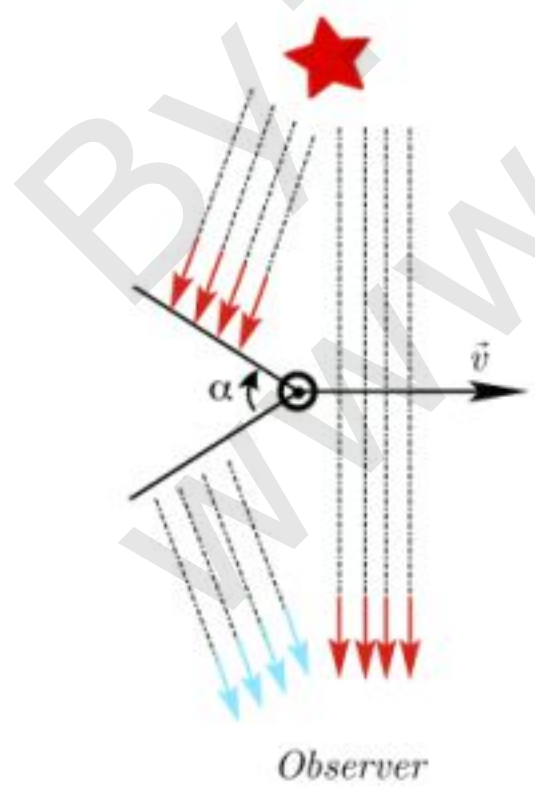
نقشه مات شده



به خوبی مشخص است که جذبات به اندازه نوبایه کوچک یعنی لای بزرگ از بین رفته است

### Cosmic String

به طرز کلی تا اواخر قرن ۲۰ تصور می شد که رسیانهای کیهانی یکی از اصلی ترین عوامل برای تشکیل ساختار هستند. لاین گذشت طیف توان CMB و شاهد، قله های صوتی در آن، نظریه های نوسان یعنی توپولوژی سود توپولوژی تراگرفت. زیرا رسیانهای کیهانی به عنوان یک دسته از نواقص توپولوژیک فقط یک قله بین در طیف توان پس بینی می کرد. افزاینده با غنای وجود لغت ویژگیهای زیر در طیف توان مهم حداکثری در حدود ۱۰ درصدی برابر رسیانهای کیهانی در لیبارانت و ویژگیهای اولیه در نظر گرفته می شود. رسیانهای کیهانی که نوعی از نقیصه های توپولوژیک محسوب می شوند در نتیجه گذارهای در کیهان اولیه ایجاد شده اند. مکانیزمهای مقداری برای تشکیل این موجودات یک بعدی در تئوری می گرد. از مشخصه های این رسیانها  $G\mu$  است که در آن  $\mu$  انرژی در واحد طول رسیان است. از مهم ترین توپولوژی برای این رسیانها اثر Kaiser-Stebbins است. به طور آشوبی اثر رسیان از جلوه های عبور کنند، لب اثرات گرانشی انتقال، سرنخی در پرتوهای نوری که از پس این رسیان، ناظری رسد لیبارانت کند. در شکل زیر لاین اثر، صورت لاین است:



PRL 100, 021301 (2008)

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{8\pi G\mu}{c^2}$$

در طیف توان نیز اثر رسیانها صورت  $l \gg 1$  است که در شکل ملاحظه کردیم  $l(l+1) C_l \sim l^{-0.9}$

## Parameter Dependence of CMB Spectrum

هم ترين تجزيه‌ي که با بحث انت و فیزیک بر روی طیف CMB می‌شوند بحث شد. اکنون داریم بخش می‌خواهیم به طور خاص اثر کمیت‌های هم‌کیه‌شناسی را بر روی طیف CMB در سه نوبه‌ی کنیم. در اینجا مدل زائریکی‌شناسی یعنی مدل  $\Lambda$ CDM را در نظر می‌گیریم پس هم‌زین کمیت‌ها عبارتند از:

$$\{A_s, n_s, \omega_b, \omega_m, \Omega_r, \tau\}$$

که بدان  $P(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1}$  طیف توان انت و فیزیک‌های اسکالری اولیه است

$$\omega_b = \Omega_b h^2 \quad \text{و} \quad \omega_m = \Omega_m h^2 \quad \text{و} \quad H_0 \equiv 100 h \text{ km/s/Mpc} \quad \text{و} \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}$$

و  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$  و  $\tau$  عمق آینه‌ی است. به طوری می‌توان گفت:

①  $l_{\text{Peak}} \rightarrow \text{Geometry}$

② Odd/even Peak ratio  $\rightarrow \omega_b$

③ Damping envelope  $\rightarrow a_{\text{eq}} \{\omega_m, \omega_b, \Omega_r\}$

④ Overall Peak amplitude  $\rightarrow \{\omega_m, \omega_b\}$

⑤ Global amplitude  $\rightarrow A_s$

⑥ Global Tilt  $\rightarrow n_s$

⑦ Plateau  $\rightarrow \Omega_r$

⑧ Amplitude for  $l \gg 40 \rightarrow \tau$

① \* مکان-قله اصلی: افق صوتی بر روی CMB تحت زاویه  $\alpha$  دیده می شود شکل

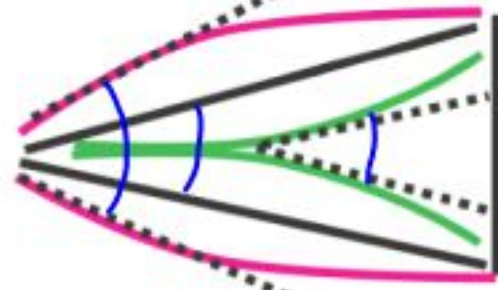
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [dx^2 + S^2(x) d\Omega^2]$$

$$ds^2 = 0 \text{ and } dx = 0, d\varphi = 0$$

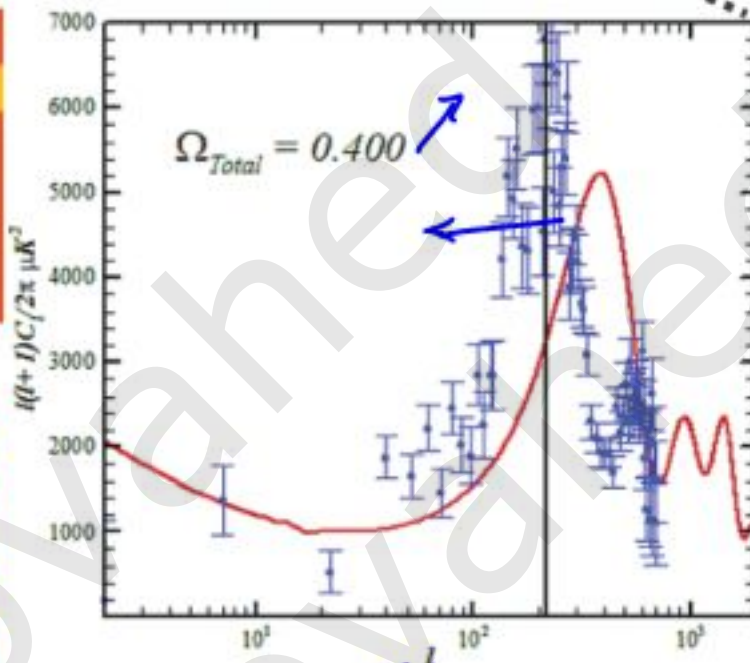
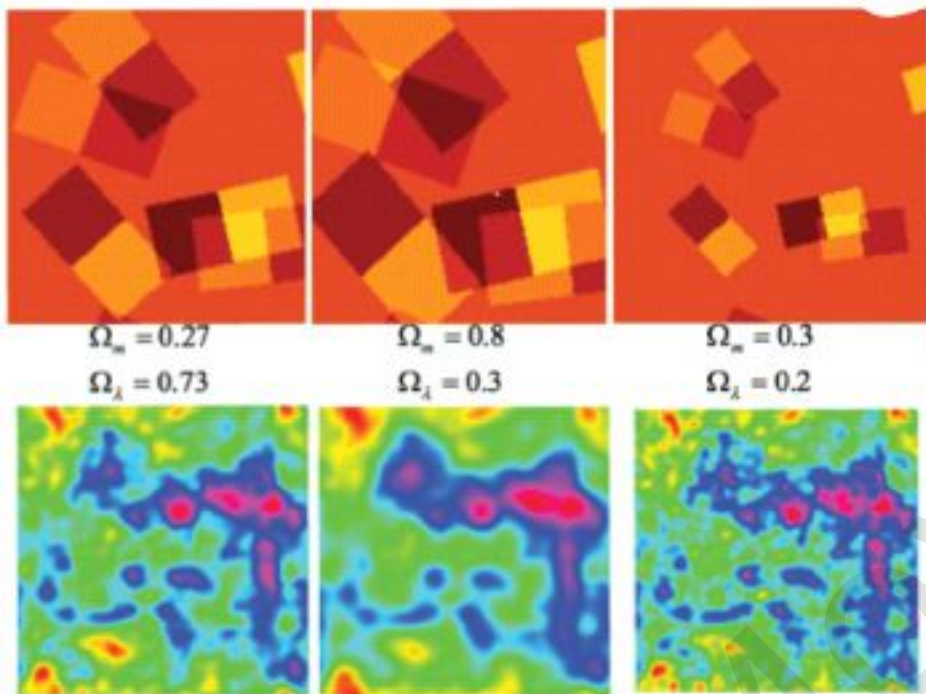
$$\alpha = \frac{L}{S(x) a}$$

$$\alpha_{open} < \alpha_{flat} < \alpha_{closed}$$

$$l_{open} > l_{flat} > l_{closed}$$



$L = \text{physical length}$



در اینجا افق صوتی که طول فیزیکی آن برابری است با:

$$L = a_{CMB} \int_0^{\eta_{CMB}} c_s d\eta$$

$$\Omega_{total} = \Omega_m + \Omega_b + \Omega_r + \Omega_\Lambda$$

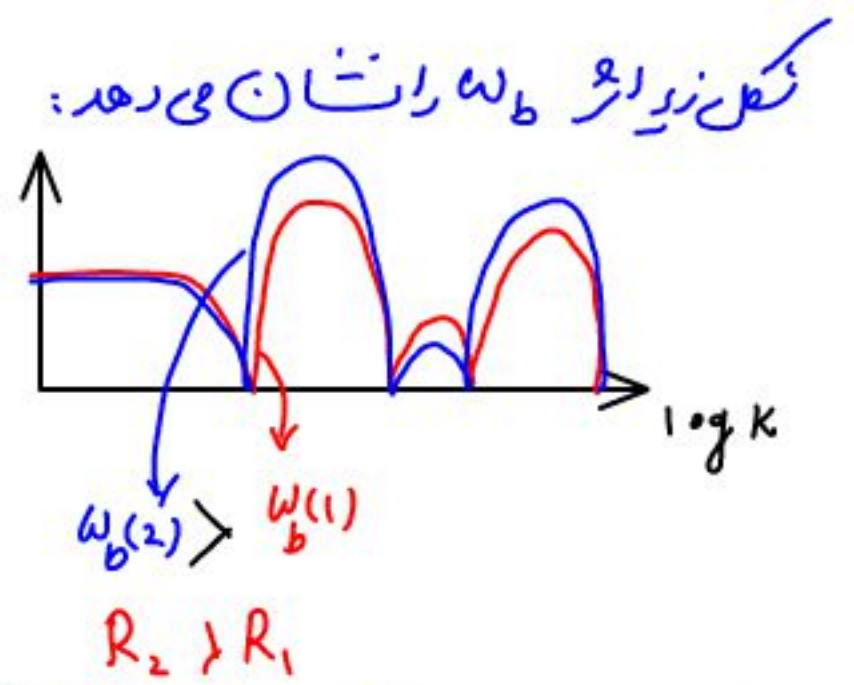
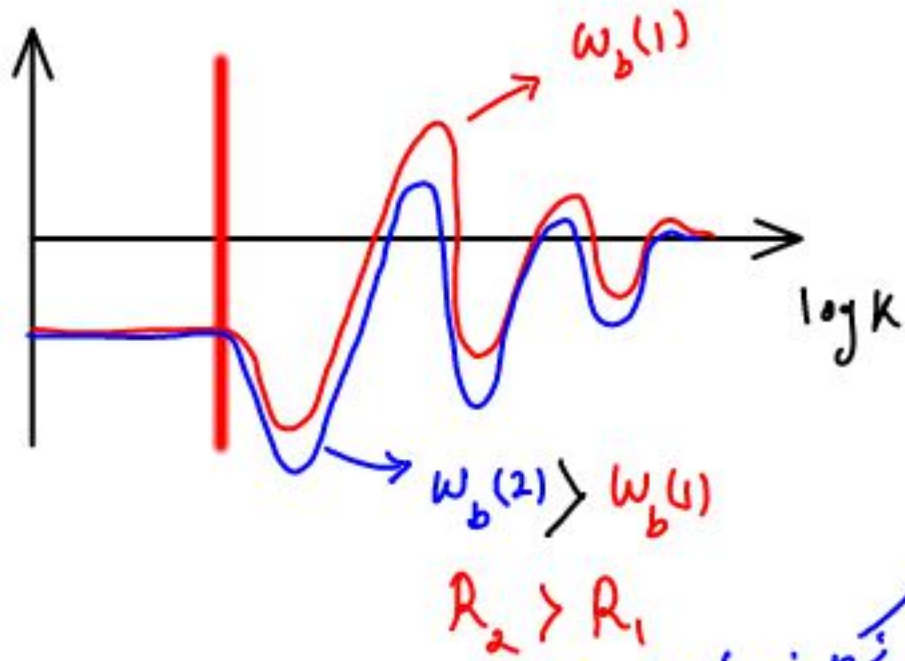
این  $\alpha$  بزرگتر است پس  $l = \pi/\alpha$  که خواهد شد. در شکل بالا سمت چپ به خوبی لنگر

$\Omega_{total}$  بررسی بخشی از طبع تقارن CMB نشان داده شده است.

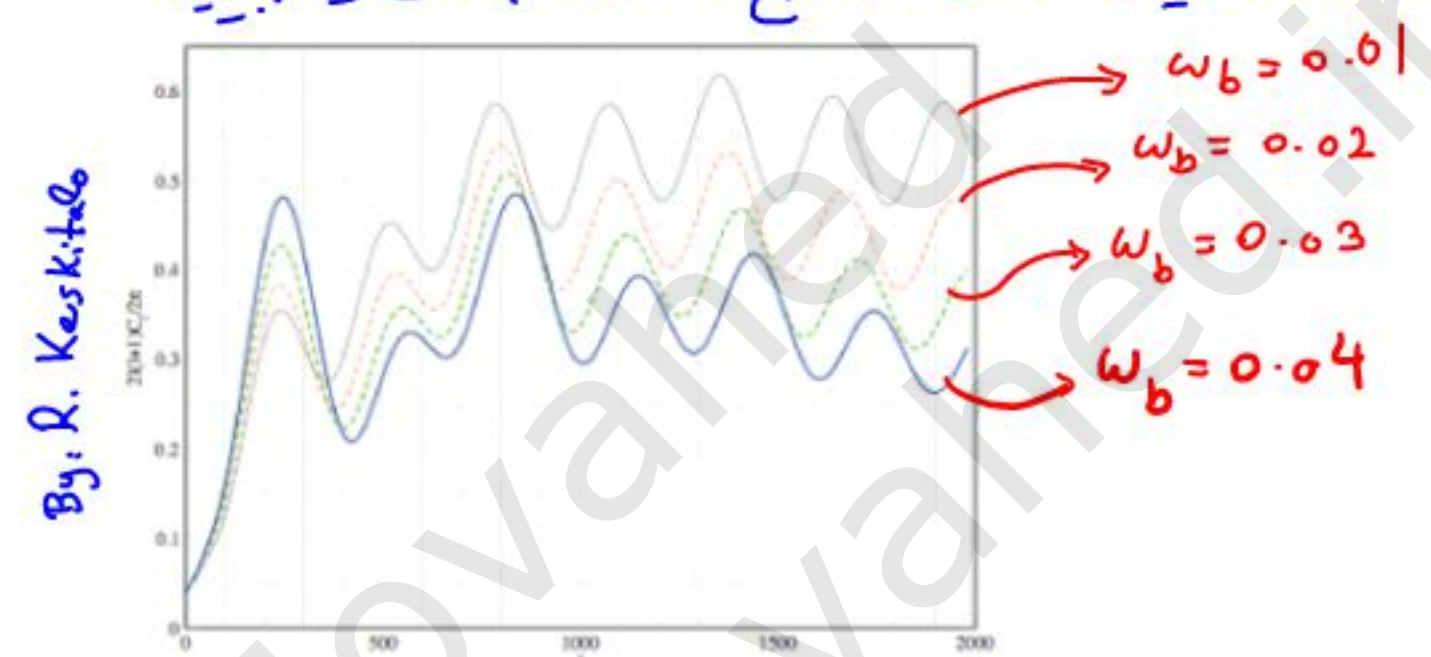
② \* دیدیم که عبارت  $4(1+R)$  - منسوب  $\theta$  را تغییر می داد. حال توجه کنید

$$R = \frac{4}{3} \frac{\rho_b}{\rho_r}$$

پس با افزایش  $\rho_b$  یعنی  $\rho_r$  با این  $R$  افزایش می یابد پس دانه نوسانات در دوران غالب بود تا پیش زاری شود و در نتیجه قله افزایش می یابند



این قدهای فراتقویت شده و قدهای زنجیر کاهش می یابند نگاه نزدیک را ببینید:



③ \* پوشش بزرگی در قدهای صیف توان نیز کم است تأثیر زمان بر بزرگی تأثیر و ماهه است.

با تغییر  $a_{eq}$  دوره ای که نوسانات صورتی توسط ابرویها بزرگی شود تغییر می کند.

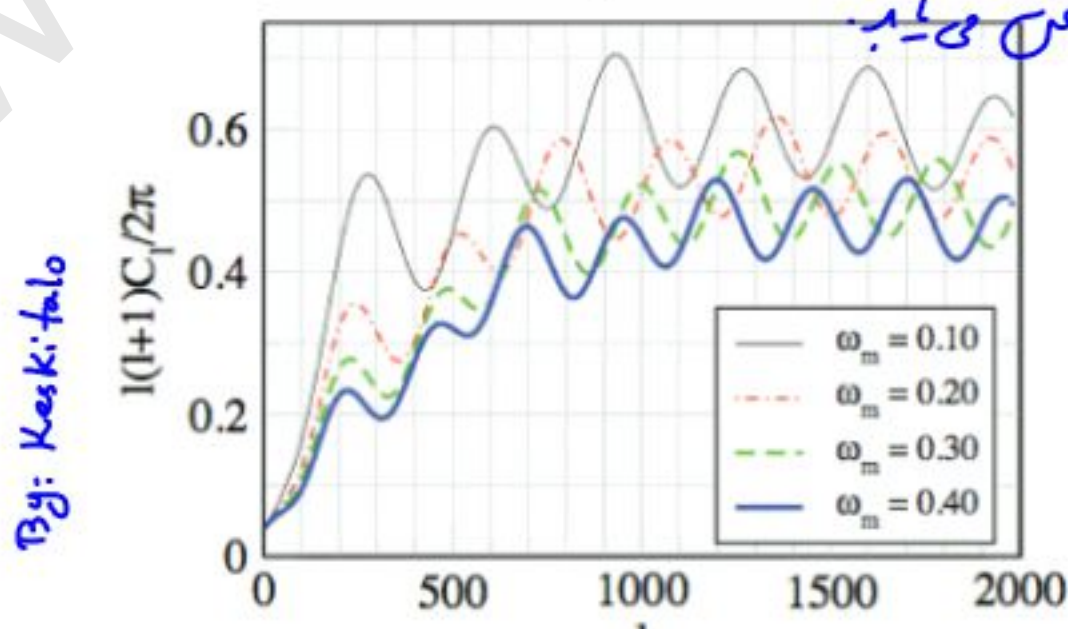
همچنین نشان از  $Early-ISW$  نیز تغییر می کند. هر دو اثر در یک جهت هستند.

در زمان بزرگی زودتر رخ دهد یعنی  $a_{eq}$  کوچک شود یعنی  $\omega_m$  زیاد شود پس زمان

کمتری در اختیار نوسان وجود دارد همچنین مدت زمان کمتری برابر تحول اختلافات مرتب وجود دارد پس

$$\omega_b = 0.01$$

$Early-ISW$  نیز کاهش می یابد.



نگاه نزدیک را ببینید:



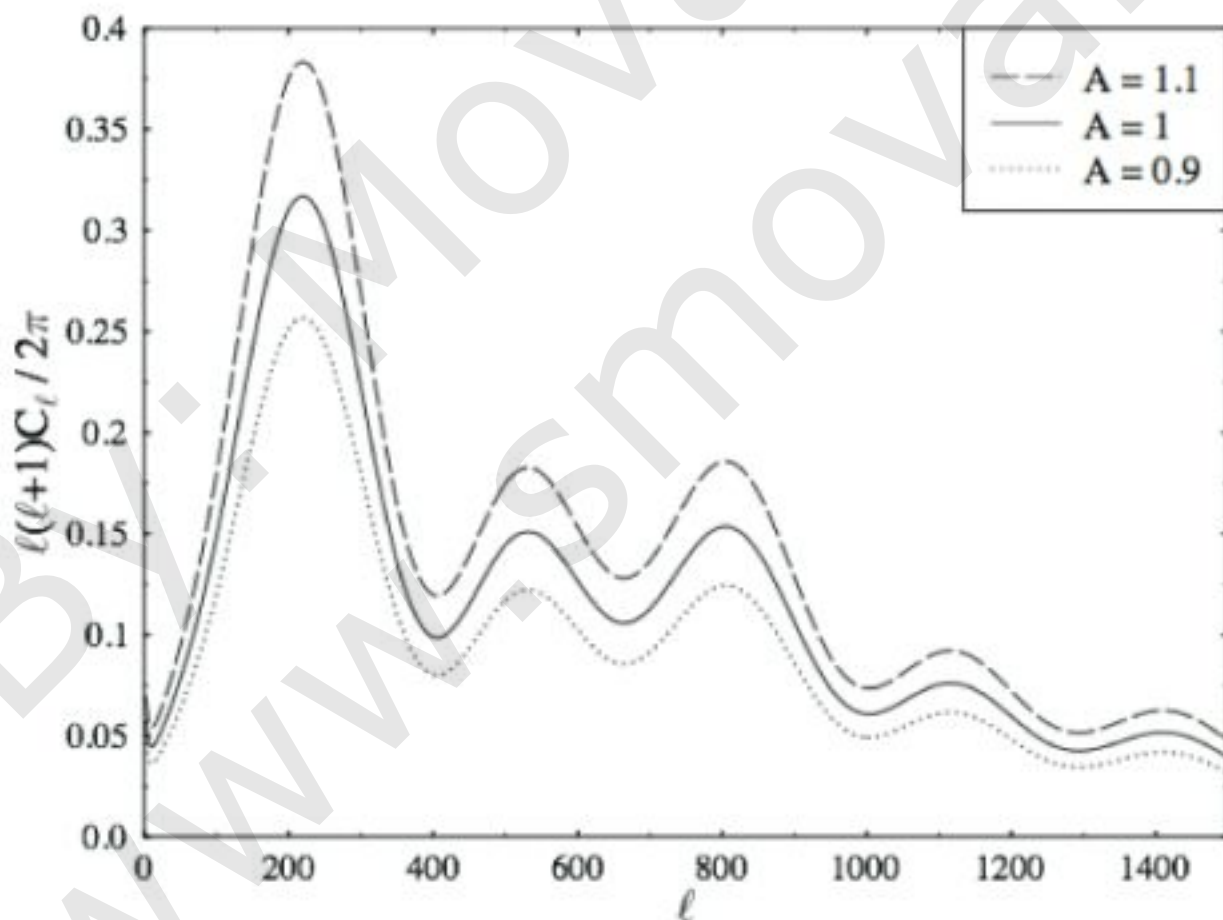
④ اثر  $\omega_b$  و  $\omega_m$  روی قله نیز در بخش قبل مشخص شد.

با افزایش  $\omega_b$  پس از افزایش یافته و مهم نوسانات اولیه افزایش می یابد. اما با افزایش  $\omega_m$  زمان برابر سر تغییر انجام می گردد و فوتره فرصت انجام نوسانات بدون مهم سو در می آید خواهد داشت پس قله کاهش می یابند

⑤ دامنه طیف توان نیز تحت تاثیر دامنه طیف اختلالات اولیه است. دیدیم که

$$C_\ell = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dk}{k} \Theta_\ell^2(\eta_0, k) P(k)$$

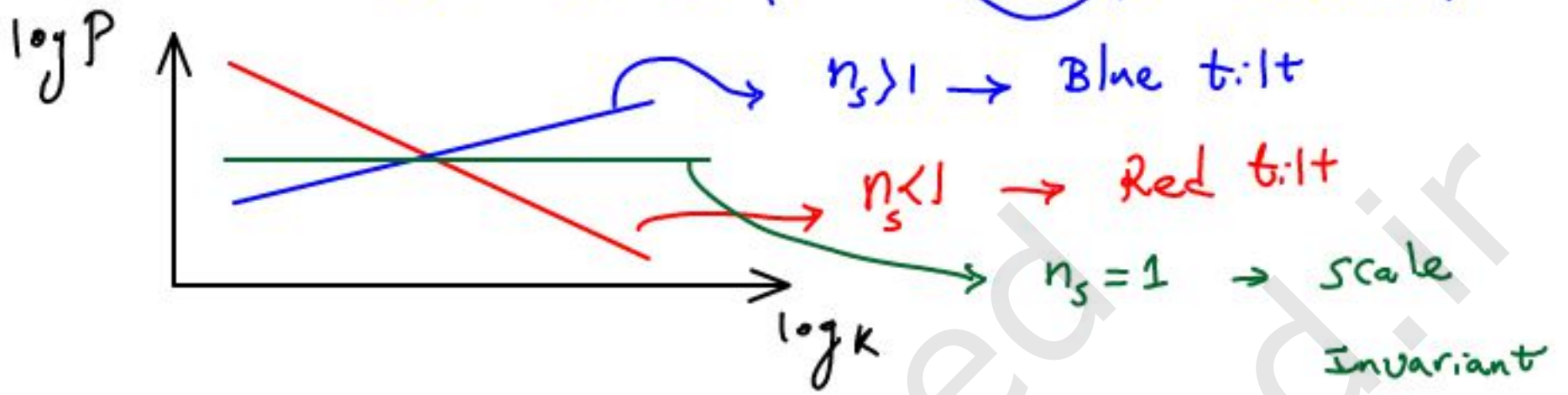
پس با بنای  $P(k) = A_3 \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1}$  پس افزایش  $A_3$  باعث افزایش دامنه قله در سراسر طیف CMB خواهد شد. شکل زیر این اثر نشان داده است:



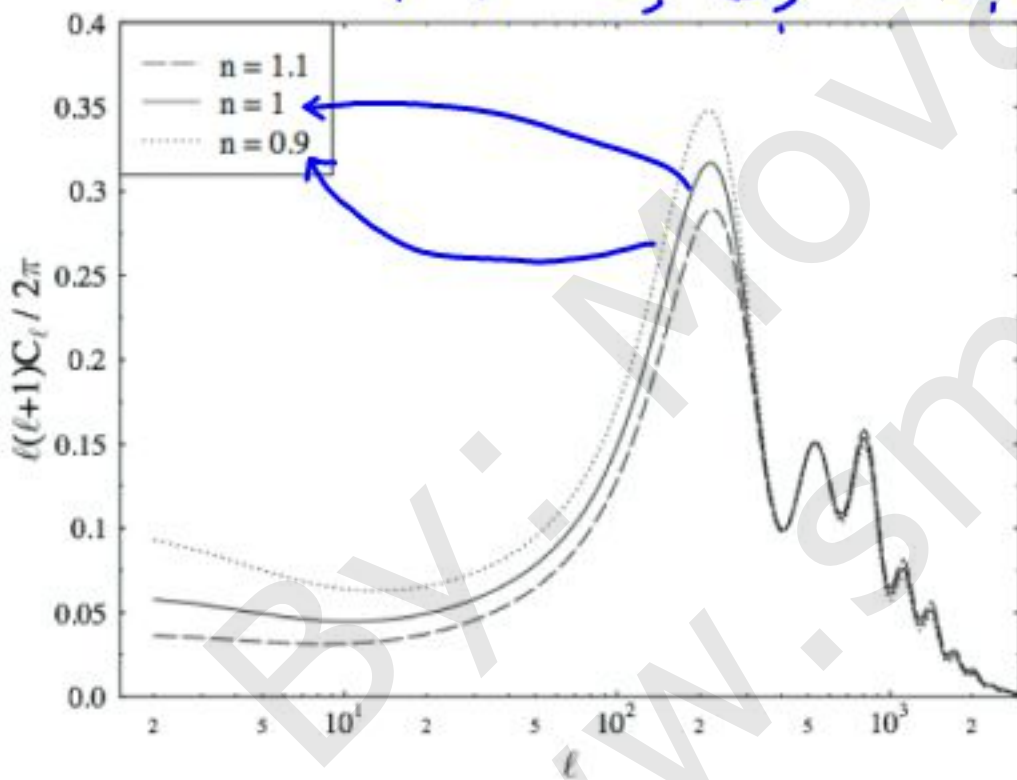
<http://theory.physics.helsinki.fi>

⑥ روت حفس صیف اختلاوات اومیه اسکالرکی یعنی  $n_s$  تیز به شرح زیر خواهد بود:

بد نظر رفتن  $P(k) \sim k^{n_s-1}$  بدان صورت در  $n_s < 1$  پس برابر  $k$  دی کرچک  
 هم توان بالاتر است و برابر  $k$  دی بزرگ هم توان کمتر خواهد بود یعنی



برابر  $n_s < 1$  پس لر توان در  $k$  دی کرچک بزرگ شوین طیف CMB بزرگی شود.



شکل زیر این لررات شان می دهد.

<http://theory.physics.helsinki.fi>

(7) \* در لای کره کیت  $l(l+1)C_l$  تقریباً کیت است.

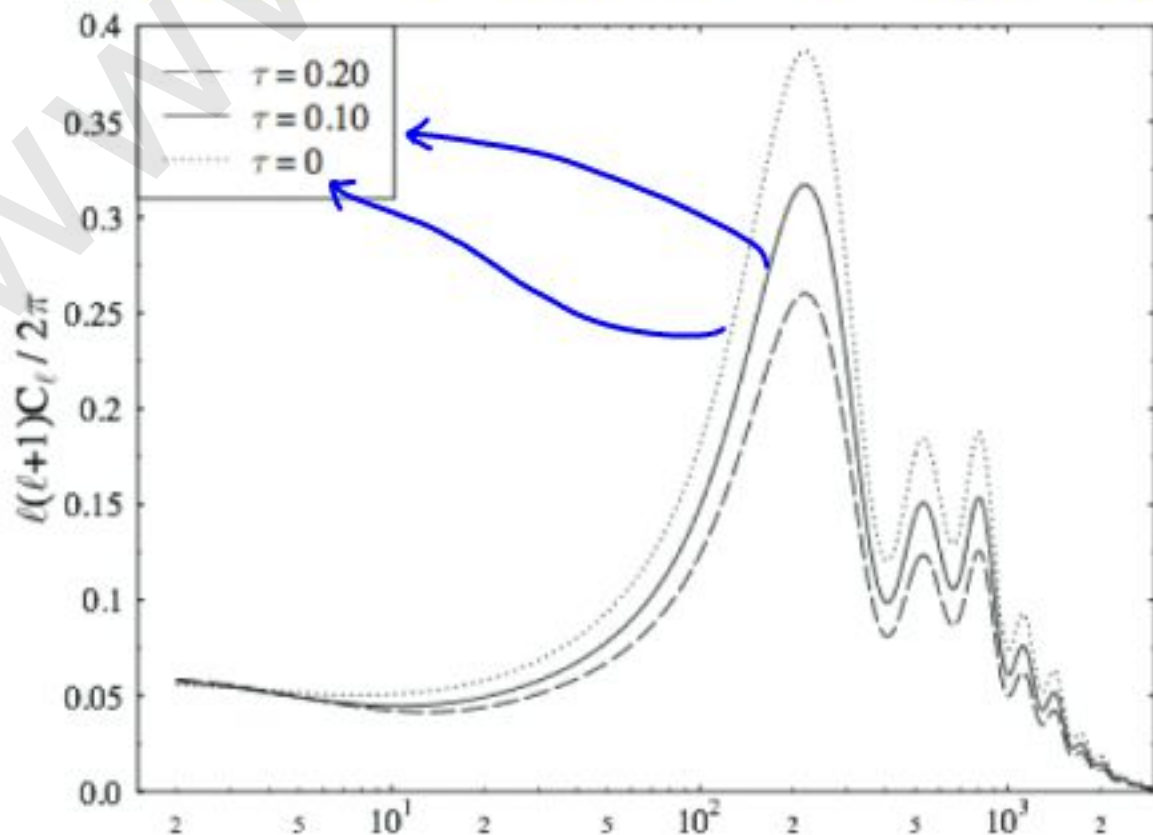
دیدیم، در تابع همبستگی داریم:

$$C(\alpha) = \int (2l+1) C_l P_l(\cos \alpha) dl$$

$$= \int dl \underbrace{l(l+1) C_l}_{\tilde{C}_l} P_l(\cos \alpha)$$

اگر  $P_l(\cos \alpha) \sim c + s$  در آن صورت کیت  $l(l+1) C_l \sim c + s$  نیز لای کره کیت  
 این، نشان  $l(l+1) C_l$  و توان نشان بسیار مرتبط با طیف توان اولیه برقرار کرد.  
 (ص ۲۴۴) کتاب Modern Cosmology از Dodelson را ببینید  
 افزایش  $\Omega_m$  پس دورانی که اختلافات ترکیب محتمل شوند بیشتری شود پس در  
 لای کره کیت هم late-ISM وجود دارد، باعث افزایش طیف می شود.

(8) \* اثر  $\tau$  نیز؛ افزایش میزان پخش و کاهش انت ریز همراه است  
 پس، افزایش  $\tau$  در نتیجه طیف CMB، طور غالب کاهش می یابد.



لذا هر چه قوی است

## CMB - Polarization

**مقدمه:** قبل از واجهت‌دهی پراکنده، نور کاملاً هم‌دراهم می‌شود پس انتشار تولید نور قطبیده ضعیف واقع می‌شود اما هر چه به زمان جدا شدن نور CMB از زمین نزدیک می‌شویم پراکنده‌ها کاملاً هم‌دراهم می‌شوند پس افتال وجود ردیابی از قطبش در تابش CMB افزایش می‌یابد. برعکس غایب که در آن دوران رخ می‌دهد پراکنده‌ها هم‌دراهم است.

سطح مقطع پراکنده‌ها هم‌دراهم و قطبش مربع خود می‌گردد. اگر بردار قطبش در صفحه پراکنده باشد پس

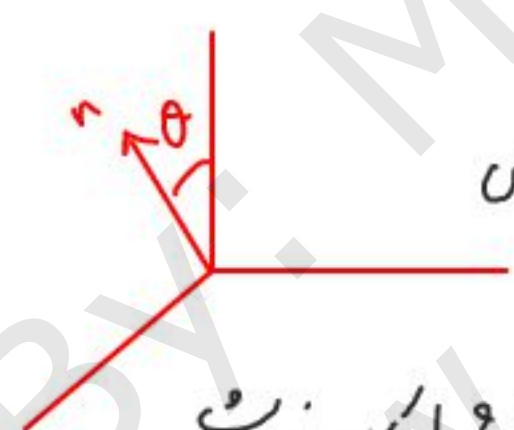
$$\sigma_T = C_m^2 \beta$$

که  $\beta$  در این رابطه زاویه پراکنده است. به طور دقیق‌تر داریم

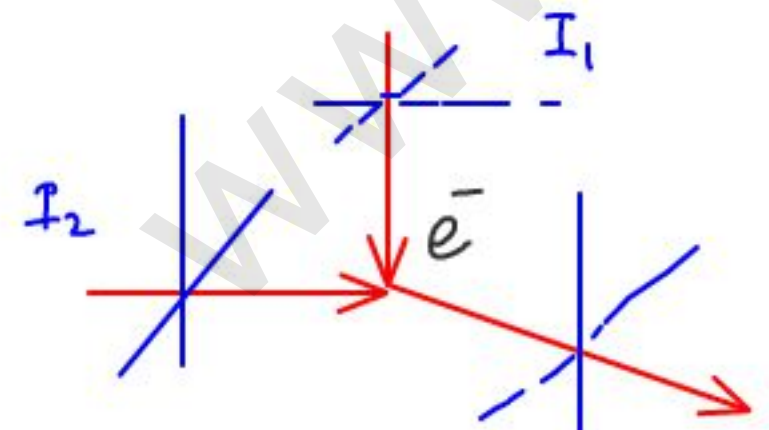
$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{K a^6}{2} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 C_m^2 \beta$$

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{K a^6}{2} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2$$

} عدوت ۱۱۱۱۱۱۱۱ قطبش موازی، صفحه پراکنده  
۱ ~ ~ ~ عمود بر صفحه پراکنده



اگر فوتون به صورت کامل هم‌دراهم فرو بردند بنا بر این انتظار داریم که به طور خالص قطبش داشته باشیم. اما در شدت فوتون فرو بردی که در یک راستای آید بیشتر از شدت فوتون باشد که از جهت دیگر آید در آن صورت ایماز قطبش امکان پذیر است.



فرض کنیم این یک صفحه قطبش است  
وجود قطبش  $I_1 \neq I_2 \rightarrow$

در پراکنده‌ها هم‌دراهم برای CMB همان‌طور که در پاره‌های

$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{n})$  را در نظر گرفت. یعنی  $\hat{n}$  در راستای حاصل بردار  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  در جهت عمود بر  $\hat{n}$  که جهت قطبش را نیز نشان می‌دهند. پس

$$\vec{E} = E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2$$

می توان پارامترهای Stokes را تعریف کرد:  $(I, U, Q, V)$

شد  $\rightarrow I \equiv |\epsilon_1|^2 + |\epsilon_2|^2$

میزان قطب خطی  $\rightarrow Q \equiv |\epsilon_1|^2 - |\epsilon_2|^2$

$\rightarrow U \equiv (\epsilon_1^* \epsilon_2 + \epsilon_2^* \epsilon_1) = 2 \text{Re}(\epsilon_1^* \epsilon_2)$

$\rightarrow V \equiv 2 \text{Im}(\epsilon_1^* \epsilon_2)$  قطب دایره ای را نشان می دهد

در پراکنندگی، مسدود کردن قطب دایره ای بوجود نمی آید پس  $V=0$  پس می توان گفت که می توان میدان CHD را با ماتریس  $2 \times 2$  نوشت:

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Q \equiv \frac{(I_{11} - I_{22})}{4} \\ U \equiv \frac{I_{12}}{2} \end{cases}$$

$E(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm} \rightarrow$  Positive Parity

$B(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} b_{lm} Y_{lm} \rightarrow$  Negative Parity

$$a_{lm} \equiv \frac{1}{2} (a_{lm}^{(2)} + a_{lm}^{(-2)})$$

$$b_{lm} = \frac{-i}{2} (a_{lm}^{(2)} - a_{lm}^{(-2)})$$

$a_{lm}^{(\pm 2)}$  فریب  $\rightarrow \pm 2 Y_{lm} = e^{\pm i 2 \phi} Y_{lm}(\hat{n})$

الکترون، توسط پراکنندگی آنگر در  $\hat{n}$  در راستای فریب و  $\hat{n}'$  در راستای فریب خودی باشد

$$\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos \beta$$

$$E_{\parallel}^{(c)} = \frac{\sqrt{n_e} e^2}{m_e} \cos \beta \epsilon_{\parallel}, \quad E_{\perp}^{(c)} = \frac{\sqrt{n_e} e^2}{m_e} \epsilon_{\perp}$$

$$I = |\epsilon_{\parallel}|^2 + |\epsilon_{\perp}|^2$$

$$Q = |\epsilon_{\parallel}|^2 - |\epsilon_{\perp}|^2$$

$$U = 2\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}^*$$

دکانه هم این یک از نقطه نظریه لفت و پوزهای نوری به تنهایی در B ظاهر شوند  
در حالت در لوب E هم افت و پوزهای الکتریکی هم افت و پوزهای نوری برابرین  
وجود B دلیل بر این است.

$$C_l^T = \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle$$

$$C_l^E = \langle \dot{a}_{lm}^* \dot{a}_{lm} \rangle$$

$$C_l^B = \langle b_{lm}^* b_{lm} \rangle$$

حال می توان پرسید صاف فیزیکی E و B چیست؟  
در فضا که کره زمین  $l > 100$  می توان به  $\sigma_{\text{H}} \sigma_{\text{H}}^*$  ها فکر کرد از  $e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}}$  استفاده کرد پس

$$Y_{lm}(\hat{n}) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \exp(i\vec{l} \cdot \vec{x})$$

$\vec{x}$  برداری در صفحه عمود بر  $\hat{n}$  است و  $m$  جهت گیری یونس بردار  $\vec{l}$  را می بیند

$$\frac{\Delta T}{T}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{l} T_l e^{i\vec{x} \cdot \vec{l}}$$

در زمان نزلت

$$T_l = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \frac{\Delta T}{T}(x) e^{-i\vec{x} \cdot \vec{l}}$$

$${}_2Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \varphi^2 Y_{lm} \rightarrow \frac{1}{2\pi} l^{-2} \varphi^2 e^{i\vec{x} \cdot \vec{l}}$$

در این رژیم ملاحظه است

$${}_{-2}Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \varphi^{*2} Y_{lm} \rightarrow \frac{1}{2\pi} l^{-2} \varphi^{*2} e^{i\vec{x} \cdot \vec{l}}$$



$$\phi = -(\bar{\nabla}_x - i\bar{\nabla}_y) = -(\nabla_x - i\nabla_y)$$

نہا پرلین پس ازنی بے طولانی ٹ ہدہ ہرورہ  
کے عارکہ قطبیں تعامی  
B ~ ~ رلیوٹا

ادامہ دارر . . . . .

BY: Movahhed  
www.Smovahhed.ir