جایگزیدگی بس‌ذره‌ای نردبان کیتائف در غیاب بی‌نظمی خارجی

یارلو، هادی[۱] ؛ لنگری ، عبدالله[۱]

[1] دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف ، تهران

چکیده

در این مقاله اثر جایگزیدگی بس‌ذره‌ای در محافظت از نظم توپولوژی در حالت‌های برانگیختهٔ سیستم نردبان کیتائف به عنوان نمونه‌ای شبه یک بعدی از حافظه‌های کوانتومی خود تصحیح شوندهٔ دو بعدی، نظیر توریک کد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این کار با رویکردی غیراختلالی نشان دادیم که آمار سمیونیک بین برانگیختگی‌های اولیهٔ نردبان کیتائف به طور مؤثر، باعث القای بی‌نظمی در حالت‌های برانگیختهٔ سیستم می‌شود. این بی‌نظمی اثرات دینامیکی اختلالات کوانتومی را تا زمان‌هایی که به طور نمایی با طول سیستم افزایش می‌یابد، از بین برده و باعث شکست دینامیکی تقارن انتقالیِ سیستم و وقوع جایگزیدگی بس‌ذره‌ای در غیاب هرگونه بی نظمی خارجی می‌شود. این اثر می تواند از نظم توپولوژیِ محافظت شدهٔ تقارنی در حالت‌های برانگیختهٔ سیستم محافظت کند.

کلیدواژه: *جایگزیدگی بس‌ذره‌ای در غیاب بی‌نظمی، محافظت از نظم توپولوژی*

Many-body localization of the Kitaev ladder without external disorder

Yalroo, Hadi[1] ; Langari, Abdollah[1]

[1] Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

We study the effect of many-body localization(MBL) on the protection of topological order in the highly excited states(HES) of Kitaev ladder(KL) system which is a quasi-1D version of well-known 2D self-correcting quantum memories such as Kitaev Toric Code. By using a non-perturbative approach, we show that a self-generated disorder is induced in HES of the system, which suppresses the dynamical effect of quantum perturbations for exponentially long time due to semionic statistics between elementary excitation of KL. Hence, translation symmetry is broken dynamically and MBL occurs in the absence of any external disorder. This effect can preserve symmetry protected topological (SPT) order in HES of the system.

PACS No: 00.00 ***keyword:*** *many-body localization without disorder, protection of topological order*

مقدمه

جایگزیدگی‌بس‌ذره‌ای(MBL)، جایگزیدگی در فضای هیلبرت است که در حالت‌های برانگیختهٔ (HES) یک سیستم، دارای برهمکنش‌های ضعیف و در حضور بی‌نظمی‌های قوی اتفاق می‌افتد[۱]. به تازگی نشان داده شده که این جایگزیدگی می‌تواند در سیستم‌هایی دارای تقارن انتقالی که متشکل از دو نوع ذره سبک و سنگین هستند نیز دیده شود[۲] به طوری که هرگونه ناهمگنی اولیه موجود در سیستم تا زمان‌هایی که به طور نمایی با طول آن افزایش می‌یابد، در سیستم باقی خواهد ماند. در این کار مسئله جایگزیدگی بدون حضور بی‌نظمی خارجی در سیستم KL که مانند حافظه‌های خودتصحیح شونده توپولوژی دارای دو نوع برانگیختگی(شار و بار) با آمار سمیونیک است، بررسی می‌شود. این سیستم علاوه بر داشتن تقارن انتقالی، دارای نظمِ محافظت شدهٔ تقارنی(SPT) می‌باشد[۳] که به ما امکان مطالعهٔ محافظت از نظم توپولوژی در HES سیستم[٤] با سازوکار MBL در سیستم‌های دارای تقارن انتقالی را می‌دهد.

نردبان کیتائف به عنوان حافظهٔ کوانتومی

هامیلتونی نردبان کیتائف (KL) بر حسب N درجه آزادی اسپین ۱/۲ بر روی $3L$ باند نردبانی به طول L که در راستای پله‌های نردبان دارای شرط مرزی دوره‌ای و در راستای پایه‌های آن دارای شرط مرزی باز می‌باشد (شکل۱)، توسط هامیلتونی زیر تعریف می‌شود (X_i و Z_i عملگرهای پائولی بوده و $J_e , J_m > 0$ می‌باشند) :

$$H_{KL} = -J_m \sum_{p=1}^{L} \hat{B}_p - J_e \sum_{s=1}^{2L} \hat{A}_s^{\perp,T} \quad \hat{B}_p = \prod_{i\in p} Z_i \; , \; \hat{A}_s^{\perp,T} = \prod_{i\in s} X_i \qquad (۱)$$

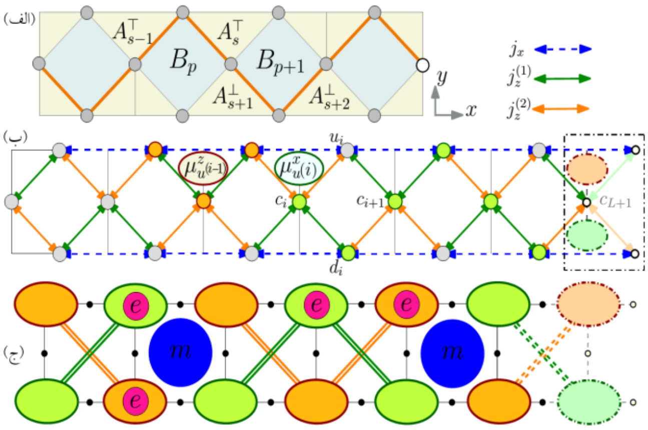
برانگیختگی‌های اولیهٔ سیستم، بوزون‌های سختِ ایستا، مربوط به ویژه مقادیر $B_p = -1 , A_s = -1$ هستند که به ترتیب بار و شار نامیده شده و نسبت به یکدیگر آمار سمیونیک دارند. با استفاده از [۵] می‌توان نشان داد پایه‌هایی که در آن H_{KL} قطری می‌شود دارای فرم بستهٔ زیر در فضای اشغال آنیون‌ها می‌باشند:

$$\left|\{n_p^m\},\{r_i\}\right\rangle = \hat{P}_{N_m} \hat{g}_{\{r_i\}} \left|x+\right\rangle^{\otimes N}$$

$$\hat{P}_{N_m} = \prod_{p=1}^{L} \frac{\left(1+(-1)^{n_p^m}\, \hat{B}_p\right)}{2} \quad , \quad \hat{g}_{\{r_i\}} = \prod_{i\in D\, ,\, i=1}^{2L} Z_i^{r_i} \qquad (۲)$$

که در آن $\{n_p^m = 0,1\}$ ویژه مقادیر عملگر عدد اشغال شار، $\hat{n}_p^m = (1-\hat{B}_p)/2$، بوده و $\hat{P}_{N_m}$ عملگر تصویر به فضایی است که دارای تعداد کل $N_m = \sum_p n_p^m$ شار می‌باشد و $\hat{g}_{\{r_i\}}$ نیز عملگری است که با توجه به $2L$ درجه آزادی $\{r_i = 0,1\}$، 2^{2L-1} پیکربندی مستقل بارها را ایجاد می‌کند. همچنین می توان نشان داد که در کل طیفِ انرژی KL به ازای هر حالت $\left|\{n_p^m\},\{r_i\}\right\rangle$، حالت تبهگن دیگری به صورت $\left|\{n_p^m\},\{\bar{r}_i\}\right\rangle = W_Z \left|\{n_p^m\},\{r_i\}\right\rangle$ وجود دارد که در آن $W_z \equiv \hat{g}_{\{r_i=1\ \forall i\}} = \prod_{i\in D\, ,i=1}^{2L} Z_i$ عملگر حلقه ویلسونی است که اثر آن تولید یک جفت بار، پیچیدن آن به دور سیستم و سپس نابودی آن است. در [۳] نشان داده شده است که این تبهگنی دوگانه در حالت پایهٔ KL درون سکتور تهی از شار، $N_m = 0$، دارای نظم SPT است. بنابراین می‌توان از آن به منظور ذخیره اطاعات کوانتومی استفاده کرد.

همچنین حالت‌های برانگیختهٔ KL نیز، در سکتورهای $N_m \neq 0$، دارای پیکربندی‌های تصادفی از بارها و شارهای ایستا می‌باشند.



شکل ۱: الف)شبکهٔ KL . خطوط پررنگ مسیر D را نمایش می‌دهند. ب) تبدیل دوگان (٤) برای شبه‌اسپین‌های μ (بیضی‌ها) که بر روی رئوس KL تعریف می‌شوند. برهم‌کنش‌های آیزینگ که به آنیون‌های بار (فلش‌های پررنگ) و آنیون‌های شار (فلش‌های خط‌چین) دینامیک می‌دهند. ج) هامیلتونی مؤثر در (٥) به صورت دو زنجیرهٔ مستقل و یک بُعدیِ آیزینگ در حضور میدان عرضی (زنجیره‌های سبز و نارنجی) که به ازای پاریته زوج شار و شرط مرزی پاد دوره‌ای (خطوط بریده) مطابق با رابطه(٦) رسم شده است. حضور شار (شبه‌ذرهٔ سنگین) در یک پلاکت (دایره‌های آبی) باعث خاموش شدن جملهٔ دینامیکیِ مربوط به شبه‌ذرات بار (دایره‌های بنفش) در آن پلاکت شده و جایگزیدگی بارها میان شارهایی که به صورت تصادفی درون پلاکت‌ها قرار دارند را به همراه دارد.

القای بی‌نظمیِ مؤثر ناشی از آمار سمیونیک و محافظت از نظم توپولوژی در حالت‌های برانگیخته

هر چند آنیون‌ها در حالت‌های برانگیخته H_{KL} ایستا هستند (جرم مؤثرشان برابر است با $m^{-1} = (1/\hbar)\partial_k^2 E_k \to 0$) اما حضور اختلالاتی مانند جملات آیزینگ (شکل ۱) می‌تواند به آن‌ها حرکت دهد. ابتدا با اضافه کردن جملات برهم‌کنشی آیزینگ فرومغناطیس بر روی اسپین‌های همسایه نزدیک(شکل ۱ فلش‌های سبز، نارنجی):

$$H_1 = H_{KL} - J_z^{(1)} \sum_{\langle ij \rangle} Z_i Z_j - J_z^{(2)} \sum_{\langle ij \rangle} Z_i Z_j \qquad (۳)$$

به شبه‌ذرات بار(به عنوان ذرات سبک) دینامیک می‌دهیم و اثر حرکت آن‌ها را در حضور شبه‌ذرات ایستای شار(به عنوان ذرات سنگین) در HES بررسی می‌کنیم. می‌توان با اعمال تبدیل دوگان:

$$\begin{cases} \mu_d^z(i) = X^{c_i} X^{d_i} X^{d_{i+1}} = A_i^{\perp} \quad , \quad \mu_u^z(i) = X^{c_i} X^{u_i} X^{u_{i+1}} = A_i^T \\ \mu_d^x(i) = \left(Z^{c_i} Z^{u_i}\right)\left(Z^{c_{i+1}} Z^{d_{i+1}}\right)\left(Z^{c_{i+2}} Z^{u_{i+2}}\right)\ldots \\ \mu_u^x(i) = \left(Z^{c_i} Z^{d_i}\right)\left(Z^{c_{i+1}} Z^{u_{i+1}}\right)\left(Z^{c_{i+2}} Z^{d_{i+2}}\right)\ldots \end{cases} \qquad (٤)$$

نشان داد(جزئیات در شکل۱) که (۳) به طور غیراختلالی فرم سادهٔ،

$$
\begin{aligned}
H_{eff} &\equiv -J_m \sum_{p=1}^{L} \hat{B}_p - J_e \sum_{i=1}^{L} \mu^z_{d,u}(i) \\
&- J_z^{(1)} \sum_{i \in even\ (odd)} \mu^x_{u(d)}(i)\mu^x_{d(u)}(i+1)(1+\hat{B}_i) \\
&- J_z^{(2)} \sum_{i \in even\ (odd)} \mu^x_{d(u)}(i)\mu^x_{u(d)}(i+1)(1+\hat{B}_i)
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

دو زنجیرۀ یک بعدی و مستقل آیزینگ در میدان عرضی را به خود خواهد گرفت که پاریته شارها شرط مرزی این دو زنجیره را بر حسب شبه‌اسپین‌های μ به صورت زیر تعیین می‌کند (شکل ۱) :

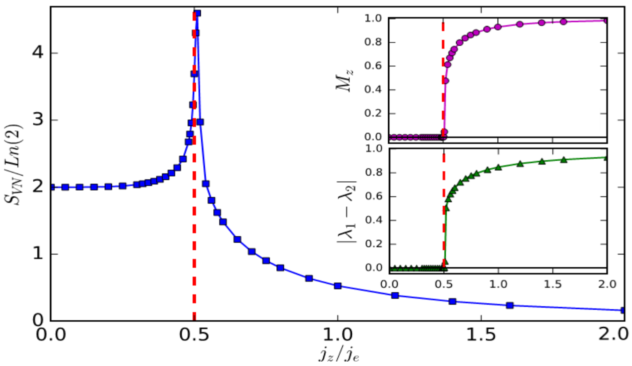
$$
\Sigma^{IZZ} = \prod_{p=1}^{L} B_p = \mu_d^x(1)\mu_u^x(1) \equiv (-1)^{N_m}
= \begin{cases} +1 & two\ chains\ have\ PBC(APBC) \\ -1 & one\ chain\ has\ PBC\ another\ has\ APBC \end{cases}
\qquad (٦)
$$

همچنین حضور شار در پلاکت iاُم $(B_i=-1)$ باعث خاموش شدن جمله جنبشی بارها می‌شود. بنابراین در حضور مقادیر غیرصفر از چگالی شارها (که به صورت $\rho_m = N_m / L$ تعریف می‌شود) به طور مؤثر، بی‌نظمی با توزیع(۷) در سیستم القا می‌شود:

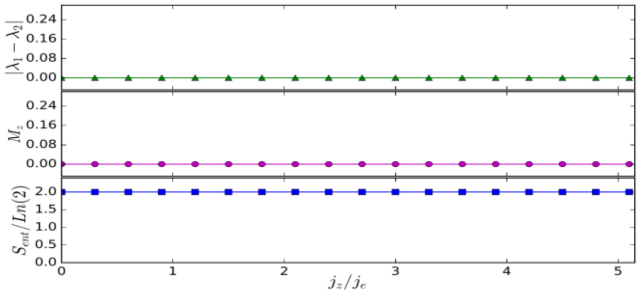
$$
P\left(J_z^{eff}\right) = (1-\rho_m)\delta(J_z^{eff} - 2J_z^{(1)or(2)}) + \rho_m \delta(J_z^{eff}) \qquad (۷)
$$

که قدرت این بی‌نظمی توسط دو پارامتر ρ_m, $J_z^{(1)or(2)}$کنترل خواهد شد و منشأ آن آمار سمیونیک بین ذرات می‌باشد. بنابراین با توجه به ماهیت یک‌بُعدی و غیر برهم‌کنشی هامیلتونی (۵) از طریق مکانیزم جایگزیدگی اندرسون باعث جایگزیدگی بارها در HES می‌شود. همچنین به منظور بررسی نقش حضور شارها در محافظت از نظم SPT با اعمال الگوریتم iTEBD [٦] بر مبنای نمایش ضربیِ ماتریسیِ نامتناهی(iMPS) بر روی هامیلتونی (۳) می‌توان نشان داد، در حالی که حالت پایه سیستم در سکتور $\rho_m = 0$ (شکل۲) تنها در ناحیه $(2J_z/J_e)<1$ دارای نظم SPT است (معادل با فاز پارامغناطیس برحسب μ ها در معادلۀ (۵))، در حضور شارها و در سکتور $\rho_m = 1$ به ازای افزایش قدرت جملات اختلالی آیزینگ، سیستم همواره در فاز SPT باقی خواهد ماند (شکل۳) که با توجه به H_{eff} در معادلۀ (۵) نتیجه‌ای از خاموش شدن کامل جملات آیزینگ و باقی ماندن در فاز پارامغناطیس بر حسب μ هاست. به علاوه می‌توان با حل دقیق نشان داد که H_{eff} درحضور بی‌نظمی‌هایی که با توزیع (۷) داده می‌شود به ازای هر $\rho_m \neq 0$، فارغ از میزان قدرت جملات آیزینگ (J_z)، همواره در فاز پارامغناطیس باقی می‌ماند[۷]، که با توجه به ماهیت

غیرموضعیِ تبدیل دوگان در معادلۀ (٤)، معادل با فاز SPT بر حسب اسپین‌های اصلی در سیستم KL است.



شکل۲: آنتروپی درهم‌تنیدگی در سکتور $\rho_m = 0$ بدست آمده از محاسبه عددی هامیلتونی(۳) به ازای $J_z = J_z^{(1)} = J_z^{(2)}$ با استفاده از روش iTEBD به ازای بُعد ماتریس‌های iMPS، $\chi = 64$. مغناطش کل (زیرنمودار بالا) و تفاضل بزرگترین ویژه مقادیر ماتریس چگالی(زیرنمودار پایین). تبهگنی این ویژه مقادیر نشانۀ وجود فاز SPT در ناحیۀ $(2J_z/J_e)<1$ (خط‌چین‌های قرمز) است.



شکل۳: به ترتیب از پایین به بالا، آنتروپی درهم‌تنیدگی، مغناطش کل و تفاضلِ بزرگترین ویژه مقادیر ماتریس چگالی در سکتور $\rho_m = 1$ به ازای $\chi = 64$.

شکست دینامیکی تقارن انتقالی؛جایگزیدگی بس‌ذره‌ای

در این بخش پایداری اثرات جایگزیدگی را در شرایطی که شارها نیز دارای جرم متناهی هستند بررسی می‌کنیم. می‌توان با اضافه کردن جملات آیزینگ فرومغناطیس J_x که روی اسپین‌های واقع در پایه‌های KL تعریف می‌شوند(شکل۱، فلش‌های خط‌چین) به شارها نیز دینامیک داد و با کمک عملگر تصویر $\hat{P}_{N_m}$، معرفی شده در معادلۀ (۲)، تعداد شارها را ثابت نگه داشت:

$$
H_{tot} = H_1 - J_x \hat{P}_{N_m} \left(\sum_{\langle ij \rangle \in Leg} X_i X_j \right) \hat{P}_{N_m} \qquad (۸)
$$

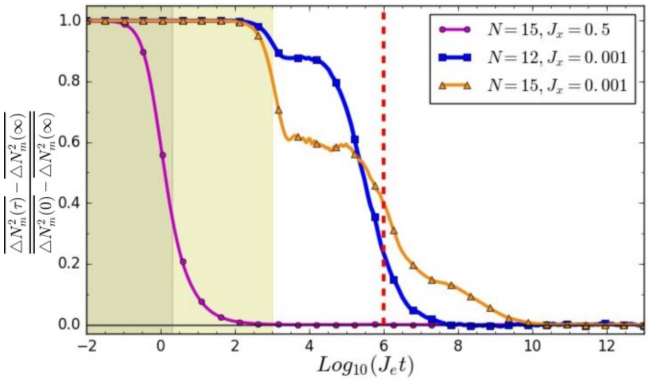
که H_1 در معادلۀ (۳) تعریف شده است. حال با قرار دادن سیستم در حالت‌های اولیۀ تصادفی و کاملا جایگزیده، توانایی سیستم را

برای بازیابی تقارن انتقالی‌اش با گذشت زمان به ازای نسبت‌های مختلف جرم مؤثر بار به شار (که توسط پارامتر (J_x/J_z) کنترل می‌شود) اندازه می‌گیریم. به این منظور مشابه[۲] کمیت $\overline{\Delta N_m^2(\tau)} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} dt\,\Delta N_m^2(t)$ را که متوسط چگالی ناهمگنی شبه‌ذرات شار نام دارد، تعریف می‌کنیم که در آن:

$$\Delta N_m^2(t) \equiv \frac{1}{L}\sum_{p=1}^{L}\left|\langle \psi(t)|(\hat{n}_{p+1}^m - \hat{n}_p^m)|\psi(t)\rangle\right|^2 \qquad (۹)$$

و $\psi(t) = \exp(-iH_{tot}t)|\psi(0)\rangle$ وهمچنین $\hat{n}_p^m$ عملگر عدد اشغال شار می‌باشد. $\overline{\Delta N_m^2(\tau)}$ به وضوح برای حالت‌های دارای تقارن انتقالی صفر می‌شود. ما به طور عددی کمیت $\left\|\overline{\Delta N_m^2(\tau)}\right\|$ را با استفاده از قطری‌سازی دقیق هامیلتونی(۸) به ازای سیستم‌هایی با تعداد کل اسپین و تعداد کل شار برابر $(N, N_m) = (12,2), (15,3)$ در دو حالت حدی $(J_x/J_z) = 0.001$ (معادل با حرکت کُند شارها) و $(J_x/J_z) = 0.5$ (معادل با حرکت سریع شارها) محاسبه کردیم (علامت $\|\ \|$ به معنی متوسط‌گیری روی تعداد نمونه‌های مختلف از حالت‌های اولیه تصادفیِ $\langle\psi(0)|$ می‌باشد). نتایج این محاسبات نشان می‌دهد (شکل٤) که در حالت $(J_x/J_z) = 0.001$، میزان ناهمگنی در سیستم تا زمان مشخصهٔ $\tau_1 \propto (J_x)^{-1}$ (معادل با زمانی که به طور مؤثر برهمکنش J_x به سیستم معرفی می‌شود) تقریبا تغییر نکرده و زمان بازیابی کامل تقارن انتقالی به ازای $(N,N_m) = (15,3)$ حداقل ۱۰۰برابر بزرگتر از حالت $(N,N_m) = (12,2)$ می‌باشد. بنابراین این زمان با افزایش طول سیستم و تعداد کل شار، به طور نمایی واگرا خواهد شد و تقارن انتقالی سیستم به طور دینامیکی خواهد شکست. نتیجهٔ این شکست تقارن، مشابه آنچه که در MBL استاندارد در حضور بی‌نظمی روی می‌دهد، جایگزیدگی شبه‌ذرات در HES سیستم و شکست فرض-گرمایی- ویژه توابع[۱] (ETH) در این حالت ها خواهد بود [۱]. این در حالی است که با کاهش جرم مؤثر شارها (حالت $(J_x/J_z) = 0.5$) میزان ناهمگنی تا زمان τ_1 حدودا به کمتر از نصف مقدار اولیه خود خواهد رسید و هیچ واگراییِ زمانی با افزایش طول سیستم رخ نمی‌دهد. بنابراین HES در این شرایط خاصیت ETH را دارند.

۱. Eigenstate Thermalization Hypothesis



شکل٤: رفتار متوسط چگالی ناهمگنی برحسب زمان به ازای $J_z = 1$. ناحیه‌های سایه‌خورده نشان دهندهٔ زمان مشخصهٔ τ_1 می‌باشند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله نردبان کیتایف به عنوان یک مایع اسپینیِ کوانتومی متشکل از دو نوع ذرهٔ آنیونی (شبه‌ذرات شار و بار) در نظر گرفته شد. وجود پیکربندی‌های تصادفی از آنیون‌ها در حالت‌های برانگیخته از طریق آمار سمیونیک بین ذرات می‌تواند باعث القای مؤثرِ بی‌نظمی در سیستم، شکست دینامیکی تقارن انتقالی و وقوع جایگزیدگی بس‌ذره‌ای در غیاب هرگونه بی‌نظمیِ خارجی شود که با محافظت از نظم SPT سیستم همراه است. همچنین جایگزیدگی شبه‌ذرات شار و بار در سیستم حالت‌های برانگیخته، می‌تواند نقش خطاهای کوانتومی [۸] در حافظه‌های توپولوژی را کاملا از بین ببرد [۹]. و از ایجاد خطاهای منطقی در این حافظه‌ها (که مشکلی جدی در ذخیرهٔ اطلاعات و محاسبات کوانتومی است [۸]) حتی در دمای متناهی جلوگیری کند.

مرجع‌ها

[۱] B. Bauer and C.Nayak; *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*، **09**،P09005*(2013)*.
[۲] M.Schiulaz، A..Silva and M.Müller، *Phys. Rev B*، ***91***(18)184202.(2015)
[۳] A. Langari، A. Mohammad-Aghaei، and R. Haghshenas; *Phys. Rev. B,* **91**، 024415(2015).
[٤] Y. Bahri، R.Vosk، E. Altman and A.Vishwanath; *Nature communications*، ***6***. (2015).
[٥] V. Karimipour; *Phys Rev B*، ***79*** (21)، 214435. (2009).
[٦] F. Pollmann، A. Turner، E. Berg، and M.Oshikawa، *Phys Rev B*، ***81*** (6)، 064439 (2010).
[٧] Stinchcombe، R. B. *Journal of Physics C: Solid State Physics* 14، No. **10** L263 (1981).
[٨] F.Pastawski، A.Kay، N.Schuch and I.Cirac، *Quantum Inf. Comput.* **10**، 580 (2010).
[٩] J.R. Wootton and J.K. Pachos; *Phys Rev Lett*، ***107*** (3)، 030503 (2011).