دینامیک در هم تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی برای یک زیر سیستم دوبخشی از سیستم سه کیوبیتی واقع درمحیط اتلافی

صوفیانی ، رحیمه ؛ کریمی، محمد

دانشکده فیزیک دانشگاه تبریز ، تبریز

چکیده

مقاله حاضر به مطالعه ی دینامیک درهم تنیدگی و اختلاف کوانتومی یک زیر سیستم دو بخشی از سیستم سه کیوبیتی باز می پردازد.در این مساله هر کیوبیت می تواند گسیل خود به خودی داشته باشد و کیوبیت ها در محیط مشترک (خلا)قرار گرفته اند. محاسبات انجام شده نشان می دهند با تغییر حالت اولیه سیستم،هر دو معیار در هم تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی که برای توصیف هم بستگی کوانتومی به کار می روند، تغییر خواهند کرد.هم چنین باتوجه به حالت اولیه،وجود محیط اتلافی می تواند هم بستگی کوانتومی را از بین ببرد یا منجر به تولید آن شود.هم چنین نتایج به دست آمده نشان می دهند که در برخی موارد در هم تنیدگی معیار مناسبی برای بررسی هم بستگی کوانتومی نمی باشد و بهتر است از اختلاف کوانتومی برای این کار استفاده نمود.

Entanglement and quantum discord dynamics for a bipartite subsystem of three-qubit system embedded in dissipative environment

Sufiani , Rahime ; Karimi ,Mohammad

Faculty of Physics, University of Tabriz, Tabriz

Abstract

The paper concerns with the study of entanglement and quantum discord dynamics for a bipartite subsystem of open three-qubit system. In this issue each qubit can have spontaneous emission and qubits are in dissipative common environment(vacuum).Calculations show by changing the initial state of system,entanglement and quantum discord that describe quantum correlation,will change.Also, according to the initial state,the existence of dissipative environment can destroy or create quantum correlation.Also, the results show that in some cases, entanglement is not appropriate to study quantum correlation and it is better to use quantum discord for this issue.

مقدمه

مطالعه و بررسی هم بستگی کوانتومی در سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته است.روش های متفاوتی برای بررسی این مهم پیشنهاد می شود که از جمله آن ها می توان به در هم تنیدگی و اختلاف کوانتومی اشاره کرد.ما در این جا بر هم کنش کوانتومی یک زیر سیستم دو بخشی باز را با استفاده از هر دو معیار در هم تنیدگی و ناساز گاری کوانتومی مورد بررسی قرار می دهیم.در این مساله دو کیوبیت یکسان در نظر گرفته شده اند و منظور از اتلاف این است که هر یک از آن ها می توانند گسیل خود به خودی داشته باشند.حالت پایه کیوبیت مورد نظر را با $|0>$ و حالت برانگیخته آن را با $|1>$ نشان می دهیم.با به دست آوردن ماتریس چگالی مربوط به سیستم در زمان مشخص t ، می توان هر دو معیار مورد نظر را محاسبه نمود.البته باید در نظر گرفت که تنها برای برخی از موارد امکان محاسبه ساده این معیار ها وجود دارد.یکی از این موارد این گونه است که ماتریس چگالی بصورت حالت X باشد.طبق تعریف یک حالت X به صورت زیر می باشد[1]:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \qquad (۱)$$

از آن جایی که سیستم مورد نظر ما یک سیستم کوانتومی باز است و با محیط اطراف خود بر هم کنش دارد و تحت تاثیر ناهمدوسی و اتلاف قرار دارد ، معادله ای که با آن می توان تحول زمانی ماتریس چگالی سیستم را بررسی نمود،معادله لیندبلد[2] خواهد بود که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\,H , \rho] + \gamma \sum_i [L_i\, \rho\, L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger\, L_i , \rho\}] \tag{۲}$$

که در آن، H هامیلتونی مربوط به سیستم کوانتومی، ρ (t) ماتریس چگالی سیستم در زمان مشخص t ، γ نرخ اتلاف یا ناهمدوسی و L_iعملگرهای لیندبلد هستند که درواقع چگونگی تاثیرمحیط بر سیستم را مشخص می سازند.

دینامیک سیستم سه کیوبیتی باز در محیط اتلافی

برای یک سیستم سه کیوبیتی که در آن اتلاف به صورت گسیل خود به خودی وجود داشته باشد، قسمت ناهمدوسی معادله لیندبلد به صورت زیر خواهد بود[3]:

$$\dot{\rho}(t) = \gamma\ (\ 2\ \sigma\, \rho(t)\sigma^\dagger - \sigma^\dagger \sigma\, \rho(t) - \rho(t)\, \sigma^\dagger \sigma\ ) \equiv £\rho(t) \tag{۳}$$

که در آن

$$\sigma := \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \tag{۴}$$

و $\sigma_i := |\,0 > < 1\,|$ عملگر پایین آورنده برای کیوبیت i ام می باشد.برای سادگی در محاسبات نرخ ناهمدوسی را برابر واحد در نظر می گیریم.(γ=1).

برای حل معادله (۳) در نظر می گیریم:

$$\rho(t) = e^{t£}\rho(0) \tag{۵}$$

حال با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$$\rho(t) = \rho(0) + t£\, \rho(0) + \dots \tag{۶}$$

روش کار این گونه خواهد بود که حالت اولیه را در نظر خواهیم گرفت و سپس ابر عملگر £ را روی آن اثر خواهیم داد.حال دوباره این ابر عملگر را بر روی تمامی حالت های جدید به دست آمده اثر می دهیم تا جایی که دیگر حالت جدیدی به دست نیاید.در این صورت ما به زیر فضایی دست خواهیم یافت که تحت تاثیر £، ناوردا باقی می ماند که این زیر فضا را زیر فضای آزاد از ناهمدوسی (DFS) می نامیم.حال ما به جای درنظر گرفتن کل فضای هیلبرت سیستم، می توانیم محاسبات خود را محدود به این زیر فضا بکنیم.

فرض کنیم که یک سیستم سه کیوبیتی داریم که در ابتدا در حالت اولیه زیر قرار دارد:

$$|\,\Psi(0) > = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\,001 > + |\,100 > + |\,010 >) \tag{۷}$$

در این صورت ماتریس چگالی سیستم در زمان t=0 برابر خواهد بود با:

$$\rho(0) = |\,\Psi(0) > < \Psi(0)\,| \tag{۸}$$

حال ابر عملگر £ را بر روی این حالت اولیه و تمامی حالت های جدید به دست آمده اثر می دهیم،در نتیجه زیر فضای مورد نظر ما به صورت زیر خواهد بود:

$$H_{DFS} = \text{span}\{\,|\,000 > < 000\,|, (|\,001 > + |\,100 > + |\,010 >)(< 001\,| + < 100\,| + < 010\,|)\,\} \tag{۹}$$

حال می توان $\rho(t)$ را بر حسب پایه های این زیر فضا بسط داد:

$$\rho(t) = a_0(t)\,|\,000 > < 000\,| + a_1(t)\,(|\,001 > + |\,100 > + |\,010 >)(< 001\,| + < 100\,| + < 010\,|) \tag{۱۰}$$

بااستفاده از روابط (۳)و(٦) معادلات کوپل شده زیر به دست می آید:

$$\dot{a_0} = 18\, a_1$$
$$\dot{a_1} = -6\, a_1 \tag{۱۱}$$

با حل این معادلات خواهیم داشت:

$$\rho(t) = (1 - e^{-6t})\,|\,000 > < 000\,| + \frac{1}{3}\, e^{-6t}\,(|\,001 > + |\,100 > + |\,010 >)\,(< 001\,| + < 100\,| + < 010\,|) \tag{۱۲}$$

دینامیک زیر سیستم دو بخشی

برای بررسی دینامیک زیر سیستم دو بخشی(سیستمی شامل دو کیوبیت از سه کیوبیت کل) با توجه به مشابه بودن هر سه کیوبیت ،می توان از ماتریس چگالی کل سیستم نسبت به یکی از آن ها تریس جزئی گرفت و ماتریس چگالی مربوط به دو کیوبیت دیگر را به دست آورد.در نتیجه برای زیر سیستم شامل کیوبیت اول و دوم خواهیم داشت:

$$\rho_{1,2}(t) = tr_3(\rho(t)) \tag{۱۳}$$

در نتیجه برای سیستم دو کیوبیتی مورد نظر خواهیم داشت:

$$\rho_{1,2}(0) = \frac{1}{3}\ |00><00| + \frac{1}{3}\ (|10> + |01>)\ (<10| + <01|)$$

$$\rho_{1,2}(t) = (1 - \frac{2}{3}e^{-6t})\ |00><00| + \frac{1}{3}\ e^{-6t}(|10> + |01>)\ (<10| + <01|) \quad (۱٤)$$

دینامیک هم بستگی کوانتومی زیرسیستم دوبخشی

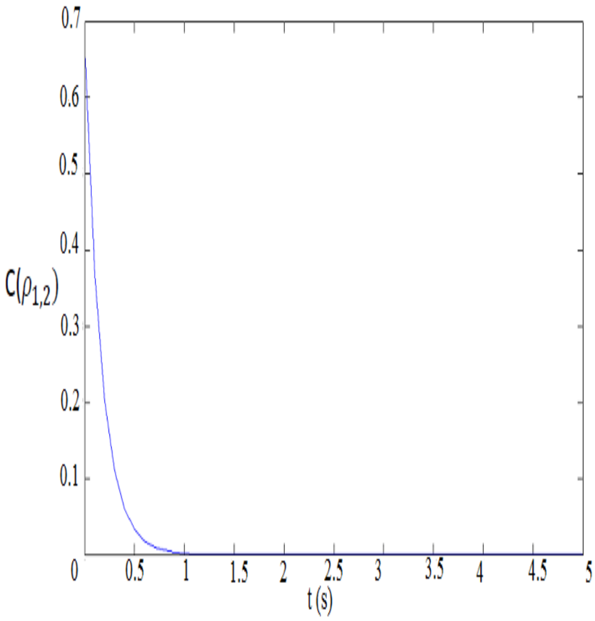
برای اندازه گیری میزان در هم تنیدگی کوانتومی در یک سیستم، از معیاری به نام کانکورنس استفاده می شود.با توجه به رابطه (۱٤) و شکل ماتریس چگالی که به صورت حالت X می باشد ، کانکورنس برای این سیستم دو کیوبیتی از رابطه زیر محاسبه می شود[1]:

$$C(\rho_{1,2}) = 2\max\{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\} \quad (۱۵)$$

در نتیجه میزان کانکورنس برای این سیستم دو کیوبیتی قبل و بعد از تحول به ترتیب برابر خواهد بود با:

$$C\{\rho_{1,2}(0)\} = \frac{2}{3}\ , C\{\rho_{1,2}(t)\} = \frac{2}{3}\ e^{-6t} \quad (۱٦)$$

شکل زیر تغییرات زمانی کانکورنس را نشان می دهد:



شکل(۱):تغییرات زمانی کانکورنس برای زیرسیستم دوبخشی

اختلاف کوانتومی برای سیستم دو کیوبیتی باز

محاسبه اختلاف کوانتومی برای هر نوع ماتریس چگالی امکان پذیر نمی باشد،ولی برای سیستم کوانتومی مورد نظر ما که ماتریس چگالی آن بصورت حالت X می باشد، از رابطه زیر قابل محاسبه می باشد[4]:

$$D(\rho^X) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_{\max} - \varepsilon_2^2\,\varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min} + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}} \quad (۱۷)$$

که در آن :

$$\varepsilon_{1,2} = 2\,(|\rho_{23}| \pm |\rho_{14}|)\ ,\ \varepsilon_3 = 1 - 2(\rho_{22} + \rho_{33})$$
$$\varepsilon_{max} = \max\,(\varepsilon_3^2, \varepsilon_2^2 + x_{A3}^2)\ ,\ \varepsilon_{\min} = \min\{\varepsilon_1^2, \varepsilon_3^2\}$$
$$x_{A3} = 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1 \quad (۱۸)$$

در نتیجه اختلاف کوانتومی برای سیستم دو کیوبیتی ما برابر خواهد بود با:

$$D\{\rho_{1,2}(0)\} = \frac{2}{3}\ ,\ D\{\rho_{1,2}(t)\} = \frac{2}{3}\ e^{-6t} \quad (۱۹)$$

ملاحظه می شود که هر دو معیار در هم تنیدگی و اختلاف کوانتومی برای این حالت اولیه دارای رفتاری مشابه می باشند.

حال فرض کنیم که حالت اولیه سیستم سه کیوبیتی ما به صورت زیر باشد:

$$|\Psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (|000> + |111>) \quad (۲۰)$$

در این صورت،با تاثیر ابر عملگر £ بر روی این حالت اولیه و تمامی حالت های جدید به دست آمده زیر فضای آزاد از ناهمدوسی به صورت زیر خواهد بود:

$$H_{DFS} = \text{span}\ \{\ |000><000|, |111><111|, (|011> + |110> + |101>)(<011| + <110| + <101|)\ ,\ (|001> + |100> + |010>)(<001| + <100| + <010|)\ ,(|000><111| + |111><000|)\} \quad (۲۱)$$

حال می توان $\rho(t)$ را بر حسب پایه های این زیر فضا بسط داد:

$$\rho(t) = a_0(t)\,|000><000| + a_1(t)\,|111><111| + a_2(t)\,(|011> + |110> + |101>)(<011| + <110| + <101|) + a_3(t)\,(|001> + |100> + |010>)(<001| + <100| + <010|) + a_4(t)\,(|000><111| + |111><000|) \quad (۲۲)$$

با استفاده از روابط (۳)و(٦) ،معادلات زیر برای ضرایب بسط ماتریس چگالی به دست می آید:

$$\dot{a_0} = 18a_3$$
$$\dot{a_1} = -6a_1$$
$$\dot{a_2} = 2a_1 - 6a_2$$
$$\dot{a_3} = 8a_2 - 6a_3$$

$\dot{a_4}$ = -3 a_4

(۲۳)

با حل این معادلات خواهیم داشت:

$$\rho(t)= \{\tfrac{11}{6} + (-24t^2 -8t- \tfrac{8}{6})\, e^{-6t}\}| 000 > < 000| + \tfrac{1}{2}e^{-6t}| 111 > < 111| + t\, e^{-6t}(| 011 > + | 110 > + | 101 >)(< 011 | + <110 |+ < 101|) +(4t^2e^{-6t})\times (| 001 > + | 100 > + | 010 >)(< 001 | + < 100 |+ < 010 |) + \tfrac{1}{2}e^{-3t}(| 000 > < 111| + |111> < 000|)$$

(۲٤)

به مانند حالت قبل با تریس جزئی نسبت به کیوبیت سوم،ماتریس چگالی مربوط به زیرسیستم دو بخشی را به دست می آوریم:

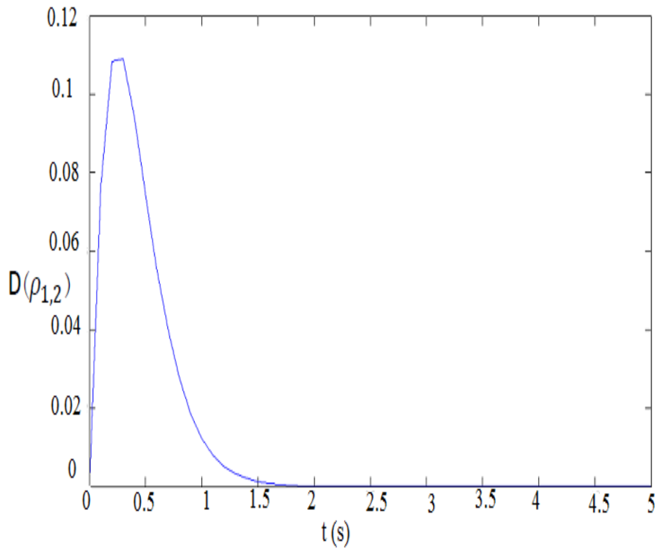
$$\rho_{1,2}(0) = \tfrac{1}{2}| 00 > < 00 | + \tfrac{1}{2}| 11 > < 11|$$
$$\rho_{1,2}(t) = \{\tfrac{11}{6} + (-20t^2 -8t- \tfrac{8}{6})\, e^{-6t}\}| 00 > < 00 |+ (t + \tfrac{1}{2})\, e^{-6t}| 11 > < 11|+ (4t^2 + t)\, e^{-6t}(| 01 > +| 10 >)(< 01 | + < 10 |)$$

(۲٥)

حال با استفاده از روابط (۱۵)و(۱۷) می توان مقدار کانکورنس و اختلاف کوانتومی را برای زیر سیستم دو کیوبیتی مورد نظر محاسبه کرد:

$$C\{\rho_{1,2}(0)\} = C\{ \rho_{1,2}(t)\} = 0$$
$$D\{\rho_{1,2}(0)\}=0$$
$$D\{\rho_{1,2}(t)\}= (4t^2 + t)\, e^{-6t}$$

(۲٦)



شکل(۲):تغییرات زمانی اختلاف کوانتومی برای سیستم دوبخشی

نتیجه گیری

برای یک زیر سیستم دو کیوبیتی ازسیستم سه کیوبیتی کل واقع در محیط اتلافی، بسته به حالت اولیه سیستم،میزان در هم تنیدگی و اختلاف کوانتومی متغیر خواهد بود.وقتی که حالت اولیه را بصورت رابطه (۷) در نظر گرفتیم،هر دو معیار در هم تنیدگی و اختلاف کوانتومی رفتاری شبیه به یکدیگر داشتند و هر دو در زمان t=0 دارای مقدار یکسانی بودند و با گذشت زمان رفته از مقدار آن ها کاسته شده و به مقدار صفر رسیدند و این بدین معنی است که تاثیر محیط بر سیستم برای این حالت اولیه این بوده است که هم بستگی کوانتومی با گذشت زمان از بین رفته است.اما وقتی که حالت اولیه سیستم را بصورت رابطه (۲۰) در نظر گرفتیم ، مشاهده شد که در هم تنیدگی کوانتومی برای این حالت نمی تواند چگونگی تغییرات هم بستگی کوانتومی را توصیف کند و چه در ابتدا و چه در زمان مشخص t، مقدار صفر را داراست.ولی استفاده از معیار اختلاف کوانتومی بیان گر این مهم است که با وجود این که در زمان صفر هیچ هم بستگی کوانتومی در سیستم وجود ندارد با گذشت زمان ،یک هم بستگی در سیستم ایجاد می شود(وجود محیط اتلافی منجر به ایجاد هم بستگی کوانتومی می شود)بطوریکه در زمانی تقریبا برابر با t=0.3s بیشینه این هم بستگی را داریم ولی با گذر از این زمان رفته رفته هم بستگی کوانتومی کاهش یافته و در نهایت از بین می رود.

مرجع ها

[1] G. Zhang, M. Yang, and Z. L. Cao; " Entanglement for Two-Qubit Extended Werner-Like States: Effect of Non-Markovian Environments" *Commun. Theor. Phys.* **49** (2008) 117.

[2]Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang; **"***Quantum Computation and Quantum Information*" ; 10th edition; (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)

[3] Laleh Memarzadeh and Stefano Mancini; **"**Entanglement dynamics for qubits dissipating into a common environment*";* *Physical Review A* **87**, 032303 (2013)

[4] Ming-Liang Hu, Jian Sun; "Sudden change of geometric quantum discord in finite temperature reservoirs" ; *Ann. Phys***.** **354**, 265 (2015)