

بررسی درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی در سامانه ستاره اسپین با استفاده از نامساوی‌های مونوگمی

مسعودی، مهرا ن؛ میرافزالی، سید یحیی؛ سیدیزدی، جمیله

گروه فیزیک، دانشگاه ولی‌عصر(عج)، رفسنجان

چکیده

درهم‌تنیدگی را نمی‌توان به‌طور آزادانه بین تعداد زیادی از کیوبیت‌ها به اشتراک گذاشت. این ویژگی در قالب نامساوی‌های مونوگمی که بر حسب توان دوم مقیاس‌های مختلف درهم‌تنیدگی، از جمله مقیاس تلافی بیان می‌شوند، نشان داده شده و بر اساس آن نیز روشی برای آشکارسازی و اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌ها ارائه گردیده است. اخیراً این نامساوی‌های مونوگمی برای توان‌های بالاتر از دو و کارایی بهتر آن‌ها در آشکارسازی درهم‌تنیدگی حالت‌های خالص سه‌کیوبیتی نیز اثبات گردیده است. در این پژوهش به بررسی میزان کارایی این نامساوی‌ها در آشکارسازی درهم‌تنیدگی حالت‌های آمیخته سه‌کیوبیتی با مرتبه دو پرداخته می‌شود. به طور خاص، این موضوع در یک سامانه متشکل از سه ذره با اسپین $1/2$ که هر کدام بطور جداگانه با یک اسپین مرکزی برهم‌کنش می‌کنند، بررسی می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از توان‌های بالاتر از دو در آشکارسازی درهم‌تنیدگی سه‌جزئی حالت‌های آمیخته سه‌کیوبیتی در پاره‌ای اوقات کارایی بهتری دارد و در پاره‌ای اوقات مزیتی ایجاد نمی‌کند.

Study of triqubit entanglement in spin star system using monogamy inequalities

Masoudi, Mehran; Mirafzali, Seyyed Yahya; Seyedyazdi, Jamileh

Department of Physics, Faculty Science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan Iran.

Abstract

It is not possible to share entanglement freely between many qubits. This feature has been shown in the context of monogamy inequality in terms of square of different entanglement measures such as concurrence and also based on that a method for detection and measurement of entanglement between qubit has been introduced. Recently monogamy inequalities for powers higher than two and their better performance in detecting triqubit mixed state entanglement also has been proved. In this study, we investigate the effectiveness of these inequalities in detecting rank two triqubit mixed state entanglements. In particular, we investigate this matter in a system containing triqubit that each of them is interacting with a central qubit. The results show that using powers higher than two in detecting three partite triqubit mixed state entanglements either shows improvement in some cases or doesn't improve in some other cases.

PACS No. (00.00)

مقدمه

دلیل وجود جنبه‌ها و جلوه‌های متعدد و متمایز درهم‌تنیدگی در سامانه‌های چندجزئی است که بررسی آن را پیچیده‌تر و دشوارتر می‌سازد [۱]. نمونه‌ای از این مشکلات، وجود حالت‌ها با درهم‌تنیدگی‌هایی از نوع متفاوت در سامانه‌های چند جزئی است. به عنوان مثال، نشان داده شده است که درهم‌تنیدگی حالت‌های خالص سه کیوبیتی را بر اساس عملیات‌های موضعی تصادفی همراه با ارتباط کلاسیکی می‌توان به دو دسته تقسیم‌بندی کرد. یکی

یکی از تفاوت‌های اصلی و مهم مکانیک کلاسیک با مکانیک کوانتومی، وجود خاصیتی به نام درهم‌تنیدگی در حالت سامانه‌های کوانتومی است که از لحاظ نظری و کاربردی دارای اهمیت فراوانی می‌باشد. شناخت ما از درهم‌تنیدگی در سامانه‌های چند جزئی، بسیار کمتر از درهم‌تنیدگی موجود در سامانه‌های دو جزئی می‌باشد. این به

ممکن ρ_{ABC} بر حسب حالت‌های خالص به صورت $\rho_{ABC} = \sum p_i |\phi_{ABC}^i\rangle\langle\phi_{ABC}^i|$ گرفته می‌شود. مانند مقیاس تلاقی، برای مسأله کمینه‌سازی در تعریف $\langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min}$ ، بجز حالت‌های با مرتبه دو، حل تحلیلی‌ای وجود ندارد [۴]. بر اساس رابطه ۲، از $\tau_2^{mix} = \langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min} - C_{AB}^2 - C_{AC}^2$ سه‌جزئی حالت ρ_{ABC} می‌توان استفاده کرد [۵].

اخیراً نامساوی‌های مونوگمی ذکر شده، برای توان‌های $\alpha > 2$ نیز اثبات و با استفاده از آن، مقیاسی برای اندازه‌گیری میزان درهم‌تنیدگی سه‌جزئی حالت‌های خالص سه‌کیوبیتی به شکل زیر $\tau_\alpha(|\phi_{ABC}\rangle) = C_{ABC}^\alpha - C_{AB}^\alpha - C_{AC}^\alpha$ ، $\alpha \geq 2$ (۳) تعریف و کارایی بیشتر آن (با $\alpha > 2$) در آشکارسازی درهم‌تنیدگی حالت‌های خالص، اثبات شده است [۶]. به عنوان مثال، با استفاده از τ_α با توان‌های $\alpha > 2$ ، درهم‌تنیدگی حالت $|W\rangle$ (معادله ۱)، که با τ_2 قابل آشکارسازی نیست، آشکار می‌گردد. اکنون با توجه به رابطه ۲ می‌توان برای حالت‌های آمیخته، نامساوی $\langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min} \geq C_{AB}^2 + C_{AC}^2$ را برای $\alpha \geq 2$ بدست آورد و بر اساس آن از عبارت:

$$\tau_\alpha^{mix} = \left(\langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min} \right)^\alpha - C_{AB}^\alpha - C_{AC}^\alpha, \quad \alpha \geq 2 \quad (۴)$$

برای آشکارسازی درهم‌تنیدگی سه‌جزئی حالت‌های آمیخته سه‌کیوبیتی استفاده کرد.

در این پژوهش، میزان کارایی τ_α^{mix} با $\alpha > 2$ در آشکارسازی درهم‌تنیدگی حالت‌های آمیخته سه‌کیوبیتی بررسی می‌گردد. بطور خاص، این موضوع را در یک سامانه متشکل از سه ذره با اسپین ۱/۲ که هر کدام به صورت جداگانه با یک اسپین دیگر برهم‌کنش می‌کنند، بررسی می‌شود. درهم‌تنیدگی موجود در حالت‌های گرمایی این سامانه (سامانه ستاره‌ای اسپین) در مطالعات دیگر و با روش‌های متفاوت بررسی شده است [۷].

درهم‌تنیدگی سه‌جزئی در سامانه ستاره‌ای اسپین

هامیلتونی سامانه ستاره‌ای اسپین که از چهار ذره با اسپین ۱/۲ تشکیل گردیده به این شکل است [۷]:

درهم‌تنیدگی سه‌جزئی از نوع درهم‌تنیدگی موجود در حالت‌های $|GHZ\rangle$ و دیگری از نوع درهم‌تنیدگی حالت‌های زیر [۲]:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle) \quad (۱)$$

یکی دیگر از ویژگی‌های مهم درهم‌تنیدگی در سامانه‌های چند جزئی، وجود محدودیت در توزیع‌پذیری آن بین چند کیوبیت است که برای اولین بار به صورت نامساوی مونوگمی برحسب توان دوم مقیاس تلاقی (یکی از مقیاس‌های درهم‌تنیدگی) برای حالت‌های سه‌کیوبیتی نشان داده شد [۳]. برای یک حالت خالص دوجزئی $|\psi_{AB}\rangle$ مقیاس تلاقی به صورت $C(|\psi_{AB}\rangle) = \sqrt{2(1 - \text{tr}(\rho_A^2))}$ که در آن $\rho_A = \text{tr}_B(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|)$ ماتریس چگالی یافته جزء A است. برای حالت‌های آمیخته ρ_{AB} ، مقیاس تلاقی طبق رابطه $C(\rho_{AB}) = \min \sum p_i C_{AB}(|\psi_{AB}^i\rangle)$ در آن کمینه روی تمامی بسط‌های ممکن ρ_{AB} بر حسب حالت‌های خالص به صورت $\rho_{AB} = \sum p_i |\psi_{AB}^i\rangle\langle\psi_{AB}^i|$ گرفته می‌شود. این نکته قابل ذکر است که به جزء حالت‌های دوکیوبیتی و حالت‌های با تقارن بالا، حل دقیق و تحلیلی‌ای برای مسئله کمینه‌سازی در تعریف مقیاس تلاقی وجود ندارد. نامساوی مونوگمی برای یک حالت خالص سه‌کیوبیتی $|\phi_{ABC}\rangle$ به این صورت بیان می‌شود: $C_{ABC}^2 \geq C_{AB}^2 + C_{AC}^2$ که در آن مربع مقیاس تلاقی حالت ρ_{AB} (ماتریس چگالی یافته جزء AB) و C_{AC}^2 مربع مقیاس تلاقی حالت ρ_{AC} (ماتریس چگالی یافته جزء AC) و $C_{ABC}^2 = 2(1 - \text{tr}(\rho_A^2))$ (ماتریس چگالی جزء A) است. بر اساس رابطه مونوگمی ذکر شده، از $\tau_2(|\phi_{ABC}\rangle) = C_{ABC}^2 - C_{AB}^2 - C_{AC}^2$ برای اندازه‌گیری میزان درهم‌تنیدگی سه‌جزئی حالت $|\phi_{ABC}\rangle$ می‌توان استفاده کرد [۳].

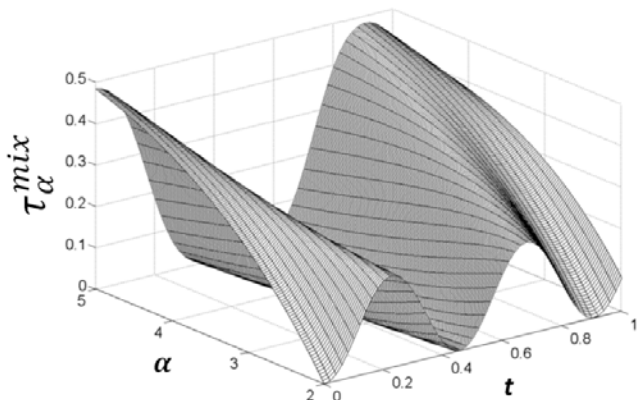
نامساوی مونوگمی را می‌توان به حالت‌های آمیخته سه‌کیوبیتی ρ_{ABC} نیز بصورت زیر بسط داد:

$$\langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min} \geq C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \quad (۲)$$

به صورت $\langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min} = \min \sum p_i C_{ABC}^2(|\phi_{ABC}^i\rangle)$ در رابطه بالا تعریف می‌شود که در آن کمینه روی تمامی بسط‌های

$$\rho_{AB} = (|\gamma_1|^2 + |\gamma_4|^2)|00\rangle\langle 00| + |\gamma_2|^2|10\rangle\langle 10| + \gamma_3^* \gamma_2|10\rangle\langle 01| + \gamma_3 \gamma_2^*|01\rangle\langle 10| + |\gamma_3|^2|01\rangle\langle 01| = \rho_{AC}$$

اکنون با توجه به نتایج به دست آمده، می‌توانیم τ_α^{mix} را برای ρ_{ABC} در هر لحظه از زمان به ازای α دلخواه محاسبه کنیم. نتایج حاصله، در شکل ۱ به ازای $\omega_0 = 3$ و $c = 2$ در بازه‌ی زمانی $0 \leq t \leq 1$ و برای $2 \leq \alpha \leq 5$ رسم گردیده است.



شکل ۱: τ_α^{mix} به ازای $\omega_0 = 3$ و $c = 2$ در بازه‌ی زمانی $0 \leq t \leq 1$ و برای $5 \geq \alpha \geq 2$.

برای مشاهده‌ی بهتر نتایج، در شکل ۲، τ_α^{mix} به ازای زمان‌های $t = 0$ (خط توپر)، $t = 0.114$ (نمودار خط‌چین)، $t = 0.228$ (نمودار نقطه‌چین) $t = 0.342$ (نمودار خط‌چین نقطه) به صورت تابعی از α رسم گردیده است. همان‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود در زمان‌های $t = 0$ و $t = 0.114$ با افزایش α ، τ_α^{mix} به‌طور مداوم افزایش می‌یابد با این تفاوت که در زمان $t = 0.114$ ، τ_α^{mix} به ازای $\alpha = 2$ ، صفر نیست. در زمان $t = 0.228$ ، با افزایش α ، بجز یک بازه‌ی کوچک ابتدایی، τ_α^{mix} به‌طور مداوم کاهش می‌یابد. در زمان $t = 0.342$ ، τ_α^{mix} یک تابع نزولی یکنوا از α است. نحوه تغییر τ_α^{mix} با افزایش α را در زمان‌های دیگر (که در شکل ۲ رسم نگردیده است) به این صورت می‌توان توضیح داد: در زمان $t = 0.454$ ، τ_α^{mix} برای تمامی مقادیر α تقریباً برابر با صفر می‌باشد. با ادامه افزایش زمان به همان روند قبل، به ازای زمان‌های $t = 0.568$ ، $t = 0.682$ ، $t = 0.796$ و $t = 0.908$ ، رفتاری به‌ترتیب شبیه آنچه که در

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sum_{K=A,B,C} \sigma_Z^K + \sum_{K=A,B,C} c (\sigma_+^0 \sigma_-^K + \sigma_-^0 \sigma_+^K) \quad (3)$$

که در آن عملگر پائولی اسپین K ام ($K = 0, A, B, C$) راستای β ($\beta = X, Y, Z$)، σ_\pm^K عملگرهای بالا و پائین برنده، ω_0 فرکانس بور مربوط به اسپین‌ها در حضور میدان مغناطیسی خارجی و c ثابت جفت‌شدگی بین اسپین صفر با سایر اسپین‌ها است. همان‌طور که دیده می‌شود، در این سامانه، اسپین‌های A, B, C با اسپین صفر (اسپین مرکزی) برهم‌کنش می‌کنند ولی هیچ‌کدام از آن‌ها با هم برهم‌کنشی ندارند. حالت اولیه سامانه را به صورت اسپین صفرام و کت $|W\rangle$ نشان‌دهنده‌ی حالت اولیه درهم‌تنیده سه اسپین دیگر است. با اثر دادن عملگر تحول زمانی $U = e^{-iHt}$ ($\hbar = 1$) بر روی حالت اولیه، کت حالت سامانه در زمان دلخواه t به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$|\psi(t)\rangle = \gamma_1|1000\rangle + \gamma_2|0100\rangle + \gamma_3|0010\rangle + \gamma_4|0001\rangle$$

که در آن داریم:

$$\gamma_1 = 0.5 \Gamma_- , \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_+}{2\sqrt{3}} , \quad \Gamma_\pm = e^{-iE^+t} \pm e^{-iE^-t}$$

$$\gamma_3 = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) e^{+i\omega_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \Gamma_+ = \gamma_4 , \quad E^\pm = \pm [\sqrt{3}c - \omega_0]$$

اکنون با گرفتن رد جزئی بر روی اسپین صفرام، عملگر چگالی مربوط به سه اسپین دیگر به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\rho_{ABC} = |\gamma_1|^2 |000\rangle\langle 000| + |W(t)\rangle\langle W(t)|,$$

$$|W(t)\rangle = \gamma_2|100\rangle + \gamma_3|010\rangle + \gamma_4|001\rangle.$$

هدف ما بررسی درهم‌تنیدگی سه جزئی این عملگر چگالی سه‌کیوبیتی آمیخته با استفاده از رابطه ۴ است. همان‌طور که دیده می‌شود، مرتبه عملگر چگالی ρ_{ABC} برابر با دو است. از این رو از معادله (۱۳) در مرجع [۴] که در زیر آمده است برای محاسبه $\langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min}$ می‌توان استفاده کرد:

$$\langle C_{ABC}^2 \rangle^{\min} = \text{tr}(\rho_{ABC} \bar{\rho}_{ABC}) + 2\lambda_{\min} [1 - \text{tr}(\rho)^2] \quad (3)$$

که در آن λ_{\min} کوچکترین ویژه مقدار ماتریس M است که در مرجع [۴] تعریف شده است. با گرفتن رد جزئی از ρ_{ABC} نسبت به اسپین‌های C و B بترتیب ρ_{AC} و ρ_{AB} بدست می‌آیند، که با هم برابر و به‌صورت زیر می‌باشند:

درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی نیز بهتر می‌شود که این در توافق با نتایج دیگران است [۶]. در زمان $t = 0.454$ ، علی‌رغم خالص بودن ρ_{ABC} ، به‌ازای تمامی α ها، τ_{α}^{mix} تقریباً برابر صفر است. می‌توان نتیجه گرفت که در این زمان درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی واقعاً به صفر نزدیک است. از این‌رو افزایش توان α نتیجه بخش نبوده است. برای زمان‌های نزدیک به $t = 0$ و $t = 0.908$ ، که $tr(\rho_{ABC}^2)$ به یک نزدیک یا بعبارتی میزان خلوص ρ_{ABC} بالاست، مزیتی نسبی در استفاده از $\alpha > 2$ در τ_{α}^{mix} برای کشف درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی می‌توان مشاهده کرد. در زمان‌های دیگر، بخصوص زمان‌های نزدیک به $t = 0.454$ ، چه میزان خالص بودن ρ_{ABC} کم باشد چه زیاد، مزیتی در τ_{α}^{mix} به‌ازای $\alpha > 2$ برای آشکارسازی درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی نسبت به $\alpha = 2$ وجود ندارد. به‌طور خلاصه، در بعضی از زمان‌ها، افزایش α ، کارایی τ_{α}^{mix} در کشف درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی حالت‌های آمیخته را بالا می‌برد و در بعضی اوقات قادر به انجام این کار نیست.

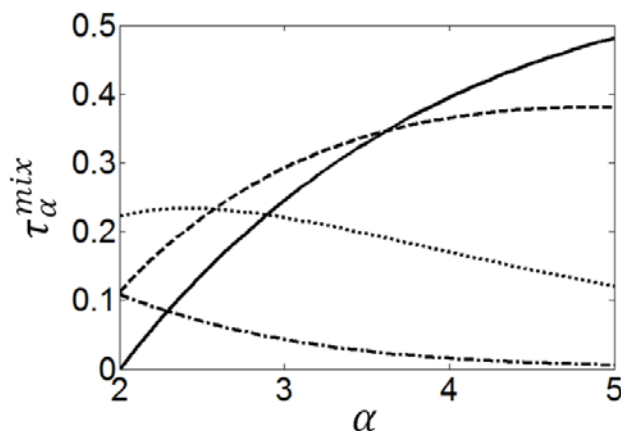
نتیجه‌گیری

بجز زمانی که حالت سامانه خالص است، در بقیه زمان‌ها ارتباط مستقیم و ثابتی بین میزان خلوص ρ_{ABC} و قدرت τ_{α}^{mix} به‌ازای $\alpha > 2$ در آشکارسازی درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی وجود ندارد. بعبارتی بر خلاف حالت‌های خالص، افزایش α ، در بالا بردن کارایی τ_{α}^{mix} برای کشف درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی بعضی از حالت‌های آمیخته سودمند و برای بعضی دیگر غیر سودمند است.

مرجع‌ها

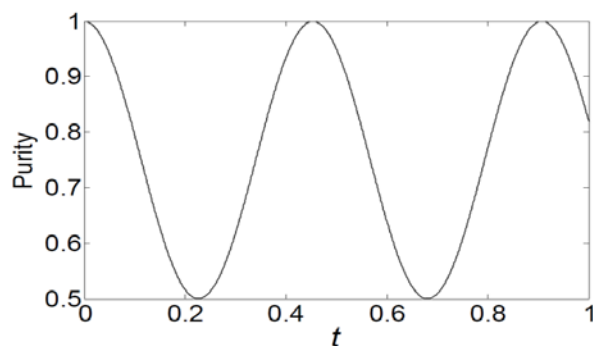
[1] O. Gühne, G. Toth, "Entanglement detection", *Phys. Rep.* **474** (2009) 1.
 [2] W. Dur, G. Vidal, J. I. Cirac, "Three qubits can be entangled in two inequivalent ways", *Phys. Rev. A* **62**, 062314 (2000).
 [3] V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters, "Distributed entanglement", *Phys. Rev. A* **61**, 052306 (2000).
 [4] T. J. Osborne, "Entanglement measure for rank-2 mixed states", *Phys. Rev. A* **72**, 022309 (2005).
 [5] T. R. Oliveira, "Monogamy Inequality and Residual Entanglement of Three Qubits under Decoherence", *Phys. Rev. A* **80**, 022331 (2009).
 [6] Xue-Na Zhu, Shao-Ming Fei, "Entanglement monogamy relations of qubit systems", *Phys. Rev. A* **90**, 024304 (2014).
 [7] B. Militello, A. Messina, "Genuine tripartite entanglement in a spin-star network at thermal equilibrium", *Phys. Rev. A* **83**, 042305 (2011).

زمان‌های $t = 0$ و $t = 0.114$ ، $t = 0.228$ ، $t = 0.342$ مشاهده شد، از خود بروز می‌دهد. در زمان‌های $t > 1$ ، روند توضیح داده شده در رفتار τ_{α}^{mix} ، دقیقاً به‌همین ترتیب تکرار می‌گردد.



شکل ۲: τ_{α}^{mix} به‌ازای $\omega_0 = 3$ و $c = 2$ در زمان‌های $t = 0$ (خط توپر)، $t = 0.114$ (خط چین)، $t = 0.228$ (نقطه‌چین)، $t = 0.342$ (خط چین نقطه)

برای مشاهده‌ی ارتباط بین میزان خالص بودن حالت ρ_{ABC} و قدرت τ_{α}^{mix} در آشکارسازی درهم‌تنیدگی سه‌کیوبیتی، در شکل ۳، $tr(\rho_{ABC}^2)$ به‌صورت تابعی از زمان رسم گردیده است.



شکل ۳: میزان خالص بودن حالت ρ_{ABC} در بازه‌ی زمانی $0 \leq t \leq 1$.

در زمان‌های $t = 0$ و $t = 0.908$ که $tr(\rho_{ABC}^2)$ برابر یک و در نتیجه ρ_{ABC} خالص است، با افزایش α ، قدرت τ_{α}^{mix} در آشکارسازی