تأثیر برهم کنش بین همسایه‌های دوم بر روی رفتار دینامیکی درهمتنیدگی در یک سیستم کوانتومی

مصطفی معتمدی فر

دانشکده فیزیک دانشگاه شهیدباهنر کرمان ، انتهای بلوار ۲۲ بهمن، کرمان

چکیده

کار حاضر به بررسی رفتار وابسته به زمان درهمتنیدگی در یک سیستم کوانتومی چهار کیوبیتی می‌پردازد. در این سیستم، برهم کنش بین همسایه‌های دوم به عنوان پارامتر کنترل، رفتار وابسته به زمان درهمتنیدگی را تعیین می‌کند. شرایط انتقال درهمتنیدگی در این سیستم مطالعه شده و مشاهده شده است که برای دو مقدار خاص از پارامتر کنترل و در زمانهای ویژه‌ای، انتقال درهمتنیدگی از کیوبیت‌های درهمتنیده اول و دوم به کیوبیت‌های غیردرهمتنیده سوم و چهارم رخ می دهد.

The effect of the next nearest neigbohr intercations on entanglement dynamics in a quantum system

Motamedifar, Mostafa

Department of Physics, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman,

Abstract

This work investigates the dynamical behavior of entanglement in a four-qubit quantum system. In this system, the interaction between next nearest neigbohrs is the control parameter to determine the time-dependent behavior of entanglement. The condition for entanglement transfer has been studied and it is found that the entanglement between the first and the second entangled qubits transfers to the third and the fourth disentangled qubits for two certain control parameters and at special times.

PACS No. ۰۳,٦۷.Bg; ۰۳,٦۷.Mn; ۷٥,۱۰.Jm

مقدمه

درهمتنیدگی بعنوان یک هم‌بستگی غیر موضعی خاص، از سالهای ابتدایی تولد کوانتوم مکانیک کوانتومی مطرح شد. در سالهای اخیر نیز، درهمتنیدگی، بعنوان نقطه کلیدی نظریه اطلاعات کوانتومی شناخته شده است. برای یک سیستم درهمتنیده، بردار حالت کل سیستم نمی‌تواند به صورت حاصلضرب بردارهای حالت زیرسیستم‌ها نوشته شود. بنابراین زیرسیستم‌ها دیگر، مستقل از یکدیگر نیستند و اندازه‌گیری بر روی یک زیرسیستم می‌تواند اطلاعاتی راجع به زیر سیستم‌های دیگر را نیز در اختیار قرار دهد. اگر یک سیستم را که دارای چهار کیوبیت است در نظر بگیریم بنابراین کیوبیت‌های یک و دو در حالت کوانتومی زیر (که یکی از حالت‌های *بل* است) کاملاً درهمتنیده هستند.

$$\left|\psi(\mathrm{t}=\cdot)\right\rangle_{۱۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\left|oo\right\rangle_{۱۲}+\left|۱۱\right\rangle_{۱۲}\right). \qquad (۱)$$

اگر در این سیستم، ذرات سوم و چهارم در همتنیده نباشند (در یک حالت جداپذیر $\left|oo\right\rangle_{۳٤}$ باشند) بنابراین حالت کل سیستم چهارکیوبیتی مورد نظر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\left|\psi(\mathrm{t}=\cdot)\right\rangle_{۱۲۳٤}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\left|oo\right\rangle_{۱۲}+\left|۱۱\right\rangle_{۱۲}\right)\otimes\left|oo\right\rangle_{۳٤}. \qquad (۲)$$

سیستم چهارکیوبیتی می‌تواند یک زنجیره اسپینی بوده که بین کیوبیت‌های آن برهم کنش هایزنبرگ وجود داشته‌باشد. زنجیره‌های اسپینی با برهم‌کنش هایزنبرگ در ساخت و پیکربندی کامپیوترهای کوانتومی نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

در کار حاضر، علاوه بر در نظر گرفتن برهم‌کنشهای هایزنبرگ بین همسایه‌های اول که دارای قدرت برهم کنشی $J_{۱}$ هستند، بین

همسایه‌های دوم نیز برهم‌کنش هایزنبرگ با قدرت برهم‌کنشی $J_۲$ در نظر گرفته شده‌است. بدین طریق به مدل تعمیم یافته $J_۱ - J_۲$ [۱] خواهیم رسید. همچنین برای قیاس بهتر بین برهم کنشهای $J_۱$ و $J_۲$ ضریب *فرستریشن* α را به صورت $\alpha = J_۲ / J_۱$ تعریف نموده و ضریب $J_۱$ را با J نمایش می‌دهیم. که هامیلتونی این سیستم کوانتومی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{H} = J(\sum_{i=۱}^{۴} S_i^x S_{i+۱}^x + S_i^y S_{i+۱}^y + S_i^z S_{i+۱}^z$$
$$+ \alpha \sum_{i=۱}^{۲} S_i^x S_{i+۲}^x + S_i^y S_{i+۲}^y + S_i^z S_{i+۲}^z). \qquad (۳)$$

در هامیلتونی بالا شرایط دوره‌ای پیوسته فقط برای برهم‌کنشهای نزدیک‌ترین همسایه ها در نظر گرفته شده‌است و جهت جلوگیری از دوبار تکرار شدن برهم کنش‌های ناشی از دومین همسایه‌ها، شرایط دوره‌ای پیوسته برای آنها در نظر گرفته نشده‌است.

سوالی که در اینجا بدنبال جواب آن هستیم این است: که اگر یک سیستم شامل چهارکیوبیتی با هامیلتونی معادله (۳) تعریف گردد و حالت اولیه آن در لحظه $t = ۰$ به صورت معادله (۲) باشد، آیا ذرات سوم و چهارم شانس درهم تنیده شدن را در زمانهای سپری شده دارند یا خیر؟! و اگر جواب مثبت باشد این زمانها به چه عواملی بستگی دارند؟!

تابع *کانکیورنس* (concurrence): معیار درهمتنیدگی

کانکیورنس و متناظر آن *درهم‌تنیدگی تشکیل*، ابزاری هستند به منظور تعیین میزان درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت در یک سیستم کوانتومی که توسط *ووتر* و همکارانش پیشنهاد گردید[۲, ۳]. اگر یک سیستم کوانتومی را در نظر بگیریم، حالت کوانتومی این سیستم را می توان با ماتریس چگالی ρ نمایش داد. اگر *تریس* یا *رد* ماتریس را که بعنوان مجموع عناصر روی قطر یک ماتریس است در نظر بگیریم می توان با رد گرفتن از ماتریس چگالی سیستم کوانتومی نسبت به حالت‌های کوانتومی همه اجزا به جز کیوبیت‌های j و k ، به ماتریس کاهش یافته مربوط به کیوبیت‌های j و k دست پیدا کرد که به صورت معادله (٤) نشان داده می‌شود.

$$\rho(k,j) = Tr_{k,j}(\rho) \qquad (٤)$$

ووتر و همکارانش، تابع *کانکیورنس* را با رابطه

$$C(k,j) = max\left\{۲\lambda_۱ - \sum_r \lambda_r, ۰\right\}, \qquad (۵)$$

پیشنهاد دادند که در این رابطه λ_rها برابر با ریشه دوم ویژه مقادیر ماتریس R در رابطه زیر هستند. ($\lambda_۱$ریشه دوم بزرگترین ویژه مقدار ماتریس R است.)

$$R = \rho(k,j)(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(k,j)(\sigma_y \otimes \sigma_y) \qquad (٦)$$

در این رابطه $\rho^*(k,j)$ مزدوج مختلط ماتریس کاهش یافته $\rho(k,j)$ بوده و σ_y ماتریس پائولی مربوط به جهت y است. بنا به تعریف، $0<C(k,j)<1$ بدین معنی است که کیوبیت‌های j و k به صورت جزئی درهمتنیده هستند. $C(k,j)=1$، مطابق با حالت کوانتومی با بیشترین درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های j و k بوده و $C(k,j)=0$ یک حالت کوانتومی با عدم درهم‌تنیدگی کیوبیت‌های j و k است. اگر ماتریس چگالی ناشی از بردار حالت تحول یافته در زمان t باشد، آنگاه تابع *کانکیورنس* به دست آمده از رابطه (۵) بر حسب زمان به دست خواهد آمد.

برای سیستم در نظر گرفته شده در کار حاضر، اگر نمایش حالت سیستم در لحظه $t = ۰$ با معادله (۲) بیان گردد بردار حالت تحول‌یافته این سیستم کوانتومی در زمان t به صورت زیر است:

$$U(\mathrm{t})\left|\psi(\mathrm{t}=۰)\right\rangle = U(\mathrm{t})(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|oooo\right\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left|۱۱oo\right\rangle) \qquad (۷)$$

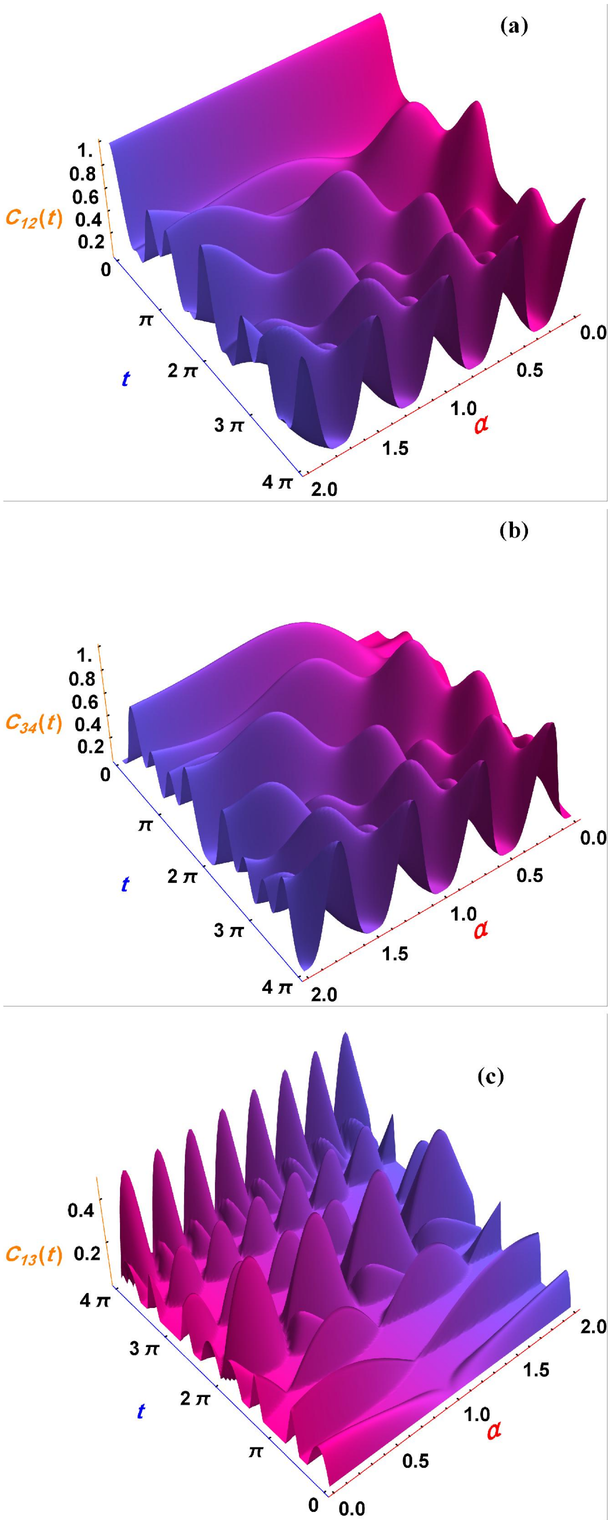
در این معادله، $U(\mathrm{t}) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$ ، عملگر تحول زمانی بوده و در آن H هامیلتونی سیستم است که با معادله (۳) داده می‌شود.

به منظور به دست آوردن $\left|\psi(\mathrm{t})\right\rangle$، در ابتدا، بردارهای $\left|oooo\right\rangle$ و $\left|۱۱oo\right\rangle$ که در معادله (۷) ظاهر گردیده‌اند را به صورت بسطی از ویژه بردارهای انرژی نوشته می‌شوند. سپس، عملگر تحول زمانی را روی بردارهای بسط پیدا کرده اثر می‌دهیم. اثر عملگر تحول زمانی بر روی ویژه بردارهای انرژی، ظاهر شدن یک فاز متناسب با انرژی همان ویژه بردار انرژی است. بار دیگر ویژه بردارهای انرژی، بر حسب شانزده پایه استاندارد شامل ($\left|oooo\right\rangle, \left|ooo۱\right\rangle, ..., \left|۱۱۱۱\right\rangle$) باز نویسی می‌گردند. برای موردی که فقط برهم‌کنشهای نزدیک‌ترین و دومین همسایه‌ها مدنظر باشد اثر عملگر تحول زمانی برروی حالت سیستم (معادله

(۷)) به صورت زیر خواهد بود (در محاسبات پیش رو $J = 1$ در نظر گرفته می‌شود):

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = {} & e^{-\frac{it(2+\alpha)}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|oooo\rangle \\
& + \frac{\left(2+e^{3it}-6e^{it(1+\alpha)}+3e^{i(t+2t\alpha)}\right)}{12\sqrt{2}}|oo11\rangle \\
& - \frac{(e^{3it}-1)}{6\sqrt{2}}|o1o1\rangle + \frac{\left(2+e^{3it}-3e^{i(t+2t\alpha)}\right)}{12\sqrt{2}}|o11o\rangle \\
& + \frac{\left(2+e^{3it}-3e^{i(t+2t\alpha)}\right)}{12\sqrt{2}}|1oo1\rangle - \frac{(e^{3it}-1)}{6\sqrt{2}}|1o1o\rangle \\
& + \frac{\left(2+e^{3it}+6e^{it(1+\alpha)}+3e^{i(t+2t\alpha)}\right)}{12\sqrt{2}}|11oo\rangle\Big)
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

با استفاده از این معادله، ماتریس چگالی سیستم که وابسته به زمان است به دست آمده و سپس ماتریس چگالی کاهش یافته قابل محاسبه خواهد بود. سپس می‌توان تابع *کانکیورنس* را از رابطه (۵) به‌دست آورد. نتایج به دست آمده از محاسبات در نمودارهای (۱)–(a) تا (۱)–(c) برای تابع *کانکیورنس* بین جفت‌های مختلف زنجیره آورده شده‌است. همچنانکه در شکل (۱)–(a) دیده می‌شود، در زمان اولیه، جفت‌های اول و دوم کاملا درهمتنیده هستند (*کانکیورنس* در $t = 0$ برابر یک است) که از معادله (۲) چنین انتظاری هم داریم. همچنین نمودارهای (۱)–(b) و (۱)–(c) نشان می‌دهند که *کانکیورنس* بین جفت اول و سوم و جفت سوم و چهارم در لحظه اولیه برابر صفر است که گویای عدم وجود درهمتنیدگی بین این جفت‌ها در $t = 0$ است.با سپری شدن زمان، بسته به مقدار α ، تابع *کانکیورنس* در طول زمان مقادیر متفاوتی را تجربه می کند. اما آیا شرایطی وجود دارد که در آن، درهمتنیدگی کیوبیت‌های اول و دوم، به کیوبیت‌های سوم و چهارم منتقل گردد [٤] ؟! این بدین معناست که *کانکیورنس* بین جفت سوم و چهارم مقدار یک را به خود بگیرد و بین جفت‌های دیگه صفر گردد. در این صورت گفته می‌شود که درهمتنیدگی منتقل شده است. مقایسه بین شکلهای (۱)–(a)، (b) و (c)، نشان می‌دهد که چنین شرایطی برای مقادیر $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1.5$، رخ می‌دهد. به منظور روشن شدن جزئیات، نمودارهای شکل (۲) رسم شده‌اند.



شکل (۱) درهمتنیدگی بین جفت‌های مختلف. (a) مربوط به جفت‌های اول و دوم، (b) مربوط به جفت‌های سوم و چهارم، (c) مربوط به جفت اول و سوم.

همچنانکه این نمودارها نشان می‌دهند، برای مقادیر $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1.5$، در زمان‌های $t = (2n-1)\pi$ که $(n = 1,2,3,...)$، درهمتنیدگی بین همه جفت ها به جز سوم و چهارم صفر شده است و مقدار *کانکیورنس* مربوط به جفت سوم و چهارم، برابر یک می‌باشد. با جایگذاری این زمانها و مقادیر $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1.5$ در معادله (۸) برای $|\psi(t)\rangle$ خواهیم داشت:

$$|\psi(t = 2\pi, \alpha = 0.5)\rangle = |oo\rangle_{12} \otimes (\frac{-i}{\sqrt{2}}|oo\rangle_{34} - \frac{i}{\sqrt{2}}|11\rangle_{34})$$

$$|\psi(t = 2\pi, \alpha = 1.5)\rangle = |oo\rangle_{12} \otimes (\frac{i}{\sqrt{2}}|oo\rangle_{34} + \frac{i}{\sqrt{2}}|11\rangle_{34})$$

(۹)

برای مقدار $\alpha = 1$، در همه زمانها *کانکیورنس* بین هر کیوبیت و همسایه‌های دومش صفر می باشد. برای این مقدار α، دوره تناوب برای تکرار رفتار *کانکیورنس* اگر چه به ظاهر به مقدار 2π کاهش یافته است ولی در واقع همان 4πاست چرا که به ازاء $t = 2\pi$ داریم

$$|\psi(t = 2\pi)\rangle_{\alpha=1} = e^{i\pi}|\psi(t = 0)\rangle_{\alpha=1} \quad (10)$$

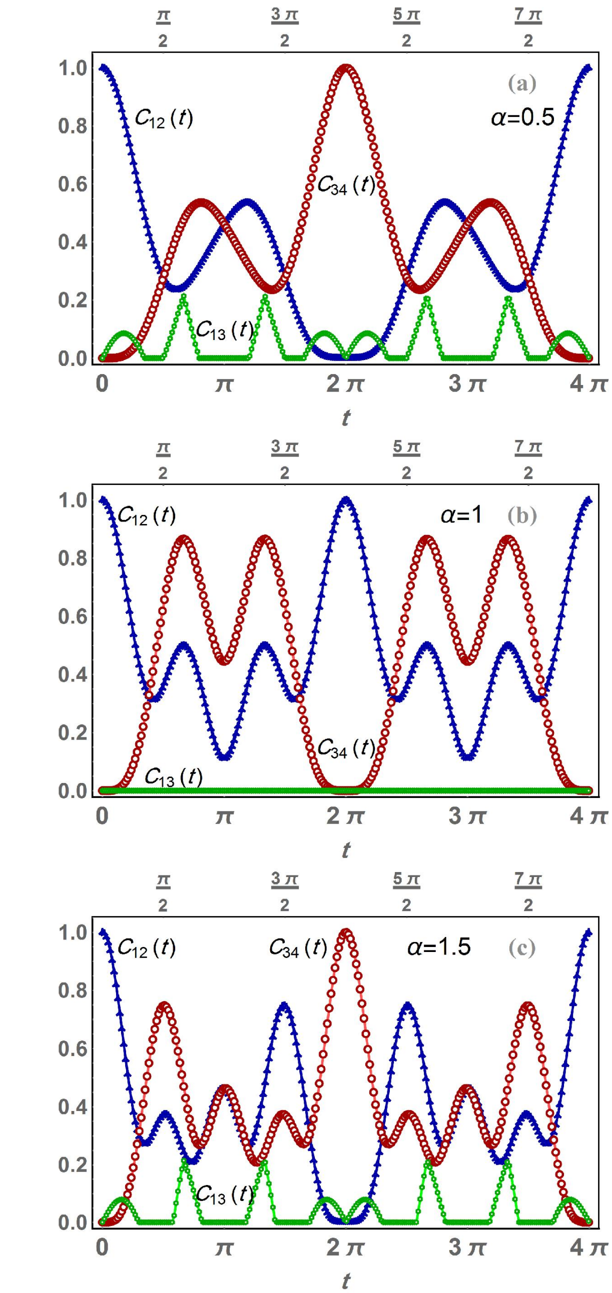
بنابراین می توان گفت برای مقدار $\alpha = 1$، شانسی برای انتقال درهمتنیدگی وجود ندارد. چراکه درهمتنیدگی بین ذرات سوم و چهارم هیچگاه به مقدار یک نمی‌رسد.

نتیجه‌گیری

رفتار وابسته به زمان درهمتنیدگی برای هر جفت کیوبیت در یک سیستم کوانتومی چهارکیوبیتی مورد مطالعه قرار گرفت. حالت اولیه سیستم به گونه‌ای انتخاب گردید که دو کیوبیت کاملاً درهمتنیده بوده و بقیه اجزای سیستم در حالت جداپذیر (ناهمتنیده) قرار داشتند. نشان داده شد اگر قدرت برهم‌کنشی همسایه‌های دوم به‌اندازه نصف قدرت برهم‌کنشی همسایه‌های اول باشد یا اینکه یک و نیم برابر آنها باشد، انتقال در هم‌تنیدگی وجود دارد. برای سیستم مورد نظر در اینجا، این زمان انتقال در $t = (2n-1)\pi$ رخ می‌دهد.

مرجع‌ها

[۱] Majumdar, Chanchal K., and Dipan K. Ghosh. "On Next‐Nearest‐Neighbor Interaction in Linear Chain. I." *Journal of Mathematical Physics* ۱۰, no. ۸ (۱۹۶۹): ۱۳۸۸-۱۳۹۸.



شکل (۲) در همتنیدگی بین جفت‌های مختلف به منظور بررسی شرایط انتقال درهمتنیدگی در $\alpha = 0.5, \alpha = 1, \alpha = 1.5$

[۲] Hill, Scott, and William K. Wootters. "Entanglement of a pair of quantum bits." *Physical review letters* ۷۸, no. ۲۶ (۱۹۹۷): ۵۰۲۲.

[۳] Wootters, William K. "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits." *Physical Review Letters* ۸۰, no. ۱۰ (۱۹۹۸): ۲۲۴۵.

[٤] A. Serafini, M. Paternostro, M. S. Kim, and S. Bose. "Enhanced dynamical entanglement transfer with multiple qubits "Phys . Rev. A ۷۳, no.۲ (۲۰۰٦): ۰۲۲۳۱۲, Lee, Hyuk-jae, Wuk Namgung, and Doyeol Ahn. "Entanglement generates entanglement: entanglement transfer by interaction." *Physics letters A* ۳۳۸, no. ۳ (۲۰۰۵): ۱۹۲-۱۹٦.