ناهمخوانی کوانتومی و اطلاعات همدوس در کانال کوانتومی

میرمسعودی ، فروزان ؛ احدپور، صدیف

دانشکده فیزیک دانشگاه محقق اردبیلی، انتهای خیابان دانشگاه ، اردبیل

چکیده

در این مقاله ناهمخوانی کوانتومی و اطلاعات همدوس را در ارتباطات کوانتومی با در نظر گرفتن یک مدل ساده کانال کوانتومی بررسی می کنیم. نشان می دهیم که اطلاعات همدوسرفتاری خیلی مشابه ایی به ناهمخوانی کوانتومی دارد. با مقایسه ناهمخوانی کوانتومی و اطلاعات همدوس می توان ادعا کرد اطلاعات همدوس می تواند سنجه ایی برای درهمتنیدگی باشد.

Quatum discord and coherent information in quantum channel

F. Mirmasoudi , S. Ahadpour

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili,

Abstract

In this article we treat the subject of quantum discord and coherent information in quantum communication by considering a simple model quantum channel. We find that the coherent information shows features very similar to those of the quantum discord. By comparing quntum discord and coherent information, we can say that coherent information can be a measure for entanglement.

Keywords: *quantum discord, coherent information, entanglement.*

PACS No. *(۰۰.۰۰)*

مقدمه

از آنجا که همبستگی های کوانتومی از جمله درهمتنیدگی و ناهمخوانی کوانتومی یک مقوله کلیدی در اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی محسوب می شود بررسی اثرات محیط بعنوان یک منبع اتلاف کوانتومی بر میزان همبستگی‌های کوانتومی و نقشی که جفت شدگی بین سیستم و محیط در تغییرات همبستگی‌های کوانتومی و در نتیجه گذار فاز کوانتومی دارد بسیار مهم است. به سیستم هایی کوانتومی که نتوان از اثر محیط بر آنها اجتناب کرد، سیستم های کوانتومی باز می گویند.

برای سالهای زیادی مطالعه همبستگی کوانتومی متمرکز بر درهمتنیدگی بود، اما مطالعات اخیر نشان داد درهمتنیدگی نمی تواند همبستگی کوانتومی را برای حالتهای مخلوط جداپذیر نشان دهد.

بنابراین درهمتنیدگی نمی تواند یک سنجه کاملی برای محاسبه همبستگی کوانتومی محسوب شود. در سالهای اخیر یک همبستگی جدیدی به نام ناهمخوانی کوانتومی مطرح شد. ناهمخوانی کوانتومی یک خاصیت کوانتومی است که اولین بار توسط اولیور و زورک در سال ۲۰۰۱ معرفی شد[1]. ناهمخوانی، یک اندازه گیری متفاوت بین نسخه های اطلاعات متقابل کوانتومی و کلاسیکی بین دو عبارت می دهد، که در تعیین و کاربرد همبستگی های کوانتومی در حالت مخلوط بسیار مفید است. زیرا حالت های مخلوط همبستگی هایی دارند که همبستگی های کلاسیکی‌شان نهان هستند، به عبارتی ناهمخوانی کوانتومی برای حالتهای جداپذیر

صفر نیست. ناهمخوانی کوانتومی، ارتباطات کوانتومی بین بخش های مختلف سیستم را اندازه‌گیری می‌کند.

در این مقاله، با در نظرگرفتن یک مدل ساده از کانال کوانتومی، ماتریس چگالی تحول یافته سیستم را بدست می آوریم. سپس برای ماتریس چگالی بدست آمده، ناهمخوانی کوانتومی ، تلاقی ، آنتروپی تبادلی و اطلاعات همدوس را محاسبه می‌کنیم. رابطه بین آن‌ها را با تلاقی و ناهمخوانی کوانتومی بررسی می کنیم. به کمک نتایج نشان می دهیم اطلاعات همدوس می تواند معیار خوبی برای تعیین درهمتنیدگی باشد.

مدل

دو کیوبیت درهمتنیده‌ی A و B را در نظر می گیریم، فرض می-کنیم که کیوبیت A با کیوبیت محیط E در حال برهمکنش باشد. برهمکنش بین دو کیوبیت A و E را با تبدیل یکانی زیر در نظر می‌گیریم:

$$U = e^{-iHt} \qquad (۱)$$

$$H = \frac{\lambda \sigma_z^A}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\beta\rangle\langle\beta|)$$

ε شدت اندرکنش بین دو سیستم و $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ بردارهای متعامد سیستم E است. حالت اولیه دو سیستم بهم پیوسته A و B است. یک حالت خالص با اسپین $\frac{1}{2}$را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi/2}\cos(\frac{\theta}{2})|n\rangle_A|m\rangle_B + e^{i\varphi/2}\sin(\frac{\theta}{2})|-n\rangle_A|-m\rangle_B \qquad (۲)$$

n و m دونقطه روی کره‌ی پوانکاره هستند. زاویه θ، $0 \le \theta \le \pi$، در رابطه (۳) میزان همبستگی کوانتومی را مشخص می‌کند. $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ مطابق با حالت‌های تولید شده و در $\theta = \frac{\pi}{2}$ بیشینه درهمتنیدگی دارد. بدون از دست دادن کلیت مسیله و برای راحتی فرض می‌کنیم $\varphi = 0$ یعنی کیوبیت‌ها در راستای محور Zها هستند، بنابراین، می‌توان حالت بهم پیوسته A و B را بصورت زیر در نظربگیریم:

$$|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|+\rangle_A|-\rangle_B + \sin(\frac{\theta}{2})|-\rangle_A|+\rangle_B \qquad (۳)$$

$|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه حالت‌های عملگر σ_z^A با ویژه مقدار ۱+ و ۱- است. ماتریس چگالی اولیه بصورت $\rho^{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ بدست می آید. حال به محاسبه ماتریس چگالی تحول یافته می پردازیم. تحول سیستم A B برابر است با :

$$\rho'^{AB} = \varepsilon^{AB}(\rho^{AB})$$

که $\rho^{AB} = Tr_E\left(|\psi^{EAB}\rangle\langle\psi^{EAB}|\right)$، نشان دهنده حالت اولیه سیستم AB و ρ'^{AB} تحول یافته آن است. ε^{AB} نگاشت دینامیکی می باشد که تحول سیستم کوانتومی را نشان می دهد و باید در شرایط زیر صدق کند:

۱) نگاشت خطی باشد.

۲) رد ماتریس را حفظ کند.

۳) ماتریس هرمیتی را هرمیتی نگه دارد.

۴) نگاشت کاملا مثبت باشد.

اگر ماتریس چگالی اولیه محیط ρ^E باشد. حالت زیر سیستم را هر لحظه از زمان می‌توان با رد جزیی گرفتن از حالت کل سیستم نسبت به محیط بدست آورد:

$$\varepsilon^{AB}(\rho^{AB}) = Tr_E\left[U(\rho^{AB}\otimes\rho^E)U^\dagger\right] \qquad (۴)$$

اگر $E_j^{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}\langle j|U|i\rangle$ ویژه کت‌های محیط و $|i\rangle$ باشد، رابطه (۴) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{AB}(\rho^{AB}) &= Tr_E\left[U(\rho^{AB}\otimes\sum_i p_i|i\rangle\langle i|)U^\dagger\right]\\ &= \sum_j \sqrt{p_i}\langle j|U(\rho^{AB}\otimes\sum_i p_i|i\rangle\langle i|)U^\dagger|j\rangle\\ &= \sum_{i,j}\sqrt{p_i}\langle j|U|i\rangle\rho^{AB}\sqrt{p_i}\langle i|U^\dagger|j\rangle\\ &= \sum_j E_j^{AB}\rho^{AB}E_j^{AB\dagger}\end{aligned}$$

(۵)

پس حالت نهایی کل به صورت زیر می تواند بیان شود:

$$\rho'^{EAB} = I^{E} \otimes \varepsilon^{AB}(\rho^{EAB}) = \sum_{j}(1^{E} \otimes E_{j}^{AB})\rho^{EAB}(1^{E} \otimes E_{j}^{AB})^{\dagger}$$

حالت اولیه سه کیوبیتی سیستم را به صورت $\rho^{AB} \otimes \frac{1}{2} I_E$ فرض می‌کنیم، بنابراین ماتریس چگالی تحول یافته سیستم AB را با رد جزیی روی قسمت محیط به صورت زیر بدست می آید:

$$\rho'^{AB} = Tr_E[(U \otimes 1^B)\rho^{AB} \otimes \frac{1}{2} I_E (U \otimes 1^B)^{\dagger}]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\frac{\theta}{2}) & \cos(\lambda t)\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(\lambda t)\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}) & \sin^2(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تلاقی، اطلاعات همدوس،ناهمخوانی کوانتومی

حال با محاسبه ماتریس چگالی تحول یافته در بخش قبل، میزان درهمتنیدگی بین محیط و سیستم را به کمک سنجه تلاقی بدست می آوریم. با توجه به روابط بیان شده در [2] می توان تلاقی $C = \max\{0, \Lambda_1, \Lambda_2\}$ را بدست آورد:

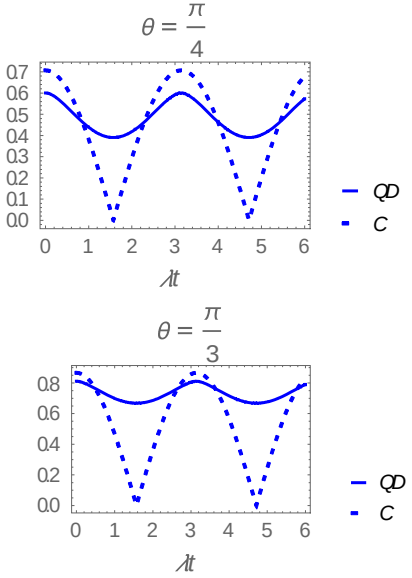
$$\Lambda_1 = 2\sqrt{\cos^2(\frac{\theta}{2})\sin^2(\frac{\theta}{2})} \qquad \Lambda_1 = 2\sqrt{\cos^2(\lambda t)\cos^2(\frac{\theta}{2})\sin^2(\frac{\theta}{2})}$$

. با توجه به روابط [3] ناهمخوانی کوانتومی را برای ماتریس چگالی بدست می آوریم. در شکل (۱) نمودار ناهمخوانی کوانتومی و تلاقی را برحسب هم به ازای θ مختلف بر حسب λt رسم کرده ایم. نمودار نشان می دهد رفتاری شبیه هم دارند هرچند مقدارشان در هر لحظه دقیقا برابر نیستند.با توجه به منبع [4] آنتروپی تبادلی به صورت $S_e = -Tr\,\rho'^{E} Log\,\rho'^{E}$ تعریف می شود.که همان آنتروپی فون نویمن حالت نهایی است. در شکل (۲) نمودار ناهمخوانی کوانتومی و آنتروپی تبادلی به ازای θ مختلف بر حسب λt رسم شده است. با توجه به نمودار در طی تحول رفتاری کاملا متضاد با یکدیگر نشان می دهند.

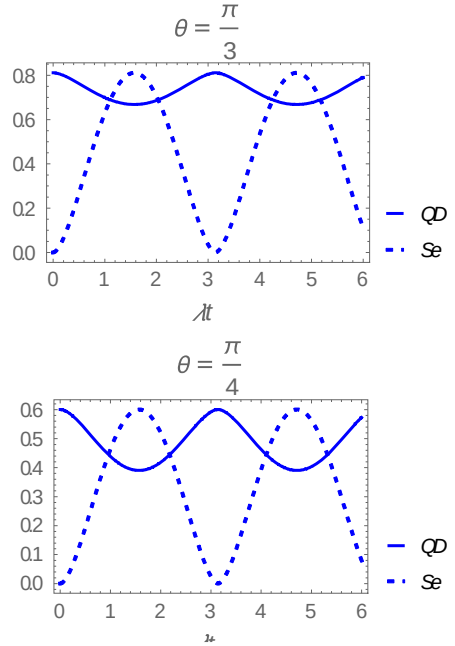
کمیت مهم دیگر، اطلاعات همدوس است که بصورت زیر تعریف می شود[4]:

$$I_e = S(\rho'^{B}) - S(\rho'^{E}) = S(\rho'^{B}) - S_e$$

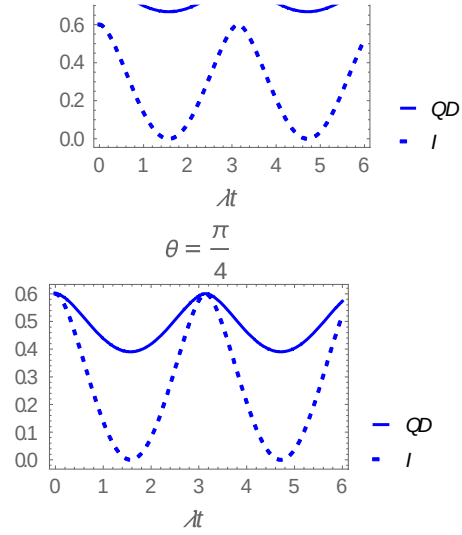
آنتروپی زیرسیستم در حد کوانتومی بیشتر از آنتروپی کل می-باشد. در حد کلاسیکی برعکس این مسیله می‌باشد. برای ماتریس چگالی بدست آمده در بخش قبل اطلاعات همدوس محاسبه و نمودار را رسم می کنیم. در شکل (۳) ناهمخوانی کوانتومی و اطلاعات همدوس رسم شده است، نمودار نشان می دهد هر دو رفتاری مشابه نشان می دهند. برای مقایسه بهتر اطلاعات همدوس، ناهمخوانی کوانتومی، آنتروپی تبادلی و تلاقی به طور همزمان بر حسب λt رسم نموده ایم. همان طور که شکل(۴) نشان می دهد آنتروپی تبادلی رفتاری متضاد با ناهمخوانی کوانتومی و تلاقی دارند، اما رفتار اطلاعات همدوس در شباهت با رفتار ناهمخوانی کوانتومی و تلاقی است، بنابراین می توان گفت اطلاعات همدوس سنجه ایی برای اندازه گیری درهمتنیدگی کوانتومی است.



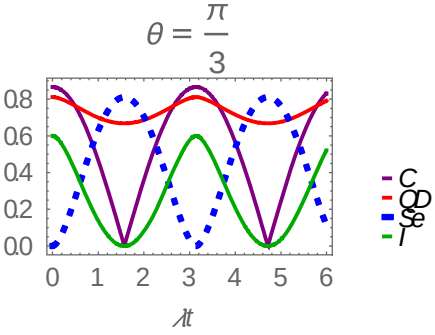
شکل ۱ : ناهمخوانی کوانتومی(خط پر) و تلاقی(نقطه چین) به ازای θمختلف

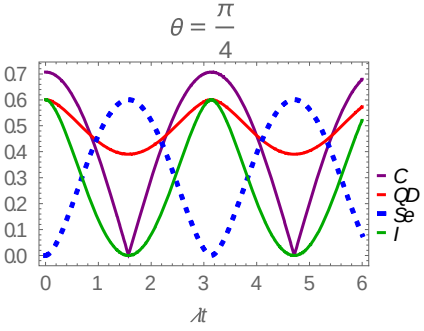


شکل ۲: ناهمخوانی کوانتومی (خط پر) و آنتروپی تبادلی(نقطه چین)



شکل ۳: ناهمخوانی کوانتومی (خط پر) و اطلاعات همدوس (خط نقطه چین) به ازای θ





شکل ۴: ناهمخوانی کوانتومی (خط قرمز) و اطلاعات همدوس (خط سبز)= آنتروپی تبادلی (خط آبی)- تلاقی (خط بنفش) به ازای θ مختلف

نتایج

در این مقاله با در نظر گرفتن یک مدل ساده ایی برای سیستم های باز کوانتومی، سیستم های که بیانگر اندرکنش بین سیستم و محیط هستند، به محاسبه برخی کمیتهای کوانتومی از جمله : اطلاعات همدوس، تلاقی ، آنتروپی متقابل و ناهمخوانی کوانتومی می پردازیم. نتایج نشان می دهد که رفتار آنتروپی تبادلی در تضاد با کمیت های کوانتومی یاد شده است ، در حالیکه اطلاعات همدوس رفتاری شبیه به ناهمخوانی کوانتومی و تلاقی دارد. بنابراین، می توان ادعا کرد اطلاعات همدوس می‌تواند معیاری برای تعیین همبستگی کوانتومی باشد.

مراجع

[1] H. Ollivier, W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. 88, (2001) 017901
[2] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 _1998.
[3] L. Mazzola, J. Piilo, S. ManiscalcoS, Phys. Rev. Lett. 104, (2010), 200401.
[3] Benjamin Schumacher, Phys. Rev. A **54**, 2614 _1996.
[4] Benjamin Schumacher and M. A. Nielsen, Phys. Rev. A **54**,2629 _1996.
[5] L. Mazzola, J. Piilo, S. ManiscalcoS, Phys. Rev. Lett. 104, (2010), 200401.
[6] B. Groisman, S. Popescu, and A.Winter, Quantum, classical, and total amount of correlations in a quantum state, Phys. Rev. A 72, (2005), 032317.
[7] Xue-Qun Yan, B. Zhang, Collapserevival of quantum discord and entanglement,0003-4916 (2014).
[8] Yang. X., Xiong. S., Entropy exchange, coherent information, concurrence. PHYSICAL REVIEW A **76**, 014306 (2007).
[9] H. Olliver, W. H. Zurek; "Quantum discord: a measure of the quantumnees of correlations"; *Phys. Rev. Lett* **88**, No. 1, 017901 (2001).