بررسی حالت مقید نسبیتی سیستم چند جسمی

اصلان‌زاده ، مهدی ؛ رجبی ، علی اکبر

دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود ، بلوار دانشگاه ، شاهرود

چکیده

ما در این مقاله، حالت‌های مقید نسبیتی سیستم‌های چند-جسمی را که تحت تأثیر پتانسیل " کولنی به‌علاوه یوکاوا-مانند" قرار دارند، بررسی کرده‌ایم. با جداسازی جفت‌شدگی‌های برداری کولنی و اسکالر یوکاوا-مانند، معادله کلاین-گوردون چند-جسمی را به‌صورت تحلیلی حل کرده و ویژه‌انرژی‌ها و توابع موج را به صورت عبارت‌هایی در فرم بسته به‌دست آورده‌ایم.

Investigation of relativistic bound state of few-body systems

Aslanzadeh, Mehdi ; Rajabi, Ali Akbar

Department of Physics, University of Shahrood, Shahrood

abstract

In this paper, we investigated the relativistic bound states of few-body systems under the influence of Coulomb-plus-Yukawa potentials. Assuming Yukawa scalar and Coulomb vector couplings, we presented the approximate analytical solutions of few-body Klein-Gordon equation and closed form expressions were derived for energy eigenvalues and wave functions.

PACS No: 71.15; 79.20

مقدمه

بررسی نسبیتی رفتار ذرات اهمیت زیادی در درک بهتر و دقیق‌تر ساختار درونی سیستم‌های مقید چند-جسمی یا فرآیند پراکندگی و واپاشی و فروشکست (هسته‌های ناپایدار و ...) دارد [1-3]. به همین دلیل، ما در اینجا قصد داریم، به عنوان یک مطالعه روشمند، حرکت نسبیتی ذرات درون یک سیستم مقید چند-جسمی را تحت تأثیر پتانسیل‌های برداری و اسکالر بررسی کنیم. در ساده‌ترین حالت ممکن، که بررسی یک سیستم دو-جسمی است (برای مثال اتم‌های دارای یک الکترون ظرفیت یا پراکندگی ذرات از هسته‌ها)، طیف انرژی این الکترون مقید یا سطح مقطع پراکندگی (الکترون از هسته) یا هر اطلاعات دیگری که مربوط به این فرآیندها می‌باشد، می‌تواند محاسبه شود. در اینجا، پتانسیل برهمکنشی را پتانسیل مرکزی در نظر می‌گیریم که از دوجمله کولنی و یوکاوا-مانند تشکیل شده است. این پتانسیل موسوم به پتانسیل هِلمَن[1] است و کاربردهای زیادی در فیزیک اتمی و فیزیک ماده چگال دارد [4,5]. سپس معادله کلاین-گوردون چند-جسمی را در حضور پتانسیل‌های برداری و اسکالر به صورت تحلیلی حل کرده و مقادیر انرژی ذره و ویژه‌توابع مربوطه را به‌دست می‌آوریم.

بررسی نسبیتی سیستم چند-جسمی

ما می‌توانیم یک ذره بدون اسپین با جرم m و انرژی E را که تحت تأثیر میدان‌های برداری V_v و اسکالر V_S حرکت می‌کند با معادله

[1] Hellmann potential

کلاین–گوردون توصیف کنیم که در آن پتانسیل اسکالر با جرم ذره و پتانسیل برداری با انرژی ذره جفت می‌شوند [6]. در یک سیستم چند–جسمی با ذرات یکسان، و با احتساب اثرات نسبیتی و چشم‌پوشی از اسپین ذرات، معادله نسبیتی توصیف کننده این سیستم چند–جسمی به شکل زیر خواهد بود [7,8].

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\mathbf{p}_i^2 c^2+\left[mc^2+\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{3}V_s\left(\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|\right)\right]^2 -\left[\epsilon-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{3}V_v\left(\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|\right)\right]^2\right]\right)|\Psi\rangle = 0 \qquad (1)$$

که در اینجا p_i تکانه خطی و m جرم هر ذره، $N\epsilon$ انرژی کل سیستم چند–جسمی نسبیتی و $|\Psi\rangle$ تابع موج کل (فضایی) سیستم چند–جسمی است. $V_s\left(\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|\right)$ و $V_v\left(\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|\right)$ به‌ترتیب پتانسیل‌های برداری و اسکالر بین دو ذره (i,j) می‌باشند. با استفاده از روش فوق‌کروی می‌توانیم معادله (1) را حل کنیم. بنابراین از مختصات ژاکوبی به صورت زیر استفاده می‌کنیم [9].

$$\boldsymbol{\xi}_i=\sqrt{\frac{i}{i+1}}\left(\frac{1}{i}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{i}}\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_{i+1}\right) \qquad (2)$$

ابرشعاع و ابرزاویه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$x=\left[\sum_{i=1}^{N-1}\xi_i^2\right]^{1/2}, \qquad t_i=\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi_i}{\xi_{i+1}}\right) \qquad (3)$$

ابرشعاع یک مختصه جمعی است و تحت جابجایی ذرات متقارن است. در فضای D–بعدی تابع موج چند–جسمی می‌تواند بر حسب یک سری ازهارمونیک‌های فوق‌کروی بسط داده شود.

$$\Psi(\xi_1,\xi_2,\ldots)=\sum_{[\gamma]}\psi_{[\gamma]}(x)Y_{[\gamma]}\left(\Omega_{\xi_1},\Omega_{\xi_2},\ldots,t_1,t_2,\ldots\right) \qquad (4)$$

در مدل نسبیتی کنونی پتانسیل تنها به ابرشعاع x وابسته است $V\left(\xi_1,\xi_2,\ldots\right)\approx V(x)$ (برهمکنش فوق‌مرکزی است). بنابراین، تنها یک جمله معادله (4) لازم است. قسمت زاویه‌ای توسط هماهنگ‌های فوق‌کروی توضیح داده می‌شود و برای تمام پتانسیل‌های فوق‌کروی یکسان است، در حالی‌که تابع موج ابرشعاعی $\psi_{n\gamma}(x)$ دینامیک مسئله را در بر دارد و از حل معادله ابرشعاعی در D–بعد $(D=3N-3)$ به‌دست می‌آید $(\hbar=c=1)$:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{3N-4}{x}\frac{d}{dx}-\frac{\gamma(\gamma+3N-5)}{x^2}+N(\epsilon^2-m^2) -2mV_S(x)-2\epsilon V_V(x) +\frac{1}{2}\left({V_V}^2(x)-{V_S}^2(x)\right)\right)\psi_{n\gamma}(x)=0 \qquad (3)$$

که در اینجا n و γ اعداد کوانتومی بیانگر برانگیختگی‌های ابرشعاعی و تکانه زاویه‌ای مداری بزرگ هستند و $D=3N-3$. معادله (3) به ازای پتانسیل‌های برداری و اسکالر کولنی به‌صورت تحلیلی دقیق حل شده‌است [10]. اما در موارد زیادی، پتانسیل کولنی به‌تنهایی برای توصیف رفتار ذرات مقید در سیستم کافی نیست. برای مثال در توصیف رفتار الکترون ظرفیت در اتم‌های هیدروژن–گونه باید تأثیر الکترون‌های حائل نیز به‌حساب آورده شود. به‌همین دلیل، ما در اینجا جمله دیگری به پتانسیل کولنی اضافه کرده‌ایم. پتانسیل برهم‌کنشی یک پتانسیل مرکزی به‌صورت زیر است که جمله دوم به خاطر اثر پوشانندگی الکترون‌های داخلی‌تر در نظر گرفته می‌شود.

$$V(r)=-\frac{V_1}{r}-\frac{V_0}{r}e^{-\mu r} \qquad (4)$$

در اینجا μ پارامتر پوشانندگی است. این پتانسیل به‌عنوان مدلی برای مولکول‌های هیدرید قلیایی مورد استفاده قرار می‌گیرد [11]. همچنین برای نشان دادن برهم‌کنش الکترون–یون [12,13] و الکترون–هسته [14,15] به‌کار می‌رود. همچنین نشان داده شده‌است که توصیف ویژگی‌های اصلی برهم‌کنش مؤثر دو–ذره‌ای برای ذرات باردار در کریستال‌های قطبی می‌تواند توسط این پتانسیل انجام شود [16-18]. در ادامه با جداسازی جفت‌شدگی‌های برداری و اسکالر قصد داریم مسئله را به‌صورت تحلیلی حل کنیم.

جفت‌شدگی برداری کولنی و اسکالر یوکاوا–مانند در معادله کلاین–گوردون و حل تحلیلی مسئله

با توجه به اینکه پتانسیل تبادل یک فوتونی (کولنی) به‌طور خالص برداری است، در اینجا ما پیشنهاد می‌کنیم که پتانسیل یوکاوا–مانند

باید اسکالر باشد. بنابراین، پتانسیل‌های اسکالر و برداری را به‌صورت زیر درنظرمی‌گیریم.

$$V_s(r) = -\frac{V_0}{r}e^{-\mu r}, \qquad V_v(r) = -\frac{V_1}{r} \tag{5}$$

با اعمال تقریب

$$\frac{1}{x} \approx \lim_{\mu\to 0}\left[\frac{\mu}{1-e^{-\mu x}}\right] \tag{6}$$

و با تغییر متغیر $s = e^{-\mu x}$، اگر معادله (3) را برحسب متغیر جدید بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-s}{s(1-s)}\frac{d}{ds} + \frac{-As^2+Bs-C}{s^2(1-s)^2}\right]U(s) = 0 \tag{7}$$

که در آن

$$\begin{aligned} A &= \frac{N(m^2-\epsilon^2)}{\mu^2} + \frac{2mV_0}{\mu} + \frac{{V_0}^2}{2}, \\ B &= 2\frac{N(m^2-\epsilon^2)}{\mu^2} - \frac{2\epsilon V_1}{\mu} + \frac{2mV_0}{\mu}, \\ C &= \frac{N(m^2-\epsilon^2)}{\mu^2} - \frac{{V_1}^2}{2} - \frac{2\epsilon V_1}{\mu} \\ &\quad + \left(\gamma + \frac{3N-6}{2}\right)\left(\gamma + \frac{3N-4}{2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

معادله (7) یک معادله مشتقی از نوع

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \tag{9}$$

است که می‌تواند با استفاده از روش نیکیفوروف-اوواروف حل شود [19]. در اینجا، $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چندجمله‌ای‌هایی از مرتبه دو و $\tilde{\tau}(s)$ یک چندجمله‌ای درجه اول است. با استفاده از روش جداسازی به‌صورت

$$\psi(s) = \phi(s)y(s) \tag{10}$$

معادله (8) به‌صورت یک معادله مشتقی به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0 \tag{11}$$

که در آن

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \tfrac{1}{2}n(n-1)\sigma''(s), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{12}$$

و تابع $\phi(s)$ از حل معادله مشتقی مرتبه اول زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \tag{13}$$

معادله (11) به‌شکل یک معادله فوق‌هندسی است و جواب‌های آن با استفاده از رابطه معروف رودریگز به‌دست می‌آید.

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left[\sigma^2(s)\rho(s)\right] \tag{14}$$

که در اینجا B_n ضریب بهنجارش است و از شرط بهنجارش $\int_{-\infty}^{\infty} ds\, \psi^2(s) = 1$ به‌دست می‌آید و تابع وزنی $\rho(s)$ باید توسط شرط زیر ارضا شود:

$$[\sigma(s)\rho(s)]' = \tau(s)\rho(s) \tag{15}$$

که در آن

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \tag{16}$$

در اینجا برای دستیابی به یک حل حالت مقید، مشتق $\tau(s)$ باید منفی باشد. تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ مورد نیاز برای این روش از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

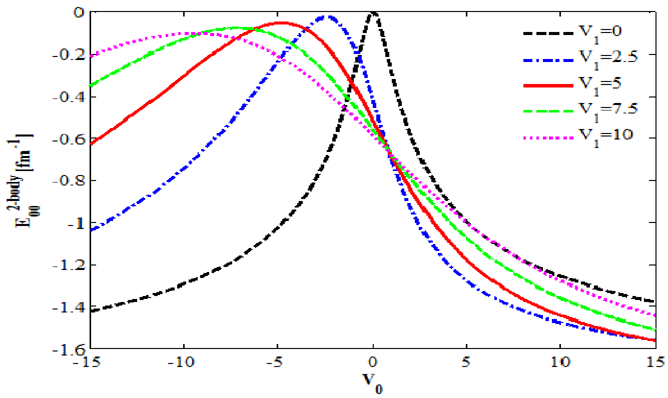
$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \tag{17}$$

$$\lambda = k + \pi'(s) \tag{18}$$

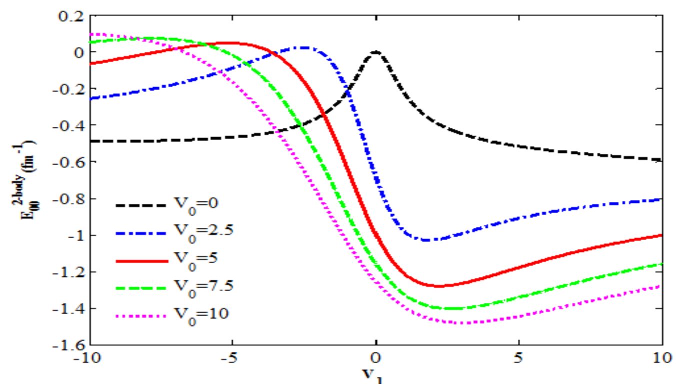
تابع $\pi(s)$ یک چندجمله‌ای حداکثر درجه یک است و ثابت k ثابتی است که عبارت زیر رادیکال را مربع می‌کند و طوری انتخاب می‌شود که مشتق $\pi(s)$ منفی شود. با به‌کار بردن این روش، معادله انرژی و تابع موج ابرشعاعی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم که در آن تابع $P_n^{(a,b)}(x)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی هستند.

$$\begin{aligned} &\frac{N(\epsilon^2-m^2)}{\mu^2} + \frac{{V_1}^2}{2} + \frac{2\epsilon V_1}{\mu} - \left(\gamma+\frac{3N-6}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3N-4}{2}\right) \\ &\quad + \left[\frac{\frac{2mV_0+2\epsilon V_1}{\mu} - \left(\gamma+\frac{3N-6}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3N-4}{2}\right) + \frac{{V_0}^2+{V_1}^2}{2}}{2n+1+2\sqrt{\left(\gamma+\frac{3N-5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left({V_0}^2-{V_1}^2\right)}} - \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\gamma+\frac{3N-5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left({V_0}^2-{V_1}^2\right)}\right)\right]^2 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

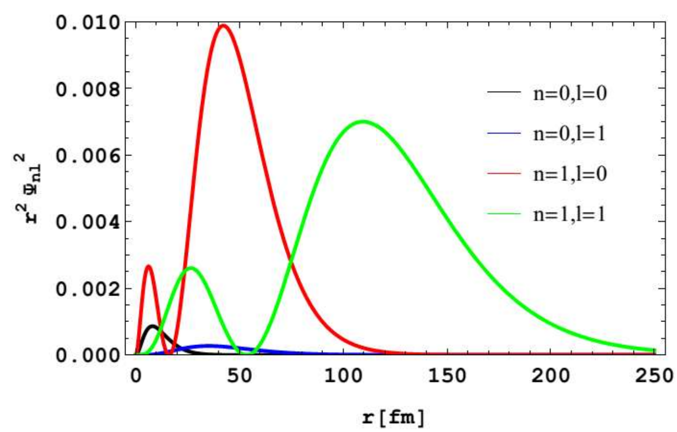
$$\psi_{n,\gamma}(x) = C_n\, x^{-\frac{(3N-4)}{2}}\left(1-e^{-\mu x}\right)^{\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\gamma+\frac{3N-5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left({V_0}^2-{V_1}^2\right)}} e^{-\mu\sqrt{C}\,x} P_n^{\left(2\sqrt{C},\,2\sqrt{\left(\gamma+\frac{3N-5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left({V_0}^2-{V_1}^2\right)}\right)}\left(1-2e^{-\mu x}\right) \tag{20}$$



شکل 1. تغییرات انرژی بستگی دو–جسمی برحسب پارامتر V_0، در V_1 های مختلف به‌ازای پارامترهای ثابت $m = 1\ \mathrm{fm}^{-1}$ و $\mu = 0.01\ \mathrm{fm}^{-1}$.



شکل 2. . مانند شکل 1 برای پارامتر V_1، در V_0 های مختلف.



شکل 3. تابع توزیع احتمال شعاعی (غیربهنجار) حالت‌های مختلف به‌ازای پارامترهای ثابت $m = 1\ \mathrm{fm}^{-1}$، $\mu = 0.01\ \mathrm{fm}^{-1}$، $V_0 = -5$ و $V_1 = +5$

نتیجه گیری

معادله کلاین–گوردون چند–جسمی در حضور پتانسیل‌های برداری کولنی و اسکالر یوکاوا–مانند، طی یک فرآیند تحلیلی تقریبی حل شد و مقادیر انرژی نسبیتی ذره و ویژه‌توابع مربوطه را به‌صورت عبارت هایی تحلیلی به‌دست آوردیم. از رابطه به‌دست آمده برای انرژی و تابع موج، یک سیستم مقید دو–جسمی فرضی را بررسی کرده‌ایم که برای مثال می‌تواند یک الکترون ظرفیت در اتم‌های هیدروژن‌گونه باشد. تغییرات انرژی بستگی نسبت به پارامترهای پتانسیلی V_0 و V_1 در شکل‌های (1) و (2) و تابع توزیع احتمال شعاعی $\left|r\psi_{n,l}(r)\right|^2$ در شکل (3) نشان داده شده‌اند.

مرجع‌ها

[1] Fabredela Ripelle, M., Fiedeldey, H., and Sofianos, S.A.: Integrodifferential equation for few-and many-body systems. Phys. Rev. C **38** (1988) 449-466
[2] Platter, L., Hammer, H.W., Meißner, U.-G.: Four-boson system with short-range interactions. Phys. Rev. A **70** (2004) 052101: 1-13
[3] Viviani, M., Kievsky, A., Rosati, S.: Calculation of the α-particle ground state within the hyperspherical harmonic basis. Phys. Rev. C **71** (2005) 024006: 1-22
[4] H. Hellmann, W. Kassatotchkin, "Metallic Binding According to the Combined Approximation Procedure". Chem. Phys.**4**, 324 (1936).
[5] J. Adamowski, "Bound eigenstates for the superposition of the Coulomb and the Yukawa potentials", Phys. Rev. A **31** 43-50 (1985).
[6] W. Greiner; "*Relativistic Quantum Mechanics*"; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1990)
[7] Mehdi Aslanzadeh and Ali Akbar Rajabi; "Analytical Solution of Relativistic Few-Body Bound Systems with a Generalized Yukawa Potential"; Few-Body Syst **57** (2016) 145–154
[8] Mehdi Aslanzadeh and Ali Akbar Rajabi; "Analytical solution of relativistic three-body bound systems"; Eur. Phys. J. A **50** (2014) 151
[9] C. D. Lin; "Hyperspherical coordinate approach to atomic and other Coulombic three-body systems"; Phys. Rep. **257** (1995) 1-83
[10] M.G. Garcia and A.S. de Castro, "Relativistic Coulomb scattering of spinless bosons" Phys.Rev. C **91** (2015) 034903
[11] Y. P. Varshni, R. C. Shukla, "Alkali Hydride Molecules: Potential Energy Curves and the Nature of their Binding", Rev Mod. Phys. **35** (1963) 130
[12] V. K. Gryaznov, "Thermodynamic properties of nonideal argon and xenon plasma", Zh. Eksp. Teor. Fiz. **78** (1980) 573-585.
[13] V. A. Alekseev, V. E. Fortov, I. T. Yakubov, "Physical properties of high-pressure plasmas", Sov. Phys. USP. **26** (1983) 99-115.
[14] P. Gombas, *Die Statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen*, p: 304 (Springer, Berlin, 1949).
[15] G. McGinn, "Atomic and Molecular Calculations with the Pseudopotential Method. VII One-Valence-Electron Photoionization Cross Sections", J. Chem. Phys. **53** (1970) 3635
[16] S. Bebnarek, J. Adamowski, M. Saffczynski, "Effective Hamiltonian for few-particle systems in polar semiconductors", Solid State Commun. **21** (1977) 1.
[17] J. Pollmann, H. Buttner, "Effective Hamiltonians and bindings energies of Wannier excitons in polar semiconductors", Phys. Rev. B **16** (1977) 4480
[18] A. K. Roy, A. F. Jalbout, E. I. Proynov, "Accurate calculation of the bound states of Hellmann potential", J. Math. Chem. 44 (2008) 260-269
[19] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov; "Special Functions of Mathematical Physics"; 1st edition. Birkhauser, Basel, Switzerland (1988)