

دینامیک درهم‌تنیدگی حالت‌های گراف درختی و کامل سه کیوبیتی تحت اندرکنش XXX در حضور میدان مغناطیسی

بردبار، محمود^۱، جعفر پور، مجتبی^۱، اسدی، لیلا^۱

^۱گروه فیزیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

چکیده

در این پژوهش، نشان می‌دهیم که حالت‌های گراف کامل و درختی ۳ کیوبیتی هم ارز LC یکدیگرند. هم ارزی LC این دو گراف به این معناست که درهم‌تنیدگی‌ها در این دو گراف با هم برابرند. از سنجه میر-والاش و تعمیم‌های آن برای بررسی درهم‌تنیدگی چند-جزئی در این دو حالت بهره می‌گیریم. در ادامه دینامیک درهم‌تنیدگی حالت‌های گراف کامل و درختی را در حضور اندرکنش XXX و میدان مغناطیسی بررسی می‌کنیم. همچنین هم‌ارزی حالت کوآنتومی گراف کامل و گراف درختی را تحت تحول زمانی مطالعه می‌کنیم.

Dynamics of entanglement in 3-qubit tree-graph and complete-graph states under XXX Hamiltonian in the presence of a magnetic field

Bordbar, Mahmoud¹, Jafarpour, Mojtaba¹, Assadi, Leila¹

¹ Physics Department, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

In this work, first we show that the 3-qubit tree-graph and complete-graph states are LC equivalent; that is their related entanglement quantities are equal. We use Mayer-Wallach measure and its generalizations to evaluate multipartite entanglement in these states. Then, we study the dynamics of entanglement of these two graph states evolved by an xxx Hamiltonian in the presence of a magnetic field. Finally we investigate the equivalence of the tree and complete graph states under time evolution.

مقدمه

در ادامه دینامیک درهم‌تنیدگی این حالت‌ها را بررسی می‌کنیم و فرآیند هم‌ارزی آن‌ها را در طول زمان مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

حالت‌های گراف

یک حالت کوآنتومی خالص $|G\rangle$ را می‌توان نظیر یک گراف ریاضی ساده G دانست که در فضای هیلبرت $(C^2)^{\otimes V}$ تعریف می‌شود. برای تشکیل یک حالت گراف، ابتدا حالت اولیه جداپذیر چندجزئی $|+\rangle^{\otimes V} = |\psi\rangle$ را در نظر می‌گیریم. بدین معنی که هر رأس شامل یک کیوبیت است که در حالت ویژه عملگر σ_x با مقدار ویژه +1 قرار دارد [۳]. برای ساخت حالت گراف عملگر یکانی U_{ab} را روی $|+\rangle^{\otimes V} = |\psi\rangle$ اعمال می‌کنیم. U_{ab} یک عملگر غیرموضعی است و به صورت درگاه کنترل- Z عمل می‌کند:

با توجه به کاربردهای مهم حالت‌های گراف در محاسبات و اطلاعات کوآنتومی بررسی درهم‌تنیدگی آن‌ها حائز اهمیت است [۲، ۱]. حالت‌های گراف ساده [۳، ۴]، حالت‌های چند جزئی خالص هستند. ارتباط بین گراف ریاضی و حالت‌های کوآنتومی ما را به درکی عمیق‌تر و فهمی آسان‌تر در مورد ویژگی‌های حالت‌های کوآنتومی می‌رساند [۵]. در این مقاله با استفاده از سنجه درهم‌تنیدگی میر-والاش و تعمیم‌های آن [۶]، درهم‌تنیدگی حالت‌های گراف کامل و درختی سه کیوبیتی را محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که درهم‌تنیدگی‌های دو حالت گراف کامل و درختی یکسان‌اند. همچنین نشان می‌دهیم که این دو حالت هم‌ارز $[۷، ۸] LC$ یکدیگرند.

گراف را هم‌ارز LC می‌نامیم اگر توسط عملگر یکانی موضعی کلیفورد U_a ، به هم تبدیل شوند [۳]:

$$U_a = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_x^a} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z^{N_a}} \quad (5)$$

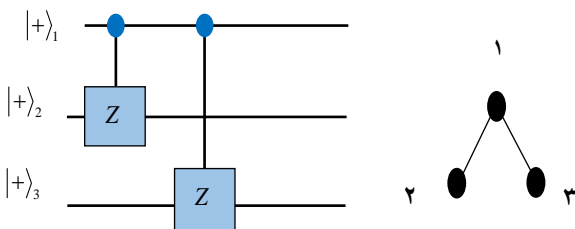
در این جا N_a رأس‌هایی هستند که با رأس a همسایه هستند. اثر عملگر U_a روی گراف به این صورت است که اگر بین جفت همسایه متصل به رأس a یالی وجود داشته باشد، آن یال را حذف و اگر یالی وجود نداشته باشد بین آن دو را با یک یال به هم وصل می‌کند. این فرایند به قاعده LC معروف است. دو حالت گراف هم‌ارز LC گفته می‌شوند اگر اعمال قاعده LC روی یک گراف منجر به گراف حالت دیگری شود.

حالت کوآنتومی گراف درختی و کامل ۳ کیوبیتی

در ابتدا حالت اولیه گراف را به صورت $|G_0\rangle = |+\rangle|+\rangle|+\rangle$ در نظر می‌گیریم. به یاد داریم که هر رأس نشان‌دهنده کیوبیت و یال بین دو رأس، برهم‌کنش بین آن دو را نشان می‌دهد. برای ساختن حالت گراف درختی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|G^{Tree}\rangle = U_{13}U_{12}|G_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 + |1\rangle_1|-\rangle_2|-\rangle_3) \quad (6)$$

نمایش مداری حالت گراف درختی $|G^{Tree}\rangle$ و گراف ریاضی معادل آن در شکل (۱) آورده شده است.



شکل ۱: نمایش مداری ساخت حالت گراف درختی $|G^{Tree}\rangle$ و گراف معادل آن برای ایجاد حالت گراف کامل هم‌مانند حالت درختی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$|G^C\rangle = U_{12}U_{13}U_{23}|G_0\rangle \quad (7)$$

$$|G^C\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3 + |0\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3 + |1\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3 - |1\rangle_1|1\rangle_2|-\rangle_3)$$

نمایش مداری و گراف ریاضی معادل حالت $|G^C\rangle$ در شکل (۲) آورده شده است:

$$U_{ab} = CZ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

بنابراین هر حالت گراف را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$|G\rangle = \prod_{\{a,b\} \in E} U_{ab} |+\rangle^{\otimes V} \quad (2)$$

سنجه‌های درهم‌تنیدگی چندجزئی

برای کمّی کردن درهم‌تنیدگی چندجزئی، سنجه‌های مختلفی وجود دارد. در این پژوهش از سنجه میر-والاش (Q) و تعمیم‌های آن ($\eta_{m,n}$) استفاده می‌کنیم. سنجه میر-والاش به صورت زیر معرفی می‌شود [۶]:

$$Q = 2 \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{tr}(\rho_k^2) \right) \quad (3)$$

که در آن N تعداد کیوبیت‌ها و ρ_k به‌ازای $k = 1, 2, \dots, N$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته برای یک کیوبیت است، که از ردگیری ماتریس چگالی کلی حالت گراف نسبت به بقیه کیوبیت‌ها به دست می‌آید. Q یک سنجه درهم‌تنیدگی عام و مقدار بیشینه آن برابر مقدار یک است [۶].

یک حالت خالص N کیوبیتی با ماتریس چگالی ρ را می‌توان به مجموعه S با تعداد m کیوبیت و به مجموعه S' با n کیوبیت تقسیم کرد که $N = n + m$ است. درهم‌تنیدگی بین m کیوبیت با n کیوبیت را با سنجه‌ای که به صورت زیر تعریف می‌شود اندازه‌گیری می‌کنیم [۶].

$$\eta_{m,n} = \frac{2^m}{2^m - 1} \left[1 - \text{Tr}(\rho_m^2) \right] \quad (4)$$

که در آن $\rho_m = \text{Tr}_n(\rho)$ ماتریس چگالی کاهش یافته m کیوبیتی است و از ردگیری n کیوبیت باقی‌مانده روی ماتریس کلی سامانه به دست می‌آید. مقدار $\eta_{m,n}$ بین صفر و یک تغییر می‌کند.

هم‌ارزی LC

گروه عملگرهای کلیفورد موضعی زیر مجموعه عملگرهای یکانی موضعی هستند، که با LC نشان داده می‌شوند. دو حالت

$$\rho^c = |G^c\rangle\langle G^c| = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (12)$$

ماتریس چگالی کاهش یافته برای هر کیوبیت به صورت زیر است:

$$\rho_1^c = Tr_2[Tr_3[\rho^c]] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \rho_2^c = Tr_1[Tr_3[\rho^c]] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \rho_3^c = Tr_1[Tr_2[\rho^c]] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Q برای حالت گراف کامل در زیر محاسبه شده است:

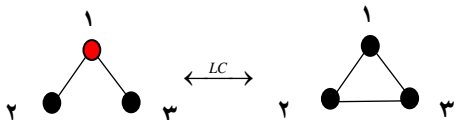
$$Q^c = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 Tr(\rho_k^c \cdot \rho_k^c) \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{3} (Tr(\rho_1^c \cdot \rho_1^c) + Tr(\rho_2^c \cdot \rho_2^c) + Tr(\rho_3^c \cdot \rho_3^c)) \right) = 1 \quad (14)$$

و درهم تنیدگی $\eta_{1,23}^c$ ، $\eta_{2,13}^c$ و $\eta_{3,12}^c$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\eta_{1,23}^c = \frac{2^1}{2^1 - 1} [1 - Tr(\rho_1^c \cdot \rho_1^c)] = 1, \eta_{2,13}^c = \frac{2^1}{2^1 - 1} [1 - Tr(\rho_2^c \cdot \rho_2^c)] = 1 \quad (15)$$

$$\eta_{3,12}^c = \frac{2^1}{2^1 - 1} [1 - Tr(\rho_3^c \cdot \rho_3^c)] = 1$$

مشاهده می شود که درهم تنیدگی های حالت گراف درختی با حالت گراف کامل یکسان است. از طرفی با استفاده از قاعده هم ارزی LC این دو حالت به یکدیگر تبدیل می شوند



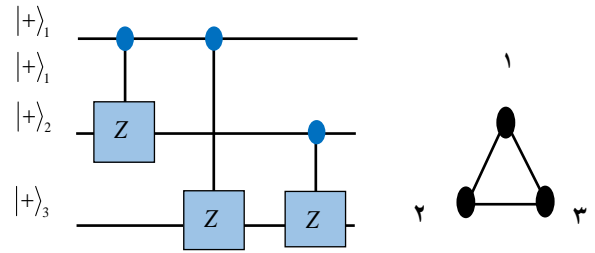
شکل ۳: تبدیل حالت گراف درختی به کامل با استفاده از قاعده هم ارزی LC

بررسی هم ارزی حالت های گراف سه کیوبیتی درختی

و کامل در تحول زمانی

عوامل مؤثر بر مقدار درهم تنیدگی می تواند منشأ داخلی یا خارجی داشته باشد. از جمله عوامل خارجی می توان به برهم کنش های سامانه با محیط از جمله میدان مغناطیسی بیرونی نام برد [۹، ۱۰]. در حالت کلی هامیلتونی مدل XXX را با حضور میدان مغناطیسی (\vec{B}) به شرطی که در جهت Z باشد به صورت زیر می نویسیم:

$$H = J_x (\hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_2^x + \hat{\sigma}_2^x \hat{\sigma}_3^x + \hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_3^x) + J_y (\hat{\sigma}_1^y \hat{\sigma}_2^y + \hat{\sigma}_2^y \hat{\sigma}_3^y + \hat{\sigma}_1^y \hat{\sigma}_3^y) + J_z (\hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z + \hat{\sigma}_2^z \hat{\sigma}_3^z + \hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_3^z) + B \cdot \hat{\sigma}_1^z + B \cdot \hat{\sigma}_2^z + B \cdot \hat{\sigma}_3^z \quad (16)$$



شکل ۲: نمایش مداری ساخت حالت گراف کامل $|G^c\rangle$ و گراف معادل آن.

درهم تنیدگی حالت کوآنتومی گراف درختی و کامل

کیوبیتی

در بخش اول به بررسی درهم تنیدگی حالت گراف درختی می پردازیم. ماتریس چگالی این حالت به صورت زیر نشان داده می شود.

$$\rho^r = |G^r\rangle\langle G^r| = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (8)$$

ماتریس چگالی کاهش یافته برای هر کیوبیت به صورت زیر است:

$$\rho_1^r = Tr_2[Tr_3[\rho^r]] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \rho_2^r = Tr_1[Tr_3[\rho^r]] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \rho_3^r = Tr_1[Tr_2[\rho^r]] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

محاسبه درهم تنیدگی عام برای حالت گراف درختی سه کیوبیتی در عبارت زیر آمده است:

$$Q_1^r = Q^r = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 Tr(\rho_k^r \cdot \rho_k^r) \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{3} (Tr(\rho_1^r \cdot \rho_1^r) + Tr(\rho_2^r \cdot \rho_2^r) + Tr(\rho_3^r \cdot \rho_3^r)) \right) = 1 \quad (10)$$

در واقع اگر هیچ نوع رأس ایزوله ای وجود نداشته باشد درهم تنیدگی عام برابر مقدار ۱ خواهد بود. برای این حالت درهم تنیدگی $\eta_{1,23}^r$ ، $\eta_{2,13}^r$ و $\eta_{3,12}^r$ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\eta_{1,23}^r = \frac{2^1}{2^1 - 1} [1 - Tr(\rho_1^r \cdot \rho_1^r)] = 1, \eta_{2,13}^r = \frac{2^1}{2^1 - 1} [1 - Tr(\rho_2^r \cdot \rho_2^r)] = 1 \quad (11)$$

$$\eta_{3,12}^r = \frac{2^1}{2^1 - 1} [1 - Tr(\rho_3^r \cdot \rho_3^r)] = 1$$

برای محاسبه درهم تنیدگی حالت گراف کامل سه کیوبیتی ماتریس چگالی سامانه که به صورت زیر است را در نظر می گیریم:

نتیجه گیری

۱- هم‌ارزی حالت‌های گراف درختی و کامل بررسی شد و ملاحظه گردید که این دو حالت هم‌ارز LC یکدیگرند و این بدین معنی است که درهم‌تیدگی‌های گوناگون این دو حالت یکسان هستند.

۲- تحول زمانی درهم‌تیدگی‌های $\eta_{1,23}$ ، $\eta_{2,13}$ ، $\eta_{3,12}$ و Q تحت هامیلتونی (۱۶) بررسی شد و مشاهده شد که اثر میدان مغناطیسی باعث ایجاد افت و خیزهایی در درهم‌تیدگی در حالت گراف درختی می‌شود، اما درهم‌تیدگی در گراف کامل مستقل از میدان مغناطیسی است. همچنین هم‌ارزی گراف درختی و کامل تحت تحول زمانی پایسته نیست؛ اما به‌ازای زمان‌های خاص این دو گراف هم‌ارز LC یکدیگرند.

۳- مجموعه t یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $4/188$ تشکیل می‌دهد. در واقع زمان‌هایی که در آن دو گراف هم‌ارزند دارای نظم مشخصی هستند.

مراجع

[1] S.Y. Looi, L. Yu, V. Gheorghiu, R.B. Griffiths, "Quantum-error-correcting codes using qudit graph states", *Phy. Rev A*, **78** (2008).

[2] P. Walther, K.J. Resch, T. Rudolph, E. Schenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer, A. Zeilinger, "Experimental one-way quantum computing", *Nature*, **434** (2005).

[3] M. Hein, W. Dur, J. Eisert, R. Raussendorf, M. Van den Nest and H. J. Briegel, "Entanglement in graph states and its applications," *Proc. Internat. School Phys. Enrico Fermi. Quantum Computers, Algorithms and Chaos*. **162** (2006).

[4] M. Jafarpour, L. Assadi, "Multipartite entanglement in four-qubit graph states", *Eur. Phys. J.D*, **70** (2016).

[5] L. Assadi, M. Jafarpour, "Classification of 4-qubit Entangled Graph States According to Bipartite Entanglement, Multipartite Entanglement and Non-local Properties", *Int J Theor Phys*, **55** (2016).

[6] P.J. Love, A.M. Van den Brink, A.Yu. Smirnov, M.H.S. Amin, M. Grajcar, E. Ilichev, A. Izmailkov, A.M. Zagoskin, "A characterization of global entanglement," *Quantum. Inf. Process*. **6** (2007).

[7] M. Van den Nest, J. Dehaene, B. De Moor, "On local unitary versus local Clifford equivalence of stabilizer states," *Phys. Rev. A* **71** (2005).

[8] D. Browne, H. Briegel, "One-way quantum computation," *arxiv:quant-ph/0603226v2* (2006).

[9] M. Jafarpour, M. Ashrafpour, "Entanglement dynamics of a two-qutrit system under DM interaction and the relevance of the initial state", *Quantum Inf. Process*, **12** (2013).

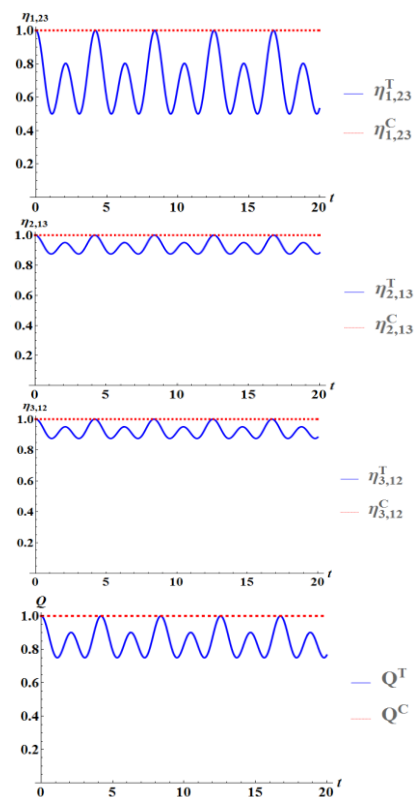
[10] A. Sabour, M. Jafarpour, M. Ashrafpour, "Dynamics of localizable entanglement in a qutrit chain with Dzyaloshinskii-Moriya interaction", *Quantum Inf. Process*, **12** (2013).

که در آن J قدرت برهم‌کنش است.

برای حالت گراف وابسته به زمان داریم:

$$|G(t)\rangle = e^{-iH_{XXX}t} |G\rangle \quad (17)$$

مشاهده کردیم که در زمان $t=0$ حالت‌های گراف سه کیوبیتی درختی و کامل هم‌ارز LC یکدیگر هستند. بدین معنی که درهم‌تیدگی‌های گوناگون آن‌ها با هم برابر است. در این بخش بررسی می‌کنیم که آیا در طول زمان و در شرایط یکسان، هم‌ارزی بین دو گراف حفظ می‌شود یا نه. در شکل (۴) درهم‌تیدگی‌های $\eta_{1,23}$ ، $\eta_{2,13}$ ، $\eta_{3,12}$ و Q را برای مقایسه رسم می‌کنیم. مشاهده می‌شود که اثر میدان مغناطیسی باعث ایجاد افت و خیزهایی در درهم‌تیدگی در حالت گراف درختی می‌شود، اما درهم‌تیدگی در گراف کامل مستقل از میدان مغناطیسی است. همچنین هم‌ارزی دو حالت گراف درختی و کامل تحت تحول زمانی در حضور میدان مغناطیسی پایسته نمی‌ماند، اما به‌ازای زمان‌های $t=\{0, 4.188, 8.376, 12.564, 16.752, \dots\}$ این دو گراف هم‌ارز LC یکدیگرند.



شکل ۴: تحول زمانی درهم‌تیدگی‌های گوناگون برای حالت گراف درختی و

کامل، تحت هامیلتونی XXX به‌ازای $B=1$ و $J_x=J_y=J_z=1$