بازبهنجارش کوانتومی فشردگی اسپین در مدل آیزینگ عرضی

بالازاده سین ، لیلا[۱]؛ نجارباشی، قادر[۱]

[۱] *گروه فیزیک ، دانشگاه محقق اردبیلی ، اردبیل*

چکیده

در این مقاله به بررسی نظریه گروه بازبهنجارش کوانتومی در مدل آیزینگ عرضی در زنجیره ای یک بعدی از ذرات اسپین ۱/۲ می پردازیم. بدین منظور، روابط بازگشتی را برای بازبهنجارش کوانتومی پارامتر فشردگی اسپین در حالت پایه به کار می گیریم. نمودار پارامتر فشردگی اسپین بر حسب شدت میدان عرضی به ازای تعداد مراحل بازبهنجارش بیشتر، آشکارسازی نقطه گذار فاز کوانتومی مدل آیزینگ میدان عرضی را نشان می دهد که مبین آن است که پارامتر فشردگی اسپین می تواند نشانگر مناسبی برای گذار فاز کوانتومی در مدل آیزینگ عرضی باشد.

Quantum Renormalization of Spin Squeezing in Transverse Ising Model

Balazadeh Sin,

Leila[1]; Najarbashi, Ghader[1]

[1] *Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil*

Abstract

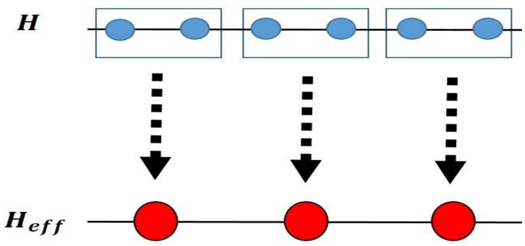
In this paper, we investigate quantum renormalization group theory in transverse Ising model on one dimensional chain of spin-1/2 particles. To this end, we employ recursion relations to quantum renormalization of spin squeezing parameter at ground state. Spin squeezing parameter diagram in terms of intensity of transverse field for higher renormalization steps shows the detection of quantum phase transition point for transverse Ising model which implies that the spin squeezing parameter can be a good indicator of quantum phase transition in transverse Ising model.

PACS No. *64.60, 64.70.Tg, 75.10, 03.67.-a*

مقدمه

در سال های اخیر مساله ی آشکارسازی و شناسایی نقاط گذار فاز کوانتومی[1] با استفاده از توابع همبستگی کوانتومی مانند درهمتنیدگی کوانتومی مورد توجه ویژه ای قرار گرفته است. به علاوه نظریه گروه بازبهنجارش کوانتومی که توسط ویلسون در سال ۱۹۷۵ مطرح شد [2]، نقش مهمی در تعیین رفتار بحرانی سیستم های کوانتومی دارد. ثابت شده است که اعمال روابط بازگشتی نظریه گروه بازبهنجارش بر توابع همبستگی کوانتومی منجر به آشکارسازی نقاط بحرانی کوانتومی می شود. توابع همبستگی مختلفی از قبیل سنجه درهمتنیدگی تلاقی، ناهمخوانی کوانتومی و فاز هندسی در مدل آیزینگ عرضی با رویکرد بازبهنجارش کوانتومی بررسی شده و هرکدام قادر به شناسایی نقطه بحرانی این مدل شده اند [3, 4, 5]. این توابع به اضافه توابع دیگری از قبیل سنجه درهمتنیدگی منفیت، وفاداری کوانتومی حالت پایه، ناهمخوانی کوانتومی هندسی و غیره در انواع مدل های اسپینی در این رویکرد مورد مطالعه قرار گرفته اند [6, 7]. در صورتی که بازبهنجارش کوانتومی یک تابع همبستگی کوانتومی در حالت پایه سیستم دارای رفتار غیرتحلیلی در مجاورت نقطه بحرانی باشد، می توان گفت این تابع همبستگی می تواند نشانگر مناسبی برای گذارهای فازی کوانتومی باشد. بنابراین اهمیت دارد

که این توابع را شناخته و با رویکرد نظریه گروه بازبهنجارش کوانتومی مورد بررسی قرار دهیم. پارامترهای فشردگی اسپین از جمله توابع همبستگی هستند که تاکنون با این رویکرد مورد بررسی قرار نگرفته اند. در این مقاله یکی از پارامترهای فشردگی اسپین را به عنوان تابع همبستگی کوانتومی انتخاب کرده در حالت پایه ی مدل آیزینگ عرضی در زنجیره ای یک بعدی از اسپین های ۱/۲ تحت نظریه گروه بازبهنجارش کوانتومی مورد مطالعه قرار می دهیم.



شکل ۱ : یک مرحله بازبهنجارش کوانتومی با بلوک بندی دوتایی اسپین ها

بازبهنجارش کوانتومی مدل آیزینگ عرضی

هامیلتونین مدل آیزینگ عرضی در زنجیره ای دوره ای از N ذره اسپین ۱/۲ به شکل زیر می باشد:

$$H = -J\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \lambda\sigma_i^z) \qquad (1)$$

در اینجا i نشانگر مکان اسپین، $J>0$ ثابت جفت شدگی همسایگی نزدیک، λ شدت میدان مغناطیسی عرضی و $\sigma_i^\alpha\,(\alpha=x,y,z)$ ماتریس های پاولی متعلق به اسپین i–ام می باشند. با توجه به حل دقیق [8, 9]، پارامتر نظم این سیستم (مغناطش) در حالت پایه از مقدار غیرصفر به ازای $\lambda<1$ (فاز فرومغناطیس) به مقدار صفر به ازای $\lambda>1$ (فاز پارامغناطیس) تغییر می کند. با توجه به اینکه گذارهای فازی حالت پایه سیستم در اثر تغییرات پارامترهای مرتبط سیستم را گذارهای فازی کوانتومی می نامیم، پس می توان گفت $\lambda=1$ نقطه گذار فاز کوانتومی این مدل می باشد. به منظور اعمال نظریه گروه بازبهنجارش کوانتومی، زنجیره ی N مکانی را به N/2 بلوک دو اسپینی تقسیم می کنیم (شکل ۱)، در این صورت هامیلتونین سیستم به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$H = H^B + H^{BB} \qquad (2)$$

در اینجا جمله اول، هامیلتونین داخل بلوک $H^B=\sum_{I=1}^{N/2}h_I^B$ است که مجموع هامیلتونین های تک تک بلوک ها h_I^B می باشد و داریم:

$$h_I^B = -J\left(\sigma_{1,I}^x\sigma_{2,I}^x + \lambda\sigma_{1,I}^z\right) \qquad (3)$$

جمله دوم، هامیلتونین برهمکنش بین بلوک ها می باشد که می توان به شکل زیر نوشت:

$$H^{BB} = -J\sum_{I=1}^{N/2}(\sigma_{2,I}^x\sigma_{1,I+1}^x + \lambda\sigma_{2,I}^z) \qquad (4)$$

در اینجا $\sigma_{1,I}^\alpha$ نشانگر مولفه ی α از ماتریس پاولی متعلق به اولین مکان در بلوک I–ام می باشد. هامیلتونین داخل یک بلوک به فرم ماتریسی زیر در می آید:

$$h_I^B = \begin{pmatrix} -J\lambda & 0 & 0 & -J \\ 0 & -J\lambda & -J & 0 \\ 0 & -J & J\lambda & 0 \\ -J & 0 & 0 & J\lambda \end{pmatrix} \qquad (5)$$

ویژه مقادیر و ویژه بردارهای این ماتریس به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(q|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right), E_1=-J\sqrt{1+\lambda^2} \\ |e_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(q|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), E_2=-J\sqrt{1+\lambda^2} \\ |e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(r|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right), E_3=J\sqrt{1+\lambda^2} \\ |e_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(r|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), E_4=J\sqrt{1+\lambda^2} \end{aligned} \qquad (6)$$

که در اینجا $q=\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$ و $r=\lambda-\sqrt{1+\lambda^2}$ برقرار است. عملگر تصویر با استفاده از دو ویژه بردار تبهگن حالت پایه با انرژی $-J\sqrt{1+\lambda^2}$ ساخته می شود:

$$P_0^I = |e_1\rangle_I\langle\Uparrow| + |e_2\rangle_I\langle\Downarrow| \qquad (7)$$

این عملگر، فضای حالت دو اسپین داخل بلوک را به یک اسپین دو حالته شامل حالت های $|\Uparrow\rangle$ و $|\Downarrow\rangle$ تصویر می کند. عملگر تصویر کل بلوک ها خواهد بود:

$$P_0 = \prod_{I=1}^{N/2}P_0^I \qquad (8)$$

با اعمال عملگر تصویر کلی به هامیلتونین اولیه، هامیلتونین موثر به دست می آید:

$$H_{eff}=P_0HP_0 \tag{9}$$

روابط تاثیر عملگر تصویر روی ماتریس های پاولی مکان های اول و دوم هر بلوک خواهد بود:

$$\begin{aligned}&P_0\sigma_{1,I}^{x}P_0=2ab\,\tilde{\sigma}_I^{x}\,,P_0\sigma_{2,I}^{x}P_0=(a^2+b^2)\tilde{\sigma}_I^{x}\\&P_0\sigma_{1,I}^{z}P_0=(a^2-b^2)I\,,P_0\sigma_{2,I}^{z}P_0=(a^2-b^2)\tilde{\sigma}_I^{z}\end{aligned} \tag{10}$$

که در اینجا $a=\frac{q}{\sqrt{1+q^2}},b=\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$ و همچنین $\tilde{\sigma}_I^{x}$، $\tilde{\sigma}_I^{z}$و I ماتریس های پاولی و عملگر واحد متعلق به فضای دو حالته بعد از بلوک بندی می باشند. هر مرحله که این بلوک بندی انجام گیرد، یک مرحله بازبهنجارش کوانتومی صورت می گیرد و مجموعه هامیلتونین های $\left\{H^{(0)},H^{(1)},H^{(2)},H^{(3)},...,H^{(n)},...\right\}$ را خواهیم داشت که بالانویس n تعداد مراحل بازبهنجارش اعمال شده را نشان می دهد. با استفاده از روابط بالا، هامیلتونین موثر بعد از یک مرحله بازبهنجارش به شکل زیر در می آید:

$$H^{(1)}=-J^{(1)}\sum_{i=1}^{N/2}(\tilde{\sigma}_i^{x}\tilde{\sigma}_{i+1}^{x}+\lambda^{(1)}\tilde{\sigma}_i^{z}) \tag{11}$$

که در اینجا مشاهده می شود هامیلتونین به دست آمده به فرم هامیلتونین اولیه می باشد و در نتیجه با مقایسه هامیلتونین های قبل از بازبهنجارش و بعد از بازبهنجارش به روابط بازگشتی زیر می رسیم:

$$J^{(1)}=\frac{J}{\sqrt{1+\lambda^2}},\lambda^{(1)}=\lambda^2 \tag{12}$$

نقطه بحرانی، نقطه ثابت روابط بازگشتی است که با حل $\lambda=\lambda^2$ به دست می آید که برابر با جواب حل دقیق تحلیلی $\lambda_c=1$ می باشد. با هر مرحله اعمال بازبهنجارش کوانتومی ضرایب جدیدی تولید می شوند که توابعی از ضرایب یک مرحله قبل می باشند:

$$\lambda^{(n+1)}=(\lambda^{(n)})^2,J^{(n+1)}=\frac{J^{(n)}}{\sqrt{1+(\lambda^{(n)})^2}} \tag{13}$$

بازبهنجارش کوانتومی پارامتر فشردگی اسپین

در این بخش به بررسی پارامتر فشردگی اسپین ۱/۲ در حالت پایه ی مدل آیزینگ عرضی می پردازیم. پارامترهای مختلفی برای فشردگی اسپین تعریف شده است که در اینجا ما از تعریف زیر استفاده می کنیم [10]:

$$\xi_S^2=\frac{4\left(\Delta\vec{J}_{\vec{n}_\perp}\right)_{\min}^2}{N} \tag{14}$$

حالتی با $\xi_S^2<1$را حالت فشرده و در غیر این صورت غیرفشرده می نامیم. همچنین حالتی که با استفاده از پارامتر ξ_S^2 فشرده شناخته شود حتما درهمتنیده و دارای همبستگی کوانتومی بین اسپین ها است اما عکس آن لزوما برقرار نیست [11]. در اینجا N تعداد ذرات و $\vec{J}$ عملگر ممنتوم زاویه ای کل زنجیره اسپینی می باشد:

$$\vec{J}=\left(J^x,J^y,J^z\right) \tag{15}$$

از آن جا که حالت پایه هر بلوک شامل دو اسپین ۱/۲ است، قرار می دهیم $N=2$ و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&J^x=\frac{\hbar}{2}(\sigma_1^x+\sigma_2^x),J^y=\frac{\hbar}{2}(\sigma_1^y+\sigma_2^y)\\&J^z=\frac{\hbar}{2}(\sigma_1^z+\sigma_2^z)\end{aligned} \tag{16}$$

در اینجا برای سادگی $\hbar=1$ در نظر می گیریم. منظور از $\vec{n}_\perp$ جهت عمود بر جهت اسپین میانگین می باشد و کمیت $\vec{J}_{\vec{n}_\perp}$ با تصویر کردن عملگر ممنتوم زاویه ای در جهت $\vec{n}_\perp$ به دست می آید.

در این بخش به بررسی پارامتر فشردگی اسپین در حالت پایه مدل می پردازیم. به این منظور یکی از حالتهای پایه تبهگن ($|e_1\rangle$) را انتخاب کرده و ξ_S^2 را برای آن حساب می کنیم. ابتدا جهت اسپین میانگین $(\langle e_1|J^x|e_1\rangle,\langle e_1|J^y|e_1\rangle,\langle e_1|J^z|e_1\rangle)$ را به دست می آوریم که برابر با $(0,0,1)$ می شود. حال شکل کلی جهت عمود بر جهت اسپین میانگبن به دست می آید:

$$\vec{n}_\perp=\cos(\varphi)(1,0,0)+\sin(\varphi)(0,1,0) \tag{17}$$

که φ زاویه دلخواه می باشد و با تصویر کردن عملگر $\vec{J}$ در $\vec{n}_\perp$ کمیت $\vec{J}_{\vec{n}_\perp}$ به دست می آید، در نتیجه کمینه واریانس با توجه به مقدار دلخواه φ قابل محاسبه است:

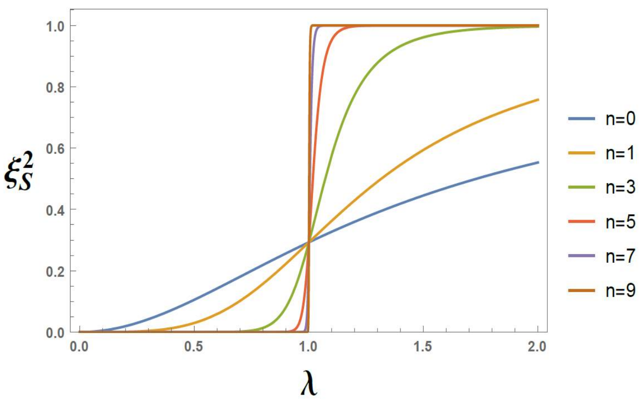
$$\left(\Delta\vec{J}_{\vec{n}_\perp}\right)_{\min}^2=(\langle e_1|(\vec{J}_{\vec{n}_\perp})^2|e_1\rangle-(\langle e_1|\vec{J}_{\vec{n}_\perp}|e_1\rangle)^2)_{\min} \tag{18}$$

با انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$\xi_S^2=\frac{4}{2}\left(\frac{1}{2}(1+\frac{cos\,(2\varphi)}{\sqrt{1+\lambda^2}})\right)_{\min}=1-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \qquad (19)$$

مشاهده می شود که پارامتر فشردگی اسپین به شدت میدان عرضی بستگی دارد، در نتیجه با توجه به اینکه شدت میدان عرضی در هر مرحله از بازبهنجارش کوانتومی تغییر می کند، پس پارامتر فشردگی اسپین تابعی از تعداد مراحل بازبهنجارش کوانتومی می باشد.

در شکل ۲ پارامتر فشردگی برحسب شدت میدان عرضی و به ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوانتومی رسم شده است. با توجه به شکل مشاهده می شود که به ازای $n=9$ در نقطه $\lambda=1$ پارامتر فشردگی به طور ناگهانی از مقدار صفر به مقدار غیرصفر تغییر می کند. این مطلب نشان می دهد که $\lambda=1$ نقطه گذار فاز کوانتومی این مدل می باشد. به علاوه مشاهده می شود که در ناحیه $\lambda<1$ حالت پایه فشرده می باشد در حالی که در ناحیه $\lambda>1$ غیر فشرده می باشد. این نتیجه در تطابق با فاز فرومغناطیس(همبسته) در ناحیه $\lambda<1$ و فاز پارامغناطیس (غیرهمبسته) در ناحیه $\lambda>1$ می باشد.

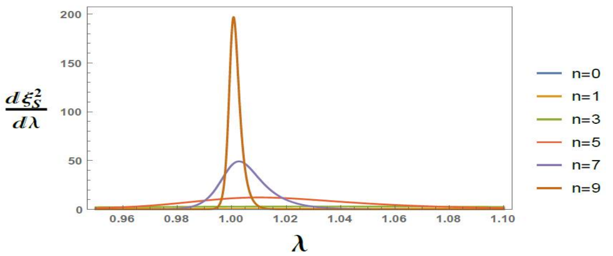


شکل ۲ : پارامتر فشردگی حالت پایه مدل آیزینگ عرضی بر حسب λ شدت میدان عرضی و به ازای تعداد مراحل مختلف بازبهنجارش کوانتومی n

همچنین در شکل ۳ مشتق اول پارامتر فشردگی برحسب شدت میدان عرضی به ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوانتومی رسم شده است که مشاهده می شود به ازای مراحل بهنجارش بیشتر رفتار تیزتری در مجاورت نقطه بحرانی ظاهر می شود. به این ترتیب مثال تاییدگری پیدا شد که با رویکرد بازبهنجارش کوانتومی پارامتر فشردگی اسپین قادر به شناسایی نقطه گذار فاز کوانتومی در مدل آیزینگ عرضی هستیم. همان طور که در مقدمه ذکر شد، سایر توابع همبستگی کوانتومی مانند سنجه تلاقی درهمتنیدگی، ناهمخوانی کوانتومی و فاز هندسی نیز قادر به شناسایی نقطه گذار فاز کوانتومی در مدل آیزینگ عرضی می باشند [3, 4, 5].

نتیجه گیری

در این مقاله، زنجیره ای یک بعدی از اسپین های ۱/۲ با مدل آیزینگ عرضی را با رویکرد بلوک بندی دوتایی نظریه گروه بازبهنجارش مورد بررسی قرار دادیم. یکی از تعاریف پارامترهای فشردگی اسپین را در حالت پایه ی سیستم مطالعه کرده، روابط بازگشتی نظریه گروه بازبهنجارش کوانتومی را به آن اعمال کردیم. با توجه به نمودار پارامتر فشردگی و مشتق اول آن برحسب شدت میدان عرضی مشاهده می شود که به ازای تعداد مراحل بازبهنجارش بیشتر، رفتار غیرتحلیلی در مجاورت نقطه بحرانی کوانتومی ظاهر می شود. این رفتار تایید می کند که فشردگی اسپین می تواند نشانگر مناسبی برای آشکارسازی گذار فازی کوانتومی در مدل آیزینگ عرضی باشد.



شکل ۳ : مشتق اول پارامتر فشردگی حالت پایه مدل آیزینگ عرضی بر حسب λ شدت میدان عرضی و به ازای تعداد مراحل مختلف بازبهنجارش کوانتومی n

مرجع‌ها

[1] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, Cambridge (1999).
[2] K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys*. **47,** (1975) 773.
[3] M. Kargarian, R. Jafari, and A. Langari, *Phys. Rev. A* **76**, (2007) 060304.
[4] Xiu-Xing. Z, Hong-Rong. L, *Mod. Phys. Lett. B* **29**, 3 (2015) 1550002.
[5] R. Jafari, *Phys. Lett. A* **377**, (2013) 3279.
[6] A. Langari, F. Pollmann, M. Siahatgar, *J. Phys.: Condens. Matter* **25** (2013) 406002.
[7] J. Maziero *et al.*, *Phys. Rev. A* **82,** (2010) 012106.
[8] M. A. Martin-Delgado and G. Sierra, *Phys. Rev. Lett.* **76**, (1996) 1146.
[9] P. Pfeuty, *ANNALS of Physics*, **57**, (1970) 79.
[10] M. Kitagawa, M. Ueda, *Phys. Rev.* A **47**, (1993) 5138.
[11] X. Wang and B. C. Sanders, *Phys. Rev. A* **68**, (2003) 012101.