

## فرمیون‌های مایورانا بر روی فصل مشترک ابررسانای دیراکی شبه اسکالر

مرتضی صالحی<sup>۱</sup>، سیداکبر جعفری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، خیابان آزادی، تهران صندوق پستی ۹۱۶۱-۱۱۱۵۵، تهران، ایران.

<sup>۲</sup> قطب علمی سیستم‌های پیچیده و ماده چگال، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۴۵۸۸۸۹۶۹۴، خیابان آزادی، تهران، ایران.

### چکیده

در راستای پیشرفت‌های اخیر در حوزه ابررساناهای توپولوژیک، ما نشان دادیم که یک دریای دو-بعدی از فرمیون‌های مایورانا بر روی سطح یک ابررسانای دیراکی سه بعدی که دارای تقارن تک-تایی شبه اسکالر است ایجاد می‌گردد. این ابررسانای دیراکی با جفت‌شدگی موج  $s$  مشابه با برهم‌کنش شبه اسکالر جاذبه در تئوری دیراک نسبیتی است. ما نشان دادیم که بدون نیاز به میدان زیمنان و در رقابت بین گاف ماده دیراکی و گاف ابررسانایی یک انتقال فاز توپولوژیک در ابررسانای دیراکی رخ خواهد داد که منجر به ترابرد آندریو-کلاین کامل خواهد شد. دریای دو-بعدی از فرمیون‌های دیراک، یک قله تشدید با پایداری کامل در رسانندگی دیفرانسیلی تک اتصال مابین ماده نرمال و ابررسانای دیراکی خواهد داشت. علاوه بر این جریان جوزفسون کسری با دوره  $4\pi$  در یک اتصال ابررسانا-نرمال-ابررسانای دیراکی یکی دیگر از نشانه‌های حضور فرمیون‌های مایورانا و تغییر پاریته فرمیونی سیستم است.

## Majorana fermions on the interface of Pseudo-scalar Dirac superconductors

Salehi, Morteza<sup>1</sup>; Jafari, Seyed Akbar<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Sharif University of Technology, 11155-9161, Iran.

<sup>2</sup> Center of Excellence for Complex Systems and Condensed Matter (CSCM), Sharif University of Technology, 1458889694, Tehran, Iran.

### Abstract

Motivated by recent developments in the field of topological superconductors, we show that there is a two dimensional Majorana sea (2DMS) on the interface of three dimensional Dirac superconductors (3DDS) with singlet symmetry. The 3DDS with  $s$ -wave couplings resembles attractive pseudo-scalar interaction in the relativistic Dirac theory. In the absence of Zeeman field, there is a topological phase transition in the competition between Dirac and superconducting gap which leads to perfect Andreev-Klein transmission. The 2DMS shows a resonant peak with robust character in the differential conductance of the junction between three dimensional Dirac material (3DDM) and 3DDS. Furthermore,  $4\pi$  periodic Josephson current in the junction of 3DDS/3DDM/3DDS is shown as another sign of Majorana fermions and fermion parity switch.

PACS No. {72.00, 72.10, 74.00, 74.10}

### مقدمه

در سالهای گذشته، ابررساناهای توپولوژیک توجه بسیار زیادی را در جامعه فیزیک ماده چگال به خود جلب کرده‌اند. حضور فرمیون‌های مایورانا بعنوان حالت‌های جایگزیده بر روی لبه یا مرزهای ابررساناهای توپولوژیک آنها را بسیار مورد توجه قرار داده است [1]. ذره مایورانا، فرمیونی است که پاد-ذره خود است و در

محاسبات کوانتومی توپولوژیک کاربرد بسیار دارد [2]. اختلال‌های موضعی نمی‌توانند حالت‌های مایورانا را از بین ببرند و آنها به صورت توپولوژیکی محافظت شده هستند و تنها با انتقال فاز توپولوژیکی می‌توان آنها را از بین برد [3,4]. برای ایجاد فرمیون‌های مایورانا، در حضور برهم‌کنش اسپین-مدار و با استفاده از سازوکار مجاورت گاف ابررسانایی و گاف زیمنان

احتمال الکترون-گونه یا حفره-گونه بودن شبه‌ذره‌های معادله (۲) است. از آنجایی که ماتریس  $\hat{\Delta}_S$  دارای ابعاد  $4 \times 4$  است، می‌توان آن را بر حسب ماتریس‌های 16 گانه پایه نوشت [6]. یکی از این نمایش‌های ماتریس‌های پایه با استفاده از ترکیب‌های ماتریس‌های  $\gamma_\mu$  است و به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\hat{\Delta}_S = \left( \begin{array}{c} \Delta_0 \mathbf{1} + \Delta_5 \gamma_5 + \sum_{\mu=0}^3 \Delta_\mu \gamma_\mu + \sum_{\mu=0}^3 \Delta_{5\mu} \gamma_5 \gamma_\mu \\ + \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu < \mu}^3 \Delta_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \end{array} \right) \quad (4)$$

که  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  و  $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$  تعریف می‌شوند. این 16 حالت ممکن برای جفت‌شدگی‌های ابررسانایی شامل تمام حالت‌های ممکن برای S-wave و P-wave است. ما متوجه شدیم که از میان همه این حالت‌های ممکن اگر  $\Delta_5$  که نشان دهنده جفت‌شدگی شبه‌اسکالر و موج S است را بعنوان جفت‌شدگی ابررسانایی انتخاب کنیم آنگاه ویژه‌مقادیر معادله (۲) به صورت

$$\varepsilon = \pm \sqrt{q^2 + (\Delta_D \pm \Delta_5)^2} \quad (5)$$

در خواهد آمد. که برای سادگی  $\hbar v_F = 1$  قرار دادیم. همچنین برای سادگی  $\mu = 0$  است. به طور واضح گاف انرژی برانگیختگی‌های شبه ذره برای حالتی که داخل پرنتر با تفریق دو کمیت همراه باشد، در  $\Delta_D = \Delta_5$  بسته خواهد شد و علامت گاف در حالتی که  $\Delta_D > \Delta_5$  با حالتی که  $\Delta_D < \Delta_5$  مخالف یکدیگر هستند. این دو اثر اولین نشانه‌های یک انتقال فاز توپولوژیک هستند. در حالت  $\mu \neq 0$  نیز همین اثرات حضور دارند اما ریاضیات پیچیده‌تری دارند که در اینجا از آنها صرف‌نظر کردیم.

برای اینکه نشان دهیم این یک انتقال فاز توپولوژیک است با استفاده از روش تقارن کایرال عدد چرن را برای رابطه (۳) محاسبه می‌کنیم [1]:

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_D + \Delta_5}{|\Delta_D + \Delta_5|} - \frac{\Delta_D - \Delta_5}{|\Delta_D - \Delta_5|} \right) \quad (6)$$

همان‌طور که از رابطه بالا مشخص است، در حالتی که  $\Delta_D > \Delta_5$  باشد،  $Q = 0$  است و سیستم در حالت پایه بدیهی قرار دارد، ولی در حالتی که  $\Delta_D < \Delta_5$  باشد، آنگاه

در سیستم القا می‌شود. در محدوده‌ای که این دو گاف با یکدیگر برابر باشند، یک انتقال فاز توپولوژیک رخ خواهد داد و فرمیون‌های مایورانا ایجاد خواهند شد [3]. محدودیت‌های موجود برای سیستم‌های معرفی شده منجر به حالت‌های صفر بعدی و یک بعدی برای فرمیون‌های مایورانا شده است [3-5]، در حالی که برای کاربردهای محاسبات کوانتومی نیاز به یک آرایه دو-بعدی از مایوراناها داریم [2]. در این مقاله ما به بررسی ابررسانایی در یک ماده دیراکی سه بعدی پرداخته‌ایم. همچنین، نشان دادیم که این سیستم در غیاب میدان زیمان و در رقابت بین گاف ابررسانایی و گاف ماده دیراکی در جایی که این دو گاف با یکدیگر برابر باشند، یک انتقال فاز توپولوژیک خواهد داشت. با محاسبه عدد چرن برای این ساختار نشان دادیم که انتقال فاز همراه با ایجاد بار توپولوژیک با عدد Z در سیستم است. در نهایت با محاسبه رسانندگی دیفرانسیلی و جریان جوزفسون اثرات آزمایشگاهی متناظر با حضور فرمیون‌های مایورانا را نشان داده‌ایم.

## تئوری و فرمول‌بندی

یک ماده دیراکی سه‌بعدی را در نظر می‌گیریم که هامیلتونی موثر برانگیختگی‌های کم-انرژی آن در نقطه  $\Gamma$  از منطقه بریلوئن با رابطه زیر توصیف شده باشد،

$$H(\mathbf{q}) = \Delta_D \gamma_0 + \hbar v_D \gamma_0 \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (1)$$

که  $\Delta_D$  گاف ماده دیراکی سه بعدی،  $v_D$  سرعت فرمیون‌ها و  $\mathbf{q}$  بردار موج آن‌ها است. همچنین ماتریس‌های  $\gamma_j$  که از جبر کلیفورد تبعیت می‌کنند نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\gamma_0 = \tau_3 \otimes \sigma_0, \quad \gamma_j = i\tau_1 \otimes \sigma_j \quad (2)$$

که  $\sigma_j$  و  $\tau_j$  ها ماتریس‌های پائولی در فضای اسپین و نوارهای انرژی هستند.  $\sigma_0$  نیز ماتریس یکانی مرتبه دو است. با قرار دادن هامیلتونی دیراک، رابطه (۱)، در معادله بوگولیوبوف-دوژن به معادله دیراک-بوگولیوبوف-دوژن (DBdG) خواهیم رسید،

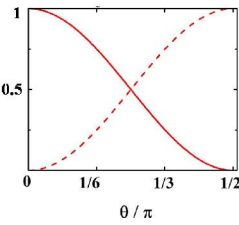
$$\begin{pmatrix} H(\mathbf{k}) - \mu & \hat{\Delta}_S \gamma_0 e^{i\varphi} \\ \gamma_0 \hat{\Delta}_S^\dagger e^{-i\varphi} & \mu + CH(\mathbf{q})C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3)$$

که  $\hat{\Delta}_S$  پارامتر نظم ابررسانایی است. عملگر پادیکانی مزدوج بار نیز به صورت  $C = \gamma_2 \gamma_0 K$  تعریف می‌شود.  $u$  و  $v$  دامنه

$$\Psi_{e,\uparrow}^{M,+} + \sum_{\nu=\uparrow,\downarrow} \left( r_{N,\nu} \Psi_{e,\nu}^{M,-} + r_{A,\nu} \Psi_{h,\nu}^{M,-} \right) \quad (7)$$

$$= \sum_{\kappa=1,2} \left( t_{e,\kappa} \Psi_{e,\kappa}^{S,+} + t_{h,\kappa} \Psi_{h,\kappa}^{S,+} \right)$$

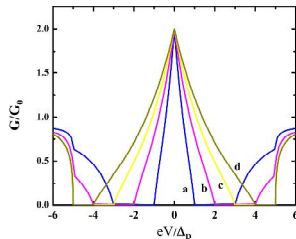
بازتاب آندریو غیرعادی در اثر حضور برهم‌کنش اسپین-مدار قوی که در بطن معادله دیراک نهفته است اتفاق می‌افتد. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، در حد انرژی صفر،  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، دو بازتاب الکترون-الکترون (۱) و (۲) صفر شده و تنها بازتاب‌های آندریو (۳) و (۴) حضور خواهند داشت که منجر به بازتاب کامل آندریو-کلاین با احتمال بازتاب یک می‌شوند. این اثر اولین نشانه حضور فرمیون‌های مایورانا در فصل مشترک اتصال است.



شکل ۲- احتمال بازتاب آندریو عادی با خط پر و بازتاب آندریو غیرعادی با خط چین بر حسب زاویه فرود ذره برای انرژی  $\varepsilon = 0$  نشان داده شده است. مجموع این دو احتمال برابر یک است و بازتاب آندریو کامل است. با تعمیم نظریه BTK، می‌توان رسانندگی دیفرانسیلی اتصال را نیز به صورت زیر محاسبه کرد [7]:

$$G(\varepsilon) = G_0 = (e^2/h) \sum_n \left( 1 + \sum_{\nu} |r_{A,\nu}(\varepsilon, \theta_n)|^2 - \sum_{\nu} |r_{N,\nu}(\varepsilon, \theta_n)|^2 \right) \quad (8)$$

که  $\nu = \{\uparrow, \downarrow\}$  جهت‌گیری اسپینی و  $G_0 = e^2/h$  کوانتای رسانندگی است. ضرایب بازتاب آندریو با  $r_{A,\nu}(\varepsilon, \theta_n)$  و ضرایب بازتاب نرمال با  $r_{N,\nu}(\varepsilon, \theta_n)$  نشان داده شده‌اند.

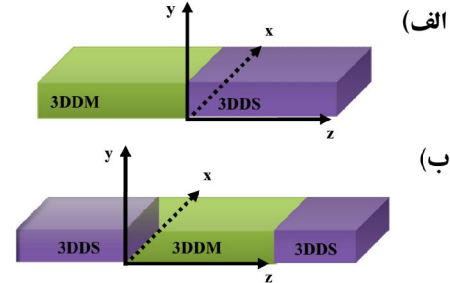


شکل ۳- رسانندگی دیفرانسیلی تک اتصال 3DDM/3DDS که بر حسب گاف انرژی دیراکی بهنجار شده است. مجموعه نمودارهای {a, b, c, d} برای مقادیر  $\mu/\Delta_D = \{2, 3, 4, 5\}$  رسم شده است. همچنین گاف ابررسانایی برابر  $\Delta_S = 5\Delta_D$ .

$Q = \text{sgn}(\Delta_S)$  خواهد بود و سیستم در حالت غیربدهی و توپولوژیک قرار دارد. از بحث بالا نتیجه می‌گیریم که بسته شدن گاف در  $\Delta_D = \Delta_S$  متناظر با یک انتقال فاز توپولوژیک است. در ادامه با بررسی خواص تراپردی این سیستم، اثرات آزمایشگاهی حضور فرمیون‌های مایورانا را نشان خواهیم داد.

نتایج و بحث‌ها

اگر مانند قسمت الف از شکل ۱، یک ماده دیراکی نرمال داشته باشیم، یعنی  $\{\Delta_D \neq 0, \Delta_S = 0\}$  باشد و یکی ماده دیراکی ابررسانا  $\{\Delta_D = 0, \Delta_S \neq 0\}$  داشته باشیم، در فصل مشترک این دو ماده که یک صفحه دو بعدی است، دریایی از فرمیون‌های مایورانا که برانگیختگی‌هایی با انرژی صفر هستند و در فصل مشترک اتصال جایگزیده شده‌اند، زندگی خواهند کرد.



شکل ۴- الف) ساختار تک اتصال. ب) ساختار دو اتصال جوزفسون

در قسمت الف از شکل ۱، یک الکترون با انرژی  $\varepsilon < \Delta_S$  که از  $Z \rightarrow -\infty$  با جهت‌گیری اسپینی بالا بر روی فصل مشترک فرود می‌آید، بدلیل حضور گاف ابررسانایی امکان ترابرد به ناحیه ابررسانا وجود ندارد، اما برای بازتاب از فصل مشترک چهار احتمال وجود دارد: (۱) بازتاب الکترون-الکترون با اسپین بالا، (۲) بازتاب الکترون-الکترون با اسپین وارون، (۳) بازتاب آندریو عادی با اسپین پایین، (۴) بازتاب آندریو غیرعادی با اسپین بالا. این احتمال‌ها را به همراه احتمال ترابرد در ناحیه ابررسانایی برای انرژی‌های  $\varepsilon > \Delta_S$  را می‌توان با استفاده از شرط مرزی زیر برای اتصال تابع موج ناحیه 3DDM به تابع موج ناحیه 3DDS بدست آورد. این سازوکار برای الکترون فرودی با اسپین پایین و ابررسانایی فرودی نیز وجود دارد.

فرمیون‌های مایورانا برمی‌گردد. با استفاده از رابطه (۹) جریان جوزفسون برای فرمیون‌های مایورانا به صورت زیر بدست می‌آید:

$$I_{\pm}(\delta\phi) = \frac{e\Delta_s}{\hbar} \sum_n^{N_0} \frac{\partial}{\partial \delta\phi} \varepsilon_{\pm}(\delta\phi) = \pm I_c \text{Sin} \delta\phi / 2 \quad (11)$$

که  $I_c = (e\Delta_s / 2\hbar) \sum_n \sqrt{\tau_n}$  جریان بحرانی جوزفسون در اتصال

است. در غیاب فرآیندهایی که بقای پارته فرمیونی را از بین می‌برند، جریان جوزفسون کسری می‌تواند نشانه حضور فرمیون‌های مایورانا بر روی سطح ابرسانای دیراکی شبه اسکالر سه بعدی باشد.

### نتیجه‌گیری

ما نشان دادیم که یک ابرسانای دیراکی با گاف ابرسانایی شبه اسکالر یک ابرسانای توپولوژیک با ناوردای توپولوژیک Z است. بازتاب آندریو غیرعادی برخلاف اتصال‌های فلزی و دیراکی دو بعدی نظیر گرافین، در نتیجه برهم‌کنش اسپین-مدار وجود دارد. در حالت انرژی- صفر بازتاب آندریو- کلاین کامل وجود دارد و رسانندگی دیفرانسیلی اتصال دارای قله‌ای با ارتفاع ثابت  $2G_0$  در انرژی صفر است که نسبت به تغییر پتانسیل شیمیایی مقاوم است. همچنین جریان جوزفسون این ساختار نیز کسری با دوره تناوب  $4\pi$  است که منجر به تغییر پارته فرمیونی سیستم می‌شود.

### مرجع‌ها

- [1] Y. Ando and L. Fu, "Topological Crystalline Insulators and Topological Superconductors: From Concepts to Materials" *Annual Review of Condensed Matter Physics* **6**, (2015) 361.
- [2] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, "Non-Abelian anyons and topological quantum computation" *Review of Modern Physics* **80**, (2008)1083.
- [3] L. Fu and C. L. Kane, "Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator" *Physical Review Letter* **100**, (2008) 096407.
- [4] L. Fu and C. L. Kane, "Josephson current and noise at a superconductor/quantum-spin-Hall-insulator/superconductor junction" *Physical Review B* **79** (2008) 161408.
- [5] Y. Tanaka, T. Yokoyama and N. Nagaosa, "Manipulation of the Majorana Fermion, Andreev Reflection, and Josephson Current on Topological Insulators" *Physical Review Letter* **103**, (2009) 107002.
- [6] A. Zee, "Quantum Field Theory in a Nutshell" (2nd ed). (Princeton University Press, 2010).
- [7] G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, "Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion," *Physical Review B* **25** (1982) 4515.
- [8] M. Titov and C. W. J. Beenakker, "Josephson effect in ballistic graphene," *Physical Review B* **74**(2006) 041401..
- [9] J. Tworzydło, B. Trauzettel, M. Titov, A. Rycerz, and C. W. J. Beenakker, "Sub-Poissonian Shot Noise in Graphene," *Physical Review Letters* **96** (2006), 246802.

Authors addresses: [morteza.salehi@gmail.com](mailto:morteza.salehi@gmail.com),  
[akbar.jafari@gmail.com](mailto:akbar.jafari@gmail.com)

رسانندگی دیفرانسیلی در شکل ۳ نشان داده شده است. در انرژی صفر یک قله تشدیدی با مقدار  $2G_0$  وجود دارد که نشانه حضور فرمیون‌های مایورانا است. این قله نسبت به تغییرات پارامترهای سیستم نظیر پتانسیل شیمیایی مقاوم است و مقدار و مکان خود را حفظ می‌کند.

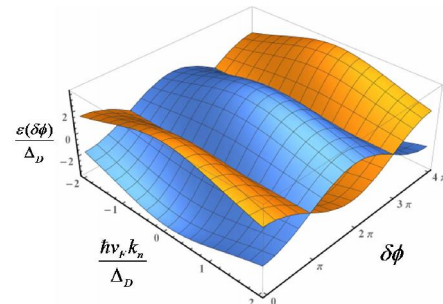
ساختار بعدی که ما در نظر گرفتیم در قسمت (ب) از شکل ۱ نشان داده شده است. یک اتصال جوزفسون که دو ابرسانای دیراکی دو سوی اتصال، دارای اختلاف فاز ماکروسکوپی ابرسانایی  $\delta\phi = \phi_L - \phi_R$  هستند. با استفاده از روش ماتریس ترابرد، انرژی حالت‌های مقید آندریو در حد اتصال کوتاه [8]،  $\kappa_s \ll L$ ، که  $\kappa_s$  طول مشخصه ابرسانایی است، به صورت زیر بدست می‌آیند،

$$\varepsilon_n(\delta\phi) = \pm \Delta_s \sqrt{\tau_n} \text{Cos} \delta\phi / 2 \quad (9)$$

که  $\tau_n$  رسانندگی اتصال جوزفسونی در حالت نرمال است [9] و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau_n^{-1} = \cosh^2(\kappa_n L) + \mu^2 \sinh^2(\kappa_n L) / \kappa_n^2 \quad (10)$$

که  $\kappa_n = \sqrt{\Delta_D^2 + k_n^2 - \mu^2}$  و  $L$  طول ناحیه 3DDM است.



شکل ۴- انرژی حالت‌های مقید آندریو بر حسب اختلاف فاز ابرسانایی و مولفه عرضی اتصال. این حالت‌ها دارای دوره تناوب  $4\pi$  هستند.

همایلتونی رابطه (۱) نسبت به تغییر فاز  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$  ناورداست ولی حالت‌های مقید آندریو که در رابطه (۹) بدست آمدند دارای دوره تناوب  $4\pi$  هستند. در حالتی که  $\delta\phi = \pi$  باشد، هر حالت مقید آندریو با یک بسته شدن گاف و منجر تغییر پارته فرمیونی سیستم به اندازه یک عدد می‌شود. بنابراین تعداد،  $N_0$ ، حالت‌های مقید آندریو تعیین کننده پارته فرمیونی سیستم هستند به طوری که اگر  $N_0$  فرد باشد پارته فرمیونی تغییر خواهد کرد و اگر زوج باشد پارته تغییر نخواهد کرد. منشاء فیزیکی تغییر پارته به آمار غیرآبلی