بررسیِ نقطه‌ی بحرانیِ سیستم بوزونی ناافزایشی به روش اختلالی

عدلی، فرشته ؛ محمدزاده، حسین

گروه فیزیک دانشکده علوم دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

چکیده

یکی از تعمیم‌هایی که برای آنتروپی بولتزمن-گیبس وجود دارد، آنتروپی تسالیس یا آنتروپی ناافزایشی است که در چند دهه‌ی اخیر توجه زیادی را به خود معطوف کرده است. توابع توزیع آمارهای کلاسیکی، فرمیونی و بوزونی به دست آمده است. در این مقاله با استفاده از تابع توزیع بوزونی ناافزایشی، کمیت‌های انرژی درونی و تعداد ذرات را بدست می‌آوریم. سپس با محاسبه‌ی دمای بحرانی سیستم ناافزایشی برحسب q، فشار را حول دمای گذار بررسی می‌کنیم. در انتهای مقاله، گرمای ویژه‌ی گاز بوزونی ناافزایشی را محاسبه کرده و برحسب دما رسم می کنیم.

Investigation of Critical Point of Nonextensive Bose System via Perturbative Method

Adli, Fereshteh ; Mohammadzadeh, Hossein

Department of Physics, Faculty of Science, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

Abstract

One of the generalizations of Boltzmann-Gibbs entropy is the Tsallis or non-extensive entropy that has been interested in the last decades. The distribution functions of nonextensive classical, Fermi and Bose statistics have been derived. In this paper, using nonextensive Bose distribution function, we acquire the internal energy and the particles number. Then, calculating the critical temperature of the nonextensive system as a function of q, we investigate pressure about critical temperature. At the end, we calculate the specific heat of the nonextensive Bose gas and plot it versus temperature.

PACS No. 64.60

مقدمه

یکی از اصول بنیادین مکانیک آماری کوانتومی، وجود دو نوع از ذرات یعنی بوزون‌ها و فرمیون‌ها است که به ترتیب از آمار بوز-اینشتین(BE) و فرمی-دیراک(FD) تبعیت می‌کنند. اصل طرد پائولی بیان می‌کند که هیچ دو فرمیونی نمی‌توانند حالت کوانتومی یکسانی را اشغال کنند، در حالیکه چنین محدودیتی برای بوزون‌ها وجود ندارد. اثر کوانتومی هال یکی از پدیده‌هایی است که دانشمندان را وادار کرد تا تعمیم‌هایی برای آمار بوز-اینشتین و فرمی-دیراک، همانند آمار طرد هالدنی[۱] یا آمارهای دگرگون[۲و۳] در نظر بگیرند.

تعمیم دیگری نیز وجود دارد که بر پایه‌ی آنتروپی q-تعمیم یافته یا آنتروپی تسالیس نوشته شده است. این آنتروپی که تحت عنوان آنتروپی ناافزایشی[٤] نیز شناخته می‌شود، تعمیم یافته‌ی آنتروپی بولتزمن-گیبس (BG) است و کاربردهای فراوانی در مطالعه‌ی سیستم‌هایی مانند سیستم‌های درهمتنیده، اتم‌های سرد، پلاسماها، سیاهچاله‌ها، زمین لرزه‌ها و غیره دارد[۵و٦].

ما تعمیم آنتروپی بوز–اینشتین که در مرجع [۷] بدست آمده است را، انتخاب کرده و کمیت‌های ترمودینامیکی مانند انرژی داخلی، تعداد ذرات، فشار، دمای گذار و گرمای ویژه را برای این نوع سیستم‌ها محاسبه کردیم. همچنین ویژگی‌هایی مثل چگالش را در این سیستم‌ها مشاهده می کنیم.

آنتروپی ناافزایشی و تابع توزیع ذرات

آنتروپی، مفهومی است که ارتباط میان دنیای میکروسکپی و ماکروسکپی را برقرار می‌کند. معمول‌ترین آنتروپی برای توصیف پدیده‌های مختلف، آنتروپی بولتزمن–گیبس است، اما این آنتروپی فقط وقتی توصیف صحیحی از سیستم ارائه می‌دهد، که برهمکنش های بین ذره‌ای، کوتاه‌برد، حافظه‌ی میکروسکوپیِ مؤثر، کوتاه و شرایط مرزی، غیر(چند)فراکتالی باشد. پس انتظار می‌رود وقتی که شرایط فوق برقرار نباشند، آنتروپی BG تعمیم داده شود. تسالیس در سال ۱۹۸۸ برای اولین بار، آنتروپی ناافزایشی[٤]

$$S_q=-k\frac{1-\sum_{i=1}^{W}p_i^q}{1-q},q\in R, \tag{۱}$$

را به عنوان تعمیمی از آنتروپی BG معرفی کرد، به طوریکه آنتروپی که در آن آنتروپی S_q در حد $q\to 1$ همان آنتروپی بولتزمن–گیبس خواهد بود($S_{BG}=-k\sum_{i=1}^{W}p_i\ln p_i$). در رابطه‌ی (۱) ، k ثابت بولتزمن، p_i احتمال پیدا کردن سیستم در حالت میکروسکوپی i، W تعداد کل میکروحالت‌ها و q درجه‌ی ناافزایشی بودن سیستم است. تابع توزیع بوزونی برای آنتروپی ناافزایشی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید[۷]:

$$n_q(\varepsilon)=\frac{1}{(1+(q-1)(\beta\varepsilon-\ln z))^{\frac{1}{q-1}}-1}, \tag{۲}$$

که در آن $\beta=1/kT$ و $z=\exp(\mu/kT)$ گریزندگی گاز است که اندازه‌ی آن برای گاز بوزونی بین ۰ و ۱ است(μ، پتانسیل شیمیایی است). رابطه‌ی (۲) در حد $q\to 1$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$n(\varepsilon)=\frac{1}{\frac{e^{\beta\varepsilon}}{z}-1}. \tag{۳}$$

محاسبه‌ی انرژی داخلی و تعداد ذرات

در آنسامبل ماکروکانونیک، تعداد ذرات و انرژی داخلی با استفاده از روابط زیر بدست می‌آیند[۸]:

$$N=\int_0^\infty n(\varepsilon)\Omega(\varepsilon)d\varepsilon, \tag{٤}$$

$$U=\int_0^\infty \varepsilon n(\varepsilon)\Omega(\varepsilon)d\varepsilon, \tag{۵}$$

که در آن $\Omega(\varepsilon)$ چگالی حالت‌هاست و با استفاده از رابطه‌ی

$$\Omega(\varepsilon)=\frac{A^D}{\Gamma(\frac{D}{2})}\varepsilon^{\frac{D}{\sigma}-1}, \tag{٦}$$

بیان می‌شود. D بعد فضایی است که در مورد مسئله‌ی ما برابر با سه است و برای سادگی A که ضریب ثابتی است را نیز برابر یک در نظر می‌گیریم. همچنین در حد غیرنسبیتی $\sigma=2$ در نظر گرفته می‌شود. با جاگذاری تابع توزیع دلخواه در روابط (٤) و (۵) تعداد ذرات و انرژی درونی را می توان بدست آورد.

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در روابط (٤) و (۵)، می‌بینیم که عبارت‌ها به صورت تحلیلی قابل حل نیستند. بنابراین ابتدا تابع توزیع را تا مرتبه‌ی اول بر حسب $\alpha=q-1$ (میزان انحراف از افزایشی بودن سیستم) بسط می دهیم:

$$n(\varepsilon)=\frac{1}{\frac{e^{\beta\varepsilon}}{z}-1}+\frac{1}{2}\frac{\frac{e^{\beta\varepsilon}}{z}(\beta\varepsilon-\ln z)^2}{\left(\frac{e^{\beta\varepsilon}}{z}-1\right)^2}\alpha+\mathrm{O}(\alpha^2), \tag{۷}$$

و سپس در روابط (٤) و (۵) جایگذاری می‌کنیم، با این شرط که اندازه‌ی α کوچک باشد. به این ترتیب می‌توانیم عبارت‌های تحلیلی برای انرژی داخلی و تعداد ذرات به دست آوریم:

$$U=\frac{\beta^{-\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\left[\Gamma(\frac{5}{2})Li_{5/2}(z)+\alpha\left(\frac{7}{4}\Gamma(\frac{7}{2})Li_{7/2}(z)-\frac{5}{2}(\ln z)\Gamma(\frac{5}{2})Li_{5/2}(z)+\frac{3}{4}(\ln z)^2\Gamma(\frac{3}{2})Li_{3/2}(z)\right)\right] \tag{۸}$$

$$N = \frac{\beta^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\left[\Gamma(\frac{3}{2})Li_{3/2}(z) + \alpha\left(\frac{5}{4}\Gamma(\frac{5}{2})Li_{5/2}(z) - \frac{3}{2}(\ln z)\Gamma(\frac{3}{2})Li_{3/2}(z) + \frac{1}{4}(\ln z)^2\Gamma(\frac{1}{2})Li_{1/2}(z)\right)\right] \quad (۹)$$

بطوریکه $Li_n(z)$، توابع پلی‌لگاریتم هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Li_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\ln(z)}}dx, \quad (۱۰)$$

که $\Gamma(\nu)$ در آن، همان تابع گاما است.

محاسبه‌ی دمای گذار

برای گاز بوزونی ایده‌آل (q=1)، نقطه‌ی گذار فاز در (z=1) شناخته شده است و چگالش بوز–اینشتین نامیده می‌شود. این نوع نقطه‌ی گذار در سیستم‌های بوزونی ناافزایشی نیز می‌تواند وجود داشته باشد که می‌توان با محاسبات به آن دست یافت.
برای $0 \le z \le 1$ ، توابع پلی‌لگاریتم موجود در رابطه‌ی (۹) به طور یکنواخت افزایش می‌یابد و کران‌دار است. بنابراین برای مقادیر مفروض حجم و دما، تعداد کل ذرات در همه حالتهای برانگیخته محدود است. شرایط ظهور چگالش بوز–اینشتین تعمیم-یافته به صورت زیر است:

$$N > V\frac{(2\pi mk_BT)^{3/2}}{h^3}\left\{\zeta(\frac{3}{2}) + \alpha\left[\frac{15}{8}\zeta(\frac{5}{2})\right]\right\}, \quad (۱۱)$$

بطوریکه $\zeta(\nu) = Li_\nu(1)$ توابع زتا هستند. حال اگر N و V ثابت نگه داشته شوند و T تغییر کند، خواهیم داشت:

$$T < T_c^q = \frac{h^2}{2\pi mk_B}\left\{\frac{N}{V\left\{\xi(\frac{3}{2}) + \alpha\left[\frac{15}{8}\xi(\frac{5}{2})\right]\right\}}\right\}^{2/3}. \quad (۱۲)$$

می‌توانیم دمای گذار بوز–اینشتین تعمیم‌یافته (رابطه‌ی (۱۲)) را بر حسب دمای گذار بوز–اینشتین محاسبه شده در مرجع [۹] برای گاز ایده‌آل (T_c^{BE}) به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{T_c^q}{T_c^{BE}} = \left\{\frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(\frac{3}{2}) + \alpha\left[\frac{15}{8}\zeta(\frac{5}{2})\right]}\right\}^{2/3} \cong 1 - \frac{5}{4}\frac{\zeta(\frac{5}{2})}{\zeta(\frac{3}{2})}\alpha. \quad (۱۳)$$

به ازای هر مقدار انحراف از توزیع بوز–اینشتین استاندارد، دمای گذار فاز نسبت به دمای چگالش بوز–اینشتین برای q>1 (q<1)، کاهش (افزایش) می یابد.

محاسبه‌ی فشار و گرمای ویژه

با استفاده از رابطه‌ی (۸) و همچنین استفاده از رابطه‌ی بین فشار و انرژی داخلی[۹]، یعنی رابطه‌ی زیر

$$U = k_BT^2\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{PV}{k_BT}\right)\right\}_{z,V}, \quad (۱٤)$$

فشار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{P}{k_BT} = \frac{1}{\lambda^3}\left\{Li_{5/2}(z) + \alpha\left[\frac{35}{8}Li_{7/2}(z) - \frac{5}{2}\ln(z)Li_{5/2}(z) + \frac{1}{2}\ln(z)^2 Li_{3/2}(z)\right]\right\}, \quad (۱۵)$$

که در آن $\lambda = h/(2\pi mk_BT)^{1/2}$ ، طول موج حرارتی است. حال برای $T < T_c^q$، فشار به ازای z=1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(T) = \frac{k_BT}{\lambda^3}\left[\zeta(\frac{5}{2}) + \frac{35}{8}\alpha\zeta(\frac{7}{2})\right], \quad (۱٦)$$

همچنین در نقطه‌ی گذار فشار برابر خواهد بود با:

$$P(T_c^q) = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_BT_c)^{5/2}\left[\zeta(\frac{5}{2}) + \frac{35}{8}\alpha\zeta(\frac{7}{2})\right]. \quad (۱۷)$$

برای محاسبه‌ی فشار برای $T > T_c^q$ از رابطه‌ی (۱۵) استفاده می-کنیم، بطوریکه z در آن از رابطه‌ی ضمنی (۹) به دست می‌آید.

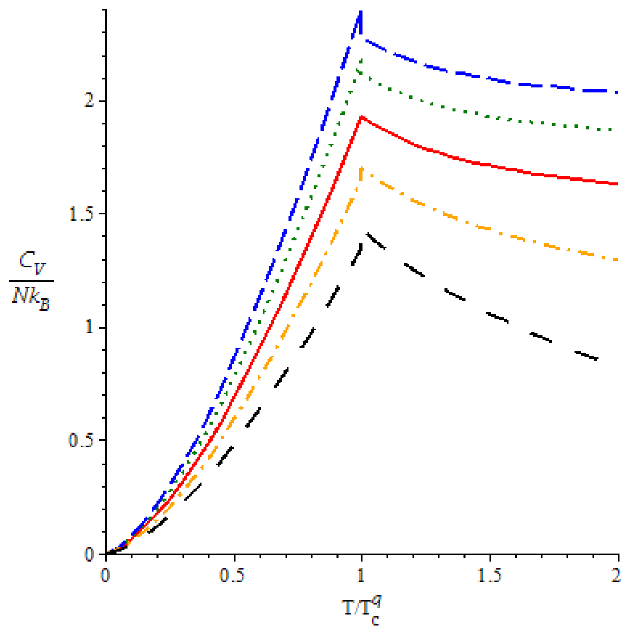
رابطه‌ی بین گرمای ویژه، فشار و انرژی درونی به صورت زیر است[۹]:

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{1}{Nk_B}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{3}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{PV}{Nk_B}\right)\right\}_v, \quad (۱۸)$$

به سادگی می‌توان دید گرمای ویژه در دماهای کم به صفر میل می‌کند، با افزایش T زیاد می‌شود تا در $T = T_c^q$ به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد و بعد از آن کاهش می‌یابد. مقدار بیشینه به ازای هر q (α) از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{C_V(T_c^q)}{Nk_B} = \frac{15}{4}\left(\frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{35}{8}\alpha\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{15}{8}\alpha\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}\right) \quad (۱۹)$$

به علت طولانی بودن محاسبات مربوط به گرمای ویژه برای دماهای دیگر، از نوشتن معادلات مربوطه اجتناب کرده و فقط به رسم نمودار اکتفا می کنیم(شکل(۱)).



شکل(۱): گرمای ویژه‌ی یک گاز ایده‌آل ناافزایشی بوزونی بر حسب دما به ازای مقادیر $\alpha = 0$ (خط پر)، $\alpha = 0.01$ (خط نقطه‌چین)، $\alpha = 0.02$ (خط‌تیره)، $\alpha = -0.01$ (خط تیره-نقطه‌چین)، $\alpha = -0.02$ (خط تیره فاصله دار).

نتیجه‌گیری

در این مقاله، نقطه‌ی بحرانیِ سیستم بوزونی ناافزایشی به روش اختلالی بررسی شد. ابتدا دمای بحرانی یا دمای گذار مرتبه‌ی دوم برای سیستم بوزونی ناافزایشی را به دست آوردیم. مشاهده کردیم که دمای گذار فاز نسبت به دمای چگالش بوز–اینشتین برای q>1 (q<1)، کاهش (افزایش) می یابد. سپس فشار و گرمای ویژه را برای دمای گذار و دماهای بالاتر و پایین‌تر از آن محاسبه کردیم. دیده می شود که مقدار بیشینه‌ی گرمای ویژه، برای q>1 (q<1)، افزایش (کاهش) می یابد. برای تمامی مقادیر q در بازه‌ی مورد بررسی، مشاهده می شود که مشتق گرمای ویژه در $T = T_c^q$ ناپیوسته است.

مرجع‌ها

[۱] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 937.
[۲] A. P. Polychronakos, *Phys. Lett. B*, **365**(1996) 202.
[۳] G. Gentile, *Nuovo Cimento*, **17**, (1940) 493.
[۴] C. Tsallis, *J. Stat. Phys*., **52** (1988) 479.
[۵] F. Caruso and C. Tsallis, *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 021102.
[۶] B. Liu and J. Goree, *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 055003.
[۷] F. Buyukluhc,D. Demirhan, *Phys. Lett. A*, **181**(1993) 24.
[۸] G. Ruppeiner, Phys. Rev. A **20** (197 9) 1608.
[۹] R. K. Pathria, P. D. Beale, Statistical Mechanics (Elsevier, New York 2011).