انتقال حالت کوانتومی روی سیستم دو کیوبیتی واقع در محیط اتلافی

صوفیانی ، رحیمه ؛ کریمی، محمد

دانشکده فیزیک دانشگاه تبریز ، تبریز

چکیده

مقاله حاضر به مطالعه ی انتقال حالت کوانتومی در یک سیستم دو کیوبیتی باز می پردازد. در این مساله هر کیوبیت می تواند گسیل خود به خودی داشته باشد و این دو کیوبیت در یک محیط مشترک اتلافی (خلا)قرار گرفته اند.محاسبات انجام شده نشان می دهند در چنین سیستمی انتقال کامل حالت رخ نمی دهد و با وجود اتلاف در سیستم،احتمال انتقال کاهش می یابد، بطوریکه بیشینه احتمال انتقال در زمان $t = \frac{\pi}{2}$ که همان زمان انتقال کامل در سیستم بدون نوفه است، رخ می دهد و فیدلیتی بعد از زمانی مشخص به مقدار پایدار (مستقل از نرخ اتلاف) $F = \frac{1}{4}$ میل می کند.

Quantum state transfer on two qubit system embedded in dissipative environment

Sufiani , Rahime ; Karimi ,Mohammad

Faculty of Physics, University of Tabriz, Tabriz

Abstract

The paper concerns with the study of quantum state transfer in open two-qubit system. In this issue each qubit can have spontaneous emission and the two qubits are in dissipative common environment(vacuum). Calculations show that in this system perfect state transfer does not occur and with dissipation in system,the probability of transmission is reduced,so that the maximum probability of transmission is in t=$\frac{\pi}{2}$ that is perfect transmission time in noiseless system ,and after a specified time fidelity tends to a steady value (independent of dissipation rate) $F = \frac{1}{4}$.

مقدمه

انتقال حالت کوانتومی را در یک سیستم دو کیوبیتی بررسی می کنیم که این دو کیوبیت در یک محیط مشترک (خلا)، قرار گرفته اند.در این مساله هر دو کیوبیت یکسان در نظر گرفته شده اند و منظور از اتلاف این است که هر یک از آن ها می توانند گسیل خود به خودی داشته باشند،در نتیجه وقتی که کیوبیت اول گسیل خود به خودی داشته باشد و با رفتن از حالت برانگیخته به حالت پایه یک فوتون گسیل کند،در این صورت کیوبیت دیگر می تواند با جذب این فوتون،از حالت پایه به حالت برانگیخته برود.حالت پایه کیوبیت مورد نظر را با $|0>$ و حالت برانگیخته آن را با $|1>$ نشان می دهیم.منظور از انتقال حالت کوانتومی در این مساله این است که اگر فرض کنیم سیستم ما در زمان $t = 0$ در حالت $|1, 0>$ باشد با چه احتمالی در زمان مشخص t، سیستم درحالت $|0, 1>$ خواهد بود.در صورتی که سیستم دو کیوبیتی ما منزوی باشد و اتلاف در آن صورت نگیرد،انتقال کامل حالت کوانتومی را برای آن خواهیم داشت[1]،اما وقتی که اتلاف وجود داشته باشد و سیستم ما یک سیستم ایده آل نباشد،در این صورت می خواهیم ببینیم که انتقال حالت کوانتومی چگونه خواهد بود.در صورت وجود ناهمدوسی و اتلاف،معادله ای که با آن می توان تحول زمانی ماتریس چگالی سیستم را بررسی نمود،معادله لیندبلد[2] خواهد بود که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \gamma \sum_i [L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\}] \quad (۱)$$

که در آن، H هامیلتونی مربوط به سیستم کوانتومی، ρ (t) ماتریس چگالی سیستم در زمان مشخص t، γ نرخ اتلاف یا ناهمدوسی و L_iعملگرهای لیندبلد هستند که درواقع چگونگی تاثیرمحیط بر سیستم را مشخص می سازند . پس از حل معادله لیندبلد و به

دست آوردن ماتریس چگالی سیستم درزمان t، فیدلیتی(دامنه احتمال انتقال حالت) را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود[1]:

$$F(t) = (< \Psi(T) | \rho(t) | \Psi(T) >) \quad (۲)$$

که در آن $< \Psi(T) |$ حالت مطلوبی است که می خواهیم به آن دست یابیم.

انتقال حالت در سیستم دو کیوبیتی در صورت وجود اتلاف

برای یک سیستم دو کیوبیتی که در آن اتلاف به صورت گسیل خود به خودی وجود داشته باشد، معادله لیندبلد به صورت زیر خواهد بود[3]:

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \gamma\left(2\sigma\rho(t)\sigma^{\dagger} - \sigma^{\dagger}\sigma\rho(t) - \rho(t)\sigma^{\dagger}\sigma\right) \equiv £\rho(t) \quad (۳)$$

که در آن

$$\sigma := \sum_{i=1}^{2} \sigma_i \quad (۴)$$

و $\sigma_i := | 0 > < 1 |$ عملگر پایین آورنده برای کیوبیت iام می باشد.

برای به دست آوردن ماتریس چگالی سیستم در زمان t،می توان از تصویر اندرکنش استفاده نمود[2]:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{iHt}\rho(t)e^{-iHt} \quad (۵)$$

در نتیجه معادله (۳) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \gamma\left(2\sigma\tilde{\rho}(t)\sigma^{\dagger} - \sigma^{\dagger}\sigma\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(t)\sigma^{\dagger}\sigma\right) \quad (۶)$$

حال با حل معادله بالا و به دست آوردن $\tilde{\rho}(t)$، با استفاده از رابطه(۵)می توان ماتریس چگالی مر بوط به سیستم را در زمان t، به دست آورد.

برای حل معادله (٦) در نظر می گیریم:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{t£}\tilde{\rho}(0) \quad (۷)$$

حال با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) + t£\tilde{\rho}(0) + \ldots \quad (۸)$$

روش کار این گونه خواهد بود که حالت اولیه را در نظر خواهیم گرفت و سپس ابر عملگر £ را روی آن اثر خواهیم داد.حال دوباره این ابر عملگر را بر روی تمامی حالت های جدید به دست آمده اثر می دهیم تا جایی که دیگر حالت جدیدی به دست نیاید.در این صورت ما به زیر فضایی دست خواهیم یافت که تحت تاثیر £، ناوردا باقی می ماند که این زیر فضا را زیر فضای آزاد از ناهمدوسی (DFS)می نامیم.حال ما به جای درنظر گرفتن کل فضای هیلبرت سیستم، می توانیم محاسبات خود را محدود به این زیر فضا بکنیم. فرض می کنیم که سیستم دو کیوبیتی ما در ابتدا در حالت اولیه زیر قرار دارد:

$$\tilde{\rho}(0) = \rho(0) = | 1, 0 > < 1, 0 | \quad (۹)$$

حال ابر عملگر £ را بر روی این حالت اولیه و تمامی حالت های جدید به دست آمده اثر می دهیم،در نتیجه زیر فضای مورد نظر ما به صورت زیر خواهد بود:

$$H_{DFS} = \mathrm{span}\{ | 0, 0 > < 0, 0 |, | 1, 0 > < 1, 0 |, | 0, 1 > < 0, 1 |, (| 0, 1 > < 1, 0 | + | 1, 0 > < 0, 1 |)\}. \quad (۱۰)$$

حال می توان $\tilde{\rho}(t)$ را بر حسب پایه های این زیر فضا بسط داد:

$$\tilde{\rho}(t) = a_0(t) | 0, 0 > < 0, 0 | + a_1(t) | 1, 0 > < 1, 0 | + a_2(t) | 0, 1 > < 0, 1 | + a_3(t) (| 0, 1 > < 1, 0 | + | 1, 0 > < 0, 1 |) \quad (۱۱)$$

بااستفاده از روابط (۳)و(۸) معادلات کوپل شده زیر به دست می آید:

$$\dot{a_0} = \gamma\,(2\,a_1 + 2\,a_2 + 4\,a_3)$$
$$\dot{a_1} = \gamma\,(-2\,a_1 - 2\,a_3)$$
$$\dot{a_2} = \gamma\,(-2\,a_2 - 2\,a_3)$$
$$\dot{a_3} = \gamma\,(-\,a_1 - a_2 - 2\,a_3) \qquad (۱۲)$$

با توجه به این که حالت اولیه را یه صورت $|1,0\rangle\langle 1,0|$ در نظر گرفتیم،شرایط اولیه به صورت زیر خواهند بود:

$$a_0(0) = a_2(0) = a_3(0) = 0\,,\ a_1(0) = 1 \qquad (۱۳)$$

با حل تحلیلی این معادلات و به دست آوردن ضرایب مورد نظر، ماتریس چگالی $\tilde{\rho}(t)$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\tilde{\rho}\,(t) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-4\gamma t}\right)|0,0\rangle\langle 0,0| + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^{-4\gamma t} + \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma t}\right)|1,0\rangle\langle 1,0| + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma t} + \tfrac{1}{4}e^{-4\gamma t}\right)|0,1\rangle\langle 0,1| + \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^{-4\gamma t}\right) \times \left(|0,1\rangle\langle 1,0| + |1,0\rangle\langle 0,1|\right) \qquad (۱۴)$$

حال می بایست با استفاده از رابطه (۵) ماتریس چگالی سیستم در زمان t را به دست آوریم،یعنی:

$$\rho\,(t) = e^{-iHt}\,\tilde{\rho}\,(t)\,e^{iHt} \qquad (۱۵)$$

که در این رابطه H،هامیلتونی مربوط به سیستم است.هامیلتونی یک سیستم دو کیوبیتی (یک زنجیره دو کیوبیتی) برابر است با[1]:

$$H = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y\right) \qquad (۱۶)$$

در نتیجه، ماتریس چگالی سیستم، در زمان مشخص t ، به صورت زیر به دست می آید:

$$\rho\,(t) = a_0(t)|0,0\rangle\langle 0,0| + [\cos t\,\{a_2(t)\cos t - i\,a_3(t)\sin t\} + \{i\sin t\,(a_3(t)\cos t - i\,a_1(t)\sin t)\}]\,|0,1\rangle\langle 0,1| + [i\sin t\,\{a_2(t)\cos t - i\,a_3(t)\sin t\} + \cos t\,\{a_3(t)\cos t - i\,a_1(t)\sin t\}]\,|0,1\rangle\langle 1,0| + [\cos t\,\{a_3(t)\cos t - i a_2(t) \times \sin t\} + \{i\sin t\,(a_1(t)\cos t - i\,a_3(t) \times \sin t)\}]\,|1,0\rangle\langle 0,1| + [i\sin t \times \{a_3(t)\cos t - i\,a_2(t)\sin t\} + \{\cos t \times (a_1(t)\cos t - i\,a_3(t)\sin t)\}]\,|1,0\rangle\langle 1,0| \qquad (۱۷)$$

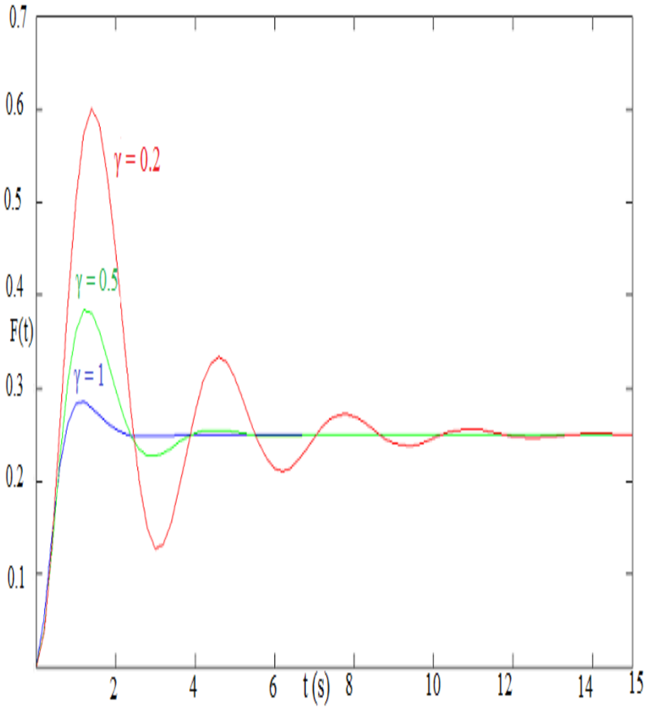
با توجه به این که حالت مطلوبی که ما میخواهیم به آن برسیم برابر است با:

$$|\Psi(T)\rangle\langle\Psi(T)| = |0,1\rangle\langle 0,1| \qquad (۱۸)$$

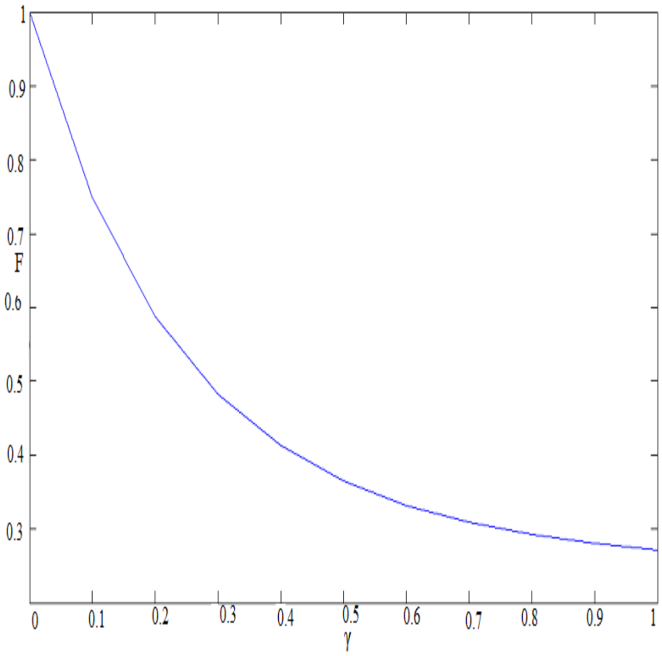
درنهایت با استفاده از رابطه (۲)می توان دامنه احتمال انتقال حالت را برای این سیستم دو کیوبیتی به دست آورد:

$$F\,(t) = a_2\,(t)\cos^2(t) + a_1\,(t)\sin^2(t) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^{-4\gamma t} + \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma t}(\cos^2(t)) \qquad (۱۹)$$

شکل (۱) تغییرات زمانی دامنه احتمال انتقال حالت را نشان می دهد:



شکل(۱): تغییرات زمانی دامنه احتمال انتقال حالت برای یک سیستم دو کیوبیتی در یک محیط اتلافی برای سه مقدار متفاوت نرخ اتلاف



شکل(۲):چگونگی تغییرات دامنه احتمال انتقال حالت با ضریب ناهمدوسی(اتلاف) γ به ازای زمان $t = \frac{\pi}{2}$

نتیجه گیری

برای یک سیستم دو کیوبیتی که با محیط اطراف خود اندرکنش ندارد و یک سیستم ایزوله می باشد دامنه احتمال انتقال حالت کوانتومی می تواند برابر یک باشد و در این صورت درزمان $t = \frac{\pi}{2}$ انتقال کامل حالت اتفاق خواهد افتاد[1]، ولی وقتی که اتلاف در سیستم وجود داشته باشد در این صورت با توجه به شکل (۱)، باز هم درزمانی تقریبا برابر با $t = \frac{\pi}{2}$،مقدار بیشینه دامنه احتمال انتقال را خواهیم داشت،ولی انتقال کامل حالت رخ نخواهد داد ($F(t) \neq 1$) ،هم چنین همان طور که مشخص است هر قدر نرخ اتلاف کوچک تر باشد، مقدار بیشینه دامنه احتمال انتقال افزایش می یابد.در زمان های بزرگ تر(حالت پایدار سیستم)،مقدار دامنه احتمال انتقال مستقل از نرخ اتلاف در حدود $F(t) = 0.25$ خواهد بود. در نتیجه برای سیستمی که با محیط اطراف خود بر هم کنش داشته باشد و تحت تاثیر اتلاف و ناهمدوسی قرار داشته باشد،امکان انتقال کامل حالت کوانتومی وجود نخواهد داشت.

مرجع‌ها

[1] Matthias Christandl, Nilanjana Datta, Artur Ekert, Andrew J. Landahl ; "Perfect State Transfer in Quantum Spin Networks"; *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187902 (2004)

[2]Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang; "*Quantum Computation and Quantum Information*" ; 10th edition; (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)

[3] Laleh Memarzadeh and Stefano Mancini; "Entanglement dynamics for qubits dissipating into a common environment"; *Physical Review A* **87**, 032303 (2013)