# محاسبه فاز بری برای کیوتیریت و کیودیت با اسپین ۱، ۳/۲، ۲ و ۵/۲ ... در گروه SU(3)

**یداله فرهمند[۱] ؛ حکمت مومن اف[۲]**

*[۱و۲] انستیتوی فیزیک – تکنیکی بنام اس او عمرواف، آکادمی علوم جمهوری تاجیکستان*

*خیابان عینی ۲۹۹/۱، دوشنبه، تاجیکستان.*

## چکیده

***فاز هندسی (توپولوژی) یا فازعمومی شده بری در مکانیک کوانتومی بسیار مهم است در حال حاضر در محاسبات فالت تولرنت توپولوژی کوانتومی اهمیت بسیاری دارد. بری در سال ۱۹۸۴ دریافت که یک عامل فاز اضافی را در کنار فاز دینامیکی در اثر چرخش دایره ای در سیستم های آدیاباتیک ناشی از خواص هندسی در فضای پارامتر های حقیقی هامیلتونی وجود دارد. در این مقاله ، ما حالت همدوس اسپینی با پارامتر های حقیقی در گروه SU(3) SU(6), SU(5),SU(4) را توسعه دادیم . فاز بری با استفاده از معادله شرودینگر به صورت بردار های حالت کت های اصلی با پارامترهای حقیقی حالت های همدوس بدست آوردیم. فاز بری برای کیوتیریت و کیودیت با اسپین ۱، ۳/۲، ۲ و ۵/۲ و ...در گروه SU(3) محاسبه نمودیم.***

# Calculate the Berry phase for qutrit, qudit with spin 1,3/2,2,5/2… particle in *SU(3)*

**Yadollah,Farahmand[1]; Hekmat, Muminov[2]**

*[1,2] Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*
*Aini Ave 299/1, Dushanbe, Tajikistan*

## Abstract

*Geometric phases (topology) or Berry generalized phase are important in quantum physics and are now central to fault tolerant quantum computation. Berry finds that an additional phase factor occurs in contrast to the well-known dynamical phase factor. is a phase acquired over the course of a cycle, when the system is subjected to cyclic adiabatic processes, resulting from the geometrical properties of the parameter space of the Hamiltonian. In this paper, we develop the formulation of the spin coherent state in real parameterization SU(3), SU(4), SU(5),SU(6). we obtain Berry phase from Schrodinger equation For vector states, basic kets are coherent states in real parameterization. We calculate Berry phase for qutrit ,qudit with spin S=1, 3/2,2,5/2… in SU(3) group and Berry phase.*

*PACS No.* *(02,03,05,20,80,70,75 and 81)*

## مقدمه

با توجه به این که هر حالت اسپینی را می توان به صورت ترکیب خطی از حالت های مولفه z اسپین $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{2S+1} m_i|\psi_i\rangle$ نوشت در نتیجه تعداد 2S+1 پارامتر مختلط برای توصیف هر حالت اسپینی لازم است و این معادل با 4S+2 درجه آزادی است که یک درجه بخاطر بهنجارش $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$ و یک درجه بخاطر دلخواه بودن فاز کاهش می یابد پس 4S درجه آزادی و در نتیجه 4S پارامتر برای توصیف آن لازم می باشد. حالت کوانتومی همدوس اسپینی یک نوع خاصی از حالت های کوانتومی هستند که دینامک آنها تقریباً به رفتارسیستم کلاسیکی شباهت دارد و با توجه به حالت های اسپینی بالا حالت های همدوس اسپینی در گروه های SU(n) همه ویژگی های خوب ریاضی، برای توصیف دقیق با در نظر گرفتن چند قطبی مناسب است. در مکانیک کوانتومی همیشه یک حالت فیزیکی در فضای هیلبرت در نظر گرفته می شود با توجه به آزادی در انتخاب فاز در هر لحظه به علت تقارن و حذف آن در ارزش انتظاری در حافظه سیستم های

کوانتومی به فاز بردار های حالت و تغییرات آن توجه کافی نمی شود. سوالی که در اینجا مطرح می شود این است که اگر یک سیستم در ویژه بردار هامیلتونی باشد و بطور آهسته توسط تغییرات پارامتر های هامیلتونی در زمان تغییر کند و مجدداً به حالت اولیه برگردد و تغییرات فاز چگونه خواهد شد؟ جواب معمول همان فاز دینامیکی با ویژه بردار اولیه است ولی در سال ۱۹۸۴ آقای بری در مقاله ای [1] اثبات کرد که این جواب کامل نیست و یک فاز دیگر وابسته به مسیر طی شده در فضای پارامترهای فاز دینامیکی را همراهی می کند. نخستین با این فاز توسط اسپان چرتنام در سال ۱۹۵۶ در مقاله [1,2] گزارش شد. به این ترتیب مقالات زیادی در قالب تعمیم و گسترش فاز بری و نیز مقالات کاربردی و اندازه گیری پدیده های شامل فاز هندسی چاپ شد. فاز بری بسیار واضح و قابل مشاهده می باشد که می تواند پدیده های به ظاهر متفاوت فیزیکی را به هم مربوط کند که اهمیت نگرش هندسی را در فیزیک مدرن نشان می دهد.

فرض کنید یک سیستم تحت چرخش باشد به طوری که بعد از مدتی به حالت اولیه خود باز می گرداند. در سیستم کلاسیک حالت اولیه و نهایی یکسان است. ولی یک سیستم کوانتومی (حافظه کوانتومی) در قالب یک عامل فاز هندسی قابل اندازه گیری است . بنابراین عوامل فاز هندسی مانند امضا حرکت کوانتومی که در حافظه کوانتومی (کیوبیت، کیودیت و کیودیت ) وجود دارد که قابل محاسبه است. فاز بری یک فاز کوانتومی است که به صورت موثر در سیستم هایی که سیر تکاملی دوره ای در نظریه بی درو و کوانتومی دارند به وجود می آید همچنین فاز هندسی در تغییرات غیر بی درو و غیر چرخه ای نیز ظاهر می شود و کاربردهای زیادی در ارتباط با موضوعات اتمی ، ماده چگال،هسته ای، فیزیک ذرات بنیادی و اپتیک دارد[3-5].

طبق تئوری بی دررودر معادله شرودینگر می توان یک عبارت دیگر اضافه کنیم که نام آن را فاز بری می نامیم [6-7].

$$\varphi_n = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n\, dt' + \Theta_B \qquad (1)$$

که در آن ما نماد معرفی می کنیم:

$$A_k = i\langle\phi|\partial_k\phi\rangle \qquad (2)$$

پس تغییر کل در فاز تابع موج برابر است با انتگرال:

$$\Theta_B = \oint_\lambda d\lambda^k A_k \qquad (3)$$

عبارت برای فاز بری می تواند به عنوان جدایی ناپذیر سطح قطعات از شکل انحنای محلی بازنویسی. با استفاده از فرمول استوکس، ما عبارت زیر را به بیان می کنیم:

$$\Theta_B = \frac{1}{2}\iint_S d\lambda^k \times d\lambda^l F_{kl} \qquad (4)$$

در آن S یک سطح در $R^3$ و $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ اجزای سازنده به شکل انحنای محلی است[8] .

## فاز بری برای حالت همدوس برای ذره با اسپین ۱ در گروه SU(3) ( کیو تریت):

ساختار حالت همدوس برای اسپین ۱در SU(3 ما حالت اولیه مانند $(1,0,0)^T$ که شکل عمومی از حالت همدوس در این گروه در نظر می گیریم و از شکل فرمول زیر پیروی می کنیم [9-11]:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= e^{-i\varphi S^z} e^{-i\theta S^y} e^{-i\gamma S^z} e^{2ig\hat{Q}^{xy}}|0\rangle \\ &= C_0|0\rangle + C_1|1\rangle + C_2|2\rangle \qquad (5)\end{aligned}$$

اگر ما حالت همدوس بر حسب توابع نمایی بسط دهیم ضرایب بدست می آید.

$$\begin{pmatrix} e^{-i\varphi}(e^{-i\gamma}(Cos^2\frac{\theta}{2})Cosg + e^{+i\gamma}(Sin^2\frac{\theta}{2})Sing) \\ \frac{Sin\theta}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\gamma}Cosg - e^{i\gamma}Sing\right) \\ e^{i\varphi}[e^{-i\gamma}(Sin^2\frac{\theta}{2})Cosg + e^{i\gamma}(Cos^2\frac{\theta}{2})Sing] \end{pmatrix} \quad (6)$$

اگر ما حل معادله شرودینگر مانند معادله (۶) در نظر بگیریم، پس مولفه پیوستگی موضعی به شکل $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ برای حالت ویژه $\varphi$ به آسانی محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned}A_\theta &= i\langle\phi|\partial_\theta\phi\rangle = 0 \,, A_\gamma = Cos2g \\ A_g &= 0 \;\;, A_\varphi = Cos\theta Cos2g \qquad (7)\end{aligned}$$

و مولفه های شکل موضعی از منحنی برابراند:

$$F_{\theta\varphi} = \partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta = -F_{\varphi\theta} = -Sin\theta Cos2g \;\;, \;\; F_{\theta\gamma} = \partial_\theta A_\gamma - \partial_\gamma A_\theta = -F_{\gamma\theta} = 0$$

$$F_{\gamma g} = \partial_g A_\gamma - \partial_\gamma A_g = -F_{g\gamma} = 2Sin2g \;\;, \;\; F_{\varphi\gamma} = \partial_\varphi A_\gamma - \partial_\gamma A_\varphi = -F_{\gamma\varphi} = 0$$

$$F_{\theta g}=\partial_\theta A_g-\partial_g A_\theta=-F_{g\theta}=0$$
$$F_{\varphi g}=\partial_\varphi A_g-\partial_g A_\varphi=-F_{g\varphi}=-2Sin2gCos\theta \qquad (8)$$

حالا ما فاز بری را برای منحنی بسته با پارامتر فضایی $\lambda=\lambda(t)$ را محاسبه می کنیم،

$$\Theta_B=\oint_\lambda d\lambda^k A_k=\frac{1}{2}\iint_S d\lambda^k\times d\lambda^l F_{kl}$$
$$=\int(Cos2g-Cos\theta)d\varphi-\int(1-Cos2g)d\gamma \qquad (9)$$

که S یک سطح در $R^3$ با کرانه $\lambda(t)$ و $\Omega(\lambda)$ تحت زاویای سه بعدی ازیک سطح S در مختصات سیستم است . این نتیجه به پارامتر وابسته به زمان بستگی ندارد.

## فاز بری برای حالت همدوس برای ذره با اسپین ۳/۲ ،۲و۵/۲ در گروه SU(3) ( کیو دیت)

برای ساختار حالت همدوس برای اسپین ۳/۲ در SU(4) ما حالت اولیه مانند $(1,0,0,0)^T$ که شکل عمومی از حالت همدوس در این گروه در نظر می گیریم و از شکل فرمول زیر پیروی می کنیم [8,9].

$$|\psi\rangle=e^{-i\varphi S^z}e^{-i\theta S^y}e^{-i\gamma S^z}e^{2ig\hat{Q}^{xy}}e^{-i\beta S^z}e^{-ik\hat{F}^{xyz}}|0\rangle$$
$$=C_0|0\rangle+C_1|1\rangle+C_2|2\rangle+C_3|3\rangle \qquad (10)$$

اگر در حالت همدوس گروه SU(4) پارامترهای به صورت زیردر نظر بگیریم:

$$k\to g\,,g=0\,,\beta=0$$

آن حالت برای اسپین $\frac{3}{2}$ به حالت همدوس SU(3) به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{2}i(\gamma+\phi)}(\mathrm{Cos}g\mathrm{Cos}^3(\frac{\theta}{2})-e^{3i\gamma}\mathrm{Sin}g\mathrm{Sin}^3(\frac{\theta}{2})) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i(3\gamma+\phi)}(2\sqrt{3}e^{3i\gamma}\mathrm{Sin}g\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}\theta+\sqrt{3}\mathrm{Cos}g\mathrm{Csc}(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}^2\theta) \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i(3\gamma-\phi)}(2\sqrt{3}\mathrm{Cos}g\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}\theta-\sqrt{3}e^{3i\gamma}\mathrm{Csc}(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}g\mathrm{Sin}^2\theta) \\ e^{-\frac{3}{2}i(\gamma-\phi)}(e^{3i\gamma}\mathrm{Cos}^3(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}g+\mathrm{Cos}g\mathrm{Sin}^3(\frac{\theta}{2})) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$A_\theta=0\,,A_\varphi=\frac{3}{2}Cos2gCos\theta$$
$$,A_\gamma=3Cos2g\,,A_g=0 \quad (11)$$

بنابراین:

$$F_{\theta\varphi}=-F_{\varphi\theta}=-\frac{3}{2}Sin\theta Cos2g$$
$$,\ F_{\theta\gamma}=-F_{\gamma\theta}=0$$
$$F_{\gamma g}=-F_{g\gamma}=6\ Cosg\ Sing=3Sin2g\,,F_{\varphi\gamma}=-F_{\gamma\varphi}=0$$
$$F_{\theta g}=-F_{g\theta}=0,F_{\varphi g}=-F_{g\varphi}=-3Sin2gCos\theta \quad (12)$$

بنابراین فاز بری برای اسپین ۳/۲ برابر می شود:

$$\Theta_B=-\frac{3}{2}\int(Cos2g-Cos\theta)d\phi+\frac{3}{2}\int(1-Cos2g)d\phi \quad (13)$$

ساختار حالت همدوس برای اسپین ۲ در SU(5) ما حالت اولیه مانند $(1,0,0,0,0)^T$ که شکل عمومی از حالت همدوس در این گروه در نظر می گیریم و از شکل فرمول زیر پیروی می کنیم.

$$|\psi\rangle=e^{-i\varphi S^z}e^{-i\theta S^y}e^{-i\gamma S^z}e^{2ig\hat{Q}^{xy}}e^{-i\beta\hat{S}^z}e^{-ik\hat{O}^{xyz}}e^{-im\hat{S}^z}e^{-in\hat{X}^{xyzl}}|0\rangle$$
$$=C_0|0\rangle+C_1|1\rangle+C_2|2\rangle+C_3|3\rangle+C_4|4\rangle \quad (14)$$

در حالت همدوس گروه SU(5) پارامترهای به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$n\to g,g=0,\beta=0,k=0\,,m=0$$

آن حالت برای اسپین 2 به حالت همدوس SU(3) ضرایب آن به فرم زیر تبدیل می شود :

$$\begin{pmatrix} e^{-2i(\gamma+\phi)}(\mathrm{Cos}g\mathrm{Cos}^4(\frac{\theta}{2})+e^{4i\gamma}\mathrm{Sin}g\mathrm{Sin}^4(\frac{\theta}{2})) \\ \frac{1}{2}e^{-i(2\gamma+\phi)}(\mathrm{Cos}g(1+\mathrm{Cos}\theta)+e^{4i\gamma}(-1+\mathrm{Cos}\theta)\mathrm{Sin}g)\mathrm{Sin}\theta \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-2i\gamma}(\mathrm{Cos}g+e^{4i\gamma}\mathrm{Sin}g)\mathrm{Sin}^2\theta \\ -\frac{1}{2}e^{-2i\gamma+i\phi}(\mathrm{Cos}g(-1+\mathrm{Cos}\theta)+e^{4i\gamma}(1+\mathrm{Cos}\theta)\mathrm{Sin}g)\mathrm{Sin}\theta \\ e^{-2i(\gamma-\phi)}(e^{4i\gamma}\mathrm{Cos}^4(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}g+\mathrm{Cos}g\mathrm{Sin}^4(\frac{\theta}{2})) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$A_\theta=0\,,A_\varphi=2Cos2gCos\theta$$
$$,A_\gamma=4Cos2g\,,A_g=0 \quad (16)$$

بنابراین:

$$F_{\theta\varphi}=-F_{\varphi\theta}=-2Sin\theta Cos2g\ ,\ F_{\theta\gamma}=-F_{\gamma\theta}=0$$
$$F_{\gamma g}=-F_{g\gamma}=8\ Cosg\ Sing=4Sin2g\,,F_{\varphi\gamma}=-F_{\gamma\varphi}=0$$

$$F_{\theta g}=-F_{g\theta}=0, F_{\varphi g}=-F_{g\varphi}=-4Sin2gCos\theta \quad (17)$$

بنابراین فاز بری برای اسپین ۲ برابر می شود:

$$\Theta_B=-2\int(Cos2g-Cos\theta)d\phi+2\int(1-Cos2g)d\phi \quad (18)$$

برای ساختار حالت همدوس برای اسپین $\frac{5}{2}$ در SU(6) ما حالت اولیه مانند $(1,0,0,0,0,0)^T$ که شکل عمومی از حالت همدوس در این گروه در نظر می گیریم و از شکل فرمول زیر پیروی می کنیم.

$$|\psi\rangle=e^{-i\varphi S^z}e^{-i\theta S^y}e^{-i\gamma S^z}e^{2ig\hat{Q}^{xy}}e^{-i\beta\hat{S}^z}e^{-ik\hat{O}^{xyz}}e^{-im\hat{S}^z}e^{-in\hat{X}^{xyzl}}e^{-ip\hat{S}^z}e^{-ir\hat{R}^{xyzlf}}|0\rangle=C_0|0\rangle+C_1|1\rangle+C_2|2\rangle+C_3|3\rangle+C_4|4\rangle+C_5|5\rangle \quad (19)$$

و حالت همدوس گروه SU(6) پارامترهای زیر در نظر بگیریم :

$$r\to g, g=0, \beta=0, k=0, n=0, m=0, p=0$$

آن حالت برای اسپن $\frac{5}{2}$ به حالت همدوس SU(3) ضرایب آن به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{5}{2}i(\gamma+\phi)}(\mathrm{Cos}g\mathrm{Cos}^5(\frac{\theta}{2})-e^{5i\gamma}\mathrm{Sin}g\mathrm{Sin}^5(\frac{\theta}{2})) \\ \sqrt{5}e^{-\frac{1}{2}i(5\gamma+3\phi)}\mathrm{Cos}(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{2})(\mathrm{Cos}g\mathrm{Cos}^3(\frac{\theta}{2})+e^{5i\gamma}\mathrm{Sin}g\mathrm{Sin}^3(\frac{\theta}{2})) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{2}i(5\gamma+\phi)}(\mathrm{Cos}g\mathrm{Cos}(\frac{\theta}{2})-e^{5i\gamma}\mathrm{Sin}g\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{2}))\mathrm{Sin}^2\theta \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{2}i(5\gamma-\phi)}(e^{5i\gamma}\mathrm{Cos}(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}g+\mathrm{Cos}g\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{2}))\mathrm{Sin}^2\theta \\ -\frac{1}{2}\sqrt{5}e^{-\frac{1}{2}i(5\gamma-3\phi)}(e^{5i\gamma}\mathrm{Cos}^3(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}g-\mathrm{Cos}g\mathrm{Sin}^3(\frac{\theta}{2}))\mathrm{Sin}\theta \\ e^{-\frac{5}{2}i(\gamma-\phi)}(e^{5i\gamma}\mathrm{Cos}^5(\frac{\theta}{2})\mathrm{Sin}g+\mathrm{Cos}g\mathrm{Sin}^5(\frac{\theta}{2})) \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$A_\theta=0, A_\varphi=\frac{5}{2}Cos2gCos\theta, A_\gamma=5Cos2g, A_g=0 \quad (21)$$

بنابراین:

$$F_{\theta\varphi}=-F_{\varphi\theta}=-\frac{5}{2}Sin\theta Cos2g, F_{\theta\gamma}=-F_{\gamma\theta}=0$$

$$F_{\gamma g}=-F_{g\gamma}=10\,Cosg\,Sing=5Sin2g, F_{\varphi\gamma}=-F_{\gamma\varphi}=0$$

$$F_{\theta g}=-F_{g\theta}=0, F_{\varphi g}=-F_{g\varphi}=-5Sin2gCos\theta \quad (22)$$

بنابراین فاز بری برای اسپین ۵/۲ برابر می شود:

$$\Theta_B=-\frac{5}{2}\int(Cos2g-Cos\theta)d\phi+\frac{5}{2}\int(1-Cos2g)d\phi \quad (23)$$

## نتیجه گیری

در حالت کلی رابطه فاز بری حالت اسپینی همدوس درگروه SU(3) برای تمام اسپین $S=\{1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\ldots\}$ برابر است:

$$\Theta_B=-S\int(Cos2g-Cos\theta)d\phi+S\int(1-Cos2g)d\phi \quad (24)$$

با توجه به کاربرد فراوان فاز بری در فیزیک نظری و ماده چگال برای شناخت بهتر ساختار اصلی مواد مغناطیسی و عملکرد آنها در مقیاس نانو ذرات و اطلاعات کوانتمی پیشنهاد می شود محاسبه آن را برای حالت های همدوس در گروه های بالاتر محاسبه نمود و در کنار فاز دینامیکی در حالت همدوس موادمغناطیسی در فیزیک ماده چگال در نظر گرفته شود که بدون تردید خواص حیرت انگیز جدید در علم مواد مغناطیسی نانو ساختار آشکار می گردد.

## مرجع‌ها

[1] M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes,” Proc.R. Soc. Lond. A 392 (1984) 45–57
[2] S. Pancharatnam, Proc. Ind. Acad. Sci. A44, 247-262 (1956).
[3] M.V. Berry, J. Mod. Optics 34, 1401-1407 (1987).
[4] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc.
Roy. Soc. London, A329(1802):45-57, (1984).
[5] J. J. Sakurai. Modern quantum mechanics, (1999).
[6] M. O. Katanaev, arXiv:0909.0370v2 [math-ph] 18 Nov (2009).
[7] V.S. Ostrovskii, Sov. Phys. JETP 64(5), 999, (1986).
[8] Kh.O. Abdulloev, Kh. Kh. Muminov. Coherent states of SU(4) group in real parameterization and Hamiltonian equations of motion. Reports of Tajikistan Academy of science V.36, N6, I993.
[9] Kh. O. Abdulloev, Kh. Kh. Muminov. Accounting of quadrupole dynamics of magnets with spin . Proceedings of Tajikistan Academy of Sciences, N.1, 1994, P.P. 28-30 (in Russian).
[10] T. Bitter and D. Dubbers. Manifestation of berry,s topology phase in neutron spin rotation. Phys. Rev. Lett, 59:251-254, (1987).
[11] D. Suter, Gerard. C, Chingas, Robert. A, Harris and A. Pines, MolecularPhys, 1987, V. 61, NO. 6, 1327-13