

## مدل سلول مجازی

اجتهادی، محمد رضا

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

### چکیده

یک مدل محاسباتی چند جزئی و چند مقیاسی برای شبیه سازی پاسخ سلول ها به محرك های خارجی معرفی میشود. این مدل توانایی پیشینی تغییرات ساختاری کل سلول به همراه اجزای آنرا وقتی بر روی زیر لایه هایی با مشخصه های متفاوت قرار میگیرد را دارد. همچنین به توانایی این مدل سلول برای پاسخ شرایط محیطی و توانایی حرکت متناظر با غاظت مواد شیمیایی در محیط اطراف آن پرداخته خواهد شد.

### Virtual cell model

Ejtehadi, Mohamadreza

Department of Physics, Sharif University of Technology

### Abstract

*Here, we introduce a computational framework for a multi-component multi-scale model to simulate cells response to external stimuli. It has capability to predict changes in whole cell and its component on substrates with various properties. We show how our virtually modeled cell can predict cells deformations and also their motility in response to their environment*

## گذارهای ساختاری در شبکه‌های پیچیده

عظیمی، ناهید

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

### چکیده

تغییرات ویژگی‌های ساختاری شبکه‌ها و گذارهای ساختاری بر فرآیندهای دینامیکی روی شبکه‌ها از جمله انتشار اطلاعات و بیماری تاثیرگذار هستند. در این سخنرانی با چند گذار ساختاری بنیادی و مهم در شبکه‌ها که با استفاده از مدل‌های تراووش توصیف می‌شوند آشنایی شویم و به کاربردها و ارتباط آنها با مسایلی نظیر آسیب پذیری، کنترل پذیری و مسایل بھینه سازی در شبکه‌ها می‌پردازیم. به ویژه نوع تعمیم یافته ای از مدل‌های تراووش را معرفی می‌کنیم که می‌تواند در پیداپیش سلسله مراتبی پیکربندی‌های بھینه در مسایل بھینه سازی کاربرد داشته باشد. همچنین الگوریتمی که در این مدل پیاده می‌شود به طور سلسله مراتبی منجر به تجزیه شبکه و دسته بنای عناصر آن در زیر شبکه‌های می‌شود که این روش در مطالعه شبکه‌های با اندازه بزرگ مفید خواهد بود.

### Structural transitions in complex networks

Nahid Azimi

*Physics Department, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences*

### Abstract

*Structural transitions in networks were extensively studied due to impacts on many properties of networks, e.g. robustness and resilience to breakdowns, epidemic and information spreading on socio-technical systems. In this talk first we review some fundamental structural transitions, in particular we focus on core percolation which has applications in several important problems such as conductor-insulator transitions, controllability of networks and some combinatorial optimization problems. In the following we propose a generalization for core percolation which can be efficient to construct hieratically near-optimal configurations in combinatorial optimization problems. Moreover the proposed algorithm introduces a new network decomposition and classification of the nodes into different subsets, which is useful in study of structural properties of large networks.*

## علوم داده از افق فیزیک آماری

شیرازی، امیرحسین

شرکت کافه بازار

### چکیده

در دهه‌ی گذشته، ما شاهد انفجار اطلاعاتی در داده‌های ثبت شده بوده‌ایم؛ از ثبت داده‌های زیست‌شناسختی در آزمایشگاه‌ها تا داده‌های اجتماعی اقتصادی گسترشده. از زاویه دید فیزیک آماری، تحلیل این داده‌های کلان مقیاس می‌تواند به صورت یک مساله‌ی معکوس فرمول‌بنایی شود. در مقابل روش مستقیم مسائل فیزیک آماری که در آنها مشاهده‌پذیرها بر اساس مدل پیش‌بینی می‌شوند، در روش معکوس، پارامترهای مدل بر اساس مشاهدات جهان واقعی استنباط می‌شوند. برای مثال، بر اساس داده‌های مربوط به صورت بنایی‌های یک سیستم اسپینی، می‌خواهیم ضرایب شبکه‌ی برهمنکشی آن را استنباط کنیم، در این صحبت مروری خواهیم داشت بر روش‌های مورد استفاده در مسائل معکوس فیزیک آماری و در ادامه، نتایج پذیره‌های بحرانی در این مدل‌های استنباط شده را بررسی می‌کنیم. در انتها سعی خواهیم کرد که پائی برقرار کنیم میان مفاهیم مذکور و مباحث روز در علوم داده و یادگیری ماشین.

## Data Science from the Perspective of Statistical Physics

**Shirazi, Amirhossin**

### Abstract

*In the last decade we were witness to an enormous explosion of recorded data, from biological records in wet labs to socio-economic data. From the perspective of statistical physics, analyzing the large-scale data could be reformulated as an inverse problem. Contrary to forward approach which predicts observables based on a model, inverse approach infers model parameters based on real world observations. For example, given the data of Ising spin's configurations we want to infer and reconstruct the interaction network, i.e. couplings, of the system. In this talk I will review some approaches of inverse problems and discuss the consequences of critical phenomena when applied to inferred models. Finally I will try to connect these concepts to current studies in data science and machine learning.*

## محاسبه‌ی زمان تثبیت فرایندهای تکاملی در شبکه‌های پیچیده: رهیافت میدان میانگی

آقابابایی سامانی، کیوان

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

### چکیده

برای توصیف تغییرات جمعیت، مدل‌های مختلفی ارائه شده است. دسته‌ای از آن‌ها مدل‌های تکاملی خوانده می‌شوند. پارامترهای اصلی این مدل‌ها عبارت‌اند از: تکثیر، انتخاب و جهش. ما جمعیتی مشکل از دو گونه را در نظر می‌گیریم. یکی از آنها را مقیم و دیگری را جهش‌یافته می‌نامیم. در جمعیتی از گونه‌های مقیم، یکی از آن‌ها می‌تواند در اثر جهش تغییر کند. تعداد کل اعضای جمعیت ثابت فرض می‌شود، بنابراین با افزایش تعداد گونه‌های جهش‌یافته، تعداد گونه‌های مقیم کاهش می‌یابد. اگر گونه‌ی جهش‌یافته برازش بیشتری از گونه‌ی مقیم داشته باشد می‌تواند تکثیر کند و کل جمعیت را فرازگیرد. یکی از پرسش‌های اساسی در این فرایند این است که زمان میانگین برای این که گونه‌ی جهش‌یافته کل جمعیت را فرازگیرد چه قدر است. این زمان، زمان تثبیت نامیده می‌شود. از این مدل برای درک فرایند گسترش سلول‌های سرطانی، فرایند تغییر عقاید یا عادات اجتماعی و مسائل متعدد دیگری استفاده شده است.

در این سخنرانی با استفاده از فرایندهای مارکف یک روش تحلیلی برای محاسبه‌ی زمان تثبیت یک فرایند تکاملی در شبکه‌های پیچیده در تقریب میدان میانگین ارائه می‌شود.

## Fixation time of evolutionary processes in complex networks: A mean field approach

Aghababaei Samani, Keivan

Department of Physics, Esfahan University Of Technology

### Abstract

*Evolutionary models are used to explain population dynamics in a wide range of problems from dynamics of cancer to dynamics of culture. An evolutionary dynamical model consists of three parameters: reproduction, selection, and mutation. We consider a population of two types of species, namely, residents and mutants. We start with a population of all but one residents and one mutant. The mutant has greater fitness than residents and may reproduce and take over the whole population. An important quantity in this process is the time a mutant needs to take over the whole population. This is called fixation time. In this talk, using a Markov chain approach, we calculate the fixation time of evolutionary processes in complex networks in mean field approximation.*

## معمای حس بویایی

سید علائی، حامد

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

### چکیده

طول موج نوری که به چشم ما می‌رسد، رنگ آن را تعیین می‌کند. فرکانس صدایی که به گوش ما می‌رسد، زیر و بمی آن را تعیین می‌کند. اما هنوز به درستی معلوم نیست که چه خواصی از یک مولکول در تعیین بوی آن نقش دارند. این موضوع باعث می‌شود که مطالعه این حس در مقایسه با حواس دیگر دشوار تر باشد.

در این سخنرانی ضمن تأکید اهمیت این حس در زندگی ما و دیگر جانداران، ابتدا عملکرد سیستم بویایی را مرور می‌کنیم، و سپس نشان می‌دهیم که حجم یک مولکول می‌تواند نقش مهمی در تعیین شدت (کمیت) بو و همینطور کفیت (سردی، گرمی، شیرینی و ...) داشته باشد. این یافته می‌تواند پاسخی برای این سوال باشد که چرا ملکولهای مشابه که تنها اندازه آنها متفاوت است بوهای مختلف دارند.

## Scent of a Volume

Hamed Sedyed-allaei

Institute For Research In Fundamental sciences

### Abstract

*Which properties of a molecule define its odor? This is a basic yet unanswered question regarding the olfactory system. The olfactory system of Drosophila has a repertoire of approximately 60 odorant receptors. Molecules bind to odorant receptors with different affinities and activate them with different efficacies, thus providing a combinatorial code that identifies odorants. We hypothesized that the binding affinity of an odorant-receptor pair is affected by their relative sizes. The maximum affinity can be attained when the molecular volume of an odorant matches the volume of the binding pocket. The affinity drops to zero when the sizes are too different, thus obscuring the effects of other molecular properties. We developed a mathematical formulation of this hypothesis and verified it using Drosophila data. We also predicted the volume and structural flexibility of the binding site of each odorant receptor; these features significantly differ between odorant receptors. The differences in the volumes and structural flexibilities of different odorant receptor binding sites may explain the difference in the scents of similar molecules with different sizes.*

## همگامی فاز در مجموعه‌ای از ذرات خودران

فضلی، زهرا؛ کجوری، رسول؛ نجفی، علی

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان

### چکیده

ما در این مقاله با ارائه‌ی یک مدل ساده که درجه‌ی آزادی داخلی فاز را به هر ذره نسبت می‌دهد، نقش متقابل دینامیک فاز درونی و درجات آزادی انتقالی و چرخشی ذرات خودران را مطالعه می‌کنیم. محاسبات ما نشان می‌دهد که این متغیر تاثیر مهمی بر حالت‌های قابل دسترسی سامانه در زمان‌های بلند دارد. ما مشاهده کردیم که وجود یک جفت‌شدگی بین تحول جهت و فاز ذرات می‌تواند منجر به تشکیل خوش‌هایی از ذرات با فاز یکسان شود. همچنین رفتار گردابی ذرات که با وارد کردن متغیر فاز در معادلات تحول جهت حرکت ذرات دیله می‌شود، یکی دیگر از پدیده‌های جالب توجه در این مسئله است.

## Phase synchronization in a system of self-propelled particles

Fazli, Zahra; Kajouri, Rasoul; Najafi, Ali

Department of Physics, Institute for advanced studies in basic sciences, Zanjan

### Abstract

In this paper, we present a simple model that attributes the internal phase degree of freedom to each particle and we aim to study the mutual roles of the dynamics of this internal phase and translational and rotational degrees of freedom in a system of self-propelled particles. Our calculations show that this variable has an important impact on the long time states of the system. We observed that a coupling between the dynamics of orientation and internal phase can lead to formation of in-phase clusters. Furthermore, development of vortices is another interesting phenomenon in this system.

05.65.+b, 05.45.Xt, 05.10.Gg

مقدمه  
بین تغییر فاز داخلی شناگرهای ریزمقیاس و برهمکنش هیدرودینامیکی بین آن‌هاست [2].

ما در این مسئله متغیر فاز را به عنوان یک درجه‌ی آزادی داخلی برای ذرات خودران معرفی می‌کنیم. برای مثال در مورد پرنده‌ای که با یک سرعت ثابت در حال پرواز است، علاوه بر جهت حرکت پرنده به عنوان درجه‌ی آزادی جهتی، اختلاف زاویه‌ی بین بال‌ها را می‌توان به عنوان درجه‌ی آزادی فاز در نظر گرفت. این به این معنی است که باز و بسته شدن هم‌زمان بال‌های پرنده منجر به نوعی همگامی می‌شود. با این فرض وقتی مجموعه‌ای از پرنده‌ها را داشته باشیم علاوه بر متوسط جهت

همگامی یکی از انواع پدیده‌های جمعی است که می‌تواند به دلیل جفت‌شدگی و تاثیرپذیری اجزای یک گروه از یکدیگر اتفاق بیفتد. همگامی در سامانه‌های زیستی، فیزیکی، شیمیایی و حتی اجتماعی مشاهده شده است. یکی از نمونه‌های جالب این پدیده در طبیعت، نور دادن هماهنگ کرم‌های شب‌تاب است.

برای ریزشناگرهایی مانند باکتری‌ها که توسط حرکات مارپیچی تاژک‌هایشان در محیط شاره شنا می‌کند، می‌توان نوعی فاز داخلی در نظر گرفت و نقش تحول این فاز داخلی را در حرکت ذره بررسی کرد [1]. محاسبات قبلی ما نشان‌دهنده‌ی وجود رابطه‌ای

ذراتی است که در شعاع برهم‌کنشی  $R$  ذره قرار دارند. جمله‌ی آخر در معادله‌ی تحول جهت، جمله‌ی نویز است که  $\Delta$  قدرت نویز است و  $(t)$  عددی با توزیع یکنواخت بین صفر و  $2\pi$  است.

تحول فاز ذرات نیز با معادله‌ی سوم داده می‌شود: هر ذره یک فرکانس فازی  $\omega$  دارد که از یک توزیع گاووسی به دست می‌آید و برهم‌کنش آن با ذراتی که در فاصله‌ی  $R$  هستند متناسب با یک ضریب جفت‌شده‌ی  $K$  و بر اساس مدل کوراموتو داده می‌شود.

جمله‌ی شامل پارامتر  $\epsilon$  در معادله‌ی جهت، جفت‌شده‌ی بین تحول جهت و فاز داخلی ذرات را مشخص می‌کند. هر قدر مقدار این پارامتر بزرگ‌تر باشد نقش تاثیرات فاز ذرات در جهت‌گیری آن‌ها بیشتر می‌شود.

ما با استفاده از مقیاس شعاع برهم‌کنشی  $R$  و سرعت ذاتی ذرات معادلات دیفرانسیل بالا را بی‌بعد کرده و به روش اویلر گستته‌سازی می‌کنیم و سپس با حل عددی این معادلات در شرایط مرزی دوره‌ای، رفتار یک مجموعه از این ذرات را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. پارامترهای نظم جهتی و فازی را بر طبق مدل‌های ویچک و کوراموتو به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$P = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{n}}_i \right| \quad (4)$$

$$\Phi = \frac{1}{N} \sqrt{\left( \sum_j \cos \varphi_j \right)^2 + \left( \sum_j \sin \varphi_j \right)^2} \quad (5)$$

ما از این دو پارامتر برای بررسی میزان منظم بودن سامانه از نظر جهت و فاز میانگین ذرات استفاده می‌کنیم.

در زمان اولیه، مکان، جهت‌گیری و فاز همه‌ی ذرات را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و سپس تحول آن‌ها را بر اساس معادلات مطالعه می‌کنیم.

## نتایج

### الف) حالت $\epsilon = 0$

در ابتدا فرض کنیم تاثیرات فاز در جهت حرکت ذرات صفر باشد. در این شرایط می‌توانیم با حل معادلات، مقادیر پارامترهای

حرکت مجموعه، متوسط هم‌گامی فاز آن‌ها را نیز می‌توانیم به عنوان یک پارامتر نظم محاسبه کنیم.

ما در این مسئله قصد داریم تا با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از ذرات خودران که علاوه بر تحول مکان و جهت آن‌ها، فاز داخلی حرکتشان نیز تحول پیدا می‌کند، تاثیر این تحولات فاز را بر رفتار بزرگ‌مقیاس آن‌ها مورد بررسی قرار دهیم.

## معرفی مسئله

سامانه‌ی ما متشکل از ذراتی است که دارای یک سرعت ذاتی ثابت هستند و جهت حرکت آن‌ها بر اساس مدل ویچک تحول می‌یابد. بر اساس این مدل، جهت حرکت لحظه‌ای هر ذره‌ی خودران برابر متوسط جهت ذراتی است که در شعاع مشخصی از آن قرار دارند، به علاوه‌ی یک نویز که به این جهت متوسط اضافه می‌شود [3]. پارامتر نظم جهتی ذرات نیز جهت میانگین ذرات یا همان قطبیش است. علاوه بر این، ما برای هر ذره یک فاز داخلی نیز در نظر می‌گیریم که تحول آن را با استفاده از مدل کوراموتو مشخص می‌کنیم. در مدل کوراموتو مجموعه‌ای از نوسانگرهای جفت شده در مقادیر بالاتر از یک جفت‌شده‌ی بحرانی، نوعی گذار از حالت کاملاً بی‌نظم به حالتی که همه‌ی نوسانگرهای همگام شده‌اند نشان می‌دهند [4]. فاز داخلی متغیری است که همانند زاویه‌ی جهتی، برای هر ذره می‌تواند مقداری بین صفر و  $2\pi$  داشته باشد. ما با ادغام دو مدل بالا، معادلات توصیف‌کننده‌ی تحول مکان، جهت حرکت و فاز داخلی ذرات را به شکل زیر می‌نویسیم:

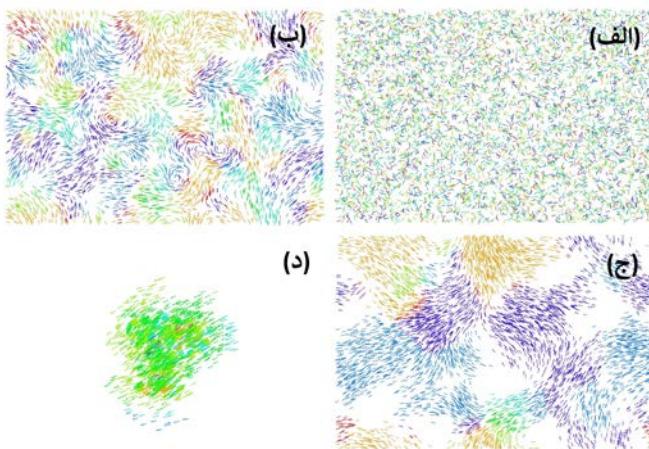
$$\dot{\mathbf{r}}_i = v_0 \hat{\mathbf{n}}_i \quad (1)$$

$$\theta_i = \bar{\theta}_R + \epsilon \sin^2(\varphi_i - \bar{\varphi}_R) + \Delta \eta(t) \quad (2)$$

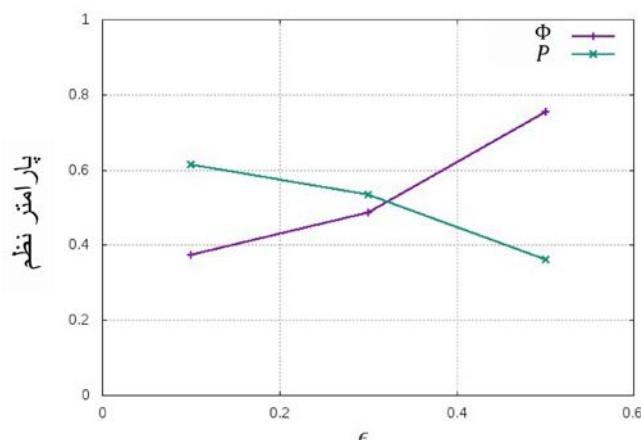
$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + K \sum_{j \in R} \sin(\varphi_j - \varphi_i) \quad (3)$$

در این رابطه،  $v_0$  سرعت ذاتی هر ذره و  $(\cos \theta_i, \sin \theta_i) = \hat{\mathbf{n}}_i$  جهت لحظه‌ای حرکت آن است.  $\bar{\theta}_R$  جهت متوسط ذراتی است که در شعاع همسایگی  $R$  از هر ذره قرار دارند که بر اساس مدل ویچک تعیین می‌شود.  $\epsilon$  پارامتری است که میزان تغییر جهت ذرات را در اثر اختلاف فاز با ذرات همسایه مشخص می‌کند.  $\bar{\varphi}_R$  متوسط فاز

گردا بهی بزرگتر می دهند که ذرات داخل آن هم فاز هستند. نمونه ای از این رفتار در شکل ۲ نشان داده شده است. اما اگر ضریب جفت شدگی خیلی بزرگ باشد، دیگر گردا بهی دیده نمی شود. دلیل این امر آن است که در این شرایط همهی ذرات به سرعت با هم هم فاز می شوند و فاز هر ذره با میانگین فاز ذرات همسایه یکی شده و بر اساس رابطه  $(2)$  جمله  $\epsilon$  دیگر اثری نخواهد داشت.

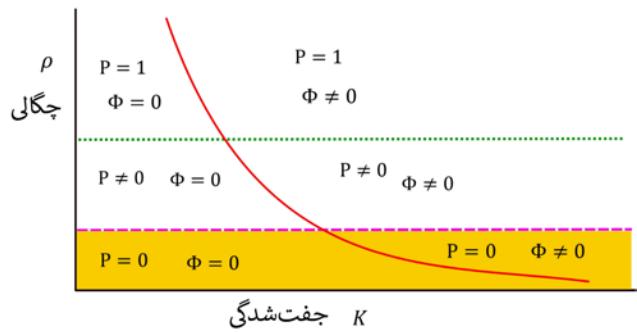


شکل ۲: تصاویر لحظه ای از جهت و فاز ذرات در شرایط  $\epsilon \neq 0$ . جهت هر ذره با یک پیکان و فاز آن با رنگ مشخص شده است. (الف) تا (د) به ترتیب مربوط به لحظه ای اول تا زمان تشکیل یک گردا بهی منسجم هستند. در این شکل پارامترها برابر است با:  $\Delta = 0$ ،  $K = 2$ ،  $\epsilon = 0.1$ ،  $\rho = 10$  و  $\Phi = 0$ .



شکل ۳: رفتار پارامترهای نظم جهتی و فازی بر حسب  $\epsilon$  که برای این مقادیر از پارامترها رسم شده است:  $\Delta = 0$ ،  $K = 2$ ،  $\epsilon = 0.1$ ،  $\rho = 10$  و  $\Phi = 0$ .

نظم جهتی و فازی را بر حسب مقادیر مختلف چگالی و جفت شدگی بین ذرات محاسبه کنیم. ما مشاهده کردیم که در یک نویز ثابت وقتی چگالی ذرات را افزایش می دهیم، به تدریج همهی ذرات با هم هم جهت می شوند اما در عین حال ناحیه هایی ایجاد می شود که در آنها فاز ذرات با یکدیگر همگام است و این نواحی در چگالی های بیشتر بزرگتر هستند. محاسبات ما نشان می دهد که فضای فاز سامانه را می توان به صورت کیفی به شکل زیر رسم کرد:



شکل ۱: فضای فاز سامانه بر حسب چگالی ذرات و جفت شدگی بین آنها در حالت  $\epsilon = 0$ .

همان طور که دیده می شود یک چگالی بحرانی  $\rho_c$  وجود دارد که پایین تر از آن پارامتر نظم جهتی صفر است (ناحیه زردرنگ) و پس از آن غیر صفر می شود. در بخش بالای نقطه چین سبزرنگ برای سامانه نظم جهتی کامل داریم. منحنی قرمزرنگ نیز میان ناحیه ای است که پارامتر نظم فازی صفر و غیر صفر است.

یکی دیگر از نتایجی که در این بخش به دست آورده ایم است که مقدار نظم فازی سامانه بستگی به چگالی ذرات دارد. همان گونه که در شکل بالا نیز دیده می شود، هر قدر چگالی ذرات بالاتر باشد، نظم فازی در جفت شدگی کمتری ایجاد می شود.

### الف) حالت $\epsilon \neq 0$ :

در این حالت رفتارهای جالبی برای ذرات دیده می شود. نتایج اولیه ای ما نشان می دهد که برای مقادیر  $\epsilon$  و ضریب جفت شدگی کوچک، ذرات تشکیل گردا بهای کوچکی می دهند و سپس با گذشت زمان این گردا بهایا به یکدیگر پیوسته و تشکیل یک

[4] S. H. Strogatz; "From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators"; *Physica D* **143**, (2000) 1-20.

ما همچنین رفتار پارامترهای نظم جهتی و فازی را بر حسب پارامتر  $\epsilon$  بررسی کردیم. همان‌طور که در شکل 3 دیده می‌شود، با افزایش این پارامتر، نظم فازی افزایش می‌یابد ولی نظم جهتی رفتار کاهشی نشان می‌دهد. کاهش نظم جهتی به این معنی است که پارامتر  $\epsilon$  می‌تواند به نوعی نقش نویز را برای جهت ذرات ایفا کند و منجر به از بین رفتن نظم شود.

ما در به دست آوردن این نتایج تاکنون از جمله‌ی نویز جهتی در مدل ویچک صرف‌نظر کردیم و مقدار آن را صفر در نظر گرفتیم تا بتوانیم رفتار جمعی ذرات را تنها تحت تاثیر تحول فاز آن‌ها مطالعه کنیم. این اولین گام برای مطالعه‌ی این مسئله است. ما در ادامه‌ی این کار به بررسی نقش نویز خواهیم پرداخت و می‌توانیم نقش متقابل نویز تصادفی و جمله‌ی برهمنکش فازی را در تحول جهتی ذرات بررسی کنیم. در حالت کلی، وارد کردن نویز در مدل ویچک منجر به کاهش نظم جهتی ذرات می‌شود. نتایج اولیه‌ی ما برای این سامانه نشان می‌دهد که در صورت وجود نویز، هر دو پارامتر نظم کوراموتو و ویچک کاهش پیدا می‌کنند و این کاهش با افزایش نویز بیشتر می‌شود.

## نتیجه‌گیری

ما در این مقاله با ارائه‌ی یک مدل ساده نشان دادیم که در نظر گرفتن تحول فاز برای ذرات خودران به عنوان یک درجه‌ی آزادی داخلی، می‌تواند تاثیرات مهمی در رفتار جمعی این ذرات داده باشد. تشکیل خوش‌های هم‌فاز از ذرات و حرکات گردابی از این نتایج جالب است.

## مرجع‌ها

- [1] Y. Yang, J. Elgeti and G. Gompper; "Cooperation of Sperm in Two Dimensions: Synchronization, Attraction and Aggregation through Hydrodynamic Interactions"; *Physical Review E* **78**, (2008) 061903.
- [2] Z. Fazli, A. Najafi; "Long-wavelength instabilities in a system of interacting active particles"; *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2018**, (2018) 023201.
- [3] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet; "Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles"; *Physical Review Letters* **75**, (1995) 1226.

## مدل BTW روی شبکه مربعی همبسته‌ی آیزینگ گونه

چراغعلی زاده<sup>۱</sup>، جعفر<sup>۱</sup>؛ نطاق نجفی، مرتضی<sup>۱</sup>؛ دشتی ناصرآیادی، حر<sup>۲</sup>؛ محمد زاده، حسین<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

<sup>۲</sup> مرکز تحقیقات فیزیک و شتاب دهنده‌ها، تهران

### چکیده

در این مقاله ما مدل BTW را بر روی شبکه‌ی تراوش آیزینگ-گونه در نظر گرفته‌ایم، و از مدل آیزینگ برای ایجاد همبستگی بین نقاط فعلی شبکه بهره جسته‌ایم. همبستگی بر روی شبکه با استفاده از عامل "دما"  $T$  کنترل می‌شود. دیله می‌شود که فرضیه‌ی مقیاسی طول محدود در این مدل صحیح است. با استفاده از تحلیل اثر طول محدود مشاهده کردیم که در دمای بحرانی این مدل برخی رفتارهای مشابه با مدل BTW منظم دو بعای بروز می‌دهد. مهم‌ترین یافته‌ی این مقاله، مشاهده کلامس هم‌ارزی ولگشت خود-پرهیز در دمای بحرانی است.

### BTW model on the Ising-correlated square lattice

Cheraghalizadeh, jafar<sup>1</sup>; Natag-najafi, morteza<sup>1</sup>; Dashti Naserabadi, Hor<sup>2</sup>; Mohammadzadeh, hosein<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili

<sup>2</sup>Physics and Accelerators Research School, NSTRI, AEOI 11365-3486, Tehran, Iran

### Abstract

In this paper, we consider the BTW model on the Ising-correlated percolation lattice and consider the Ising model to realize the correlations between the active sites. The correlations are controlled by the "temperature" factor  $T$ . It is seen that the finite size scaling hypothesis is fulfilled. Using the finite-size effects we observed that this model is equivalent partially to two-dimensional regular BTW model. The most important feature of our model is that it corresponds to the self-avoiding walk universality class at  $T = T_c$ .

PACS No. 05., 05.20.-y, 05.10.Ln, 05.65.+b, 05.45.Df

راه‌ها برای تولید این همبستگی و ایجاد شبکه‌های همبسته

### مقدمه

استفاده از مدل آیزینگ است که موضوع این مقاله می‌باشد.

ما در این مقاله از مدل آیزینگ بدون میدان مغناطیسی پس

زمینه استفاده کردیم، و از دمای ساختگی  $T$  برای کنترل شدت

همبستگی‌ها در این سیستم استفاده می‌کنیم. در این شبیه سازی

استفاده از مدل آیزینگ و عامل کنترلی  $T$  صرفا برای ایجاد

شبکه‌ای شامل خانه‌های فعلی و غیر فعلی همبسته است و خود

سیستم فرومغناطیسی مورد بررسی نیست.

### الگوریتم شبیه سازی

ما ابتدا به صورت تصادفی مقادیر  $\{E_i\}_{i=1}^N$  به خانه‌های

فعال نسبت دادیم، که این مقدار به تعداد همسایه‌های فعلی هر

مدل BTW یک مدل خود سامانده بحرانی است [1] که

به انرژی به عنوان ورودی و خروجی نیاز دارد تا در حالت

بحرانی باقی بماند. تحلیل‌های بسیاری بر روی این مدل در دو و

سه بعد انجام گرفته است [2-3]. همچنان این مدل روی شبکه

ترواش ناهمبسته بررسی شده است [4] که می‌تواند به عنوان

مدلی برای حرکت جریان سیال در محیط‌های متخلخل در نظر

گرفته شود.

در مخازن نفتی طرح تشکیل تخلخل همبسته است و فعل بودن

یک نقطه به آرایش نقاط دیگر وابسته است. یکی از ساده‌ترین

شکل ۱: نمونه‌ی یک بهمن روی شبکه  $512 \times 512$  آیزنینگ در دمای بحرانی (رنگ سفید خانه‌های فعال، رنگ خاکستری بهمن و رنگ قرمز خانه‌های غیرفعال)

بهمن‌هایی که در حالت‌های تکرار شونده ایجاد می‌شوند در تحلیل ما مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعداد همسایه‌های فعال خانه‌ی  $\bar{z}$  صورت زیر بدست می‌آید:

$$z_j \equiv \sum_{i \in \text{همسایه}} \delta_{\sigma_i, 1} + \delta_{\text{مرزی}, i} \quad (1)$$

که در این رابطه  $\delta$  دلتای کرونونکر و  $\sigma_i = 1$  مشخص کننده خانه فعال است. تغییر ارتفاع خانه‌ی  $\bar{z}$  در یک فروریزش به صورت  $E_j = E_j + \Delta_{i,j}$  است که در آن:

$$\Delta_{i,j} = \begin{cases} \delta_{\sigma_i, 1} & \text{اگر } j \in \text{همسایه باشند} \\ -z_i & i = j \\ 0 & \text{حالات دیگر} \end{cases}. \quad (2)$$

یکی از مهمترین کمیت‌های هندسی در این مقاله احتمال تراویش (SCP) است، که به صورت احتمال رسیدن بهمن به مرزهای انتهایی رو به روی هم تعریف می‌شود. این کمیت وابسته به  $T$  و سایز شبکه ( $L$ ) است. کمیت‌های دیگری که مورد محاسبه قرار گرفته است شامل: تعداد کل فروریزش‌ها در یک بهمن  $n$ ، جرم بهمن  $m$  (تعداد خانه‌هایی که شامل بهمن می‌شود)، طول حلقه بهمن  $l$  و شعاع ژیراسیون بهمن که با معادله‌ی ۳ تعریف می‌شود.

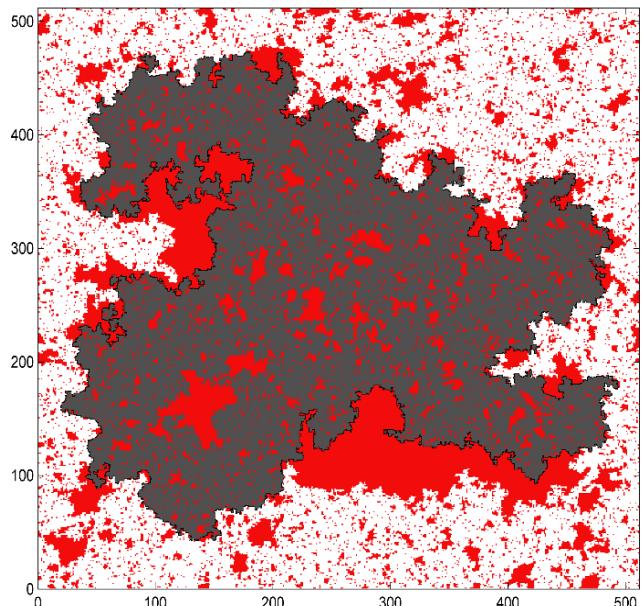
$$r^2 \equiv \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\vec{r}_i - \vec{r}_{com})^2 \quad (3)$$

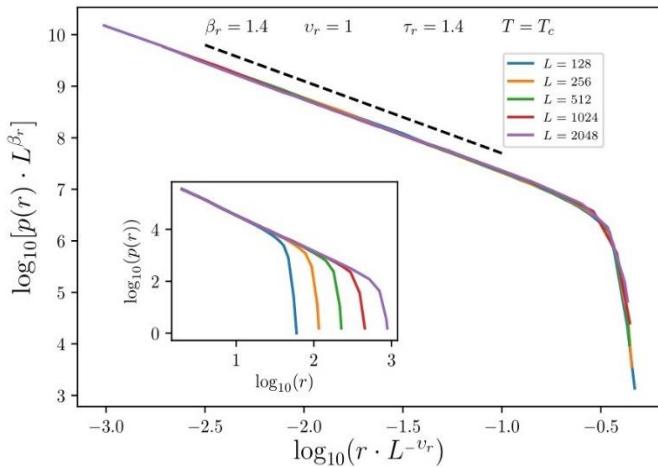
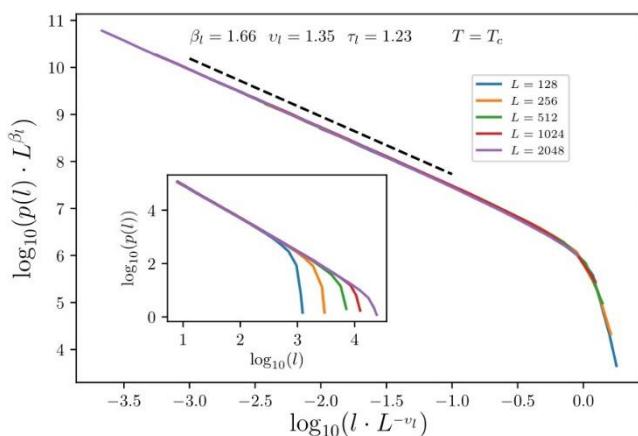
در این معادله  $\vec{r}_i$  مکان بردار نقطه  $i$ ام و  $\vec{r}_{com}$  مرکز جرم بهمن است. این شبیه سازی برای هر سایز شبکه به تعداد  $10^6$  بهمن بر روی شبکه‌هایی با ابعاد  $128, 256, 512, 1024, 2048$  دمای بحرانی می‌رویم.

### دمای بحرانی ( $T=T_c$ )

دمای بحرانی در مدل آیزنینگ بر روی شبکه‌ی مربعی تقریباً  $T=2.268$  است. نماهای بررسی شده در این دما برای طول شبکه ۲۰۴۸ در جدول ۱ آمده است.

خانه بستگی دارد.  $(4 \leq E_i \leq 1)$  در واقع ارتفاع آستانه‌ی هر خانه نیز به همین شکل تعریف می‌شود. سپس به صورت تصادفی یک خانه انتخاب کرده و یک واحد به آن اضافه می‌کنیم ( $E_i = E_i + 1$ ). اگر خانه‌ی مورد نظر ناپایدار شد فرو ریزش اتفاق می‌افتد و به خانه‌های فعال مجاور انتقال پیدا می‌کند و اگر دویاره خانه‌های مجاور ناپایدار شدند دویاره همین اتفاق می‌افتد. این روند تا وقتی ادامه پیدا می‌کند که هیچ خانه‌ای ناپایداری نباشد و سیستم پایدار شود. به زنجیره‌ی فرو ریزش‌ها از یک آرایش پایدار تا آرایش پایدار بعدی یک بهمن می‌گوییم. دینامیک کلی سیستم به این صورت است که سیستم در زمان‌های اولیه در حالت‌های موسوم به حالت‌های گذار است و در زمان‌های به قدر کافی بزرگ به حالت‌های تکرار شونده می‌رسد. در این مقاله، دانه‌های شن تنها می‌توانند بر روی خانه‌های فعال حرکت نمایند. خانه‌های فعال را خانه‌هایی در نظر می‌گیریم که در مدل آیزنینگ هم زاد اسپین بالا داشته باشند. آرایش این اسپین‌ها با مدل آیزنینگ کنترل می‌شود که با هامیلتونی  $H \equiv \sum_{i,j} S_i S_j$  داده می‌شود. در اینجا خانه‌های فعال متناظر با خانه‌های با اسپین بالا هستند. در شکل ۱ نمونه‌ای از این بهمن‌ها نشان داده شده است.

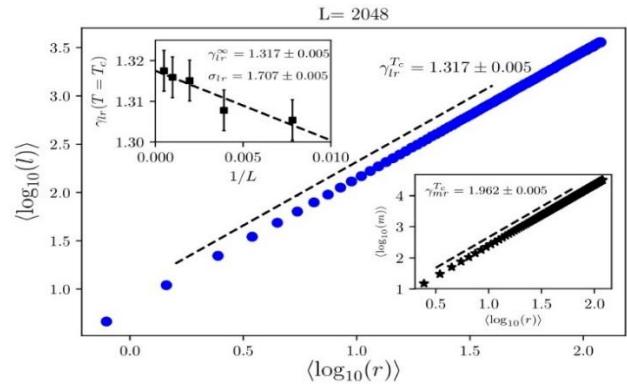


شکل ۱-۳: فیت نمودار تابع توزیع شاعر ژیراسیون حلقه‌های بهمن در دمای  $T_c$ شکل ۱-۲: فیت نمودار تابع توزیع طول حلقه‌های بهمن در دمای  $T_c$ 

### دماهای غیر بحرانی ( $T < T_c$ )

ما در این مقاله رفتار نمایهای بحرانی و همچنین ابعاد فرکتالی با تغییر دما و اثر طول محدود را مورد بررسی قرار داریم (شکل ۴). به خوبی مشاهده می‌کنیم که با افزایش دما قدر مطلق نمایهای بحرانی کاهش می‌یابد و بعد فرکتالی طول حلقه‌ها با افزایش دما افزایش و بعد فرکتالی جرم خوشه‌ها هم کاهش می‌یابد این کاهش و افزایش‌ها در نزدیکی دمای بحرانی رفتار خاصی را نشان میدهد که در معاله ۵ نشان داده است، و همچنین این نما برای های مختلف بررسی شده است (جدول ۲)

$$|(\tau_x - \tau_x^{T_c})| \propto |(T - T_c)|^{\gamma_x} \quad (7)$$

شکل ۲: ابعاد فرکتالی ( $\gamma_{lr}$ ) و ( $\gamma_{mr}$ ) برای طول شبکه ۲۰۴۸ و دمای  $T_c$ 

جدول ۱: نمایهای بحرانی در دمای  $T = T_c$  و حد ترمودینامیکی و مقادیر مربوط به مدل BTW منظم دو بعدی [5],[6]

	$\tau^{L \rightarrow \infty}$	$\tau^{L=2048}$	$\nu$	$\beta$	$\frac{\beta}{\nu}$	$\tau_{2D BTW}$
n	1.1(2)	1.15(3)	1.12(2)	1.27(2)	1.15(2)	1.293
m	1.1(2)	1.15(2)	1.11(2)	1.15(2)	1.15(2)	4/3
l	1.2(2)	1.23(1)	1.35(1)	1.25	1.25	1.28
r	1.27(2)	1.38(2)	1.0(1)	1.40	1.40	5/3

برای هر سیستم خود ساماندهی بحرانی در حد ترمودینامیکی ( $\rightarrow \infty$ ) نمایهای توزیع مشخص می‌شود. معادله ۴ و ۵، که این توزیع رفتار توانی به صورت  $p(x) \sim x^{-\tau_x}$  دارند، و این است (جدول ۱).

$$\tau_x(L, T = T_c) = \tau_x(L = \infty, T = T_c) + \frac{a_x}{\log_{10}(L)} \quad (4)$$

$$\gamma_{xy}(L, T = T_c) = \gamma_{xy}(L = \infty, T = T_c) + \frac{a_x}{L} \quad (5)$$

معادله ۴ در نمایهای بحرانی و معادله ۵ در ابعاد فرکتالی مشاهده می‌شود (شکل ۴). همچنین معادله ۴ برای مدل BTW 2D نیز برقرار است [5]. برای بررسی اثر طول محدود و رفتار مقیاسی سیستم از معادله ۶ استفاده شده است (شکل ۳).

$$p(x, L) = L^{-\beta_x} g_x(x L^{-\nu_x}) \quad (6)$$

در رابطه بالا  $g$  مقدار ثابت و  $\tau_x = \frac{\beta_x}{\nu_x}$  است.

### نتیجه گیری

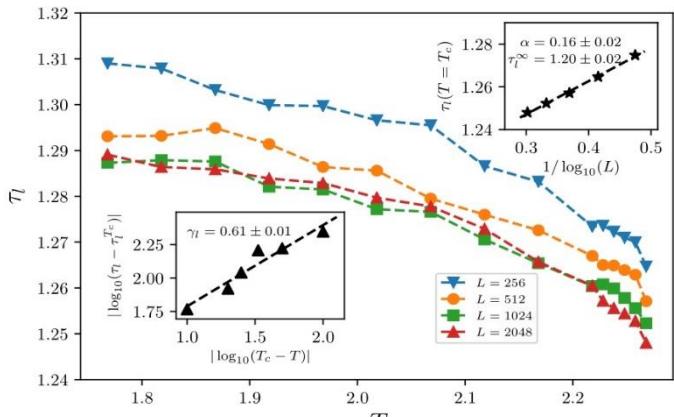
در این مقاله ما مدل BTW را بر روی شبکه‌ی تراوش آیزنگ-گونه‌ی مربعی در نظر گرفتیم. مشاهده کردیم که وجود همبستگی باعث تغییر در رفتار آماری سیستم می‌شود. برای مثال بعد فرکتالی حلقه‌های تصادفی این مدل، با کلاس همارزی مدل ولگشت خود-پرهیز دو بعدی هم‌خوانی دارد. همچنین مشاهده کردیم که احتمال تراوش رفتاری به صورت  $\sqrt{L}$  برای دمای بحرانی دارد. در جدول ۲ و ۳ نماهای مختلف نمایش داده شده‌اند.

جدول ۲: نماهای بحرانی مدل

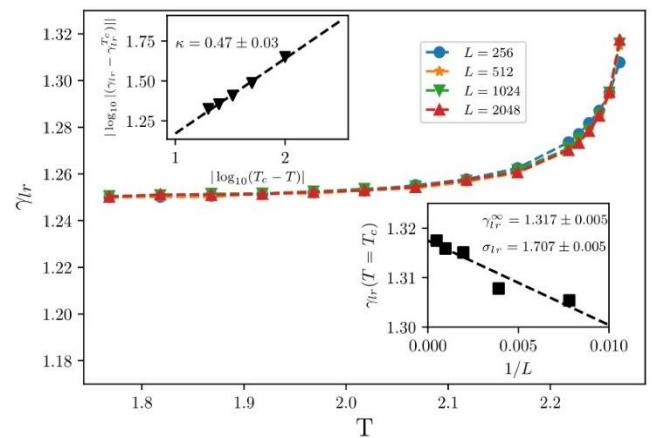
	$\gamma_n$	$\gamma_m$	$\gamma_l$	$\gamma_r$	$\kappa_{lr}$	$\kappa_{mr}$
نما	0.48(1)	0.61(1)	0.61(1)	0.26(2)	0.47(3)	0.82(2)

جدول ۳: نماهای برای ابعاد فرکتالی مختلف ( $\gamma_{xy}$ )

	$\tau^{L \rightarrow \infty}$	$\tau_{2DBTW}$	$\tau_{lr}^{ising}$	$\tau_{mr}^{L \rightarrow \infty}$	$\gamma_{mr}^{2DBTW}$	$\gamma_{mr}^{2Dising}$
نما	1.32(1)	5/4	11/8	1.96(1)	2	1.85



شکل ۱-۴: تغییر نمای بحرانی طول حلقه‌ها بر حسب دما برای طول شبکه‌های مختلف

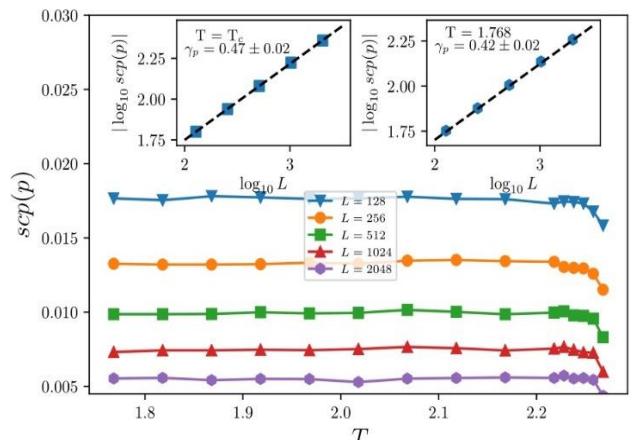


شکل ۲-۴: تغییر نمای بحرانی طول حلقه‌ها بر حسب دما برای طول شبکه‌های مختلف

### مراجع

همینه‌نی در بررسی احتمال تراوش بر حسب طول‌های مختلف رفتار توانی مشاهده می‌شود (شکل ۵) این رفتار توانی بر حسب طول برای دماهای مختلف دیده می‌شود، که برای دو دمای در شکل ۵ آمده است.

- [1] P.Bak,C.Tang, and K.Wiesenfeld, Phys.Rev.A38,364(1988).
- [2] D. Sornette, Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Self-organization and Disorder: Concepts and Tools (Springer Science & Business Media, Berlin, 2004).
- [3] M. De Menech and A. L. Stella, Phys. Rev. E 62, R45 (2000).
- [4] M. Najafi, M. Ghaedi, and S. Moghimi-Araghi, Physica A 445, 102 (2016).
- [5] S. Lübeck and K. D. Usadel, Phys. Rev. E 56, 5138 (1997).
- [6] M. Najafi, J. Stat. Mech.: Theor. Exp. 2015, P05009 (2015).



شکل ۵: احتمال تراوش برای دماهای مختلف و طول‌های مختلف شبکه

## دینامیک سه‌تایی موضعی تعمیم‌یافته در شبکه‌های اجتماعی

شجاعی، رعنا<sup>۱</sup>; منصور، پویا<sup>۱</sup>; منتخب، افшин<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>بخش فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

<sup>۲</sup>بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

### چکیده

نظریه‌ی توازن جهت مطالعه‌ی انسجام و پایداری یک شبکه‌ی اجتماعی مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از مهم‌ترین دینامیک‌ها برای تحول اجتماعی توسط آنتال و همکارانش معرفی شده است که بربایه‌ی کاهش تنش بین عناصر اجتماعی استوار است. این ایده می‌تواند همواره درست نباشد، بدین معنی که هر سه‌تایی از عناصر یک شبکه‌ی اجتماعی ممکن است تمایلی به تغییر رابطه‌هایشان در راستای کاهش تنش نداشته باشند. به منظور بررسی چگونگی تحول دقیق‌تر یک جامعه، ما دینامیک تصادفی جدیدی را معرفی می‌کنیم. با معرفی پارامتری که معیاری از طبیعت تصادفی رفتار افراد یک جامعه می‌باشد، علاوه بر کاهش تنش، احتمالی را برای افزایش تنش اضافه می‌کنیم. این دینامیک گذاری را به فاز حالت متوازن از حالت نامتوازن، با توجه به پارامتر نظم تعریف شده، از خود نشان می‌دهد. از سوی دیگر، میزان تعاملات مثبت در حالت متوازن نهایی وابستگی شدید به ارتباطات مثبت در حالت اولیه دارد.

## Generalized Local Triad Dynamics in Social Networks

Shojaei, Rana<sup>۱</sup>; Manshour, Pouya<sup>۱</sup>; Montakhab, Afshin<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>Department of Physics, College of Sciences, Persian Gulf University, Bushehr

<sup>۲</sup>Department of Physics, College of Sciences, Shiraz University, Shiraz

### Abstract

Balance theory has been used to study the solidarity and the stability of a social network. One of the most important dynamics for social evolution has been introduced by Antal and his collaborators, which is based on the reduction of the tension between social elements. This idea may not always be correct. That means, all triad of elements of a social network may not be willing to change their relationship to reduce the tension. In order to better investigate the evolution of a society, we introduce a new stochastic dynamics. In addition to the reduction of the tension, by introducing a parameter which represents the random nature of the individual's behavior of a social network, we add a probability for increasing tension, too. This dynamics, due to the introduced order parameter, demonstrates a transition into a balance state from an unbalanced one. On the other hand, the final positive interactions are strongly dependent on the initial positive interactions among the individuals.

PACS No.: ۸۹.۶۵.\_S, ۸۹.۷۵.Hc

است. بخش مهمی از کارهای انجام شده در حوزه نظریه‌ی توازن به

طراحی دینامیک‌هایی مربوط می‌شود که قادر باشد هرچه دقیق‌تر

رفتارهای انسانی را در تحول شبکه‌های اجتماعی به نمایش بگذارد

.[۲-۷]

### مقدمه

چگونگی تغییرات و کیفیت تحول روابط افراد در مواجهه با یکدیگر، به طور معمول، براساس کاهش تنش است [۱,۲]. اجتناب از آشتگی و نزاع یک امر کاملاً طبیعی در جوامع و روابط بین فردی

که می‌توان به عنوان عکس عامل بی‌نظمی سیستم (دما) در نظر گرفت.

### توصیف مدل

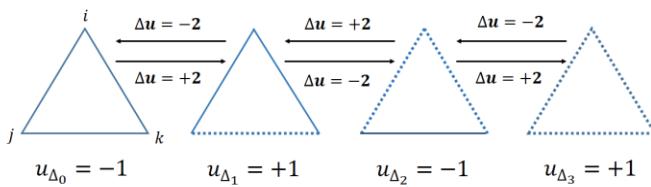
به منظور بررسی نحوه تحول جامعه، ما حالت یک شبکه اجتماعی کاملاً متصل را با استفاده از یک ماتریس متقارن  $S$  نمایش می‌دهیم. به طوری که  $S_{ij}$  نشان‌دهنده دوستی یا دشمنی بین دو گره  $i$  و  $j$  با مقدارهای  $\pm 1$  است؛ مقدار مثبت، دوستی و مقدار منفی، دشمنی بین دو گره را نمایش می‌دهد. این فرایند تحول شبکه را دینامیک سه‌تایی موضعی تعمیم‌یافته یا به اختصار GLTD<sup>۱</sup> نام‌گذاری می‌کنیم. در هر مرحله از بهروزرسانی این دینامیک، ابتدا یک مثلث به صورت تصادفی از شبکه و سپس یک یال تصادفی از آن مثلث انتخاب شده و علامت این یال انتخاب شده را با احتمال

$$P = \frac{1}{1 + \exp(-\beta \Delta u)}$$

تغییر می‌دهیم. توجه کنید  $\beta \equiv 1/\theta$  است که  $\theta$  دمای متناظر با شبکه و نشان‌دهنده تصادفی بودن برهمنکش‌ها و مقدار ناهنجاری‌های افراد آن جامعه می‌باشد و  $\Delta u$  تغییر انرژی یک مثلث ناشی از تغییر یک یال تصادفی از آن است. با استفاده از تعریف، انرژی هر مثلث به صورت

$$u = -\text{sign}(s_{ij} \times s_{jk} \times s_{ki})$$

می‌باشد.



شکل ۱: چهار پیکربندی متمایز از کوچکترین واحد یک شبکه؛ خطوط پر یال‌های دوستی و خط‌چین‌ها دشمنی را بین گره‌های  $i, j, k$  نشان می‌دهد. مثلث‌های با انرژی  $-1$  و  $+1$  به ترتیب متوازن و نامتوازن‌اند.

همچنان که شکل ۱ نشان می‌دهد، اگر  $\Delta_k$  مثلثی با  $k$  یال دشمنی در نظر گرفته شود با استفاده از تعریف انرژی، مثلث‌های  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  با

اولین دینامیک معرفی شده در این زمینه، به آنتال<sup>۲</sup> و همکارانش برمی‌گردد که در آن شبکه به حالت متوازن کلی (بهشت یا دوقطبی) یا حالت غیرمتوازن موضعی (حالت گیرکرده<sup>۳</sup>) ختم می‌شود [۲, ۹]. تاکنون بسیاری از جنبه‌های این نوع دینامیک مورد بررسی قرار گرفته است؛ از جمله دخالت دادن اثرات خاطره و حافظه به اطلاعات یال‌ها در دینامیک سه‌تایی واداشته (CTD)<sup>۴</sup> که منجر به حالات جدید شیشه‌ای<sup>۵</sup> در شبکه‌ها می‌شود [۸]. به عبارت دیگر، بسته به مقدار خاطره‌ی بین دو فرد، ممکن است تغییری در رابطه‌ی بین آن دو رخ ندهد. نکته‌ی دارای اهمیت در CTD این است که یک نفر ارتباطات خود را با سایرین براساس کاهش تنش کلی شبکه تغییر می‌دهد که این امر در واقعیت به ندرت رخ می‌دهد. برخلاف دید جهانی CTD نسبت به جامعه، در دینامیک سه‌تایی محلی (LTD)<sup>۶</sup>، تغییر روابط در راستای کاهش استرس در هر مثلث ارتباطی، فارغ از کاهش تنش کل سیستم است. در LTD مثلث‌های متوازن دست نخورده باقی می‌مانند و تنها سه‌تایی‌های نامتوازن بهروزرسانی می‌شوند. این دینامیک‌ها، شبکه را به سمت توازن سوق می‌دهند و بقای آن‌ها را در چنین موقعیتی تضمین می‌کنند [۲, ۳]. اما در واقعیت، رفتارها و ناهنجاری‌های اجتماعی برخی افراد از این هدف جلوگیری می‌کند. به این معنی که افراد ارتباطات خود را در تعیین و تغییر دوستی‌ها و دشمنی‌ها (به دلایلی هم‌چون نارضایتی، ناراحتی، عصبانیت و یا در حالت کلی ناهنجاری‌های اجتماعی) همیشه در جهت کاهش آشفتگی و تنش پیش نمی‌برند.

برای اثر دادن چنین حقیقتی در روند برهمکنش‌های میان عناصر اجتماعی، با درنظر گرفتن یک سه‌تایی به عنوان کوچکترین واحد از جامعه، دینامیکی را معرفی می‌کنیم که در آن در یک بهروزرسانی علاوه بر یک مثلث نامتوازن، امکان تغییر یک مثلث متوازن هم وجود دارد. در این مقاله ما این ناهنجاری‌ها و تخلف‌ها را با استفاده از پارامتر  $\beta$  ای که در این دینامیک معرفی خواهیم کرد نشان می‌دهیم

<sup>۱</sup> Glassy state

<sup>۲</sup> Local Triad Dynamics

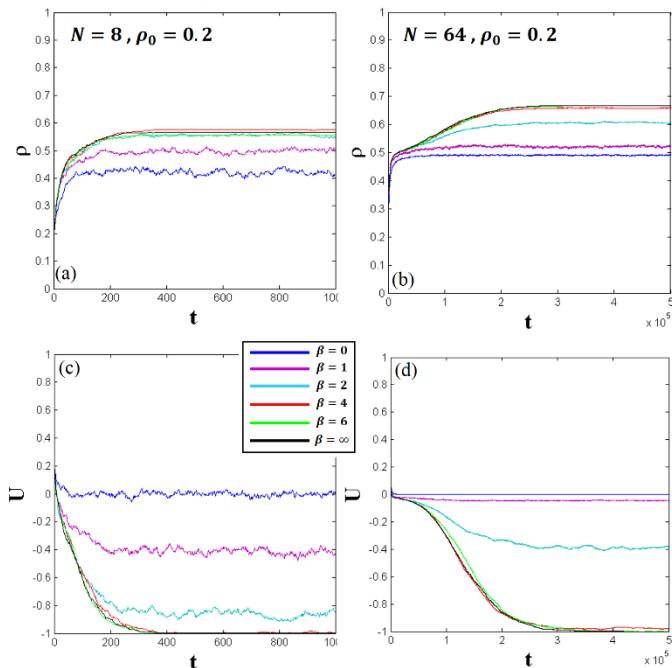
<sup>۳</sup> Generalized Local Triad Dynamics

<sup>۴</sup> Antal

<sup>۵</sup> Jammed state

<sup>۶</sup> Constrained Triad Dynamics

لازم به ذکر است که در اینجا هر بروزرسانی را یک واحد زمانی  $t$  در نظر گرفته‌ایم. بنابراین افزایش اندازه شبکه، افزایش زمان رسیدن به حالت توازن را به دنبال دارد. این واقعیت برای  $\beta \equiv \infty$  در شکل ۲ برای دو شبکه با اندازه‌های ۸ و ۶۴ گره ملاحظه می‌شود.



شکل ۲: تغییر انرژی شبکه و چگالی یال‌های مثبت در طول زمان برای دو شبکه با اندازه‌های ۸ (دو پنل سمت چپ) و ۶۴ (دو پنل سمت راست) گره.

شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که تنها در حالت  $\beta \equiv \infty$  یک شبکه اجتماعی همواره به توازن پایدار می‌رسد. با رشد مقدار ناهنجاری‌ها و به عبارت دیگر افزایش دمای شبکه، برهمکنش‌های تصادفی بین عامل‌ها ظاهر می‌شود. این نوعی ایجاد شده توسط یک  $\beta$  محدود می‌تواند شبکه را از حالت متوازن خارج کند. در واقع این نوعی مقدار احتمال را برای تبدیل مثلث نامتوازن به متوازن از مقدار یک کاهش و احتمال تبدیل نوع متوازن به یک سه‌تایی نامتوازن را از مقدار صفر افزایش می‌دهد. افزایش افت و خیز در منحنی‌های چگالی یال‌های دوستی و منحنی‌های انرژی در مقدارهای کمتر  $\beta$  ناشی از همین امر است. این رفتار برای  $N$  گره بزرگ‌تر نیز وجود دارد. با این حال در یک  $\beta$  ثابت، این افت و خیزها با افزایش اندازه شبکه کمتر شده و به مقدار میانگین خود نزدیک‌تر می‌گردند (شکل ۲).

<sup>۸</sup> Bipolarity

مقدار انرژی ۱- متوازن و مثلث‌های  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  با انرژی ۱+ نامتوازن تعریف می‌شوند. بر این اساس، کمیت  $U$  یا انرژی پتانسیل کل شبکه به صورت

$$U = \frac{1}{\binom{N}{3}} \sum s_{ij} \times s_{jk} \times s_{ki}$$

خواهد بود [۹]. به طوری که علامت جمع روی همه سه‌تایی‌های شبکه و  $\binom{N}{3}$  جهت بهنجار کردن مقدار انرژی حضور دارد.  $-1 = U$  حالتی را نمایش می‌دهد که در آن همه مثلث‌ها با انرژی ۱-، یک شبکه متوازن را شکل می‌دهند. چنین جامعه‌ای یا دارای یال‌های تماماً مثبت است (همه با هم دوست هستند؛ چنین وضعیتی بهشت<sup>۷</sup> نامیده می‌شود) و یا این‌که به دو قطب تقسیم شده که هر دسته دارای روابط مثبت داخلی و روابط بین گره‌های دو قطب متفاوت، از نوع دشمنی است (چنین حالتی دوقطبی<sup>۸</sup> نامیده می‌شود) [۲,۳]. ما GLTD را روی یک گراف کامل  $N$  گره‌ای با تعداد کل یال  $\binom{N}{2} = L$  و تعداد کل مثلث  $\binom{N}{3} = N_{\Delta}$  بررسی می‌کنیم. اگر  $L_+$  تعداد یال‌های مثبت یا دوستی باشد چگالی یال‌های دوستی به صورت  $\rho = \frac{L_+}{L}$  تعریف می‌شود.

## بحث و بررسی

براساس دینامیک GLTD و با توجه به اینکه در هر به-روزرسانی، تفاوت انرژی یک مثلث ناشی از تغییر علامت یک یال تصادفی از آن همواره برابر با  $\pm 2$  می‌باشد (شکل ۱)، احتمال  $P$  همواره دارای دو مقدار و مستقل از اندازه شبکه خواهد بود. نکته‌ی قابل توجه این است که اصل کاهش تنش در این دینامیک لحظه شده است؛ به این معنی که برای هر مقدار  $\beta$ ، احتمال تبدیل یک مثلث نامتوازن به نوع متوازن آن همواره بیشتر از تبدیل مثلث متوازن به نامتوازن است ( $P_{B \rightarrow U} \leq P_{U \rightarrow B}$ ).

وقتی  $\theta = 0$ ، هیچ برهم‌کش و ناهنجاری‌های اجتماعی بین بازیگران یک شبکه وجود ندارد. در این حالت احتمال  $P$  تنها برای تبدیل سه‌تایی‌های نامتوازن به نوع متوازن مجاز و برابر مقدار یک است و در طول فرایند تحول، مثلث‌های  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  در بروزرسانی‌ها بدون تغییر باقی می‌مانند.

<sup>۷</sup> Paradise

حالات نهایی دارای مقدار (تصادفی) نیم خواهد بود که نشان از درهم ریختگی یالهای کل شبکه به صورت کاملاً تصادفی می‌باشد.

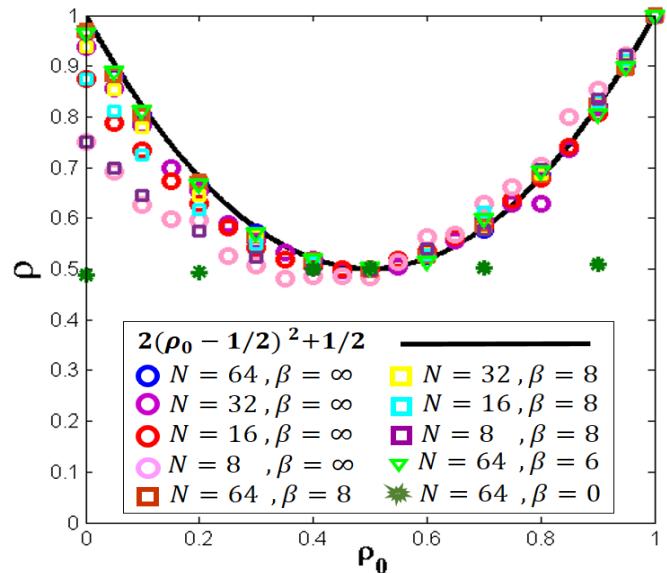
### نتیجه‌گیری

اعضای یک شبکه‌ی اجتماعی با هم در ارتباط هستند و این روابط ممکن است با هم هماهنگ یا متناقض باشند. اما تغییر روابط افراد همواره در راستای کاهش تنش و استرس نیست. با مطالعه‌ی GLTD تحول یک شبکه‌ی اجتماعی از طریق معرفی دینامیک جدید و درنظرگرفتن پارامتر نظم  $\beta$  که همزمان کاهش تنش و همچنین تمایل افراد به افزایش آن را اعمال می‌کند، نشان دادیم که حالت نهایی متوازن شبکه برای مقادیر بزرگ پارامتر نظم، به چگالی یالهای دوستی اولیه به صورت تابعی درجه دو وابسته می‌شود. حالت نهایی شبکه برای محدوده‌ی  $\beta$  هایی که توازن دست‌یافتنی است همواره حالت دوقطبی خواهد بود و تنها در حالت  $\beta \rightarrow \infty$ ، یک چنین وضعیتی تا ابد پایدار است. همچنین حضور  $\beta$  در زمان‌های رسیدن به حالت توازن تغییری ایجاد نمی‌کند. در مقادیر پارامتر نظم بسیار کوچک، روابط و برهم‌کنش بین عناصر کاملاً تصادفی خواهد بود و حالت توازن هرگز حاصل نمی‌شود. در حقیقت ما از این دینامیک به عنوان کاربردی از نظریه‌ی توازن اجتماعی جهت بررسی تمایل یک شبکه اجتماعی در طول آشفتگی به بازگشت به حالت توازن استفاده کردیم.

### مرجع‌ها

- [۱] Cartwright, D. and Harary, F., ۱۹۵۶. Structural balance: a generalization of Heider's theory. *Psychological review*, ۶۳(۵), p.۲۷۷.
- [۲] Antal, T., Krapivsky, P.L. and Redner, S., ۲۰۰۰. Dynamics of social balance on networks. *Physical Review E*, ۷۲(۲), p.۰۳۶۱۲۱.
- [۳] Antal, T., Krapivsky, P.L. and Redner, S., ۲۰۰۶. Social balance on networks: The dynamics of friendship and enmity. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, ۲۲۴(۱), pp.۱۳۰-۱۳۶.
- [۴] Marvel, S.A., Kleinberg, J., Kleinberg, R.D. and Strogatz, S.H., ۲۰۱۱. Continuous-time model of structural balance. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, ۱۰۸(۵), pp.۱۷۷۱-۱۷۷۶.
- [۵] Traag, V.A., Van Dooren, P. and De Leenheer, P., ۲۰۱۳. Dynamical models explaining social balance and evolution of cooperation. *PloS one*, ۴(۴), p.e۶۰۰۶۳.
- [۶] ۲۰. Kułakowski, K., Gąwoński, P. and Gronek, P., ۲۰۰۰. The Heider balance: A continuous approach. *Intl J. Modern Physics C*, ۱۱(۰۵), ۷۰۷.
- [۷] Radicchi, F., Vilone, D., Yoon, S. and Meyer-Ortmanns, H., ۲۰۰۷. Social balance as a satisfiability problem of computer science. *Physical Review E*, ۷۵(۱), p.۰۲۶۱۰۷.
- [۸] Hassanibesheli, F., et al., ۲۰۱۷. Glassy States of Aging Social Networks. *Entropy*, 19(۶), p.۲۴۶.
- [۹] Marvel, S.A., Strogatz, S.H. and Kleinberg, J.M., ۲۰۰۹. Energy landscape of social balance. *Physical review letters*, 103(19), p.198701.

دمای متناظر با  $\beta = 0$  احتمال  $P$  را به مقدار  $1/2$  تبدیل می‌کند و در اندازه‌های بزرگ شبکه، انرژی و چگالی یالهای دوستی به ترتیب به مقادیرهای صفر و نیم نزدیک می‌شوند. در این حالت تمامی برهم-کنش‌ها کاملاً تصادفی است و حالت توازن هرگز حاصل نمی‌شود. در محدوده‌ی  $\beta$  هایی که حالت توازن برای یک شبکه دست‌یافتنی است (به عبارت دیگر، اگر یک شبکه با آغاز فرایند تحول از طریق دینامیک، به مقدار انرژی  $-1$  برسد)، طیف چگالی یالهای دوستی در حالت نهایی به صورت یک تابع درجه دو از چگالی یالهای دوستی اولیه است و مطابق شکل ۳ همچنان که اندازه  $N$  افزایش می‌یابد چگالی یالهای دوستی نهایی به  $\rho = 2(\rho_0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$  نزدیک می‌شود. در یک چنین حالت متوازنی، همواره یک جامعه دوقطبی خواهیم داشت مگر به ازای  $\rho_0 = 0$  که حالت نهایی بهشت است. چگالی یالهای دوستی در یک چنین شبکه‌ای برابر یک می‌باشد؛ موقعیتی که در آن تمام یال‌ها از نوع دوستی خواهد بود که البته در واقعیت کمتر اتفاق خواهد افتاد.



شکل ۳: وابستگی دینامیکی حالت نهایی شبکه به چگالی یالهای مثبت اولیه؛ برای هر چگالی اولیه  $\rho_0$ ، چگالی یالهای دوستی شبکه در حالت توازن نقطه‌ای از منحنی بالا خواهد بود.

در واقع برای مقادیر بزرگ  $\beta$  حالت توازن دوقطبی برای محدوده‌ی وسیعی از مقادیر اولیه‌ی  $\rho_0$  رخ می‌دهد. از سوی دیگر، برای مقادیر کوچک  $\beta$ ، به یک حالت کاملاً تصادفی برای وضعیت نهایی یک شبکه خواهیم رسید و چگالی یالهای دوستی شبکه در

## قوانين تجربی اموری و گوتنبرگ-ریشر در شراره‌های خورشید

رمضان پور، زهرا<sup>۱</sup>؛ لطفی، نسترن<sup>۲</sup>؛ درونه، امیرحسین<sup>۳</sup>؛ صفری، حسین<sup>۴</sup>

<sup>۱,۲,۳,۴</sup>دانشکده فیزیک دانشگاه زنجان، زنجان

### چکیده

پژوهش‌های بسیاری در مورد زمین‌لرزه‌ها توسط پژوهشگران سامانه‌های پیچیده انجام شده است. از جمله نتایج این پژوهش‌ها می‌توان به قوانین تجربی اموری و گوتنبرگ-ریشر اشاره نمود. از این قوانین برای پیش‌بینی احتمال وقوع لزلزله‌ها در آینده استفاده می‌شوند. شراره‌های خورشید را مانند زمین‌لرزه‌ها می‌توان یک سامانه پیچیده در نظر گرفت. ما در این مقاله با همانند گرفتن پایه شراره‌های خورشید با زمین‌لرزه‌ها، نشان می‌دهیم که قوانین تجربی اموری و گوتنبرگ-ریشر برای شراره‌های خورشید نیز صادق است.

## Omori and Gutenberg-Richter empirical laws in the solar flares.

Ramezanpour, Zahra<sup>۱</sup>; Lotfi, Nastaran<sup>۱</sup>; Darooneh, Amir Hossein<sup>۳</sup>; Safari, Hossein<sup>۴</sup>

<sup>۱,۲,۳,۴</sup>Department of Physics, University of Zanjan, Zanjan

### Abstract

Many research has been done about earthquakes by complex network researchers'. Among the results of these research, the Omori and Gutenberg-Richter laws could be named. These rules are used to predict the possibility of occurrence of earthquakes in future. The flares of the sun, like earthquakes of the earth, can be considered as a complex system. In this paper, we show the similarity of the flares of the sun with earthquakes, which are also empirical laws of the Omori and Gutenberg-Richter for the flares of the sun.

PACS No. ۹۷, ۷۰.qe, ۱۹, ۷۰.Da, ۹۱, ۳۰.Px

گرما تبدیل می‌شود و با آزاد شدن مقدار زیادی انرژی در فضای میان سیاره‌ای می‌توانند تأثیرات قابل ملاحظه‌ای بر تکنولوژی وابسته به الکترونیک از جمله مخابرات، شبکه برق قدرت و غیره بگذارند. به همین دلیل پیش‌بینی رویداد شراره‌ها برای انسان‌ها بسیار مهم است [۴].

### قانون اموری

قانون اموری<sup>۱</sup> به عنوان یکی از قانون‌های تجربی در لرزه‌شناسی به صورت گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. این قانون نشان می‌دهد که تعداد پس‌لرزه‌ها روند کاهش با زمان دارند [۱].

$$n(t) = \frac{k}{t+c} \quad (1)$$

### مقدمه

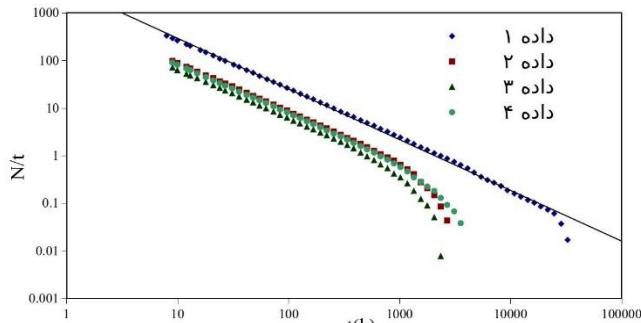
اغلب سامانه‌های طبیعی در رده‌ی سامانه‌های پیچیده دسته‌بندی می‌شوند. سامانه‌های پیچیده می‌توانند همه یا بخشی از ویژگی‌های: ناهمگونی، رفتار برآمدی، خود سازماندهی، بازخورد، سازگاری، ارتباط با پیرامون و رفتارهای تصادفی را داشته باشند. زمین‌لرزه‌ها مثالی از سامانه‌های پیچیده هستند که مطالعات بسیاری روی آن‌ها انجام شده است. قوانین تجربی اموری و گوتنبرگ-ریشر از دست-آوردهای این مطالعات هستند [۱ و ۲].

شاره‌های خورشید که درخشش ناگهانی در تاج خورشید هستند با سازوکارهای ناشناخته مرتبط با میدان مغناطیسی بوجود می‌آیند و رفتارهای پیچیده از خود نشان می‌دهند [۳]. این پدیده‌ها زمانی بوجود می‌آیند که میزان زیادی انرژی به صورت ناگهانی به نور و

می شود [۷]. به عنوان مثال شراره های گروه A به  $A^1$  تا  $A^9$  تقسیم بندی می شوند که انرژی شراره  $A^2$  دو برابر انرژی شراره  $A^1$  و انرژی شراره  $A^3$  دو برابر انرژی شراره  $A^1$  است.

### نتایج

کل داده های مربوط به شراره های خورشید در بازه زمانی که در بالا بدان اشاره شد ۱۵۳۹۴ رویداد می باشد. در این مطالعه شراره خورشید با انرژی بالا را به عنوان شراره اصلی و شراره هایی که پس از این شراره اتفاق می افتد را به عنوان پس شراره در نظر گرفتیم. قانون اموری را برای چهار شراره بزرگ مورد مطالعه قرار دادیم که در این مطالعه داده اول شامل ۲۵۹۰ رویداد با شراره اصلی X9 و داده دوم شامل ۸۷۶ رویداد با شراره اصلی X5/4 و داده سوم شامل ۶۳۱ رویداد با شراره اصلی X1/4 و داده چهارم شامل ۸۰۹ رویداد با شراره اصلی X1/7 می باشد. شکل ۱ نمودار مربوط به بررسی قانون اموری برای داده های مورد بررسی ما هستند. همان طور که در شکل مشخص است فراوانی پس شراره ها با گذشت زمان به صورت توانی کاهش می یابند. در واقع شکل ۱ ادعای ما را که می گوییم قانون اموری برای شراره های خورشید صادق است، را به روشنی به تصویر می کشید.



شکل ۱: فراوانی پس شراره ها بر حسب زمان برای چهار دسته از داده ها. خط مشکی، خط برآش شده به این نمودارها می باشد که شبیه آن  $1/t^{0.6}$  است. لازم به ذکر است که برای داده های ۲ و ۳ و ۴ شراره های اصلی آن ها بزرگی تقریبا مشابهی دارند، در حالی که داده ۱ نمودار مربوط به شراره هایی است که شراره اصلی آن ها دارای بزرگترین شدت در کل بازه زمانی در نظر گرفته شده، می باشد.

در رابطه بالا  $k$  و  $c$  اعداد ثابت و مثبت هستند و  $n(t)$  فراوانی پس لرزه ها است.

اوتسو<sup>۲</sup> (۱۹۵۷م.) دریافت که کاهش فراوانی پس لرزه ها از آنچه که اموری انتظارش را داشت اندکی بیشتر است [۵]. رابطه زیر به قانون اموری-اوتسو معروف است.

$$n(t) = \frac{k}{(t+c)^p} \quad (2)$$

مقدار کمیت  $p$  بسته به موقعیت جغرافیایی و بزرگی زمین لرزه اصلی می تواند متفاوت باشد.

### قانون گوتنبرگ-ریشر

رابطه بین تعداد زمین لرزه ها و بزرگی آن ها اولین بار توسط گوتنبرگ<sup>۳</sup> و ریشر<sup>۴</sup> بیان شد [۲].

$$N \sim 10^{a-bM} \quad (3)$$

رابطه بالا قانون گوتنبرگ-ریشر نامیده می شود.  $a$  و  $b$  مقادیر ثابت هستند و  $N$  تعداد زمین لرزه های بزرگتر از شدت  $M$  است. اگر رابطه بالا به صورت لگاریتمی بیان شود  $b$  شبیه نمودار  $\log N$  بر حسب  $M$  می باشد. هدف اصلی اکثر مطالعات برای بررسی قانون گوتنبرگ-ریشر بدست آوردن پارامتر  $b$  می باشد، زیرا بررسی تغییرات  $b$  برای پیش بینی رخدادهای بزرگ در آینده مؤثر است [۶].

### گردآوری داده ها

ما در این مقاله ابتدا داده های مربوط به شراره های خورشید را از تاریخ ۲۰۰۶/۱۰/۲۰ تا ۲۰۱۷/۳/۳۱ از سایت زیر دریافت کردیم:

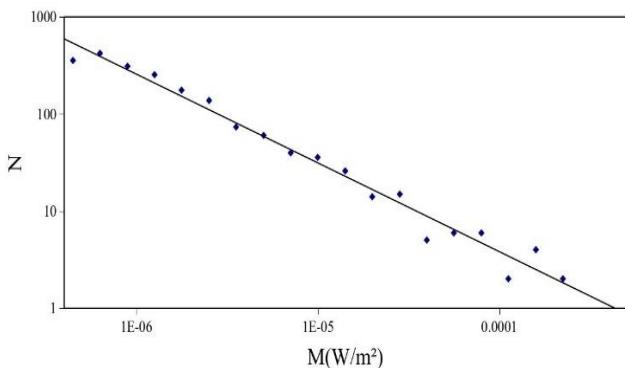
[https://hinode.isee.nagayau.ac.jp/flare\\_catalogue](https://hinode.isee.nagayau.ac.jp/flare_catalogue)

این داده ها شامل اطلاعاتی نظری زمان وقوع شراره های خورشید، تعداد شراره های خورشید به صورت روزانه، مکان وقوع آن ها و همچنین نوع شراره ها می باشد. شراره های خورشید با توجه به انرژی که آزاد می کنند به انواع A, B, C, M, X دسته بندی می شوند که در دسته بندی بالا انرژی شراره ها به ترتیب از چپ به راست افزایش می یابد و هر کدام از انواع این شراره ها به ۹ زیر گروه تقسیم بندی می شوند که انرژی این زیر گروه ها از ۱ تا ۹ به ترتیب دو برابر

Richter<sup>۴</sup>

Utsu<sup>۲</sup>

Gutenberg<sup>۳</sup>



شکل ۱: تعداد شراره‌ها بر حسب شدت آن‌ها برای شراره‌های بزرگ‌تر از شدت  $4.5 \times 10^{-7}$  وات بر مترمربع. خط مشکی، خط برآذش نمودار است که شب آن ۰/۹۱ است.

### نتیجه‌گیری

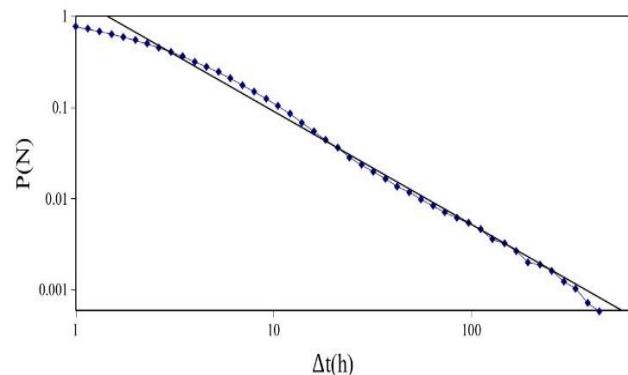
در این پژوهش قوانین تجربی اموری و گوتنبرگ-ریشر را برای شراره‌های خورشید مورد بررسی قرار دادیم. با توجه به پژوهش‌های انجام شده در این مقاله ما مشاهده کردیم که قوانین اموری و گوتنبرگ-ریشر برای شراره‌های خورشید صادق هستند.

### مرجع‌ها

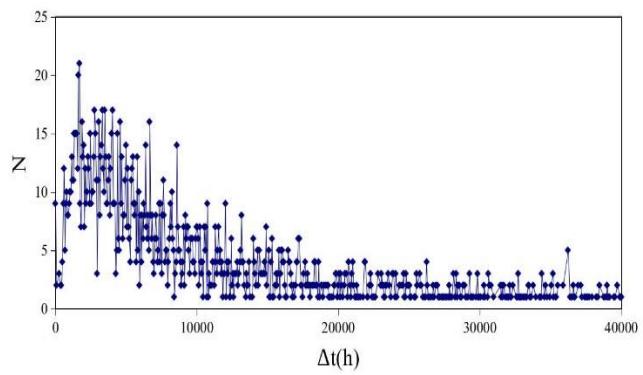
- [۱] Omori, Fusakichi. "On the after-shocks of earthquakes." Vol. v. *The University*. (۱۸۹۴) ۱۱۷.
- [۲] Gutenberg, Beno, and Charles Francis Richter. "Seismicity of the Earth." *Geol Soc, Am. Bull.* (۱۹۴۱) ۳۴.
- [۳] Gheibi, Akbar, Hossein Safari, and Mohsen Javaherian. "The Solar Flare Complex Network." *The Astrophysical Journal* ۸۴۷. (۲۰۱۷) ۴.
- [۴] Ahmed, Omar W., et al. "Solar flare prediction using advanced feature extraction, machine learning, and feature selection." *Solar Physics* ۲۸۳.۱ (۲۰۱۳): ۱۵۷-۱۷۵.
- [۵] Utsu, T. "A statistical study on the occurrence of aftershocks." *Geophysical Magazine* ۳۰. (۱۹۶۱) ۵۲۱-۶۰۰.
- [۶] رضائی، صغیری؛ «ساختار شبکه‌ای زمین‌لرزه‌های ایران»، دانشگاه زنجان، سال ۱۳۹۵، صفحه ۲۴.
- [۷] Schrijver, Carolus J., and George L. Siscoe, eds. "Heliosphere: Space Storms and Radiation: Causes and Effects." Cambridge University Press. (۲۰۱۰) ۳۷۵.

ماتابع توزیع اختلاف زمانی برای رخداد شراره‌های پشت سر هم در کل بازه زمانی بعد از وقوع یک شراره اصلی را رسم کردیم و مطابق شکل ۲ مشاهده نمودیم که به صورت توانی کاهش می‌یابد. شکل ۳ تعداد پس‌شراره‌ها بعد از شراره اصلی بر حسب اختلاف زمانی برای داده ۱ را نشان می‌دهد.

به‌منظور بررسی قانون گوتنبرگ-ریشر یک آستانه شدت برای شراره‌ها درنظر گرفتیم. یعنی، برای شراره‌های بزرگ‌تر از شدت  $7.4/5 \times 10^{-7}$  وات بر مترمربع، نمودار تعداد شراره‌ها را مطابق شکل ۴ بر حسب شدت آن‌ها رسم کردیم و همانطور که در شکل مشاهده می‌شود نمودار تعداد شراره‌ها بر حسب شدت از قانون توانی پیروی می‌کند.



شکل ۲: توزیع شراره‌ها بر حسب اختلاف زمانی. خط مشکی خط برآذش به نمودار می‌باشد که شب آن ۱/۲ است.



شکل ۳: تعداد پس‌شراره‌ها بعد از شراره اصلی برای داده ۱.

## بررسی آنتروپی خطی و آمار کوانتومی حالت‌های همدوس درهم تنبیه دو مده

میرزاei، سودا<sup>۱</sup>; نجارباشی، قادر<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، شهر جدید سهند، تبریز

<sup>۲</sup>دانشکده علوم پایه، دانشگاه محقق اردبیلی، خیابان دانشگاه، اردبیل

### چکیده

در این مقاله ابتدا به تولید حالات همدوس درهم تنبیه دو مده با استفاده از شکافنده باریکه پرداخته و درهم تنبیه‌گی این حالات را با استفاده از سنجه آنتروپی خطی برآورده ایم. در ادامه بمنظور مطالعه آمار کوانتومی این حالات از پارامتر متال استفاده می‌نماییم و نشان می‌دهیم که حالات همدوس درهم تنبیه دو مده به ازای مقادیر مختلف شدت میدان و پارامترهای سیستم می‌توانند بر توزیع پواسونی، زیر پواسونی و فراپواسونی دلالت کنند.

## Investigation of Linear Entropy and Quantum Statistics of Two-mode Entangled Coherent States

Mirzaei, Sevda<sup>1</sup>; Najarbashi, Ghader<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Faculty of Sciences, Sahand University of Technology, Sahand New Town, Tabriz

<sup>2</sup> Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

### Abstract

In this paper, we first manipulate two-mode entangled coherent state using beam splitter and then evaluate the amount of entanglement by linear entropy measure. In the following, we use Mandel parameter for studying quantum statistics of these states and show that two-mode entangled coherent states imply Poissonian, sub-Poissonian and super-Poissonian distribution for different values of intensity of field and the parameters of the system.

PACS No. 42

اطلاعات کوانتومی نظریه مخابرہ کوانتومی، کدگزاری کوانتومی و

مقدمه

موارد دیگر ایفا می‌کند [۲و۳]. در میان حالات مختلف درهمتینده،

درهمتیندگی کوانتومی یکی از مشخصه‌های جالب مکانیک

حالات همدوس درهمتینده بعلت کاربرد فراوانش در اپتیک

کوانتومی است که نخستین بار در سال ۱۹۳۵ بعد از ارائه مقاله

کوانتومی توجه زیادی را به خود جلب نموده است [۴و۵و۶]. در

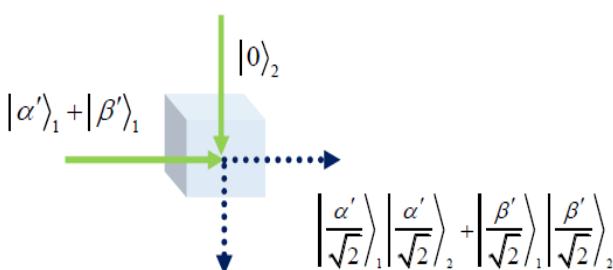
پارادوکس EPR اثیشتن، پودولسکی و روزن مطرح شد [۱].

این مقاله می‌خواهیم خواص آماری حالت همدوس درهمتینده دو

حالات درهمتینده نقش بر جستهای را در زمینه‌های مختلف نظریه

استفاده از شکافنده باریکه می‌باشد<sup>[۸]</sup>. هرگاه برهمنی از حالت های همدوس به شکل  $|\alpha\rangle + |\beta\rangle$  و حالت خلا را به ترتیب به عنوان ورودی درگاه ۱ و ۲ شکافنده باریکه درنظر بگیریم (شکل ۱) حالت خروجی بصورت زیر خواهد بود

$$|\psi\rangle = \left| \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 + \left| \frac{\beta'}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\beta'}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \quad (5)$$



شکل ۱: تولید حالت همدوس درهمتندیه دو مده با استفاده از شکافنده باریکه برای راحتی، حالت تولید شده را به صورت کلیتر زیر بازنویسی میکنیم

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|\alpha\rangle_1 |\alpha\rangle_2 + v |\beta\rangle_1 |\beta\rangle_2) \quad (6)$$

که  $M = 1 + v^2 + 2v p^2$  ضریب بهنجارش بوده و  $v$  اعداد حقیقی درنظر گرفته میشود. می توان نشان داد حالت  $(6)$ ، یک حالت درهمتندیه میباشد. برای این منظور از این حقیقت که حالات همدوس  $|\alpha\rangle$  و  $|\beta\rangle$  مستقل خطی هستند و یک زیرفضای هیلبرت دو بعدی را جاروب میکنند، استفاده خواهیم نمود. پایهای متعامد  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  بصورت زیر تعریف می شوند<sup>[۶]</sup>

$$|0\rangle = |\alpha\rangle, \quad |1\rangle = \frac{|\beta\rangle - p|\alpha\rangle}{N}, \quad (7)$$

به طوریکه  $N^2 = 1 - p^2$ . از حالت  $(6)$  میتوان عملگر چگالی

مده را با استفاده از پارامتر مندل بررسی نموده و با محاسبه درهم- تندیگی حالت مذبور با استفاده از سنجه آنتروپی خطی، این دو رفتار را با هم مقایسه کنیم.

### درهمتندگی

یک حالت کوانتومی خالص متشکل از دو یا چند زیرسیستم را در همتندیه گویند هرگاه نتوان آن را بصورت ضرب تانسوری حالت مربوط به زیرسیستم های تشکیل دهنده نوشت. سنجه های مختلفی برای اندازه گیری درهمتندگی وجود دارد در این مقاله از سنجه آنتروپی خطی استفاده خواهیم نمود که برای یک حالت کوانتومی

$$N \text{ اسپینی بصورت زیر تعریف میشود} \\ S_L^{(A_n, B_{N-n})} = \frac{d}{d-1} (1 - \text{Tr}_{A_n} [\rho_{A_n}]^2) \quad (1)$$

بطوریکه  $d = \min\{2^n, 2^{N-n}\}$  و  $\rho_{A_n} = \text{Tr}_{B_{N-n}}[\rho]$  داریم که  $A_n$  و  $B_{N-n}$  یک تقسیم از حالت سیستم  $\rho$  میباشد.

### حالت همدوس

حالات همدوس یا به اصطلاح حالت های گلوبر که ابتدا توسط شرودینگر معرفی شد<sup>[۷]</sup> حالاتی هستند که در کمینه مقدار رابطه عدم قطعیت صدق میکنند و بصورت ویژه حالات عملگر نابودی توصیف میشوند

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2)$$

بطوریکه  $|\alpha\rangle$  یک حالت همدوس و  $\hat{a}$  عملگر نابودی است. یک حالت همدوس را میتوان بر حسب حالت های شمارنده، به این صورت نوشت

$$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3)$$

همپوشانی حالات همدوس نیز به صورت

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^* \beta)}, \quad (4)$$

میباشد که مقداری غیر صفر است یعنی دو حالت همدوس متعامد نیستند. یکی از روشهای تولید حالت های درهم- تندیه همدوس

$0 \leq p < 1$  بیشنه مقدار خود ( $S_L = 1$ ) را دارد. بعلاوه با

افزایش  $p$  یعنی میزان همپوشانی حالات  $|\alpha\rangle$  و  $|\beta\rangle$  درهم

تنیدگی کاهش یافته و در حد  $p$  به سمت یک، به صفر میل میکند.

### خواص آماری حالات همدوس درهم تینیده

به منظور بررسی آمار کوانتومی از پارامتر مندل استفاده خواهیم

نمود. پارامتر مندل برای میدانهای تابشی تک مد بصورت زیر

تعريف میشود [۶]

$$Q = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle} - 1 \quad (11)$$

بطوریکه  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  عملگر شمارنده میباشد. حالت

منتظر با توزیع پواسونی،  $-1 \leq Q < 0$  توزیع زیرپواسونی و

$-Q > 0$  متناظر با توزیع فراپواسونی برای فوتونهای میدان می-

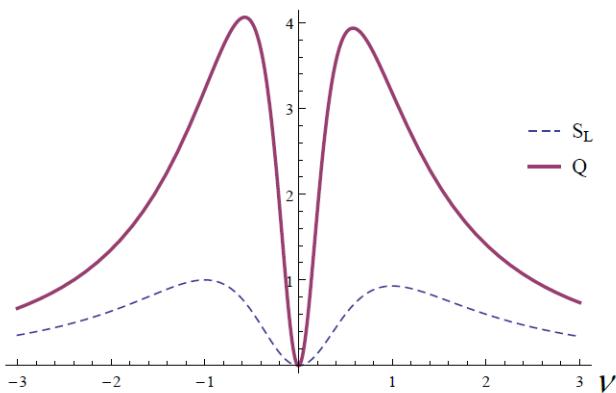
باشد. توجه داریم که آمار زیر پواسونی یکی از ویژگیهای

غیرکلاسیکی حالات میباشد. حالت درهمتینیده (۶) را در نظر

بگیرید با کمی محاسبات می توان پارامتر مندل را محاسبه نمود. در

نمودارهای شکل (۳) و (۴) رفتار پارامتر  $Q$  و آنتروپی خطی

بصورت تابعی از  $v$  رسم شده است.



شکل ۳: نمودار پارامتر مندل  $Q$  بصورت تابعی از  $v$  به ازای  $\alpha = 1$  و

$$\beta = 3$$

نمودار ۳ و ۴ نشان میدهد به ازای تمام مقادیر  $v > 0$  پارامتر

مندل مثبت بوده و این یعنی حالت همدوس درهمتینیده، معادله (۶)

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  را محاسبه نمود، آنگاه عملگر چگالی کاهش یافته عبارت است از

$$\rho_1 = \frac{1}{M} (|\alpha\rangle_1\langle\alpha| + vp|\alpha\rangle_1\langle\beta| + vp|\beta\rangle_1\langle\alpha| + v^2|\beta\rangle_1\langle\beta|) \quad (8)$$

با جایگذاری پایههای  $|\alpha\rangle$  و  $|\beta\rangle$  در رابطه فوق، ماتریس چگالی کاهش یافته بصورت زیر بدست میآید

$$\rho_1 = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} 1 + 2vp^2 + v^2p^2 & vp\sqrt{1-p^2}(1+v) \\ vp\sqrt{1-p^2}(1+v) & v^2(1-p^2) \end{pmatrix} \quad (9)$$

میتران از معاله (۱) آنتروپی خطی را بدست آورد

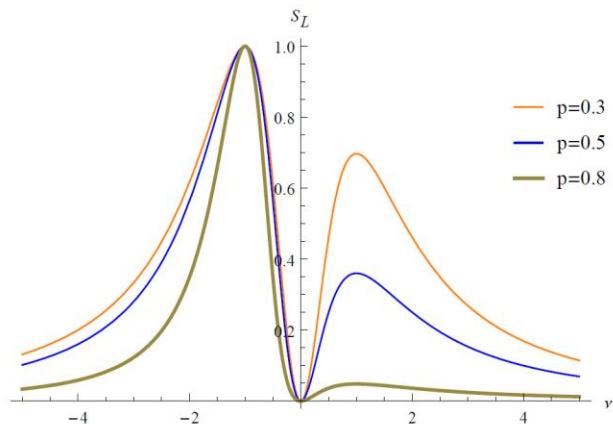
$$S_L = \frac{4v^2(1-p^2)^2}{(1+v^2+2vp^2)^2} \quad (10)$$

ملاحظه میشود که به ازای  $p = 0$  و  $v = \pm 1$ ،  $S_L = 1$  یعنی

آنتروپی خطی بیشینه مقدار خود را دارد. توجه داریم این زمانی ممکن است که  $|\alpha\rangle$  و  $|\beta\rangle$  متعامد باشند یعنی حالت  $|\psi\rangle$  یک

حالت بل مانند نظیر  $(|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$  باشد. در شکل زیر

رفتار آنتروپی خطی بصورت تابعی از  $v$  برحسب مقادیر  $p=0.3$ ،  $p=0.5$  و  $p=0.8$  نمایش داده شده است.



شکل ۲: نمودار آنتروپی خطی  $S_L$  بصورت تابعی از  $v$

نمودار نشان میدهد که تنها نقطه جداپذیر به ازای  $v = 0$  می-

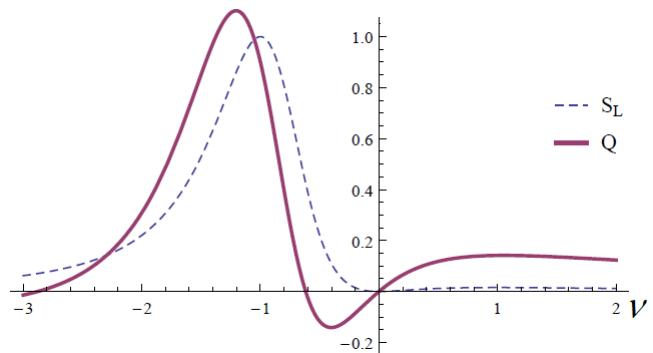
باشد و آنتروپی خطی به ازای  $v = -1$  و تمامی مقادیر

در همین‌نیده دو مده از توزیع فراپواسونی پیروی می‌کند. به ازای  $\nu = 0$  آنتروپی خطی و پارامتر مندل صفر می‌باشد و این نتیجه کاملاً معقول است چون به ازای  $\nu = 0$  یک حالت جدایزیر داریم و میدانیم که حالات همدوس از توزیع پواسونی پیروی می‌کنند. از طرفی به ازای  $\nu < 0$  توزیع آماری حالات همدوس درهم نماید میتواند زیرپواسونی و یا فراپواسونی باشد.

از توزیع فراپواسونی پیروی می‌کند. همچنین ملاحظه می‌شود که به ازای  $\nu > 0$  بسته به مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  پارامتر مندل میتواند مقادیر مثبت و یا منفی به خود بگیرد و این دلالت بر آمار زیر پواسونی و فراپواسونی دارد. از طرفی هر دو نمودار (۳) و (۴) نشان میدهد به ازای  $\nu = 0$  آنتروپی خطی و پارامتر مندل صفر می‌باشد و این نتیجه کاملاً معقول است چون به ازای  $\nu = 0$  حالت (۶) یک حالت جدایزیر می‌باشد و می‌دانیم که حالات همدوس از توزیع پواسونی پیروی می‌کنند.

## مرجع‌ها

- [1] A. Einstein; B. Podolsky and N. Rosen; "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?" *Phys. Rev. Lett.* **47** (1935).
- [2] C. H. Bennett et al; "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels"; *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993).
- [3] C. H. Bennett and Wiesner S J; "Communication via one and two particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states" *Phys. Rev. Lett.* **69** (1991).
- [4] B. C. Sanders, "Entangled coherent states", *Phys. Rev. A*, Vol. **45**, No. 9 (1992).
- [5] X. Wang, B. C. Sanders, "Multipartite entangled coherent states", *Phys. Rev. A*, Vol. **65**, 012303 (2001).
- [6] X. Wang, "Bipartite entangled non-orthogonal states", *J. Phys. A, Math. Gen.* **35** (2002) 165-173
- [7] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik", *Naturwissenschaften*, **14** (1926) 664.
- [8] G. Najarbashi, S. Mirzaei, "Entanglement of Multi-qudit States Constructed by Linearly Independent Coherent States: Balanced Case" *International Journal of Theoretical Physics*, **54** (2016) 1336-1353.
- [9] L. Mandel, *Opt. Lett.* **4** (1979) 205.



شکل ۴: نمودار پارامتر مندل  $Q$  بصورت تابعی از  $\nu$  به ازای  $\alpha = 2$  و  $\beta = 1.5$

## نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا یک طرح تجربی برای تولید حالت همدوس در همین‌نیده دو مده با استفاده از شکافنده باریکه ارائه دادیم و درهم تبیین گی چنین حالتی را با استفاده از سنجه آنتروپی خطی محاسبه نمودیم و دیدیم که تنها نقطه جدایزیر ممکن بازی  $\nu = 0$  می‌باشد و زمانیکه  $\nu = -1$  باشد حالت همدوس در همین‌نیده بیشترین مقدار در همین‌نیدگی را خواهد داشت و هرگاه  $\mu = 1$  با افزایش مقدار  $p$  یعنی میزان همپوشانی حالات  $|\alpha\rangle$  و  $|\beta\rangle$  در همین‌نیدگی کاهش می‌باید و به صفر میل می‌کند. از طرف دیگر به منظور مطالعه آمار کوانتمی حالت همدوس در همین‌نیده دو مده از پارامتر مندل استفاده نمودیم و ملاحظه کردیم که به ازای تمام مقادیر  $\nu > 0$  پارامتر مندل مثبت بوده و این یعنی حالت همدوس

## طراحی و کنترل یک ترانزیستور مولکولی DNA

بهنیا، سهراب؛ فتحی زاده، سمیرا

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

### چکیده

الکترونیک مولکولی عملگرهای الکترونیکی متفاوتی را ارائه می‌دهد که باید آنها در فناوری متابول مشکل است. در این کار، یک ترانزیستور مولکولی بر مبنای مولکول های DNA طراحی و کنترل می‌شود. بدین منظور، یک ابزار الکترونیکی سه پایه خلق می‌شود که دو پایه آن الکترودهای فلزی هستند که به یک اختلاف پتانسیل متصل اند و پایه سوم، زنجیره DNA متصل به ولتاژ گیت است. از طریق مطالعه آماری توزیع ترازهای نزدیک ترین همسایگی که یکی از ابزارهای آشوب کوانتومی است، خواص انتقال سیستم بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که کنترل انتقال الکترونیکی می‌تواند از طریق تنظیم پارامترهای حمام گرمایی که برای شبیه سازی محیطی که سیستم در آن غوطه ور است، بکار برده شده، صورت بگیرد. بنابراین، می‌توان از طریق تنظیم یک پارامتر تابعی ای که در آن ترانزیستور با راندمان مناسب کار می‌کند را باید آورد.

### Designing and Controlling of a DNA Molecular transistor

Behnia, Sohrab; Fathizadeh, Samira

Department of Physics, Faculty of Science, Urmia University of Technology, Urmia

### Abstract

*Molecular electronics induces electronic functions which are difficult to obtain with conventional technology. In this work, a molecular transistor based on DNA molecules is designed and controlled. In this regard, a tripod electrical device is created which two bases are the metal leads which connected to a potential difference and third base is DNA chain connected to a gate voltage. Via the statistical studying of the nearest neighbor level distribution which is one of the quantum chaos tools, the transport properties of the system is investigated. The obtained results show that one can control the electronic transport through the setting of thermal bath parameters used for simulation of the environment which system is embedded in it. Therefore, we can choose the appropriate range for increasing the efficiency of molecular transistor via the setting of only bath parameters.*

PACS No. 72, 73, 81, 89

گیرند. مولکول های DNA با ویژگی خودچیدمانی<sup>۱</sup> برنامه پذیر بودن و انعطاف پذیری می‌توانند بعنوان یک چارچوب در نانوساختارها مورد استفاده قرار گیرند که منجر به خلق مدارها و تراشه های الکترونیکی در ابعاد نانو خواهد شد. هدف از این کار، طراحی یک ترانزیستور بر مبنای مولکول های DNA و مهندسی آن می‌باشد. به این منظور زنجیره ای از مولکول های DNA را بین دو الکترود فلزی قرار داده و اختلاف ولتاژ  $V_b$  را بین دو انتهای برقرار می‌کنیم. به این ترتیب که یکی از پایانه ها به ولتاژ  $2/V_b$  و پایانه دوم به ولتاژ  $-2/V_b$  متصل می‌شود. برای طراحی ترانزیستور الکترونیکی بعنوان یک ابزار سه پایه، مولکول های DNA نیز به یک ولتاژ گیت متصل می‌شود. برای بررسی اثرات

### مقدمه

در سال های اخیر، ترانزیستورهای مولکولی بدليل ویژگی های منحصر بفرد خود، توجه زیادی را به خود جلب کرده اند[۱]. طراحی یک ترانزیستور مولکولی، مهندسی و کنترل آن موضوع مورد علاقه بسیاری از محققان بوده است[۲]. مواد مولکولی نیز بعلت انعطاف پذیری، هزینه پایین و امکان سنتز راحت تر کاربردهای فراوانی در نانوالکترونیک یافته اند[۳]. در این میان، مواد بیولوژیکی مثل مولکول های پروتئین و DNA که سازگار با محیطهای فیزیولوژیک مثل بدن انسان هستند، می‌توانند در طراحی ابزارهای نانوالکترونیکی مورد استفاده در پزشکی موردن استفاده قرار

Self - assembled<sup>۱</sup>

$H_{Lead}$  هامیلتونی متناظر با الکترودهاست که با رابطه زیر توصیف می شود:[۸]

$$H_{Lead} = \sum_{j=1}^2 \sum_k (\epsilon_{L_{k,j}} + eV_b / 2) a_{L_{k,j}}^\dagger a_{L_{k,j}} + \sum_{j=1}^2 \sum_k (\epsilon_{R_{k,j}} - eV_b / 2) a_{R_{k,j}}^\dagger a_{R_{k,j}} \quad (3)$$

بطوریکه  $(a_{i,j})$  عملگر خلق (فنا) الکترون در سایت  $V_b$  انرژی در سایت مربوط به الکترود  $\beta=L,R$  و  $\epsilon_{\beta_{i,j}}$  انرژی در سایت مربوط به الکترود  $\beta=L,R$  و لتأثر بایاس می باشد. جمله سوم هامیلتونی، برهمکنش بین الکترودها و DNA را بیان می کند که بصورت زیر است:[۸]

$$H_{DNA-Lead} = \sum_{j=1}^2 \sum_k (t_L a_{L_{k,j}} c_{i,j} + t_R a_{R_{k,j}} c_{N,j} + H.c.) \quad (4)$$

که  $t_\beta$  انرژی جهش الکترون بین DNA و الکترود ها می باشد. تاثیر محیط خارجی و اندرکنش آن با سیستم به ترتیب با جملات

در هامیلتونی سیستم وارد می شود[۹]:

$$H_{Bath} = \sum_{i=1}^N \hbar \omega_i b_i^\dagger b_i + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (\hbar \Omega_i b_i^\dagger b_{i+1} + H.c.) \quad (5)$$

$$H_{DNA-Bath} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^N (t_i b_i^\dagger c_{i,j} + H.c.) \quad (6)$$

که  $b_{i,j}^\dagger$  عملگر خلق (فنا) یک فونون،  $\omega_i$  و  $\Omega_i$  فرکانس های زنجیره نوسانگرهایی که بعنوان حمام گرمایی مدل سازی شده اند و ثابت های برهمکنش آنها می باشد. در حالت کلی، فرکانس های نوسانی حمام در یک رابطه تابع طیفی بصورت زیر صدق می کنند:

$$J(\omega) = \sum_i t_i^2 \delta(\omega - \omega_i) = J_0 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^s e^{-\omega/\omega_c} \Theta(\omega) \quad (7)$$

که  $\omega_c$  فرکانس قطع و  $\Theta(\omega)$  تابع هویساید<sup>۳</sup> می باشد. در این کار، یک حمام اهمی با  $s=1$  در نظر گرفته شده است.[۱۰].

در این کار یک زنجیره DNA دو رشته ای با N جفت باز در نظر گرفته می شود که از دو انتهایه الکترودهایی با k سایت متصل شده و هر رشته حمام به یک رشته نوسانگر بعنوان حمام گرمایی متصل می شود. بنابراین، یک ماتریس حمام  $(4N+4k) \times (4N+4k)$  بعنوان یک ماتریس تصادفی تولید می شود که برای تحلیل آن می توان از روش توزیع آماری ترازها استفاده کرد. یکی از این ابزارها، توزیع فاصله ترازی (P(s)) که

محیطی، مولکول های DNA در یک حمام گرمایی غوطه ور می شود. هدف از این کار، مهندسی سیستم برای بدست آوردن راندمان مناسب می باشد. برای این منظور از ابزار آشوب کوانتموی برای بررسی حالت های سیستم استفاده می شود. یکی از این ابزارها، توزیع ترازهای نزدیک ترین همسایگی<sup>۴</sup> (P(s) می باشد[۴]). این ابزار می تواند حالت های جایگزینه (حالت عایق) و حالت های غیرجایگزینه (رسانا) را از هم تمیز دهد. اگر توزیع احتمال تراز های نزدیک ترین همسایه به صورت پواسونی باشد، بروز حالت جایگزینه و در صورتی که توزیع احتمال بصورت ویگنری باشد، بروز حالت غیرجایگزینه محتمل خواهد بود[۵]. بدین ترتیب، می توان حالت هایی را که در آن DNA می تواند بعنوان یک کانال هادی عمل کرده و جریان الکتریکی را برقرار سازد تشخیص داد.

### مدل سازی ریاضی و روش تحلیل سیستم

مدل ریاضی یک ترانزیستور مولکولی که شامل زنجیره های DNA بین دو الکترود می باشد و به یک گیت ولتاژ متصل شده و در تماس با یک حمام گرمایی قرار دارد می تواند بصورت زیر باشد[۶]:

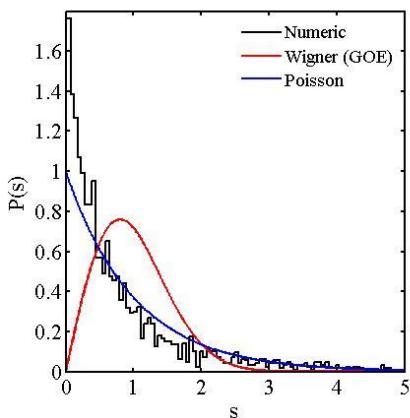
$$H = H_{DNA} + H_{Lead} + H_{DNA-Lead} + H_{Bath} + H_{DNA-Bath} \quad (1)$$

که در آن  $H_{DNA}$ ، هامیلتونی زنجیره های می باشد که با استفاده از مدل تنگ بست برای یک سیستم دورشته ای بصورت زیر نوشته می شود[۷]:

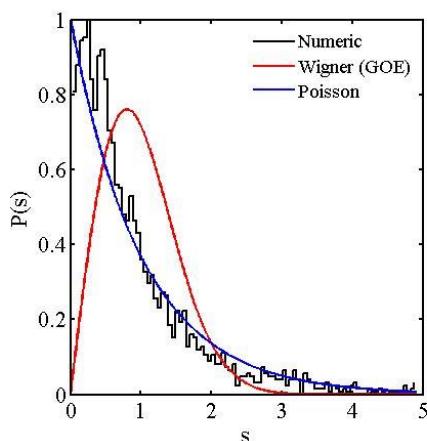
$$H_{DNA} = \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^N (\epsilon_{i,j} + eV_g) c_{i,j}^\dagger c_{i,j} - \sum_{i=1}^{N-1} (t_{i,i+1} c_{i,j}^\dagger c_{i+1,j} + H.c.) \right) + \sum_{i=1}^N (\lambda c_{i,1}^\dagger c_{i,2} + H.c.) \quad (2)$$

که در آن  $c_{i,j}^\dagger$  عملگر خلق (فنا) الکترون در سایت  $(i,j)$  از رشته  $i$ -am در سایت مربوط به یک الکترون در سایت  $i$ -am از رشته  $j$ -am می باشد.  $t_{i,i+1}$  انرژی جهش الکترون بین سایت ها در یک رشته،  $\lambda$  انرژی جهش الکترون بین رشته ها و  $V_g$  ولتاژ گیت می باشد.

دهیم. محتوای G-C به شدت خواص الکترونیکی DNA را تحت تاثیر قرار می‌دهد. DNA بعنوان یک نیمه رسانا با گاف انرژی عریض رفتار می‌کند که گاف انرژی با افزایش تعداد G-C افزایش می‌یابد. این نقش جفت باز G-C بعلت پایین بودن پتانسیل الکتروشیمیایی گوانین نسبت به سایر بازها قابل مشاهده است[۱۵].



شکل ۱: توزیع ترازهای نزدیک ترین همسایگی،  $J_0/\omega_c = 3$ . مشاهدات برمنای  $P(s)$  نشان می‌دهند که به ازای مقادیر  $J_0/\omega_c = [1-3]$ ، سیستم دارای رفتار پواسونی است. شکل ۱، توزیع ترازهای نزدیک ترین همسایگی را به ازای  $J_0/\omega_c = 3$  نشان می‌دهد که در محدوده عملکردی یک کانال عایق است. از مقدار  $J_0/\omega_c = 4$  سیستم وارد فاز گذار می‌شود (شکل ۲).



شکل ۲: توزیع ترازهای نزدیک ترین همسایگی،  $J_0/\omega_c = 4$ . این مقدار از پارامتر، می‌تواند بعنوان نقطه شروع عملکرد ترانزیستور دارای کانال عبوری در نظر گرفته شود. به تدریج، مقدار پارامتر  $J_0/\omega_c$  را افزایش می‌دهیم. در این مقادیر، سیستم به

فاصله ترازهای مجاور طبق رابطه  $E_i - E_{i+1} = s$  می‌باشد. در فاز فلزی،  $P(s)$  نزدیک به نظریه ماتریس‌های تصادفی<sup>۴</sup> ارائه شده توسط ویگنر<sup>۵</sup> و دایسون<sup>۶</sup> می‌باشد. در رژیم عایق، ترازهای الکترونی حالت‌های جایگزینه مانند متغیرهای تصادفی نوسان می‌کنند و مطابق قانون پواسون<sup>۷</sup> توزیع می‌شوند. زمانی که نوسانات اتمی یا پتانسیل ناخالصی افزایش می‌یابد، سیستم کوانتومی تحت تاثیر یک گذار فاز مرتبه دوم قرار می‌گیرد. در فیزیک حالت جامد، این گذار به گذار فلز-عایق یا گذار بین حالت‌های جایگزینه و غیر جایگزینه شهرت دارد[۱۱]. در این کار، هدف ما این است که با استفاده از ابزار  $P(s)$  و مطالعه توزیع ترازها به طراحی یک ترانزیستور مولکولی با راندمان بالا بپردازیم.

## نتایج

توانایی DNA برای انتقال بار بلندبرد، آنرا به کاندید مناسبی برای استفاده در نانوالکترونیک تبدیل کرده است. پارامترهای مورد استفاده در مدل مذکور به صورت زیر می‌باشند:  $\varepsilon_A = 8.5$ ,  $\varepsilon_C = 8.9$ ,  $\varepsilon_G = 8.3$ ,  $\varepsilon_T = 9$  eV مربوط به هرکدام از بازها، بازهای یکسان،  $t_{xy} = \frac{t_{xx} + t_{yy}}{2}$  انرژی جهش الکترون بین بازهای مختلف و  $-0.3$  eV = انرژی جهش الکترون بین دو رشته می‌باشد[۱۲-۱۳]. از طرفی،  $t_{CC} = 0.05$ ,  $t_{AA} = 0.22$ ,  $t_{GG} = 0.11$  eV، به ترتیب انرژی در سایت  $t_{\beta_{k,j}} = 7.75$  eV,  $t_{\beta} = 0.42$  eV الکترودها و انرژی جهش الکترون بین الکترودها و DNA است[۱۴].

در اینجا، ما سعی می‌کنیم که حالت‌های مختلف انتقال بار از کانال DNA را با تغییر پارامترهای حمام که کانال در آن غوطه ور است، بررسی کنیم. برای این کار یک توالی با جفت بازهای G-C را در نظر می‌گیریم و پارامتر  $J_0/\omega_c$  حمام را از ۱ تا ۴۰ تغییر می-

Random matrix<sup>۴</sup>

Wigner<sup>۵</sup>

Dyson<sup>۶</sup>

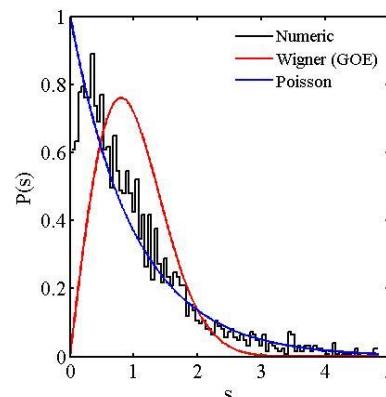
Poisson<sup>۷</sup>

زنجیره DNA طراحی و تنظیم کنیم. برای این کار، زنجیره ای از جفت بازهای C-G-C را بین دو الکترود فلزی با اختلاف ولتاژ  $V_b$  قرار داده و پایه سوم (DNA) را به ولتاژ گیت متصل می کنیم. مولکول های DNA در تماس با حمام گرمایی قرار دارند. با استفاده از ابزار مطالعه ترازهای الکترونی، مشاهده می شود که پارامتر حمام کلید مناسبی برای تنظیم عملکرد ترانزیستور می باشد.

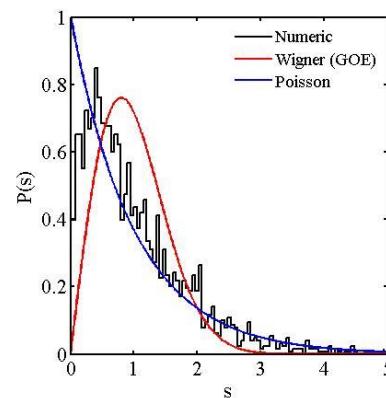
### مرجع ها

- [۱] C. W. Tseng, D. C. Huang, Y. T. Tao; "Organic Transistor Memory with a Charge Storage Molecular Double-Floating-Gate Monolayer"; *ACS applied materials & interfaces*, **7** (2015) 9767-9775.
- [۲] J. Martínez-Blanco, C. Nacci, S. C. Erwin, K. Kanisawa, E. Locane, M. Thomas, F. von Oppen, P. Brouwer, S. Fölsch, "Gating a Single-Molecule Transistor with Individual Atoms"; *Nature Physics*, **11**, (2015) 640.
- [۳] S. Liu, W. M. Wang, A. L. Briseno, S. C. B. Mannsfeld, Z. N. Bao, "Controlled Deposition of Crystalline Organic Semiconductors for Field-Effect-Transistor Applications"; *Advanced Materials*, **21** (2009) 1217-1232 .
- [۴] M. L. Mehta, *Random Matrices*; Academic Press, Boston, 1991, 523.
- [۵] I. Kh. Zharekeshev, B. Kramer, "Asymptotics of Universal Probability of Neighboring Level Spacings at the Anderson Transition"; *Physical Review Letters*, **79** (1997) 717-721.
- [۶] S. Behnia, S. Fathizadeh, J. Ziae, "Controlling Charge Current through a DNA Based Molecular Transistor"; *Physics Letters A* **38** (2017) 36-43.
- [۷] E. Díaz, A. Sedrakyan, D. Sedrakyan, F. Domínguez-Adame, "Absence of Extended States in a Ladder Model of DNA"; *Physical Review B*, **75** (2007) 014201.
- [۸] Z. Z. Chen, R. Lü, B. F. Zhu, "Effects of Electron-Phonon Interaction on Nonequilibrium Transport through a Single-Molecule Transistor"; *Physical Review B*, **71** (2005) 165324.
- [۹] F. Nicacio, A. Ferraro, A. Imparato, M. Paternostro, F. L. Semião, "Thermal Transport in Out-of-Equilibrium Quantum Harmonic Chains"; *Physical Review E*, **91** (2015) 042116.
- [۱۰] R. Gutiérrez, S. Mandal, G. Cuniberti, "Dissipative Effects in the Electronic Transport through DNA Molecular Wires"; *Physical Review B*, **71** (2005) 235116.
- [۱۱] B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears, P. Lambrianides, H. B. Shore, "Statistics of Spectra of Disordered Systems Near the Metal-Insulator Transition"; *Physical Review B*, **47** (1993) 11487.
- [۱۲] A. B. Trofimov, J. Schirmer, V. B. Kobychev, A. W. Potts, D. M. P. Holland, L. Karlsson, "Photoelectron Spectra of the Nucleobases Cytosine, Thymine and Adenine"; *Journal of Physics B*, **39** (2006) 305
- [۱۳] K. Senthilkumar, F. C. Grozema, C. F. Guerra, F. M. Bickelhaupt, F. D. Lewis, Y. A. Berlin, M. A. Ratner, L. D. A. Siebbeles, "Absolute Rates of Hole Transfer in DNA"; *Journal of American Chemical Society*, **127** (2005) 14894.
- [۱۴] S. Malakooti, E. R. Hedin, Y. D. Kim, Y. S. Joe, "Enhancement of charge transport in DNA molecules induced by the next nearest-neighbor effects"; *Journal of Applied Physics*, **112** (2012) 094703.
- [۱۵] M. Di Ventra, M. Zwolak, "DNA Electronics in Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology", American Scientific Publishers, 2004.

تدریج فاز گذار را رد کرده و وارد حالت کانال رسانا می شود (شکل های ۳ و ۴).



شکل ۳: توزیع ترازهای نزدیک ترین همسایگی،  $J_0/\omega_c = 5$  در شکل ۳، سیستم در حال عبور از فاز گذار می باشد و به حالت ویگنری (حالت غیرجاگزیده) نزدیک می شود.



شکل ۴: توزیع ترازهای نزدیک ترین همسایگی،  $J_0/\omega_c = 40$  روند گذار به سمت حالت ویگنری ادامه پیدا می کند تا به ازای  $J_0/\omega_c = 40$ ، می توان حالت بسیار نزدیک به حالت رسانایی را مشاهده کرد (شکل ۴). واضح است که پارامتر حمام بعنوان یک پارامتر برای مهندسی کانال ترانزیستور مورد استفاده قرار گرفته است و می تواند پارامتر مناسبی برای تنظیم و کنترل عملکرد آن باشد.

### نتیجه گیری

همزمان با تلاش برای کوچک کردن ابزارهای الکترونیکی، استفاده از زنجیره های DNA برای خلق اجزای مدارهای الکترونیکی مثل سیم ها، دیود و ترانزیستور پیشنهاد شده است. در این کار، ما تلاش کرده ایم که یک ترانزیستور مولکولی برمبنای

## انتشار و پایداری امواج ناشی از فعالیت الکتریکی در کورتکس مغز

علی نژاد، حسن؛ حراره، آتنا؛ نعمتی اندواری، مسعود

گروه فیزیک، دانشکده‌ی علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

### چکیده

در این مقاله، با هدف مدل‌سازی رفتار فعالیت الکتریکی در کورتکس مغز به صورت انتشار امواج الکتریکی بر اساس مدل رابینسون، معادلات غیرخطی پیوسته‌ای معرفی شده است که شامل اثرات غیرخطی نورون‌ها، تأخیرات آکسونی و دندریتی، جمعیت‌های نورون‌های تحریکی و مهاری می‌باشند. با استفاده از این معادلات، رابطه‌ی پاشندگی را برای امواج خطی استخراج می‌کنیم و با تحلیل رابطه‌ی پاشندگی نشان خواهیم داد که پایداری تقاطع تعادل این سیستم پیچیده، به پارامترهای فیزیولوژیکی مغز وابسته است. علاوه بر این، با بررسی عددي حالت نرمال فعالیت کورتکس مغز نشان می‌دهیم که در این شرایط همه‌ی نورون‌ها پایین‌تر از حد فیزیولوژیکی خود شلیک می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: کورتکس، پایداری، رابطه پاشندگی، سیستم پیچیده.

## Propagation and stability of waves of electrical activity in the cerebral cortex

Alinejad, Hasan ; Harare, Atena ; Nemati Andevari, Masoud

Department of Physics, Faculty of Basic science, Babol Noshirvani University of Technology

### Abstract

In this paper, nonlinear continuum equations are introduced to model the behavior of cortical electrical activity by Robinson's model which incorporate nonlinearities, axonal and dendritic lags, excitatory and inhibitory neuronal populations. By using these equations, we derive dispersion relation for linear waves and by analyzing the dispersion relation we will show that the stability of the fixed point of this complex system are related to the physiological parameters of the brain. Furthermore, by studying numerically the normal activity state in cortex, we will show that in these conditions all neurons fire at rates far below their physiological limits.

**Keywords:** Cortex, Stability, Dispersion Relation, Complex System.

PACS No. 52.35.-g

نتیجه، یافتن چارچوب مناسب برای تجزیه و تحلیل این داده‌های تجربی به یکی از دغدغه‌های عصر حاضر تبدیل شده است. به این منظور مدل‌های مختلفی ارائه شده است تا یک توصیف دقیقی از ارتباط بین فیزیک اعصاب و فیزیولوژی نورون‌ها برقرار گردد که از آن جمله می‌توان به مدل میدان‌های عصبی اشاره کرد [۱] که بر مبنای انتشار چگالی پالس به صورت یک موج میرا که توسط چشممه‌ای برانگیخته می‌شود، فرمول‌بندی شده است. هدف از این مقاله تعیین رابطه پاشندگی و بررسی پایداری امواج خطی بر اساس مدل پیوسته میدان‌های عصبی رابینسون [۲] می‌باشد. شواهد زیادی وجود دارد که نشان می‌دهد فعالیت نوسانی مغز در حالت

### مقدمه

ثبت سیگنال‌های عصبی به روش الکتروآنسفالوگرام(EEG) تشیجه‌ای از فعالیت الکتریکی مجموعه‌ی زیادی از نورون‌های کورتکس مغز هستند. همبستگی سیگنال‌های EEG با عملکرد سیستم پیچیده‌ی مغز به طور وسیعی در تشخیص بیماری‌ها در حوزه‌ی علوم اعصاب و پزشکی استفاده می‌شود. تاکنون محتویات فرکانسی این نوسانات، تغییرات توان طیفی آن‌ها با عملکردهای شناختی و سرعت امواج به خوبی اندازه‌گیری شده است. ولی متأسفانه ارتباط بین سیگنال‌های ثبت شده با دینامیک نورون‌های ایجاد کننده این فعالیت‌های الکتریکی هنوز ناشناخته است. در

آنها در دندربیت، اندازه‌گیری می‌شود. یک تقریب خوبی برای  $V_{e,i}$  به شکل زیر می‌باشد [۴]

$$V_{e,i}(r,t) = g \int_{-\infty}^{+\infty} L(t-t') Q_{ae,ai}(r,t') dt', \quad (2)$$

$$L(u) = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} (e^{-au} - e^{-bu}), \quad (3)$$

که در عبارت بالا  $Q_{ae,ai}$  متوسط پتانسیل ورودی‌ها از نورون‌های دیگر به شاخه‌ی دندربیت نورون  $a$ ،  $g$  بهره‌ی دندربیتی و  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت زمانی دندربیت می‌باشد. در فضای فوریه  $L(u)$ ، به عنوان یک فیلتر پایین‌گذار با فرکانس قطع  $\alpha$  و  $\beta$  برای دندربیت‌ها عمل می‌کند. پتانسیل‌های ورودی  $Q_{ae,ai}$  در یک موقعیت مشخص، متشكل از پتانسیل موج  $\phi_{e,i}$  و سایر ورودی‌های خارجی به کورتکس هستند که بر اساس مدل راینسون به صورت زیر بیان می‌شوند

$$Q_{ae,ai}(r,t) = M_{e,i} Q_s + \mu_{e,i} Q_{ns}(r,t) + a_{ee,ie} \phi_e(r,t) - a_{ei,ii} \phi_i(r,t), \quad (4)$$

که در آن  $M_{e,i}$  به ترتیب چگالی سیناپسی مربوط به ورودی‌های مشخص به نورون‌های تحریکی و مهاری،  $\mu_{e,i}$  چگالی سیناپسی مربوط به ورودی‌های نامشخص از ساختارهای غیرکورتکسی به نورون‌های تحریکی و مهاری و ثابت‌های  $a_{ee,ei,ie,ii}$  چگالی سیناپسی مربوط به ورودی‌های تحریکی و مهاری به نورون‌های تحریکی و مهاری می‌باشد. هنگامی که مقدار پتانسیل‌های تجمعی در شاخه‌ی دندربیت نورون به مقدار آستانه می‌رسد، نورون می‌تواند شلیک کند. پالس ایجاد شده، در طول آکسون و شاخه‌ی آکسونی متشر می‌شود و پالس ورودی برای نورون‌های دیگر را تأمین می‌کند. اگر  $v$  سرعت مشخصه‌ی این پالس در طول آکسون باشد، می‌توان انتشار پالس خروجی را به صورت یک موج با پتانسیل  $\phi_{e,i}$  در نظر گرفت که توسط چشمتهای  $Q_{e,i}$  ایجاد می‌شود.

بنابراین دینامیک حاکم بر چنین سیستمی مشابه معادله‌ی تحول

یک موج میرا شونده به شکل زیر می‌باشد [۲]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_{e,i} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{e,i}^2 - v^2 \nabla^2 \right) \phi_{e,i}(r,t) = \gamma_{e,i}^2 Q_{e,i}(r,t), \quad (5)$$

که  $\gamma_{e,i} = v/r_{e,i}$  و  $r_{e,i}$  طول مشخصه‌ی آکسون است. مقادیر اندازه‌گیری شده برای ثابت  $r_{e,i}$  به ترتیب برای انسان  $m = 0.08m$  و  $r_e \approx 10^{-4} m$  می‌باشد [۲]. معادلات (۱)-(۵)،

استراحت در مقیاس بزرگ، به طور خطی پایدار است. این شرایط ایجاب می‌کند که در شرایط نرمال، مغز باید نزدیک مرز پایداری واقع باشد. در صورتی که خیلی از این شرایط پایداری دور شویم در محدوده‌ی کما و بیهوشی عمیق هستیم در حالی که عبور از این مرز پایداری به محدوده‌ی ناپایداری، به معنی گذار به فعالیت تشنج با دامنه‌ی بزرگ نوسانی است [۳]. بنابراین پایداری یک قید بسیار مهم در رفتار دینامیکی سامانه‌ی پیچیده‌ی مغز است که می‌تواند منجر به یک وضعیت نرمال گردد.

## معادلات حاکم بر دینامیک کورتکس

مغز به عنوان یک سیستم پیچیده شامل تعداد زیادی نورون است که به صورت خودسازگار و بدون هیچ مرجع کنترل کننده‌ای رفتار ماکروسکوپیک دارد. چنین محیطی را می‌توان مانند محیط‌های خودسازگاری همچون پلاسمای بر اساس یک مجموعه از معادلات غیرخطی توصیف کرد. از دید میکروسکوپیک، یک نورون تحریکی از طریق سیناپس با هزاران نورون دیگر در ارتباط است. در شاخه‌ی دندربیتی، توسط ورودی‌های سیناپسی نورون‌های دیگر، پتانسیل‌هایی شکل می‌گیرد. در صورتی که مجموع این پتانسیل‌ها به حد آستانه بر سر نورون می‌تواند با یک آهنگ شلیک انجام دهد. با توجه به اینکه در مدل میدان عصی [۱]، کورتکس مغز به صورت یک پیوستار در نظر گرفته می‌شود، روی تعداد زیادی از نورون‌ها میانگین‌گیری می‌شود. در این صورت متوسط آهنگ شلیک بر حسب کمیت  $Q_{e,i}$  (اندیس  $e$  مربوط به نورون‌های تحریکی و  $i$  مربوط به نورون‌های مهاری می‌باشد) و پتانسیل بدنی سلولی نورون بر حسب کمیت  $V_{e,i}$  نمایش داده می‌شود که ارتباط بین پتانسیل و آهنگ شلیک بر حسب تابع سیگموئیدی زیر می‌باشد

$$Q_{e,i} = \frac{Q_{\max}}{1 + \exp[-(V_{e,i} - \theta)/\sigma]}, \quad (1)$$

که در عبارت بالا  $Q_{\max}$ ، آهنگ شلیک ماکریم،  $\theta$  متوسط پتانسیل دندربیتی و  $\sigma$  انحراف از معیار آستانه می‌باشد که مرتبط با داده‌های فیزیولوژی است. کمیت  $V_{e,i}$  در عبارت بالا، پتانسیل در بدنی سلولی نورون‌ها است که بعد از تجمعی تمام ولتاژها و فیلتر کردن

شرطیت پایا و صرفنظر از ترم‌های  $(k, \omega) = (0, 0)$  که نقاط تعادل سیستم هستند، خواهیم داشت

$$Q_{e,i}(k, \omega) = \rho_{e,i} V_{e,i}(k, \omega), \quad (7)$$

$$V_{e,i}(k, \omega) = gL Q_{ae,ai}(k, \omega), \quad (8)$$

$$L = \frac{\alpha\beta}{(\alpha - i\omega)(\beta - i\omega)}, \quad (9)$$

$$D_{e,i} \phi_{e,i}(k, \omega) = \gamma_{e,i}^2 Q_{e,i}(k, \omega), \quad (10)$$

$$D_{e,i} = (\gamma_{e,i} - i\omega)^2 + k^2 v^2, \quad (11)$$

$$Q_{ae,ai}(k, \omega) = M_{e,i} Q_s + a_{ee,ie} \phi_e(k, \omega) - a_{ei,ii} \phi_i(k, \omega). \quad (12)$$

حال با استفاده از معادلات (7) و (8) می‌توان  $Q_{e,i}$  را بر حسب  $Q_{ae,ai}$  نوشت. همچنین با استفاده از معادله (12) می‌توان  $Q_{e,i}$  را به شکل ترم‌های  $\phi_{e,i}$  بازنویسی کرد. در ادامه با استفاده از نتایج حاصله و لحاظ کردن تقریب مهار موضعی  $Q_i = \phi_i$  برای نورون‌های مهاری [۲] که مرتبط با کوتاه برد بودن محدوده‌ی آکسون‌های مهاری است، رابطه پاشندگی به صورت زیر بدست می‌آید

$$(D_e - \gamma_e^2 \rho_e g L a_{ee}) \phi_e = \gamma_e^2 \rho_e g L (M_{e,i} Q_s - a_{ei} Q_i). \quad (13)$$

که پاسخ خطی کورتکس به سیگنال خاص  $Q_s$  در فضای فوریه است. برای انتشار امواج بدون تحریک خارجی یعنی حالتی که

$Q_s = 0$ ، رابطه پاشندگی به صورت زیر به دست می‌آید

$$(\alpha - i\omega)(\beta - i\omega) D_e - \alpha\beta\gamma_e^2 G = 0, \quad (14)$$

که کمیت بهره‌ی خالص  $G$  در آن به صورت  $G = \rho_e g a_{ee}$  تعریف می‌شود. برای دو شرط حدی  $\alpha, \omega \gg \beta, \omega$  می‌توان معادله پاشندگی را به دو صورت زیر تقریب زد

$$(\alpha - i\omega) D_e - \alpha\gamma_e^2 G = 0, \quad (15)$$

$$D_e - \gamma_e^2 G = 0. \quad (16)$$

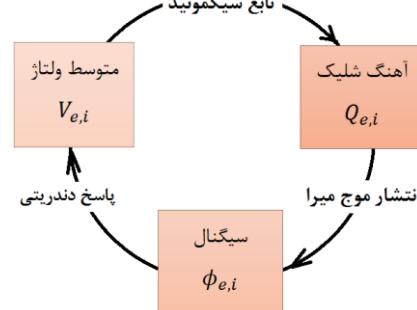
روابط پاشندگی (14)–(16) چندجمله‌ای‌هایی هستند که بر حسب مقادیر حقیقی و موهومی  $\omega$  می‌باشند. برای بررسی پایداری نقاط تعادل کورتکس مغز می‌توان ترم‌های حقیقی و موهومی را به صورت زیر برای معادله (16) نوشت

$$\omega = -i\gamma_e \pm i\sqrt{\gamma_e^2 G - k^2 v^2}. \quad (17)$$

در تحلیل پایداری امواج، مثبت بودن ترم موهومی نشان‌دهنده‌ی ناپایداری نقطه‌ی تعادل می‌باشد، لذا با توجه به رابطه‌ی فوق، ناپایداری زمانی رخ می‌دهد که شرط زیر صادق باشد

$$G > 1 + k^2 v^2 / \gamma_e^2 = 1 + k^2 r_e^2. \quad (18)$$

یک سیستم بسته‌ای از روابط خودسازگار در مدل میدان عصبی رابینسون هستند که دینامیک نوسانات را در کورتکس مغز توصیف می‌کند.



شکل ۱: طرح شماتیک چرخه‌ی ایجاد سیگنال در کورتکس مغز.

شکل ۱، طرح شماتیک چرخه‌ی ایجاد سیگنال را در این مدل نشان می‌دهد که معادلات فوق بر اساس این چرخه پایه‌ریزی شده‌اند. لازم به ذکر است که اثرات فیدبک ناشی از بخش‌های مختلف تalamوس به کورتکس و بالعکس در این مقاله در نظر گرفته نشده است.

## رابطه پاشندگی و تحلیل پایداری

همانطوری که در بخش قبل اشاره شد، مجموعه معادلات (۱) تا (۵)، رفتار موج‌گونه‌ی فعالیت الکتریکی کورتکس مغز را نشان می‌دهند که منع ایجاد سیگنال‌های مشاهده شده در اندازه‌گیری‌های EEG می‌باشند. برای حالتی که ترم تحریک خارجی  $Q_{ns}$  ثابت و یکنواخت باشد، می‌توان رفتار پایای این سیستم دینامیکی را با تعیین نقاط تعادل سیستم بررسی کرد. با توجه به این نقاط پایا، مانند هر سیستم پیچیده‌ای چون پلاسمما، اختلالات کوچک حول این نقاط تعادل، معادله‌ی موج خطی را ایجاد می‌کند. برای تعیین رابطه‌ی پاشندگی این امواج، فرض می‌کنیم که یک آشفتگی کوچک حول نقاط تعادل سیستم ایجاد شود. در این صورت معادله‌ی غیرخطی (۱) را حول نقاط تعادل به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$Q_{e,i} = Q_{e,i}^{(0)} + \rho_{e,i} [V_{e,i} - V_{e,i}^{(0)}], \quad (6)$$

که  $Q_{e,i}^{(0)}$  و  $V_{e,i}^{(0)}$  مقادیر حالت پایا هستند و می‌باشد. علاوه بر این با تبدیل فوریه از معادلات (۲)–(۶) در

با توجه به منفی بودن  $\text{Im}\omega$  برای تمامی حالت‌ها در شکل ۲، می‌توان نتیجه گرفت که سیستم به ازای تمامی  $k$ ‌ها پایدار خواهد بود. با توجه به شکل (b) و (d)، سه مد با کمترین میرایی مربوط به روابط (۱۴) و (۱۵)، بسیار شبیه به هم هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تقریب (۱۵) تحت این شرایط تقریب مناسبی است. اما مشاهده می‌شود که مد میرایی برای مرتبه دو در معادله (۱۶)،  $\pm 1$ ، برای مرتبه سه در معادله (۱۵) و برای مرتبه چهار در معادله (۱۴)،  $-i\alpha$  - می‌باشد که این رفتار متفاوت معادله‌ی مرتبه دو را می‌توان به دو جواب معادله (۱۶) نسبت داد که با کاهش  $k$  سیستم را وادار به تغییر وضعیت از حالت انتشار به غیرانتشار می‌کند.

## نتیجه گیری

برای فرمول‌بندی فعالیت الکتریکی کورتکس مغز، به کمک مدل رابینسون مجموعه‌ای از معادلات پیوسته‌ی غیرخطی را ارائه کرده‌ایم که شامل پاسخ غیرخطی نورون‌ها، جمعیت نورون‌های تحریکی و مهاری و تأثیرات آکسونی و دندرتی می‌باشد. در ادامه برای امواج خطی با دامنه‌ی کوچک، روابط پاشندگی را بدست آوردیم و با بررسی تحلیلی و عددی روابط پاشندگی نشان دادیم که مرزی برای پایداری انتشار امواج مغزی وجود دارد که فراتر از آن، تشنج(نایپایداری) رخ خواهد داد. اثرات فیدبک کورتکس-تalamوس و بالعکس که می‌تواند تحلیل دقیق‌تری از طیف این نوسانات ارائه دهد، در این مقاله لحاظ نشده است.

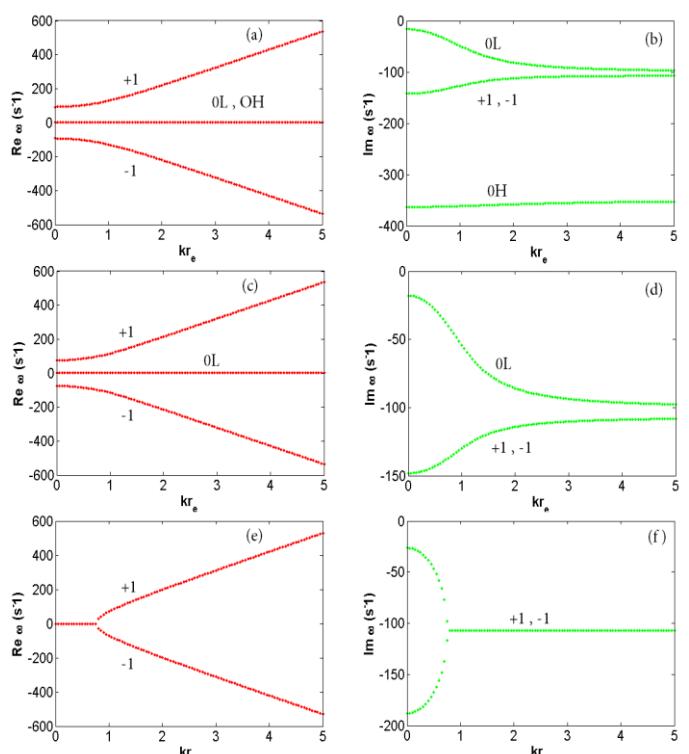
## مرجع‌ها

- [۱] P. L. Nunez and R.A. Srinivasan; "A Theoretical Basis for Standing and Traveling Brain Waves Measured with Human EEG with Implications for an Integrated Consciousness"; *Clin. Neurophysiol.* **117**, No. 11 (2006) 2424-2435.
- [۲] P. A. Robinson, C. J. Rennie, J. J. Wright; "Propagation and stability of waves of electrical activity in the cerebral cortex"; *Physical Review. E* **56**, No. 1 (1997) 826-840.
- [۳] C. J. Rennie, J. J. Wright and P. A. Robinson; "Mechanisms of Cortical Electrical Activity and Emergence of Gamma Rhythm"; *Journal of Theoretical Biology.* **205**, (2000) 17-35.
- [۴] W. J. Freeman; Predictions on Neocortical Dynamics Derived from Studies in Paleocortex. In: *Induced Rhythms in the Brain* edited by E. Başar, T.H. Bullock (eds), Brain Dynamics, Birkhäuser, Boston, MA (1992).

رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که مرز نایپایداری در شرایطی اتفاق می‌افتد که  $G = 1 + k^2 r_e^2$ . برای رسیدن به شرط پایداری، برای پایین‌ترین حالت تعادل، می‌توان با قرار دادن  $G = \rho_e g a_{ee}$  و  $\rho_{e,i} = dQ_{e,i} / dV_{e,i}$  در معادله (۱۸) به رابطه‌ی زیر رسید

$$Q_e(1-Q_e) < (gCa_{ee})^{-1}. \quad (۱۹)$$

با توجه به داده‌های فیزیولوژی، این معادله نشان می‌دهد که به ازای  $Q_e$ ‌های کوچک، دو نقطه‌ی تعادل، یکی پایدار و یکی نایپایدار داریم که بیانگر حالت نرمال کورتکس هستند و به ازای  $Q_e$  بزرگ، یک جواب نایپایدار داریم که مربوط به وضعیت تشنج است.



شکل ۲: تغییرات فرکانس مدهای انتشار که از معادلات پاشندگی (۱۴)-(۱۶) حاصل شده است و از بالا به پایین به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ مد نوسانی را نشان می‌دهد. برای رسم این نمودارها از پارامترهای انسانی و  $G = 0.57$  و  $Q_{ns} = 0.7$  استفاده شده است.

به منظور بررسی خواص کلی امواج پایدار و نایپایدار، به کمک حل عددی معادلات پاشندگی (۱۴)-(۱۶)، تغییرات قسمت حقیقی و موهومی فرکانس  $\omega$  را بر حسب عدد موج رسم کردیم. برای  $k$ ‌های بزرگ طبق رابطه‌ی (۱۷)، میرایی با مدهای انتشاری  $\omega \approx \pm kv - i\gamma_e$  رخ می‌دهد که این جواب‌ها در شکل (۲) با علامت  $\pm 1$  نشانه‌گذاری شده‌اند.

# رهیافت بلوک‌بندی کادانوف به پارامتر فشردگی اسپین در مدل آیزینگ با برهم‌کنش ژیالوشینسکی

موریا

بالازاده، لیلا؛ نجبارباشی، قادر

گروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

## چکیده

در این مقاله بازبینی کوانتومی مدل آیزینگ با برهم‌کنش ژیالوشینسکی موریا را در زنجیره‌ای یک بعدی از ذراتی با اسپین  $1/2$ ، با استفاده از روش بلوک‌بندی کادانوف بررسی می‌کنیم. با اعمال روابط بازگشتنی نظریه بازبینی کوانتومی به پارامتر فشردگی اسپین حالت پایه‌ی یک بلوک، پارامتر فشردگی بازبینی کادانوف شده به دست می‌آید. نمودار پارامتر فشردگی اسپین بر حسب شدت برهم‌کنش ژیالوشینسکی موریا به ازای مراحل مختلف بازبینی کوانتومی تغییرات بحرانی را آشکار می‌کند. همچنین بررسی رفتار مقیاسی نقاط فرین مشتق پارامتر فشردگی اسپین، منجر به محاسبه‌ی نمای بحرانی طول همبستگی می‌شود.

## Kadanoff's Block Approach to Spin Squeezing Parameter in Ising Model with Dzyaloshinskii Moriya Interaction

Balazadeh, Leila; Najarbashi, Ghader

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

## Abstract

In this paper, we investigate the quantum renormalization of the Ising model with Dzyaloshinskii Moriya interaction on one dimensional chain of the spin- $1/2$  particles using the Kadanoff's block method. By applying the recursion relations of the quantum renormalization theory to the spin squeezing parameter at the ground state of a block, the renormalized spin squeezing parameter is obtained. Spin squeezing parameter diagram in terms of the Dzyaloshinskii Moriya interaction intensity for various renormalization steps detects critical points. Also, studying the scaling behavior of the extremal points of the derivative of the spin squeezing parameter leads to calculate the critical exponent of the correlation length.

PACS No. 74.70., 74.70.Tg, 75.10., 03.71.-a

اطلاعات کوانتومی و نظریه گروه بازبینی کوانتومی می‌توان نشان داد که توابع همبستگی کوانتومی قادر به آشکارسازی رفتار بحرانی سیستم‌های بازبینی پذیر هستند [۶، ۴، ۵، ۳]. در این مقاله یکی از پارامترهای پرکاربرد فشردگی اسپین را در مدل آیزینگ با برهم‌کنش ژیالوشینسکی موریا در زنجیره‌ای یک بعدی از ذراتی با اسپین  $1/2$  تحت رویکرد بلوک‌بندی کادانوف و نظریه گروه بازبینی کوانتومی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## مقدمه

آشکارسازی نقاط گذار فاز کوانتومی [۱] و رفتار بحرانی سیستم‌های اسپینی با استفاده از توابع همبستگی کوانتومی مانند درهمتندگی کوانتومی، ناهمخوانی کوانتومی، سنجه‌های تشابه، همدوسی و غیره مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته است. ویلسون در سال ۱۹۷۵ نظریه گروه بازبینی کوانتومی مورد نقش مهمی در تعیین رفتار بحرانی سیستم‌های کوانتومی مورد بررسی در زنجیره‌ها و شبکه‌های اسپینی دارد. با ادغام نظریه

در اینجا  $\sigma_i^z$  نشانگر مولفه‌ی  $\alpha$  از ماتریس پاولی متعلق به مکان  $i$ -ام در بلوک  $I$ -ام می‌باشد. ویژه حالت‌های هامیلتونین داخل یک بلوک دارای ویژه‌انرژی‌هایی با تبعیگی دوگانه هستند. دو ویژه حالت پایه‌ی هامیلتونین داخل یک بلوک با انرژی

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= -\frac{J}{4}(1+\Delta) \quad \text{به شکل زیر هستند:} \\ |e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\Delta(1+\Delta)}} (2D|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + i(1+\Delta)|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - 2D|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \\ |e_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\Delta(1+\Delta)}} (2D|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + i(1+\Delta)|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - 2D|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (5)$$

که در اینجا رابطه‌ی  $\Delta = \sqrt{1+8D^2}$  برقرار است. عملگر تصویر را می‌توان با استفاده از دو ویژه حالت تبعیگن حالت پایه ساخت:

$$\Pi'_0 = |e_1\rangle_I \langle \uparrow\uparrow| + |e_2\rangle_I \langle \downarrow\downarrow| \quad (6)$$

این عملگر، فضای حالت سه اسپین داخل بلوک را به یک اسپین دو حالت شامل حالت‌های  $|\uparrow\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\downarrow\rangle$  تصویر می‌کند. عملگر تصویر کل خواهد بود:

$$\Pi_0 = \prod_{I=1}^{N/3} \Pi'_0 \quad (7)$$

با اعمال عملگر تصویر کلی به هامیلتونین اولیه، هامیلتونین بازبینجارشده به دست می‌آید:

$$H' = \Pi_0 H \Pi_0 \quad (8)$$

با استفاده از این روند بلوک بندی کادانوف، هامیلتونین بازبینجارشده بعد از یک مرحله بازبینجارش به صورت زیر در می‌آید:

$$H' = \frac{J'}{4} \left[ \sum_{i=1}^{N/3} \tilde{\sigma}_i^z \tilde{\sigma}_{i+1}^z + D' (\tilde{\sigma}_i^x \tilde{\sigma}_{i+1}^y - \tilde{\sigma}_i^y \tilde{\sigma}_{i+1}^x) \right] \quad (9)$$

در اینجا  $\tilde{\sigma}_I^{(x,y,z)}$  ماتریس‌های پاولی متعلق به فضای دو حالته بعد از بلوک بندی می‌باشند. همچنین مشاهده می‌شود هامیلتونین بازبینجارشده مشابه با هامیلتونین قبل از بلوک‌بندی است و در نتیجه با مقایسه هامیلتونین قبل از بازبینجارش و بعد از بازبینجارش به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

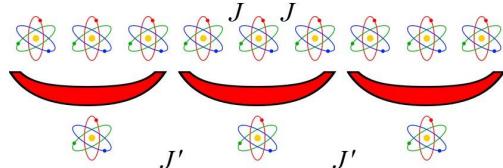
$$J' = J \left( \frac{1+\Delta}{2\Delta} \right)^2, D' = \frac{16D^3}{(1+\Delta)^2} \quad (10)$$

نقاط ثابت رابطه‌ی بازگشتی با حل  $D' = D = D_c$  به دست می‌آیند که شامل  $\{0, \pm 1, \pm \infty\}$  هستند. نقاط  $\{0, \pm \infty\}$ ، نقاط ثابت

## مدل و روش

هامیلتونین مدل آیزینگ با برهمکنش ژیالوشنیسکی موریا در زنجیره‌ای دوره‌ای از  $N$  ذره با اسپین  $1/2$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$H = \frac{J}{4} \left[ \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + D (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right] \quad (1)$$



شکل ۱: نمایش رهیافت کادانوف در بلوک بندی سه‌تایی اسپین‌ها طی یک مرحله بازبینجارش کوانتومی

در اینجا  $i$ -نشانگر مکان اسپین،  $J > 0$  ضریب جفت شدگی همسایگی نزدیک،  $D$  شدت برهمکنش ژیالوشنیسکی موریا در جهت محور Z و  $\sigma_i^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) ماتریس پاولی متعلق به مکان  $i$ -ام می‌باشد. علامت پارامتر  $D$ ، کایرالیتی سیستم را تعیین می‌کند، به این معنی که اسپین‌ها در جهت ساعتگرد یا پاد ساعتگرد در صفحه‌ی X-Y می‌چرخند. در روند بازبینجارش کوانتومی این مدل، زنجیره‌ی یک بعدی  $N$  تایی را به  $N/3$  بلوک سه اسپینی تقسیم می‌کنیم (شکل ۱)، که در نتیجه هامیلتونین بازبینجارشده به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$H = H^B + H^{BB} \quad (2)$$

در اینجا جمله‌ی  $H^B = \sum_{I=1}^{N/3} h_I^B$  مربوط به هامیلتونین داخل بلوک است که مجموع هامیلتونین‌های تک تک بلوک‌ها  $h_I^B$  می‌باشد و داریم:

$$h_I^B = \frac{J}{4} \left[ \sum_{i=1}^{N/3} \sigma_{1,I}^z \sigma_{2,I}^z + \sigma_{2,I}^z \sigma_{3,I}^z + \right. \quad (3)$$

$$\left. D (\sigma_{1,I}^x \sigma_{2,I}^y - \sigma_{1,I}^y \sigma_{2,I}^x + \sigma_{2,I}^x \sigma_{3,I}^y - \sigma_{2,I}^y \sigma_{3,I}^x) \right]$$

جمله‌ی بعدی، هامیلتونین برهمکنش بین بلوک‌ها می‌باشد که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$H^{BB} = \frac{J}{4} \left[ \sum_{I=1}^{N/3} \sigma_{3,I}^z \sigma_{1,I+1}^z + D (\sigma_{3,I}^x \sigma_{1,I+1}^y - \sigma_{3,I}^y \sigma_{1,I+1}^x) \right] \quad (4)$$

$$\left(\Delta \bar{J}_{\vec{n}_\perp}\right)_{\min}^2 = (\langle e_1 | (\bar{J}_{\vec{n}_\perp})^2 | e_1 \rangle - (\langle e_1 | \bar{J}_{\vec{n}_\perp} | e_1 \rangle)^2)_{\min} \quad (14)$$

با انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$\zeta_S^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left[ 1 + \frac{8}{3} D^2 \left( 2 + \frac{1}{\Delta+1} \right) \right] \quad (15)$$

مشاهده می شود که پارامتر فشردگی اسپین به شدت برهم کنش ژیالوشینسکی موریا بستگی دارد، در نتیجه با توجه به اینکه شدت برهم کنش ژیالوشینسکی موریا در هر مرحله از بازبهنجارش کوانتموی طبق رابطه‌ی بازگشته  $D' = \frac{16D^3}{(1+\Delta)^2}$  تغییر می کند، پس پارامتر فشردگی اسپین تابعی از تعداد مراحل بازبهنجارش کوانتموی هم می باشد.

در شکل ۲ پارامتر فشردگی برحسب شدت برهم کنش ژیالوشینسکی موریا و به ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوانتموی رسم شده است. با توجه به شکل مشاهده می شود که به ازای  $n=9$  در نقاط  $D=\pm 1$  پارامتر فشردگی به طور ناگهانی از مقدار یک به مقداری غیرصفر و کوچکتر از یک تغییر می کند. این مطلب نشان می دهد که نقاط  $D=\pm 1$  نقاط گذار فاز کوانتموی این مدل می باشند. به علاوه مشاهده می شود که در ناحیه  $-1 < D < 1$  حالت پایه غیر فشرده می باشد در حالی که در نواحی  $D > 1, D < -1$  فشرده می باشد.

در شکل ۳ مشتق پارامتر فشردگی برحسب شدت برهم کنش ژیالوشینسکی موریا به ازای مراحل مختلف بازبهنجارش کوانتموی رسم شده است که مشاهده می شود هرچه تعداد مراحل بهنجارش بیشتر شود (تعداد ذرات بیشتر طبق رابطه  $N = 3^{n+1}$ ، رفتار تیزتری در مجاورت نقاط بحرانی  $D = \pm 1$  اتفاق می افتد).

در شکل ۴، نحوه رفتار مختصه‌ی کمینه مشتق پارامتر فشردگی  $D_{\min}$  را حول نقطه بحرانی  $D_c = 1$  برحسب طول زنجیره مدل آبیزنگ  $N$ ، بررسی می کنیم. یافته‌های عددی از بررسی شکل ۵ نشانگر رفتار مقیاسی  $|D_{\min} - D_c| = N^{-\theta}$  می باشد که در اینجا  $\theta = 0.46$ . رابطه بالا نشان می دهد که در حد ترمودینامیکی ( $N \rightarrow \infty$ )،  $D_{\min}$  به  $D_c$  میل می کند. با توجه به اینکه طول همبستگی رابطه‌ی واگرایی به صورت  $(D - D_c)^{-v}$  دارد و همچنین با طول زنجیره نسبت مستقیم دارد  $N \sim v$ ، در

پایدار و بدیهی و دو نقطه  $D = \pm 1$  نقاط ثابت ناپایدار و بحرانی این مدل هستند. با استفاده از روابط بازگشته بالا می توان ضرایب جدیدی را در هر مرحله بازبهنجارش کوانتموی تولید کرد. همچنین رابطه‌ی  $\frac{N}{3} = 3^n$  بین تعداد مراحل بازبهنجارش کوانتموی  $n$  و تعداد ذرات زنجیره  $N$  برقرار است.

### بازبهنجارش کوانتموی پارامتر فشردگی اسپین

در این بخش پارامتر فشردگی اسپین  $1/2$  را در حالت پایه مدل آبیزنگ با برهم کنش ژیالوشینسکی موریا محاسبه می کنیم. از بین انواع پارامترهای فشردگی اسپین، از تعریف زیر استفاده می کنیم [۷]:

$$\zeta_S^2 = \frac{4 \left( \Delta \bar{J}_{\vec{n}_\perp} \right)_{\min}^2}{N} \quad (11)$$

اگر پارامتر  $\zeta_S^2$  برای حالتی کوچکتر از یک باشد، در این صورت آن حالت را فشرده می نامیم. می توان ثابت کرد هر حالت فشرده، در همین نیز هست اما عکس این مطلب برقرار نیست [۸]. در اینجا  $N$  تعداد ذرات و  $\bar{J} = (J^x, J^y, J^z)$  عملگر تکانه زاویه ای کل سیستم اسپینی می باشد. با توجه به این که حالت پایه هر بلوک شامل سه ذره با اسپین  $1/2$  است، قرار می دهیم  $N = 3$  و خواهیم داشت:

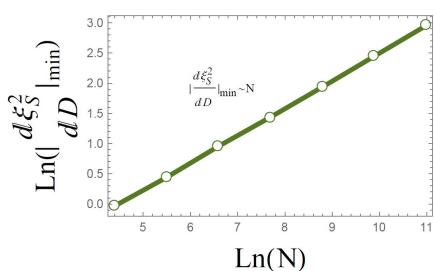
$$J^x = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^x, J^y = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^y, J^z = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^z \quad (12)$$

برای سادگی در محاسبات  $\hbar = 1$  در نظر می گیریم. بردار  $\vec{n}_\perp$ ، جهت عمود بر جهت اسپین میانگین را نشان می دهد و با تصویر کردن تکانه زاویه ای کل بر آن،  $\bar{J}_{\vec{n}_\perp}$  به دست می آید.

در اینجا پارامتر  $\zeta_S^2$  را برای یکی از حالت های پایه تبعیگن یک بلوک  $(|e_1\rangle)$  حساب می کنیم. جهت اسپین میانگین  $(0, 0, 1)$  برابر با  $(e_1 | J^x | e_1 \rangle, e_1 | J^y | e_1 \rangle, e_1 | J^z | e_1 \rangle)$  به دست می آید. در نتیجه جهت کلی عمود بر جهت اسپین میانگین را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{n}_\perp = [\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0] \quad (13)$$

کمینه واریانس با توجه به مقدار دلخواه زاویه  $\varphi$  قابل محاسبه است:



شکل ۵ : نمودار  $\log\left(\frac{d\xi_s^2}{d\lambda}\right)_{\min}$  بر حسب طول زنجیره  $N$

که تابعی خطی است و رفتار مقیاسی  $\frac{d\xi_s^2}{d\lambda} \sim N^{0.45}$  را نشان می‌دهد.

نتیجه با استفاده از نتیجه شکل ۴ می‌توان نمای بحرانی طول همبستگی را به دست آورد:  $v = 1/\theta = 1/D_c$ . به دلیل تقارن مساله، نتیجه مشابهی با بررسی  $D_c = -1$  به دست می‌آید.

در شکل ۵ نمودار لگاریتمی  $\left|\frac{d\xi_s^2}{dD}\right|_{\min}$  بر حسب طول زنجیره مدل آیینگ  $N$ ، رسم شده است که نشانگر تابعی خطی است و رفتار

مقیاسی  $\left|\frac{d\xi_s^2}{dD}\right|_{\min} \sim N^{0.45}$  را نشان می‌دهد. بنابراین

کمیت  $\left|\frac{d\xi_s^2}{dD}\right|_{\min}$  در حد ترمودینامیکی واگرا می‌شود و توان  $N$ ،

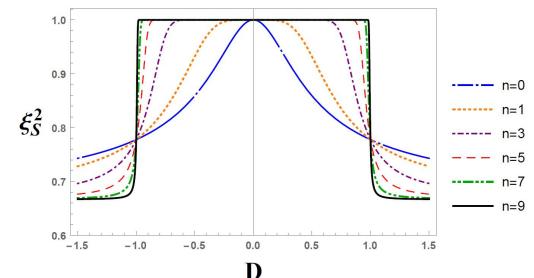
رفتار واگرایی آن را نشان می‌دهد.

### نتیجه گیری

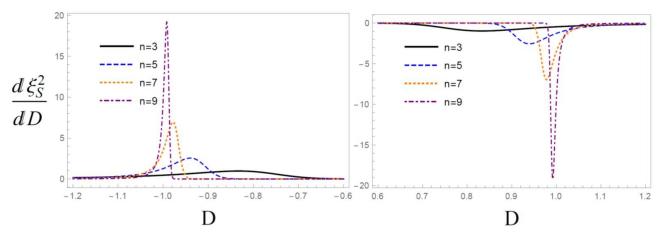
در این مقاله، بازبینیارش زنجیره ای یک بعدی از ذراتی با اسپین ۱/۲ تحت مدل آیینگ با برهم‌کنش ژیالوشنیسکی موریا را با روش بلوك بندی سه‌تایی کادانوف مورد بررسی قرار دادیم. یکی از تعاریف پارامترهای فشردگی اسپین را در حالت پایه‌ی سیستم انتخاب کرده، روابط بازگشته نظریه گروه بازبینیارش کوانتومی را به آن اعمال کردیم. با توجه به نتایج نمودار پارامتر فشردگی و مشتق اول آن بر حسب شدت برهم‌کنش ژیالوشنیسکی موریا می‌توان نمای بحرانی طول همبستگی را به دست آورد.

### مرجع‌ها

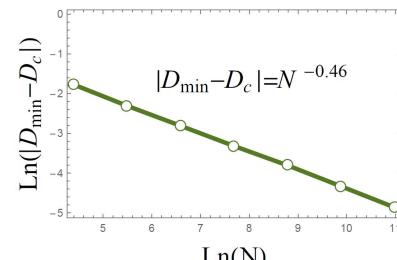
- [۱] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, Cambridge (۱۹۹۹)).
- [۲] K. G. Wilson; “The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem”; *Rev. Mod. Phys.* **۴۷**, (۱۹۷۵) ۷۷۲.
- [۳] M. Kargarian, R. Jafari, and A. Langari; “Renormalization of concurrence: The application of the quantum renormalization group to quantum-information systems”; *Phys. Rev. A* **۷۶**, (۲۰۰۷) ۰۶۰۳۴.
- [۴] Xiu-Xing. Zhang , Hong-Rong. Li; “The renormalization of geometric quantum discord in the transverse Ising model”; *Mod. Phys. Lett. B* **۲۹**, ۳ (۲۰۱۵) ۱۰۰۰۷.
- [۵] R. Jafari; “Quantum renormalization group approach to geometric phases in spin chains”; *Phys. Lett. A* **۳۷۷**, (۲۰۱۳) ۳۲۷۹.
- [۶] A. Langari, F. Pollmann, M. Siahatgar; “Ground-state fidelity of the spin-1 Heisenberg chain with single ion anisotropy: quantum renormalization group and exact diagonalization approaches”; *J. Phys.: Condens. Matter* **۲۵** (۲۰۱۳) ۴۰۶۰۲.
- [۷] M. Kitagawa, M. Ueda; “Squeezed spin states”; *Phys. Rev. A* **۴۷**, (۱۹۹۳) ۵۱۳۸.
- [۸] X. Wang and B. C. Sanders; “Spin squeezing and pairwise entanglement for symmetric multiqubit states”; *Phys. Rev. A* **۶۸**, (۲۰۰۳) ۰۱۲۱۰.



شکل ۲ : پارامتر فشردگی حالت پایه‌ی مدل آیینگ با برهم‌کنش ژیالوشنیسکی موریا بر حسب  $D$  و به ازای تعداد مراحل مختلف بازبینیارش کوانتومی  $n$



شکل ۳ : مشتق اول پارامتر فشردگی حالت پایه‌ی مدل آیینگ با برهم‌کنش ژیالوشنیسکی موریا بر حسب  $D$  و به ازای تعداد مراحل مختلف بازبینیارش کوانتومی  $n$



شکل ۴ : رفتار مقیاسی  $|D_{\min} - D_c|$  بر حسب طول زنجیره مدل آیینگ با برهم‌کنش ژیالوشنیسکی موریا  $N$ ، که در اینجا  $D_{\min}$  نقطه‌ی کمینه نمودار شکل ۳ می‌باشد.

## تصحیح احتمال گذار در حرکت دوسویه افراد

بلباسی، سمیه<sup>۱</sup>

گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان

### چکیده

در این مقاله، مدل یاخته‌ای خودکاری را ارائه می‌دهیم که در آن احتمال گذار را اصلاح کردیم. مدل بکار برده شده یکی از مدل‌های کارآمد در شبیه‌سازی دینامیک حرکت افراد است. تصحیح احتمال گذار را برای جریان دوطرفه افراد در یک راهرو بکار برده ایم. شرایط مرزی باز در نظر گرفته شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که تصحیح احتمال گذار دینامیک حرکت افراد را تحت تاثیر قرار میدارد و به ویژه زمان میانگین سیری شده توسط ذرات در راهرو را کاهش می‌دهد.

### Correction of transition probability in pedestrians' bidirectional movement

Belbasi, Somayyeh<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, University of Zanjan, Zanjan

### Abstract

In this paper, we propose the Floor Field Cellular Automata model with correction of transition probability to neighbor cells. This model is one of the models in simulating pedestrian dynamics. We have used this correction to bidirectional flow of pedestrian in a corridor w. The open boundary condition has been applied. It is found that this correction affects pedestrian dynamics especially traveling time w in the corridor.

PACS No. 5

### مقدمه

دارد که برخی از آنها شامل معادلات دیفرانسیلی هستند که برهم کنش بین ذرات را توضیح می‌دهند و برخی دیگر قوانینی برای حرکت افراد به کار می‌برند که از میان این مدل‌های مبتنی بر قانون می‌توان به مدل نیروهای اجتماعی اشاره کرد که در این مدل، مکان و زمان کمیت‌های پیوسته هستند. در سال‌های اخیر استفاده از مدل‌های یاخته‌ای خودکار، که در آن کمیات زمان و مکان گستته می‌باشد، رونق بیشتری یافته‌اند و این مدل‌ها قادر به باز تولید ویژگی‌های جریان حرکت افراد می‌باشند [4-2]. در این مقاله از مدل یاخته‌ای خودکار Floor Field (FF) [5] استفاده می‌کنیم که از موثرترین و واقعی‌ترین مدل‌های یاخته‌ای خودکار است که در

در سال‌های اخیر، مطالعه درباره حرکت افراد به دلیل ساختار پیچیده و کاربردهای فراوانش، نظر فیزیکدانان و مهندسین را به خود جلب کرده است. از نقطه نظر مدل‌سازی، دونوع مدل برای شبیه‌سازی حرکت افراد وجود دارد: مدل‌های ماکروسکوپی یا رهیافت دینامیک شاره‌ها [1] و مدل‌های میکروسکوپی. ما در این مقاله بر روی مدل میکروسکوپی تمرکز کرده‌ایم زیرا این مدل قادر به توضیح جزئیات برهم کنش بین ذرات حتی در موقعیت‌های پیچیده نیز می‌باشد. انواع مختلفی از مدل‌های میکروسکوپی وجود

مسیر، از بین بود و این‌ها دلیل تعریف دو پدیده پخش و واپاشی است، که DFF در حضور این پدیده‌ها توسط معادله پخش با زمان تغییر می‌کند.

در مدلی که برای شبیه‌سازی به کار برده‌ایم قوانینی برای حرکت ذرات در نظر گرفته‌ایم که این قوانین به صورت موازی به همه ذرات اعمال می‌شود. این قوانین به صورت زیر می‌باشد:

- در هرگام زمانی اگر DFF هرسلول بزرگتر از صفر باشد براساس پارامترهای پخش و واپاشی تغییر می‌یابد:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) - \delta D.$$

- احتمال گذار به خانه  $j$  و برای هر ذره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_{ij} = N \exp(-k_s S_{ij}) \exp(k_d D_{ij}) (1 - \varphi n_{ij}) w_{ij} \quad (1)$$

که در آن پارامتر اشغال سلوول را با  $n_{ij}$  نشان می‌دهیم بطوریکه اگر سلوول اشغال باشد  $n_{ij} = 1$  و اگر خالی باشد برابر با صفر خواهد بود.  $w_{ij}$  نشان دهنده دیوارهای و موانع است بدین ترتیب برای دیوارهای و موانع مساوی صفر، در غیر اینصورت برابر با یک خواهد بود.  $N$  ضریب نرمالیزه کردن معاله‌ی  $p_{ij}$  است. پارامتر  $\varphi$  یک در نظر گرفته می‌شود ولی برای حالتی با ازدحام بالا مقدار آن برابر با 0.5 می‌باشد تا احتمال گذار کوچکتری به حرکت به منطقه با ازدحام بالا به دست بیاید.

پارامتر پیش‌بینی برای جلوگیری از ایجاد برخورد بین افراد در نظر گرفته شده است و با در نظر گرفتن مسیر حرکت ذراتی که در جهت مخالف حرکت می‌کنند به دست می‌آید که عددی غیرمنفی است و به این صورت تعریف می‌شود که به هر سلوول یک پارامتر  $A_{ij}^{(k)}$  نسبت می‌دهیم که در آن  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  است و جهت 1 به سمت راست، 2 به سمت بالا، 3 به سمت چپ و 4 به سمت پایین در نظر گرفته شده است شکل (1) را بیینید. بنابراین برای هر

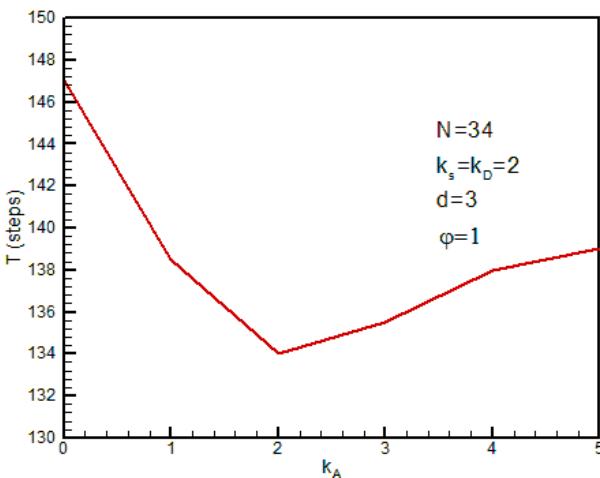
آن ذرات در خانه‌های شبکه حرکت می‌کنند یکی از ویژگی‌های این مدل، سادگی آن است. در این پژوهش با افزودن پارامتر پیش‌بینی به پارامترهای موجود در بررسی حرکت افراد در یک راهرو پرداخته ایم. در راهرو حرکت دوسویه افراد برقرار است و این پارامتر برای جلوگیری از برخورد افراد که در جهات مختلف حرکت می‌کنند، می‌باشد. پارامتر پیش‌بینی، بر اساس حرکت سایر ذرات به دست می‌آید و اثر این پارامتر بر شار خروجی افراد از راهرو در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

## توصیف مدل

برای شبیه‌سازی یک راهرو، شبکه‌ای دو بعدی در نظر می‌گیریم که به سلوول‌های کوچک تقسیم شده است. این سلوول‌ها می‌توانند یا خالی باشند یا فقط توسط یک ذره اشغال شده باشند. علاوه بر آن به هر کدام از این سلوول‌ها، دو پارامتر  $Floor Field$  نسبت می‌دهیم. یکی از این  $Floor Field$ ‌ها،  $Floor Field$  استاتیکی (SFF) است. استاتیکی هر سلوول،  $S_{ij}$ ، فاصله سلوول‌ها از خروجی را مشخص می‌کند، بطوری که سلوول‌ها با فاصله‌ی زیاد از خروجی، SFF بیشتری نسبت به ذرات نزدیک به خروجی دارند. در نتیجه SFF با گذشت زمان و حضور افراد تغییر نمی‌کند. برای پارامتر SFF ثابت جفتیدگی  $k_s \in [0, \infty)$  را در نظر می‌گیریم که میزان آگاهی ذرات از محل خروج را مشخص می‌کند.

دینامیک  $Floor Field$  هر خانه،  $D_{ij}$ . یک اثر مجازی بجا مانده از حرکت ذرات است که در لحظه اول برای همه خانه‌ها صفر است و زمانی که ذره‌ای حرکت می‌کند DFF سلوولی که ذره آن را ترک کرده یک واحد افزایش می‌یابد. یعنی پارامتر DFF با گذشت زمان و حضور افراد تغییر می‌کند. برای پارامتر DFF یک ثابت جفتیدگی  $k_d$  و دو پدیده‌ی پخش و واپاشی، با احتمال  $[0 \leq \alpha \leq 1]$  و  $[0 \leq \delta \leq 1]$  را در نظر می‌گیریم زیرا می‌دانیم که مسیر مجازی حرکت افراد با گذشت زمان می‌تواند به دلیل عبور افراد دیگر از همان مسیر پهن‌تر شود یا به دلیل عدم حرکت سایر افراد از آن

با نرخ ورود مشخصی از سمت دیگر وارد سیستم می‌شوند. دو دسته از ذرات در نظر گرفته شده اند که دسته اول از سمت چپ به راست و دسته دوم از راست به چپ در راهرو در حال حرکتند. پارامتر  $d$  در نمودارها، تعداد خانه‌هایی است که پیش روی افراد قرار دارد و افراد برای این فاصله می‌توانند پیش‌بینی را انجام دهند. در تمامی شیوه‌سازی‌ها پارامتر پخش و واپاشی برابر با ۰.۱ در نظر گرفته شده است. در شکل (3) نمودار زمان میانگین سپری شده برای ذرات از لحظه ورود تا لحظه خروج از راهرو بر حسب  $k_A$  رسم شده است. در این شکل  $N$  تعداد افراد در راهرو است.

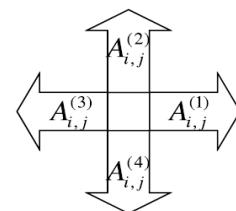


شکل 3: زمان میانگین سپری شده بر حسب  $k_A$

همانطور که در شکل (3) مشاهده می‌کنید زمانی که  $k_A$  برابر با صفر است یعنی پیش‌بینی وجود ندارد زمان میانگین سپری شده بیشترین مقدار را دارد و این به دلیل برخوردهای بیشتر در این حالت است. زمانی که مقدار  $k_A$  مخالف صفر است جریان هموارتری در راهرو وجود دارد زیرا با پیش‌بینی از برخوردها جلوگیری شده و زمان سپری شده کاهش می‌یابد البته اگر مقدار  $k_A$  از حدی بزرگتر شود زمان نیز افزایش می‌یابد.

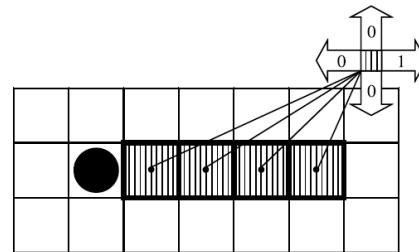
در شکل (4) نمودار زمان میانگین سپری شده بر حسب فاصله‌ای که امکان پیش‌بینی در آن وجود دارد نمایش داده شده است. در این شکل با افزایش فاصله  $d$ ، زمان سپری شده کاهش می‌یابد زیرا

خانه (j,i) چهار مقدار برای پارامتر پیش‌بینی در نظر می‌گیریم که هر کدام مربوط به یکی از راستهای حرکت است.



شکل 1: نمایش پارامتر پیش‌بینی برای یک خانه.

با یک مثال مقدارای که برای پارامتر پیش‌بینی در نظر گرفته می‌شود را بیان می‌کنیم. فرض کنید که شخصی (دایره توپر در شکل (2)) قصد دارد در گامهای زمانی بعدی از چهار خانه پارامتر پیش‌بینی در عبور کند در این صورت برای این چهار خانه پارامتر پیش‌بینی در جهت راست مقدار یک و در بقیه جهات مقدار صفر را می‌گیرد.



شکل 2: مقدار پیش‌بینی برای چهارخانه‌ی در دسترس.

با استفاده از پارامتر  $A_{ij}^{(k)}$  پارامتر دیگری به صورت  $E_{ij}^{(m)} = \sum_{m \neq k} A_{ij}^{(k)}$  تعریف می‌کنیم با این تعاریف احتمال را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$p_{i,j} = N \exp(-k_s S_{ij}) \exp(k_d D_{ij}) (1 - \varphi n_{ij}) w_{ij} \exp(-k_A E_{ij}^{(m)})$$

شبیه‌سازی را برای یک راهرو با پهنای ۱۵ سلوول و درازای ۷۵ سلوول انجام دادیم و تعداد ۳۰۰۰ گام زمانی را در نظر گرفته‌ایم که تعدادی از گام‌های اولیه را برای به تعادل رسیدن سیستم در نظر گرفته و پس از آن، کمیتهای موردنظر را اندازه‌گیری کرده‌ایم. شرایط مرزی باز را در مساله بکار برده‌ایم و ذرات پس از خروج از سیستم

همانگونه که مشاهده می‌کنید با افزایش تعداد ذرات در سیستم تعداد برخوردها بیشتر شده و حرکت ذرات به کنده صورت می‌گیرد بنابراین زمان میانگین سپری شده افزایش می‌یابد. با این حال وجود پارامتر  $k_A$  باعث کاهش زمان میانگین سپری شده می‌باشد و اختلاف بین دو حالت  $k_A = 0$  و  $k_A \neq 0$  در تعداد ذرات

بیشتر، چشمگیرتر است و کارایی بیش از پیش نمایان می‌شود. علاوه بر اینها وجود این پارامتر روند افزایشی شدید زمان سپری شده را به روندی خطی تبدیل می‌کند.

### نتیجه گیری

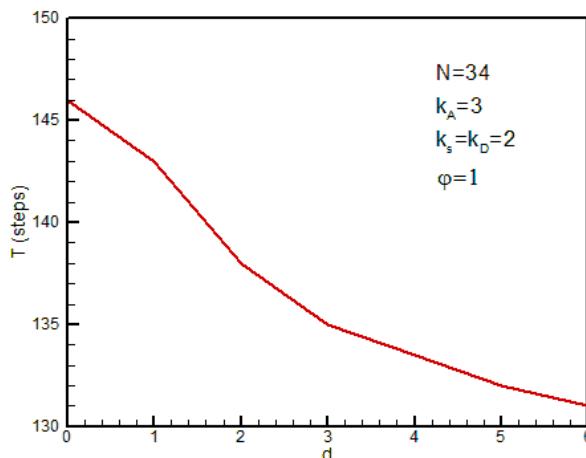
با توجه به اتفاقاتی که در سالهای اخیر در تجمع تعداد زیادی از افراد در یک مکان رخ داده و در برخی موارد منجر به تلفات جانی نیز گشته است شبیه سازی حرکت افراد موضوع حائز اهمیتی است. در این مقاله با تصحیح احتمال گذار، مدل ارائه شده همخوانی بیشتری با واقعیت دارد و نتایج نشان می‌دهد که وجود این تصحیح زمان میانگین سپری شده در حرکت دوسویه در راهرو را کاهش می‌دهد و اثر این تصحیح در چگالی‌های بالا بیشتر می‌باشد.

### مرجع‌ها

- [1] D. Helbing, "A fluid-dynamic model for the movement of pedestrians." *Complex Systems* 6 (1992) 391-415.
- [2] D. Helbing and P. Molnár, "Social force model for pedestrian dynamics." *Phys. Rev. E* 51 (1995), 4282-4286.
- [3] H. Huang and R. Geo. "Pedestrian and Evacuation Dynamics", *Phys. Rev. E* 78 (2008) 021131.
- [4] R. L. Hughes. "A continuum theory for the flow of pedestrians." *Transportation Research Part B* 36 (2002) 507-535.
- [5] A. Kirchner and A. Schadschneider. "simulation of evacuation processes", *Springer* (2002).

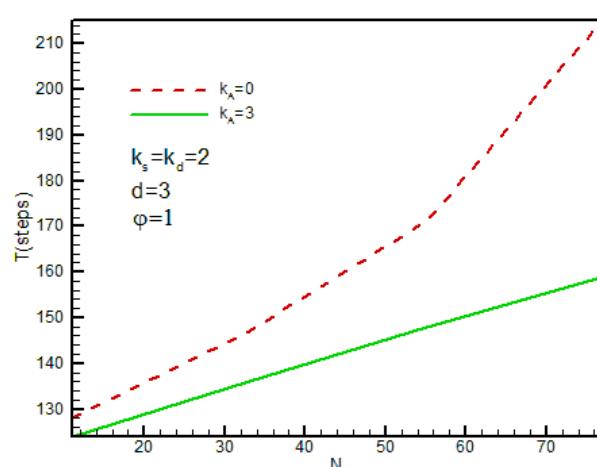
s\_belbasi@znu.ac.ir

هر چه فاصله بیشتر باشد حتی افرادی که با سرعت بالایی در حرکت هستند با داشتن فضای دید کافی قادر به تغییر مسیر حرکت و جلوگیری از برخورد با ذراتی که در جهت مخالف حرکت می‌کنند، می‌باشند.



شکل 4: زمان میانگین سپری شده بر حسب فاصله پیش بینی.

در شکل (5) به بررسی اثر چگالی ذرات بر زمان میانگین سپری شده پرداخته ایم.



شکل 5: زمان میانگین سپری شده بر حسب تعداد ذرات به ازای دو مقدار از  $.k_A$ .

## مقاومت دیفرانسیلی منفی در نانو نوارهای گرا فنی زیگزاگ

بهنیا ، سهراب<sup>۱</sup>؛ رحیمی، فاطمه<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

### چکیده

نانو نوارهای گرا فنی می توانند در ساخت ترانزیستور ها مورد استفاده قرار گیرند. برای این منظور از ویژگی مرسوم به مقاومت دیفرانسیلی منفی (قطع و وصل جریان الکتریکی) استفاده می شود. در این کار به کمک هامیلتونی تنگ بست، پدیده مقاومت دیفرانسیلی منفی در نانو نوارهای گرا فنی زیگزاگ مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج بدست آمده بیانگر وجود نواحی شبیه اهمی و نواحی با مقاومت دیفرانسیلی منفی در مشخصه ولت-آمپر نانو نوارهای گرا فنی می باشد.

## Negative differential resistance in zigzag graphene nanoribbon

Behnia, Sohrab<sup>۱</sup>; Rahimi, Fatemeh<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> Department of Physics, Urmia University of Technology, Urmia

### Abstract

*Graphene nanoribbons can be used to make transistors. To this end, negative differential resistance is commonly used. In this work, with the help of Tight-binding Hamiltonian, the negative differential resistance phenomenon in zigzag graphene nanoribbons has been studied. The results indicate that there are quasi-ohmic regions and areas with negative differential resistance in I-V characteristic of zigzag graphene nanoribbons.*

PACS No. (۷۲, ۸۱)

است که در ساختار نواری آن هیچ گاف انرژی وجود ندارد که این امر کاربرد آن را در برخی زمینه ها مانند ساخت ترانزیستورها محدود می کند. از جمله رویکردهای مناسب جهت ایجاد گاف انرژی در گرا فن تهیه نوارهای باریک از طریق کاهش پهنای صفحه گرا فن می باشد [۳-۵]. با توجه به جهت برش گرا فن دو نوع نانو نوار گرا فنی زیگزاگ و دسته صندلی قابل پیش بینی می باشد [۵-۶]. این نوارهای باریک کر بتنی به دلیل محدود شدن به یک بعد و بروز اثرات محدودیت کوانتومی، خواص الکتریکی متفاوت از فلز تا نیمه هادی را نشان می دهند. تحقیقات نشان داده است که بدون تغییر ساختاری و ایجاد

### مقدمه

گرافن نخستین ماده کربیستالی دو بعدی پایدار است که به علت دارا بودن خواص فوق العاده مانند تحرک پذیری بالای حامل های بار و رسانایی الکتریکی بالا، دارای پتانسیل بالایی جهت استفاده در کاربردهای اسپیترونیک و نانو الکتریک است. در این کربیستال دو بعدی اتم های کربن در یک شبکه لانه زنبوری اما فقط به ضخامت یک اتم با استفاده از پیوند کووالانسی به هم متصل می باشند. هیبریداسیون اتم های کربن در داخل صفحه از نوع هیبریداسیون  $sp^2$  می باشد. در حالیکه پیوند بین لایه های گرا فنی از نوع نیروهای ضعیف واندروالسی می باشد [۱-۳]. گرا فن یک شبکه فلز

$$H = H_0 + H_1 \quad (1)$$

که  $H_0$  هامیلتونی گرافن و  $H_1$  جمله مربوط به حضور میدان الکتریکی می‌باشد.

$$H_0 = \varepsilon_c \sum_i c_i^+ c_i + t_{cc} \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^+ c_j \quad (2)$$

$\varepsilon_c$  انرژی جایگاهی اتم‌های کربن و مقدار آن برابر است با  $0 \text{ eV}$  و  $t_{cc}$  انتگرال پرش بین اتم‌های کربن مجاور می‌باشد، و مقدار آن برابر است با  $t_{cc} = 2.8 \text{ eV}$ .  $c_i(c_i^+)$  عملگر خلق (نابود) الکترون در جایگاه  $i$  است  $\langle j, i \rangle$  اشاره به برهمنش نزدیک ترین همسایه‌ها دارد [۹].

$$H_1 = eE \sum_i x_i c_i^+ c_i \quad (3)$$

که در آن  $e$  بار الکتریکی،  $E$  میدان الکتریکی در طول نانو نوار و  $x_i$  موقعیت اتم  $i$  در امتداد طول نوار می‌باشد [۱۰].

### مشخصه ولت-آمپر

یک نانو نوار گرافنی زیگزاگ در حضور میدان الکتریکی خارجی در نظر گرفته شده است. برای ساختن نانو نوار گرافنی زیگزاگ شکل ۱ را در نظر می‌گیریم. همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد نانو نوار گرافنی زیگزاگ در امتداد محور  $x$  متناوب است و محدودیت فضایی در جهت  $y$  اعمال شده است. تعداد رشته‌های زیگزاگ در یک نانو نوار زیگزاگ نشان دهنده عرض نوار می‌باشد ( $N_y$ ). هم‌چنین طول نوار با شمردن تعداد اتم‌های کربن که در طول یک رشته زیگزاگ توزیع شده است تعیین می‌گردد ( $N_x$ ). بنابراین تعداد کل اتم‌ها در یک نانو نوار گرافنی زیگزاگ عبارت است از:

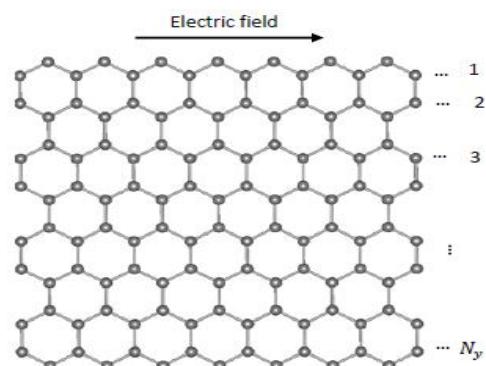
$$N_t = (N_x)(N_y) \quad (4)$$

برای بدست آوردن جریان عبوری از نانو نوار گرافنی زیگزاگ از عملگر چگالی جریان استفاده می‌شود. به این صورت که برای

باند گاف در گرافن، می‌توان از آن برای ساخت ترانزیستور استفاده کنند. برای این کار از ویژگی موسوم به مقاومت دیفرانسیلی منفی<sup>۱</sup> (قطع و وصل جریان الکتریکی) استفاده می‌کنند. مقاومت دیفرانسیلی منفی در گرافن پیش از این در مطالعات تجربی و تئوری پیش‌بینی شده است [۷-۸]. از جمله کاربردهای ترانزیستور استفاده از آن به عنوان سوئیچ‌های الکترونیکی پر سرعت در مدارهای الکتریکی می‌باشد. هدف از این مطالعه، بررسی مقاومت دیفرانسیلی منفی در مشخصه ولت-آمپر نانو نوار گرافنی زیگزاگ می‌باشد. یعنی با افزایش ولتاژ، جریان عبوری از قطعه کاهش می‌یابد. این پدیده منجر به طراحی سوئیچ‌های الکترونیکی پر سرعت، با قابلیت قطع و وصل کردن جریان شده است.

### مدل سازی ریاضی

نانو نوار گرافنی زیگزاگ در حضور میدان الکتریکی خارجی را به عنوان سیستم مورد مطالعه در نظر می‌گیریم (شکل ۱).

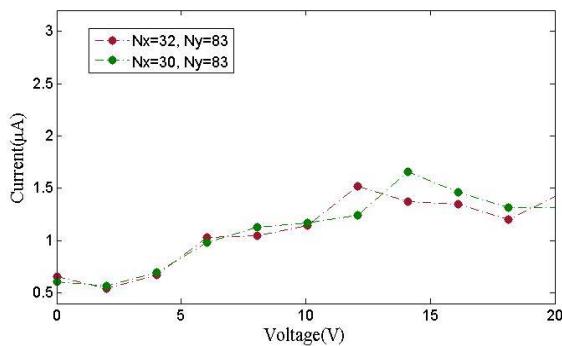


شکل ۱: نانو نوار گرافنی زیگزاگ در حضور میدان الکتریکی میدان الکتریکی خارجی

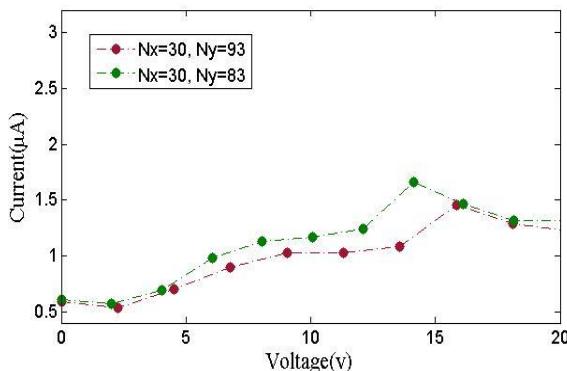
هامیلتونی سیستم با در نظر گرفتن بر هم کنش نزدیک ترین همسایه‌ها با استفاده از تقریب تنگ بست و برای اوریتال‌های  $\Pi$  چنین نوشته می‌شود:

<sup>۱</sup>Negative differential resistance

شبیه اهمی<sup>۳</sup> و شبیه نمودار  $I-V$  متناظر با مقاومت اهمی می باشد. سپس با افزایش بیشتر ولتاژ جریان عبوری از نانو نوار کاهش می یابد یعنی سیستم مقاومت دیفرانسیلی منفی از خود نشان می دهد. برای نانو نوار با عرض 30 (W30) قله مقاومت دیفرانسیلی منفی در 14 ولت و برای نانو نوار با عرض 32 (W32) قله مقاومت دیفرانسیلی منفی در 12 ولت مشاهده می شود. همان گونه که شکل ۲ نشان می دهد این قله برای نانو نوار با طول 83 در 14 ولت و برای نانو نوار با طول 93 در 15 ولت مشاهده می گردد.



شکل ۲: مشخصه ولت-آمپر برای نانو نوارهای گرافنی زیگزاگ با عرض های مختلف



شکل ۳: مشخصه ولت-آمپر برای نانو نوارهای گرافنی زیگزاگ با طول های مختلف

جریان عبوری از یک اتم  $i$  به نزدیک ترین همسایه ها  $j$  می توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_i(t) &= \frac{d(en_i(t))}{dt} = \frac{-ie}{\hbar} [c_i^+ c_i, H] \\ &= \frac{-ie}{\hbar} (t_{i,j} c_i^+ c_j - t_{j,i} c_j^+ c_i) \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $n_i(t)$  عملگر چگالی ذره در تصویر هایزنبرگ می باشد:

$$n_i(t) = e^{iHt} n_i e^{-iHt} \quad \text{و} \quad n_i(t) = c_i^+ c_i \quad (6)$$

که

$$c_i = \frac{-i}{\hbar} [c_i, H] = \frac{-i}{\hbar} \left( \varepsilon_i c_i - eE x_i c_i - \sum_j t_{ij} c_j \right) \quad (7)$$

برای محاسبه جریان کل عبوری از شبکه می توان نوشت:

$$I(t) = \sum_i I_i(t) \quad (8)$$

در شکل ۲ و ۳ مشخصه ولت-آمپر برای نانو نوارهای با ابعاد مختلف رسم شده است. همان طوری که نمودارها نشان می دهند برای همه شبکه ها نواحی ای یافت می شود که برای آن ها شبیه

جریان نسبت به ولتاژ منفی می باشد ( $\frac{dI}{dV} < 0$ ). در این نواحی با افزایش ولتاژ، جریان عبوری از نانو نوار در آغاز افزایش و سپس با افزایش بیشتر ولتاژ، جریان عبوری از نانو نوار کاهش می یابد که این منجر به بروز مقاومت دیفرانسیلی منفی در نانو نوار گرفته است. در شکل ۲ نیز به بررسی همین پدیده در نانو نوارهای گرافنی با طول های مختلف پرداخته شده است. برای همه شبکه ها محدوده تغییرات ولتاژ از 0 ولت تا 20 ولت می باشد. با افزایش ولتاژ اعمالی از 0 ولت تا 12 ولت، برای نانو نوار با عرض 28 (W28)، و هم چنین از 0 ولت تا 14 ولت برای نانو نوار با عرض 30 (W30)، مقدار جریان در این نواحی به صورت شبیه خطی<sup>۴</sup> افزایش می یابد. در این نواحی رفتار سیستم به صورت

Quasi-ohmic <sup>۳</sup>

Quasi-linearly <sup>۴</sup>

## نتیجه گیری

در این مطالعه مشخصه ولت-آمپر نانو نوارهای گرا فنی زیگزاگ با طول و عرض های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بدست آمده بیانگر وجود نواحی شبیه اهمی و ناحیه هایی با مقاومت دیفرانسیلی منفی می باشد. هم چنین نتایج نشان می دهد که مقدار جریان و مکان قله مقاومت دیفرانسیلی منفی برای نانو نوار های مختلف متفاوت است.

## مرجع ها

- [۱] Geim, A. K. and Novoselov, K. S; “The rise of graphene”; *Nature materials* ۶, ۱۸۳–۱۹۱ (۲۰۰۷).
- “Two-dimensional gas of massless dirac fermions [۲] Novoselov, K. et al; in graphen”; *Nature* ۴۳۸, ۱۹۷–۲۰۰ (۲۰۰۵).
- [۳] Novoselov, K. S. et al;“ Electric field effect in atomically thin carbon films”; *Science* ۳۰۶, ۶۱۶–۶۱۹ (۲۰۰۴).
- [۴] M. Fujita, K. Wakabayashi, K. Nakada, and K. Kusakabe, J;“Peculiar localized state at zigzag graphene edge”; *Journal of the Physical Society of Japan* ۶۰, ۱۹۲۰ (۱۹۹۷).
- [۵] K. Nakada, M. Fujita, G. Dresselhaus, and M. S. Dresselhaus; “Edge state in graphene ribbons”; *Physical Review B* ۵۴, ۱۷۹۰۴ (۱۹۹۶).
- [۶] M. Ezawa“Peculiar width dependence of the electronic properties of carbon nanoribbons”; *Physical Review B* ۷۳, ۴۵۴۳۲ (۲۰۰۶).
- [۷] K. S. Kim, T.-H. Kim, A. L. Walter, T. Seyller, H. W. Yeom, E. Rotenberg, and A. Bostwick;“Visualizing Atomic-Scale Negative Differential Resistance in Bilayer Graphene”; *Physical review letters* ۱۱, ۳۶۸۰۴ (۲۰۱۳).
- [۸] V. Nam Do and P. Dollfus; “Negative differential resistance in zigzag-edge graphene nanoribbon junctions”; *Journal of Applied Physics* ۱۰۷, ۰۶۳۷۰۰ (۲۰۱۰).
- [۹] A. C. Neto, F. Guinea, N. M. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim; “The electronic properties of graphene”; *Reviews of modern physics* ۸۱, ۱۰۹ (۲۰۰۹).
- [۱۰] J. Jung and A. H. MacDonald; “Magnetolectric coupling in zigzag graphene nanoribbons”; *Physical Review B* ۸۱, ۱۹۵۴۰۸ (۲۰۱۰).

## گذار فاز کوانتومی در مدل هایزنبرگ $XXZ$ اسپین $1/2$ با استفاده از سنجه منفیت

بهمنی نصروانی حسن<sup>\*</sup> ، نجارباشی قادر

دانشگاه محقق اردبیلی ، گروه فیزیک ، انتهای خیابان دانشگاه ، اردبیل

### چکیده

در این مقاله ، گذار فاز کوانتومی مدل هایزنبرگ  $XXZ$  اسپین  $1/2$  در حضور میدان مغناطیسی را بررسی می کنیم. از سنجه منفیت برای بررسی میزان درهم تندیگی حالت ها استفاده می کنیم. مغناطش و یا پذیرفتاری مغناطیسی را به عنوان پارامتر نظم به کار می بریم. دو حالت  $J = 1$  و  $J = -1$  را جداگانه بحث کرده و با هم مقایسه می کنیم.

### *Quantum phase transition in XXZ spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg model using Negativity measure*

Bahmani Nasravani Hassan\* ; Najarbashi Ghader,

University of Mohaghegh Ardabili , Department of Physics

### Abstract

In this paper we investigate the quantum phase transition of the  $XXZ$  spin- $\frac{1}{2}$  Heisenberg model in presence of magnetic field term. To investigate the entanglement of states, we use of negativity as a measure to detect of states. We use the magnetization or magnetic susceptibility as a order parameter. We separately discuss  $J = 1$  and  $J = -1$  cases and compare together.

### PACS NO.

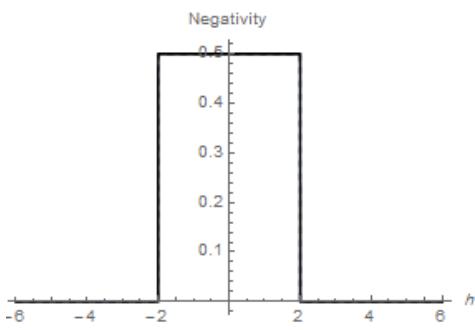
است. با تغییر یک پارامتر کنترل غیرگرما بی از قبیل فشار ، میدان مغناطیسی یا ترکیب شیمیایی این گذارها که موسوم به گذار فاز کوانتومی است حاصل می شود. پس نظم سیستم تنها توسط افت و خیزهای کوانتومی که ریشه در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دارند به هم می خورد [۱] . حوزه جدیدی از تحقیقات به ارتباط بین درهم تندیگی موضعی در سیستم های همبسته یک بعدی و وجود گذار فاز های کوانتومی و مقیاس بندی مربوط به نقاط بحرانی کوانتومی اشاره دارد [۲-۳] . بعضی مطالعات عددی و تحلیلی از درهم تندیگی و منفیت ا در مدل هایزنبرگ اسپین ۱ دوخطی - چهار خطی روی سیستم های خشی و دوخطی

### مقدمه

گذارهای فازی نقش مهمی در طبیعت ایفا می کنند . جوش آمدن آب یا ذوب شدن یخ نمونه هایی از گذار فاز هستند. جهان پیرامون ما نیز می تواند از چندین گذار فاز عبور کرده باشد. گذارهای فاز در اثر تغییر یک پارامتر کنترل خارجی به وجود می آید. ویژگی رایج آنها این است که تغییر کیفی در خواص سیستم به وجود می آید. گذار فاز هایی که در طبیعت داریم در دماهای متناهی اتفاق می افتد و نظم ماکروسکوپی آنها به وسیله افت و خیزهای گرمایی از بین می رود. در طول سالهای اخیر نوع متفاوتی از گذار فازها که در دمای صفر مطلق اتفاق می افتد توجه فیزیکدان ها را جلب کرده

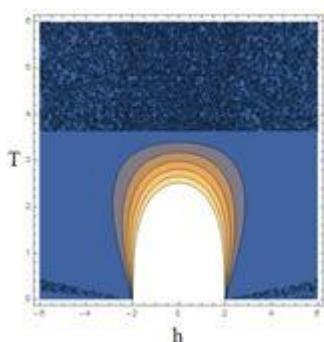
<sup>1</sup> Negativity

$J = -1$  برای دو ذره رسم شده است. برای دو مقدار  $h = 2$  و  $h = -2$ ، درهم تندیگی ناپیوسته است.



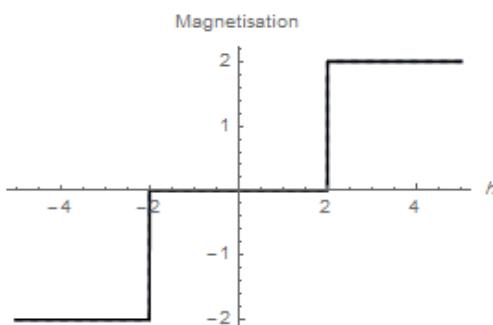
شکل ۱ - نمودار منفیت بر حسب پارامتر میدان  $h$  برای دو ذره

نمودار سه بعدی منفیت بر حسب پارامترهای  $h$  و  $T$  ه ازای  $J = 1$  و  $J = -1$  نیز در زیر رسم شده است که هر دو یکسان هستند.



شکل ۲ - نمودار سه بعدی منفیت بر حسب  $h$  و  $T$  برای دو ذره

با استفاده از رابطه  $\chi_B = \frac{\partial \langle S^z \rangle}{\partial B}$  مغناطش به ازای دو مقدار  $J = 1$  و  $J = -1$  در حد دماهای بسیار کوچک در شکل ۳ رسم شده است که هردو برهم منطبق هستند.



شکل ۳ - نمودار مغناطش بر حسب میدان  $h$  برای دو ذره

دایمیری و اسپین های بالاتر انجام شده است [۴-۵-۶]. ما در اینجا برای به دست آوردن درهم تندیگی گرمایی مدل هایزنبیرگ اسپین  $1/2$  از منفیت استفاده می کنیم.

### مدل هایزنبیرگ XXZ اسپین $1/2$

مدل هایزنبیرگ XXZ اسپین  $1/2$  همسانگرد یک بعدی در حضور میدان مغناطیسی به صورت زیر است :

$$H = \sum_{i=1}^N J(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta(\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) - h \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \quad (1)$$

جمله  $J$  ثابت جفت شدگی ، و  $\Delta$  پارامتر ناهمسانگردی است .  $h$  میدان مغناطیسی خارجی و  $\sigma_i^{x,y,z}$  ماتریس های پائولی هستند. شرایط مرزی را تناوبی در نظر می گیریم به طوری که  $N$  تعداد کل مکان ها است. در حالت تعادل گرمایی ، حالت سیستم به وسیله ماتریس چگالی  $\rho(T) = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$  ، که  $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$  تابع پارش سیستم است تعیین می شود. منفیت به صورت زیر تعریف می شود :

$$N(\rho) = \sum_i |\mu_i| \quad (1)$$

که  $\mu_i$  ها ویژه مقادیر منفی  $\rho^{T_2}$  هستند که  $T_2$  مغناطش را به عنوان پارامتر نظم سیستم در نظر می گیریم. مغناطش ، مقدار چشم داشتی عملگر  $S^Z$  نسبت به ماتریس چگالی برابر است با :

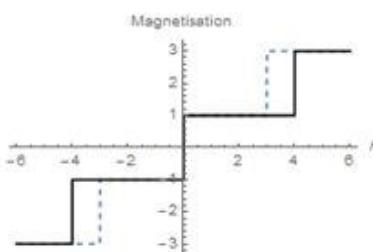
$$\langle S^Z \rangle = \frac{\partial F}{\partial B} \quad (2)$$

انرژی آزاد سیستم است و آن گاه پذیرفتاری مغناطیسی سیستم می شود :

$$\chi_B = \frac{\partial \langle S^Z \rangle}{\partial B} \quad (3)$$

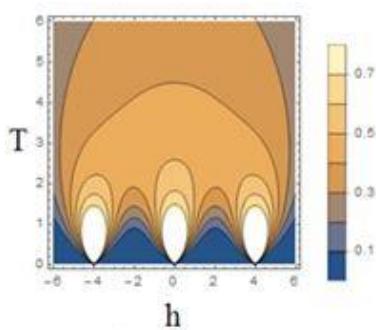
در ابتدا ماتریس چگالی گرمایی به ازای دو ذره را محاسبه می کنیم . تمام محاسبات را به ازای  $\Delta = 1$  انجام می دهیم. از رابطه (۱) منفیت را به دست می اوریم. شکل ۱ نمودار منفیت بر حسب میدان مغناطیسی  $h$  در حد دماهای کوچک به ازای  $J = 1$  و

خط ممتد) برای سه ذره در شکل ۶ رسم شده است . به ازای هر دو  $J = 1$  و  $J = -1$  در میدان مغناطیسی صفر گذار فاز داریم .

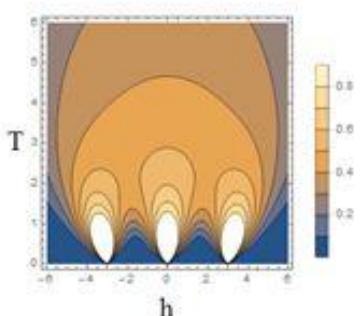


شکل ۶ - نمودار مغناطش بر حسب  $h$  به ازای  $J = 1$  (خط چین) و  $J = -1$  (خط ممتد) برای سه ذره

به ازای  $J = 1$  در میدان های  $h = 3$  و  $h = -3$  و به ازای  $J = -1$  در میدان های  $4$  و  $-4$  و  $h = 0$  گذار فاز اتفاق می افتد . نمودار سه بعدی پذیرفتاری مغناطیسی  $\chi_B$  به ازای  $J = 1$  و  $J = -1$  برای سه ذره بر حسب پارامترهای  $h$  و  $T$  نیز در زیر رسم شده است که با رفتار منفیت همخوانی دارند.

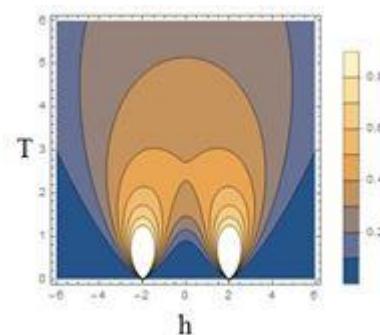


شکل ۷ - پذیرفتاری مغناطیسی بر حسب  $h$  و  $T$  به ازای  $J = 1$  برای سه ذره



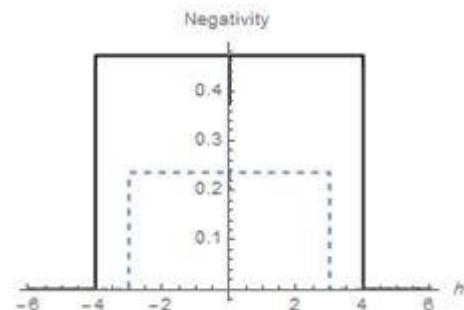
شکل ۸ - پذیرفتاری مغناطیسی بر حسب  $h$  و  $T$  به ازای  $J = -1$  برای سه ذره

همان گونه که می بینیم در میدان مغناطیسی به ازای  $h = 2$  و  $h = -2$  گذار فاز کوانتومی رخ می دهد . نمودار سه بعدی پذیرفتاری مغناطیسی  $\chi_B$  به ازای  $J = 1$  و  $J = -1$  بر حسب پارامترهای  $h$  و  $T$  نیز در شکل ۴ رسم شده است که دقیقا نمودارهای پارامترنظم و منفیت همخوانی دارند.



شکل ۴ - پذیرفتاری مغناطیسی بر حسب  $h$  و  $T$  به ازای  $J = 1$  برای دو ذره

حال ماتریس چگالی گرمایی را به ازای سه ذره محاسبه می کنیم . در شکل ۵ نمودار منفیت بر حسب میدان مغناطیسی  $h$  در حد دماهای کوچک به ازای  $J = 1$  و  $J = -1$  رسم شده است . برای دو مقدار  $h = 3$  و  $h = -3$  به ازای  $J = 1$  (نمودار خط چین) و  $J = -1$  (نمودار خط ممتد) درهم تنیدگی ناپیوسته است.



شکل ۵ - نمودار منفیت بر حسب  $h$  به ازای  $J = 1$  (خط چین) و  $J = -1$  (خط ممتد) برای سه ذره

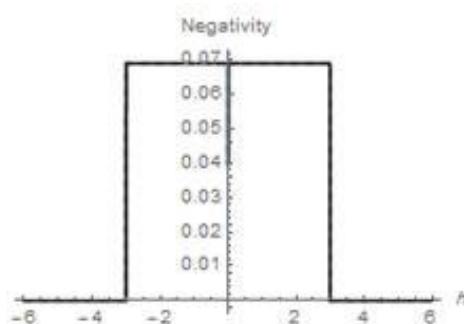
با استفاده از رابطه (۳) ، مغناطش بر حسب میدان مغناطیسی به ازای دو مقدار  $J = 1$  (نمودار خط چین) و  $J = -1$  (نمودار

در این مقاله گذار فاز کوانتومی مربوط به مدل هایزنبرگ HHZ اسپین  $1/2$  همسانگرد یک بعدی در حضور میدان مغناطیسی با استفاده از سنجه درهم تندگی منفیت و مغناطش و یا پذیرفتاری مغناطیسی به عنوان پارامتر نظم بررسی شد و مشاهده شد که منفیت و پارامترهای نظم همخوانی دارند. درمورد حالت سه ذره و ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی ذره سوم به ازای دو مقدار  $J = 1$  و  $J = -1$  نتایج یکسانی به دست آمد ولی نقاط گذار متفاوتی حاصل شد ولی در مورد دو ذره به ازای دو مقدار  $J = 1$  و  $J = -1$  نتایج کاملاً یکسانی به دست آمد.

#### مراجع

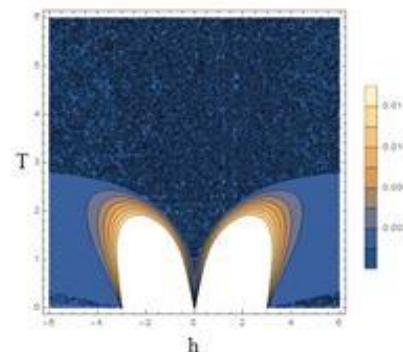
- [1] Matthias Vojta Rep. Prog. Phys. **66** (2003) 2069–2110
- [2] Larsson D and Johannesson H 2005 Phys. Rev. Lett. **95** 196406
- [3] Yang C, Kocharyan A N and Chiang Y L 2000 J. Phys.: Condens. Matter **12** 7433
- [4] Schollwöck U et al 1996 Phys. Rev. B **53** 3304
- [5] Sun Z, Wang X and Li Y Q 2005 New J. Phys. **7** 83
- [6] Zhang G F and Li S S 2006 Solid State Commun. **138** 17

ماتریس چگالی کاهش یافته را به ازای ذره سوم حساب می‌کنیم. در شکل ۹ نمودار منفیت بر حسب میدان مغناطیسی  $h$  در حد دماهای کوچک به ازای  $J = 1$  و  $J = -1$  برای ماتریس چگالی  $h = 3$  کاهش یافته شامل دو ذره رسم شده است. برای دو مقدار  $h = 3$  و  $h = -3$ ، درهم تندگی ناپیوسته است.



شکل ۹ - نمودار منفیت بر حسب پارامتر میدان  $h$  برای ماتریس چگالی کاهش یافته شامل دو ذره

نمودار سه بعدی منفیت به ازای  $J = 1$  و  $J = -1$  بر حسب پارامترهای  $h$  و  $T$  نیز در شکل ۱۰ رسم شده است که هردو بر هم منطبق هستند.



شکل ۱۰ - نمودار سه بعدی منفیت به ازای  $J = 1$  و  $J = -1$  بر حسب  $h$  برای ماتریس چگالی کاهش یافته شامل دو ذره

نمودارهای مغناطش و پذیرفتاری مغناطیسی دقیقاً مشابه شکل های ۶، ۷ و ۸ به ازای سه ذره است.

#### نتیجه گیری

# بررسی خواص مغناطیسی و الکترونی نانو صفحه زیگزاگ آلومینیم نیتراید آلایش یافته با عناصر واسطه

بیرانوند ، مهرزاد<sup>۱</sup>؛ مولاروی ، طبیه<sup>۱</sup>؛ بدیعیان باغسیاھی ، فاطمه<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شهرورد

<sup>۲</sup>گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشکده کوثر بجنورد

## چکیده

در این پژوهش خواص الکترونی و مغناطیسی نانو صفحه زیگزاگ (۶-۰) آلومینیم نیتراید خالص و ۴٪ آلایش یافته با عناصر واسطه در مکان وسط ساختار با استفاده از رهیافت نظریه تابعی چگالی اسپینی و تقریب شبیه تعمیم یافته GGA توسط بسته محاسباتی SIESTA مطالعه شده است. چگالی حالت‌های اسپینی قطبیده نشان می‌دهد که نانو صفحه زیگزاگ (۶-۰) خالص، یک نیمرسانای غیر مغناطیسی است درحالی که نانو صفحه‌های آلایش یافته با عناصر واسطه، نیمرسانای مغناطیسی رقیق شده یا نیم خلاراند. بیشترین گشتاور مغناطیسی محاسبه شده کل ساختار مربوط به حالت آلایش یافته با Fe می‌باشد. درحالی که بیشینه سهم گشتاور مغناطیسی عناصر واسطه برای اتم Mn به دست آمده است. با توجه به نتایج این تحقیق، نانو صفحه آلومینیم نیتراید آلایش یافته با عناصر واسطه به عنوان کاندیدای مناسب جهت کاربرد در قطعات اسپین ترونیکی پیشنهاد می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نانو صفحه، آلومینیم نیتراید، نظریه تابعی چگالی، عناصر واسطه، اسپین ترونیک

## Study of the magnetic and electronic properties of AlN zigzag nanosheet doped with transition metals

Mehrzed, Biranvand<sup>1</sup>; Tayebeh, Movlarooi<sup>1</sup>, Fatemeh, Badieian Baghsiyahi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Shahrood University of Technology

<sup>2</sup>Department of Physics, Faculty of sciences, Kosar University of Bojnord

### Abstract

In this work, the electronic and magnetic properties of pure Zigzag (6-0) AlN nano sheet and doped with % 4 of transition metals in the center of structure has been studied by spin polarized density functional theory using the generalized gradient approximation (GGA) with SIESTA computational code. The spin polarized density of states calculation revealed that while the pure (6-0) AlN nanosheet is a non magnetic semiconductor, the doped (6-0) AlN nanosheets with the transition metals are diluted magnetic semiconductors or half metals. The maximum total magnetic moment is obtained for Fe doped (6-0) AlN nanosheet while the highest transition metal magnetic moment is obtained for Mn. Our results show that the (6-0) AlN nanosheets doped with transition metals can be used as a spin polarized electron source for the spintronic devices in the future.

Keywords: nano sheet, AlN, DFT, transition metals, spin polarized

درجه آزادی الکترون به طور همزمان در آن استفاده می‌شود [۲].

مقدمه

یک مولفه‌ی مهم دراستفاده از اسپین حامل‌ها در قطعات اسپین-

در سال‌های اخیر تحقیق بر روی مواد گرافنی دو بعدی به دلیل

ترونیکی، تزریق اسپین قطبیده از یک منبع فرو مغناطیس است. یک

خواص الکترونیکی قابل توجه آنها رشد سریعی را در زمینه فیزیک

روش تزریق اسپین استفاده از مواد فرومغناطیس و عناصر واسطه‌ای

نیمرساناهای داشته است [۱]. الکترون دارای دو درجه ازادی بار و

مانند Ni، Fe، Co، Mn، V، Cr، Cu، و Ti است که تراز آنها

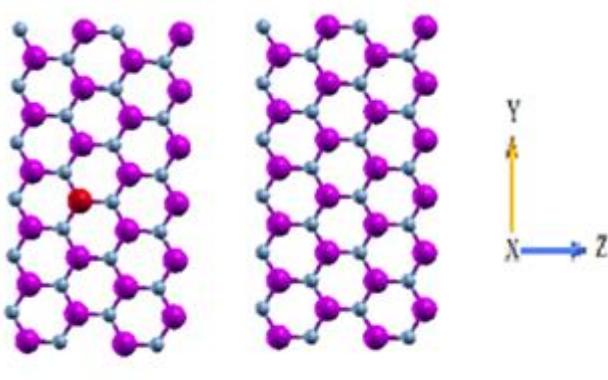
اسپین است که هر کدام از این درجات آزادی به طور جداگانه در

در حال پرشدن است.

فیزیک نیمرساناهای و مغناطیس استفاده می‌شوند. اسپین ترونیک

ناحیه اتصال فیزیک نیمرساناهای و مغناطیس می‌باشد که هر دو

خلا حدود ۱۲ آنگستروم در نظر گرفته شده است. در ابتدا این ساختار بهینه شده است تا پایدارترین ساختار با بهترین فاصله که همان فاصله تعادلی است به دست آید. سپس اتم‌های واسطه در موقعیت وسط نانوصفحه همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود به جای اتم Al جایگزین شده‌اند. در شکل ۱ موقعیت عناصر واسطه جایگزین شده در مکان اتم Al نشان داده شده است.



شکل ۱ : (الف) نانوصفحه خالص زیگزاگ (۶-۰) AlN و (ب) نانوصفحه آلایش یافته با عناصر واسطه. (Al=Nبنفش، N=آبی، عنصر واسطه = قرمز).

## بحث و تابع

در جدول ۱ سهم گشتاور مغناطیسی کل ساختار و همچنین سهم گشتاور مغناطیسی عناصر واسطه Cu، Fe، Ti، Mn، Co، V، Cr، Ni، Al، N در نانو صفحه آلایش یافته نشان داده شده است. نمودار گشتاور مغناطیسی کل ساختار و همچنین سهم گشتاور مغناطیسی عناصر واسطه در نانوصفحه آلایش یافته AlN (۶-۰) در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود بیشترین گشتاور کل ساختار مربوط به حالت آلایش با Fe است. همچنین بیشینه سهم گشتاور مغناطیسی عناصر واسطه مربوط به اتم Mn می‌باشد.

در این قسمت به بررسی چگالی حالت‌های نمونه‌های آلایش یافته می‌پردازیم. برای مقایسه و درک بهتر اثر آلایش عناصر واسطه بر روی چگالی حالت‌ها، در شکل ۳ نمودار چگالی حالت‌ها برای نمونه خالص است رسم شده است.

طیف وسیعی از مواد نیمرسانا با آلایش عناصر واسطه (عناصر مغناطیسی) وجود دارند که این مواد را عموماً به عنوان نیمرسانای مغناطیسی رقیق DMS می‌شناسند. آلایش ترکیبات گروه (III-V) با یون‌های مغناطیسی نیز از موضوعات قابل توجه در مطالعات محققان در زمینه DMS هاست. نیمرساناهای مغناطیسی رقیق شده غالباً نیمرسانایی از گروه (III-V) و گروه (II-VI) جدول تناوبی می‌باشند که با عناصر مغناطیسی واسطه رقیق شده‌اند [۳]. AlN از نیمرساناهای گروه (III-V) است که از خصوصیات منحصر به فرد و مفید آن می‌توان به گاف نواری بزرگ ( $\frac{6}{2}$  eV) آن اشاره کرد که باعث افزایش جذب در خواص اپتیکی، الکترونیکی و فوتوالکترونیکی می‌شود [۴ و ۵]. علاوه بر این AlN ماده‌ای با خواص فیزیکی بسیار عالی نظیر هدایت حرارتی، مقاومت الکتریکی و پایداری حرارتی بالا و ضریب انبساط حرارتی، ثابت دی الکتریک و چگالی پایین است. همچنین خواص مکانیکی مناسبی همچون مقاومت سایشی بالا و سختی قابل قبول دارد [۶ و ۷]. نیمرساناهای مغناطیسی رقیق شده بر پایه نانوساختارهای AlN کاربرد گسترده‌ای در صنعت اسپین‌ترونیک دارند. به همین دلیل در این پژوهش به بررسی خواص الکترونی و مغناطیسی نانوصفحات آلایش یافته AlN با عناصر واسطه پرداخته‌ایم.

## روش محاسبات

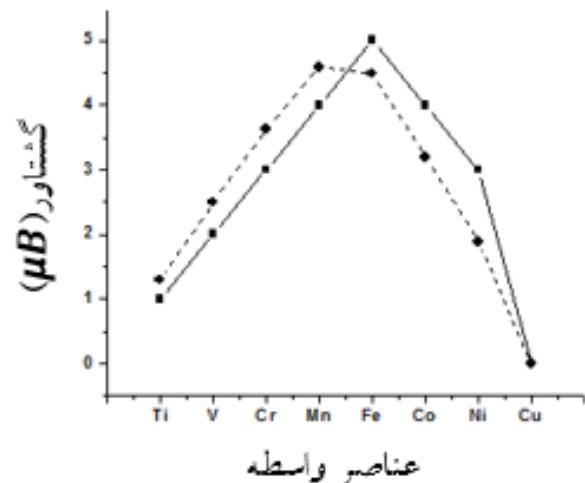
هدف اصلی این پژوهش بررسی اثر ناخالصی عناصر واسطه آلایش یافته در وسط نانوصفحه AlN (۶-۰) است که محاسبات مربوطه، بر حسب نظریه تابع چگالی، توسط بسته محاسباتی siesta انجام شده است. در این محاسبات از تقریب شب تعمیم یافته (GGA) استفاده شده است. مقدار انرژی قطع بهینه شده  $600\text{ Ry}$  و بردار نقاط  $K_{4\times 4\times 4}$  در نظر گرفته شده است. عناصر واسطه در موقعیت وسط نانوصفحه (۶-۰) AlN که در راستای Z  $1\times 1\times 2$ ، دو برابر شده است جایگزین شده‌اند. به منظور جلوگیری از برهم کنش‌های بین صفحات در راستای x

جدول ۱: گشتاور مغناطیسی کل ساختار و همچنین سهم گشتاور مغناطیسی عناصر واسطه بر حسب مگتون بوهر در نانوصفحه آلایش یافته (۶۰)

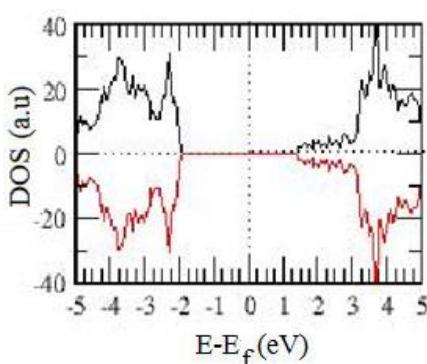
آلاینده گشتاور مغناطیسی ( $\mu B$ )	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu
$\mu_{Al}$	-۰/۰۵	-۰/۰۰۵	۰/۰۴	۰/۰۶۷	۰/۱۸۰	۰/۲۱۵	۰/۱۹۲	۰/۰۰۲
$\mu_N$	-۰/۲۵	-۰/۶۴	-۰/۷۷	-۰/۶۵	۰/۳۳	۰/۵۹۶	۰/۹۲	۰/۰۰۵
$\mu_{TM}$	۱/۳۰۲	۲/۶۵۷	۳/۶۳	۴/۵۸۸	۴/۴۹۱	۳/۱۹۳	۱/۸۸۳	-۰/۰۰۷
$\mu_{total}$	۱	۲	۳	۴	۵	۴	۳	۰

های اسپینی قطبیده نشان می‌دهد که نانوصفحه زیگزاگ (۶۰) خالص نیمرسانای غیر مغناطیسی است در حالی که نانوصفحه آلایش یافته با عناصر واسطه نیمرسانای مغناطیسی رقیق شده یا نیم فلز است. با توجه به نتایج به دست آمده در شکل ۴، همانطور که مشاهده می‌شود با ۴٪ آلایش عناصر واسطه Fe, Mn, Co, Ti, Cr در ساختار نانوصفحه AlN زیگزاگ (۶۰) به دلیل عدم تقارن چگالی حالات در اسپین بالا و اسپین پایین، رفتار نیمرسانای مغناطیسی از خود نشان می‌دهند. علاوه بر این چگالی حالت‌های اسپینی قطبیده نشان می‌دهد که نانوصفحه زیگزاگ (۶۰) با آلایش ۴٪ از اتم‌های V و Ni جایگزین شده ساختار خاصیت نیم‌فلزی با ۱۰٪ درصد قطبش اسپینی و نانوصفحه آلایش یافته با Cu غیر مغناطیسی می‌باشد. بنابراین با توجه به نتایج این تحقیق، نانوصفحه آلومینیم نیتراید آلایش یافته با Ti, Mn, Co, Fe, V, Cr, Ni، به عنوان کاندیدای مناسب جهت کاربرد در قطعات اسپین‌ترونیکی پیشنهاد می‌شود.

به منظور بررسی و تعیین پایدارترین نمونه، انرژی تشکیل نمونه‌های



شکل ۲: نمودار گشتاور مغناطیسی کل ساختار (منحنی خط پر) و همچنین سهم گشتاور مغناطیسی عناصر واسطه (منحنی خط چین) در نانوصفحه آلایش یافته (۶۰) AlN بر حسب افزایش عدد اتمی عناصر واسطه است.



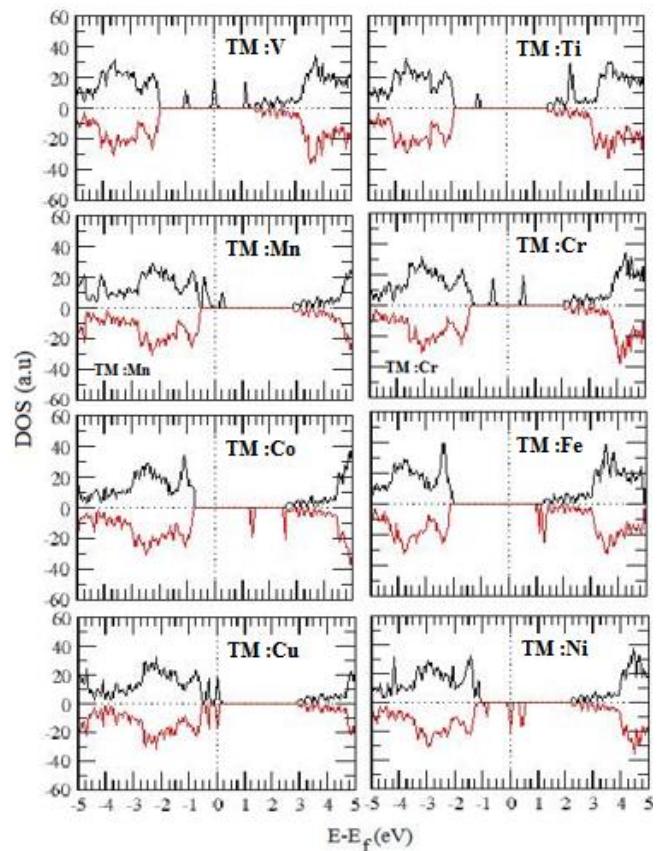
شکل ۳: چگالی حالت اسپین بالا و پایین نمونه خالص AlN زیگزاگ (۶۰)

همانگونه که مشاهده می‌شود در حالت خالص، چگالی حالت‌های اسپین بالا و پایین کاملاً متقارن هستند و بنابراین همانطور که انتظار می‌رود گشتاور مغناطیسی کل ساختار صفر است. نمودار چگالی حالت‌های اسپین بالا و پایین برای هر یک از نمونه‌های آلایش یافته در شکل ۴ رسم شده است. همانطور که نمودارها نشان می‌دهند با آلایش عناصر واسطه در نانوصفحه AlN زیگزاگ (۶۰) شاهد عدم تقارن در چگالی حالت‌های اسپین بالا و پایین در اطراف تراز فرمی هستیم. این عدم تقارن با توجه به گشتاورهای ایجاد شده بیانگر ایجاد قطبش اسپینی ناشی از هیبریداسیون در لایه ظرفیت عناصر واسطه است. بررسی‌ها نشان می‌دهد که این حالت‌های قطبش در نوار ظرفیت در حالت‌های اسپینی بالا و در نوار رسانش در حالت‌های اسپینی پایین ایجاد می‌شود. چگالی حالت-

جدول ۲: مقادیر انرژی تشکیل نانوصفحه Al N (۶۰) آلایش یافته با غلظت ۴٪ با عنصر واسطه در وسط ساختار

آلینده	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu
انرژی	۰,۱۶	۰,۹۵	۴,۲۵	۴,۲۶	۱,۱۰	۱,۳۹	۱,۸۱	۴,۵۳
تشکیل								

مغناطیسی از عناصر واسطه می‌تواند به طور عمدہ با جایگزینی اتم‌های Al در ساختار نانوصفحه AlN خواص مغناطیسی را بوجود آورد. روند تغییرات با روند پیش‌بینی شده مشابه است. بیشترین گشتاور مغناطیسی محاسبه شده کل ساختار مربوط به حالت آلایش Fe می‌باشد. در حالی که بیشینه سهم گشتاور مغناطیسی عناصر واسطه برای اتم Mn بدست آمده است. درنتیجه می‌توان گفت که آلایش دادن ساختار با اتم Mn در مکان Al انتخاب خوبی برای استفاده در قطعات اسپین‌ترونیک است. با توجه به مقادیر محاسبه شده انرژی تشکیل برای ساختار آلایش یافته با عناصر واسطه، پایدارترین ساختار، مربوط به آلایش نانوصفحه با اتم Ti به دست آمد.



شکل ۴: چگالی حالت‌های کلی نانوصفحه AlN زیگزاگ (۶۰) آلایش یافته در موقعیت وسط ساختار با عناصر واسطه

- [۱] U. Treske , F. Ortmann , B. Oetzel , K. Hannewald and F. Bechstedt , Electronic and transport properties of graphene nanoribbons , Phys. Status Solidi A 207, No. 2 , 304–308 (2010)
- [۲] M. SHIRAI SHI , Graphene spintronics , Woodhead Publishing Limited , Pages 324-340 (2014)
- [۳] Zhang, C.W. and Wang, P.J. Tuning electronic and magnetic properties of AlN nanosheets with hydrogen and fluorine: First-principles prediction. Physics Letters A, 375(41), (2011) , pp.3583-3587
- [۴] Du, A.J., Zhu, Z.H., Chen, Y., Lu, G.Q. and Smith, S.C.. First principle studies of zigzag AlN nanoribbon. Chemical physics letters, 469(1-3), (2009) , pp.183-185
- [۵] Somayeh Faghizadeh, Nasser Shahtahmasebi,Mahmood Rezaee Roknabadi, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures (2017),1-19.
- [۶] Slack, G.A, Nonmetallic Crystals with High Thermal Conductivity . J.Phys .Chem . Solids.34. (1973) 321-335
- [۷] Strite, S . and H . Morkoc, Gallium Nitride, Aluminum Nitride and Indium Nitride: A Review .J . Vac. Sci Technol. B, 10(4). (1992) 1237-1266.
- [۸] Soler, J.M., Artacho, E., Gale, J.D., García, A., Junquera, J., Ordejón, P. and Sánchez-Portal, D. The SIESTA method for ab initio order-N materials simulation. Journal of Physics: Condensed Matter, (2002) , 14(11), p.2745.

آلایش یافته با کمک رابطه زیر محاسبه شده است [۸]:

$$E_f = E_{T1} + n E(Al) - [E_{T2} + n E_{TM}]$$

در این رابطه  $E_{T1}$  انرژی نهایی ساختار آلایش یافته،  $E(Al)$  انرژی نهایی یک اتم آلومینیم،  $n$  تعداد اتم‌های جایگزین شده،  $E_{T2}$  انرژی نهایی ساختار خالص و  $E_{TM}$  انرژی نهایی اتم‌های جایگزین شده است. مقادیر به دست آمده برای انرژی تشکیل هر یک از نمونه‌ها در جدول ۲ ذکر شده است. با توجه به مقادیر محاسبه شده انرژی تشکیل برای ساختار آلایش یافته با عناصر واسطه، پایدارترین ساختار، مربوط به آلایش نانوصفحه با اتم Ti است که انرژی تشکیل کمتری دارد.

### نتیجه گیری

در این پژوهش با استفاده از محاسبات اولیه خواص مغناطیسی نانوصفحه AlN آلایش یافته با عناصر واسطه که جایگزین اتم Al شده اند، مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که نانوصفحه AlN خالص یک نیمرسانی غیر مغناطیسی است در حالی که یک اتم

## انعکاس متقاطع آندریف در ساختار عایق توپولوژیک در مجاورت ابررسانا-فرومغناطیس

پورعلی<sup>۱</sup>، فرزانه<sup>۱</sup>؛ خضرلو<sup>۲</sup>، مریم<sup>۱و۲</sup>؛ گودرزی<sup>۱</sup>، هادی<sup>۱</sup>؛ کسانی<sup>۱</sup>، هادی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه

<sup>۲</sup> بنیاد ملی نخبگان

<sup>۳</sup> گروه فیزیک هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز

### چکیده

اثر همزیستی خاصیت فرومغناطیس و ابررسانایی بر پایه حالات سطحی عایق توپولوژیک سه بعدی در اتصال نرمال/ابررسانا فرومغناطیس/نرمال به صورت تئوری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در منطقه ابررسانا فرومغناطیس، گاف ابررسانا بیانی توپولوژیک (T<sub>FS</sub>) که وابسته به مغناطش ناحیه ابررسانا است بازیگارش می‌شود. از اینرو احتمال انعکاس متقاطع در فرآیند آندریف به مقادیر مغناطش ناحیه ابررسانا وابسته است. رسانندگی زیرگاف در ساختار، به فرآیند تونل زنی همزمان ناحیه میانی ابررسانا بستگی دارد.

## Crossed Andreev reflection in ferromagnetic-superconductor topological insulator

Pourali, Farzaneh<sup>1</sup>; Khezerlou, Maryam<sup>1,2</sup>; Goudarzi, Hadi<sup>1</sup>; Kasani, Hadi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Faculty of Science, Urmia University, Urmia

<sup>2</sup> National Elites foundation

<sup>3</sup> Faculty of physics, University of Tabriz

### Abstract

We theoretically investigate the effect of coexistence of proximity-induced ferromagnetism and superconductivity on the surface states of 3-dimensioanl topological insulator in a normal/ferromagnetic superconductor/normal junction. In ferromagnetic superconductor region, the effective superconductor subgap is renormalized by magnetization with a factor  $\eta(m_{\text{fs}})$ . It is found that the crossed Andreev reflection is sensitive to the magnitude of magnetization in FS region. The subgap conductance of the structure depends on co-tunneling into the middle region process.

PACS No. 61,68

توجه زیادی بخود جلب کرد [۱-۴]. طبق نتایج بیناکر<sup>۱</sup> در رسانندگی این اتصالات درکنار پدیده‌ی انعکاس معمول آندریف، انعکاس آینه‌ای آندریف<sup>۲</sup> هم اتفاق می‌افتد که باعث تغییر قابل توجهی در نمودارهای رسانندگی می‌شود. البته نوع جفت شدگی

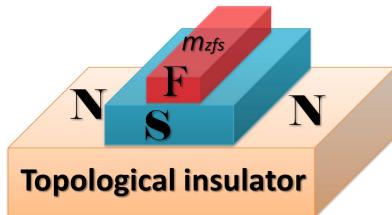
### مقدمه

سالها قبیل رسانندگی برای اتصالات فلز ابررسانا و فلز نرمال بر پایه انعکاس آندریف مورد بحث و بررسی قرار گرفته بود. در سالهای اخیر رسانندگی همین اتصالات اما با پایه‌ی مواد دیراک

---

Beenakker <sup>۱</sup>  
Andreev <sup>۲</sup>

نمایی از اتصال NSFN در شکل ۱ نشان داده شده است. دقت داشته باشیم که طول پهنای ابررسانا  $d$  می باشد و فلز نرمال اولی به ولتاژ  $V_01$  و دومی به  $V_{02}$  وصل شده است.



شکل ۱: نمایی از ساختار اتصال NSFS بر پایه عایق توپولوژیک حرکت شبه ذرات در این ساختار توسط هامیلتونی بوگولیوبوف-دوژن توصیف میشود:

$$H_{SF} = \begin{pmatrix} h(k) + M & \Delta(K) \\ -\Delta^*(-K) & -h^*(-k) - M \end{pmatrix} \quad (1)$$

بردار مغناطش به صورت  $|M| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$  برای ناحیه ابررسانا تعريف میشود.  $(h(k) + M)$  در این رابطه، به ترتیب هامیلتونی دیراک ذره آزاد و پتانسیل جفت شدگی ابررسانا می باشند. پتانسیل جفت شدگی ابررسانا را از نوع معمول S و با مقدار ثابت در نظر میگیریم.

انرژی پراکنده ناحیه ابررسانا فرومغنایس به صورت زیر بدست می آید:

$$\epsilon_{FS} = \xi \sqrt{\left( -\eta \mu_{fs} + \sqrt{m_{fs}^2 + |K_{FS}|^2 + |\Delta_0|^2 \left( \frac{m_{fs}}{\mu_{fs}} \right)^2} \right)^2 + |\Delta_0|^2 \left( 1 - \left( \frac{m_{fs}}{\mu_{fs}} \right)^2 \right)}.$$

همانطور که مشاهده میشود گاف ابررسانایی تحت مغناطش بازبینیجاش می گردد [۶].

از حل معادله دیراک باگالیوباف دی جنیس ویژه توابع برای سه ناحیه ابررسانا فرومغناطیس، نرمال سمت چپ و نرمال سمت راست به صورت زیر بدست می آید:

هم توسط ابررسانای بکار رفته در اثر مجاورت تاثیر بسزایی در نتایج اتصالات دارد.

می دانیم که انعکاس آندریف در فصل مشترک یک فلز نرمال و یک ابررسانا اتفاق می افتد. این پدیده متناسب است با آمدن الکترون به سمت فلز نرمال که در اثر رسیدن به فصل مشترک یک حفره از آن به سمت فلز عادی منعکس شده و به موجب آن یک جفت کوپر تشکیل می شود که در داخل ابررسانا حرکت می کند. علاوه بر این انعکاس، کایسول<sup>۳</sup> در مقاله خود انعکاس متقطع آندریف را نیز بر پایه گرافن مطالعه نمود [۵]. در انعکاس متقطع اتصال نرمال/ابررسانا/نرمال (N/S/N)، الکترونی که به سمت فصل مشترک NS حرکت می کند تحت انعکاس آندریف به صورت یک حفره منعکس می شود درنتیجه جفت کوپر در داخل ابررسانا حرکت می کند. در سمت دیگر اتصال یعنی SN، پدیده تونل زنی همزمان و انعکاس متقطع اتفاق می افتد. بطوری که یک الکترون و یک حفره با ضرایب بخصوصی به سمت فلز نرمال آخری حرکت می کند که به ترتیب ضرایب تونل زنی همزمان و انعکاس متقطع خوانده می شوند.

حامل های بار در سطح یک عایق توپولوژیکی سه بعدی بصورت فرمیونهای دیراک که تحت تبدیل انعکاس زمانی متقارن عمل می کنند، رفتار می کنند. اثر مجاورت ابررسانایی در حالت های سطحی عایق توپولوژیک بطور تجربی مشاهده شده است. اثر مجاورت فرومغناطیس با بردار مغناطش عمود بر سطح، باعث ایجاد یک گاف انرژی در نقاط دیراک می شود. لذا مطالعه همزیستی فاز ابررسانایی و فرومغناطیس هیچ تضادی با یکدیگر ندارند. در مقاله حاضر، اثر مجاورت همزمان خاصیت ابررسانایی و فرومغناطیس برروی احتمال انعکاس متقطع بر پایه عایق توپولوژیک مورد بررسی قرار می گیرد.

هم چنین رسانندگی ناشی از انعکاس متقطع برای اتصال دو پیوندی فلز نرمال-ابررسانای فرومغناطیس-فلز نرمال(NSFN) محاسبه می شود .

## تئوری و مدل

$$\begin{aligned}
& ae^{i\beta} (e^{-i\alpha} + e^{i\theta_s}) + be^{i\beta} (e^{-i\alpha} - e^{-i\theta_s}) + \\
& ce^{-i\beta} (e^{-i\alpha} + e^{i\theta_s}) + de^{-i\beta} (e^{-i\alpha} - e^{-i\theta_s}) = 2 \cos \alpha \\
& ae^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_2} (-e^{i\theta_s} e^{-i\alpha'} - 1) + be^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_1} (e^{-i\theta_s} e^{-i\alpha'} - 1) + \\
& ce^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_1} (-e^{i\theta_s} e^{-i\alpha'} - 1) + de^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_2} (e^{-i\theta_s} e^{-i\alpha'} - 1) = 0 \\
& ae^{i\beta} e^{ik_s d} (e^{i\theta_s} - e^{i\delta}) - be^{i\beta} e^{-ik_s d} (e^{-i\theta_s} + e^{i\delta}) + \\
& ce^{-i\beta} e^{ik_s d} (e^{i\theta_s} - e^{i\delta}) - de^{-i\beta} e^{-ik_s d} (e^{-i\theta_s} + e^{i\delta}) = 0 \\
& ae^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_2} e^{ik_s d} (1 - e^{i\delta'} e^{i\theta_s}) + be^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_1} e^{-ik_s d} (1 + e^{i\delta'} e^{-i\theta_s}) + \\
& ce^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_1} e^{ik_s d} (1 - e^{i\delta'} e^{i\theta_s}) + de^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_2} e^{-ik_s d} (1 + e^{i\delta'} e^{-i\theta_s}) = 0
\end{aligned}$$

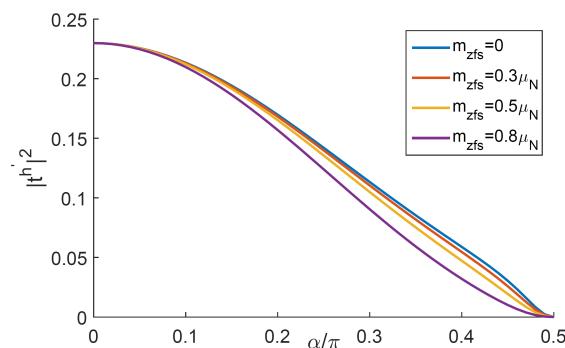
از حل این معادلات ضریب انعکاس متقطع محاسبه می شود که محاسبه رسانندگی ساختار را از رابطه

$$G_{CAR} = \frac{e^2}{h} N(eV) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cos \alpha T^{h'} \quad (4)$$

ممکن می سازد..

### انعکاس متقطع آندریف

در نمودار ۱ رفتار انعکاس متقطع آندریف بر حسب زاویه تابش مشاهده می کنیم. این نمودار به ازای مقادیر مختلف مغناطش ناحیه ابررسانا رسم شده است. از آنجایی که گاف موثر ابررسانا بی با افزایش مغناطش کاهش می یابد کاهش احتمال انعکاس متقطع قابل پیش بینی است. البته در این نمودار برای افزایش مقدار انعکاس متقطع پتانسیل شیمیایی را در دو ناحیه نرمال متفاوت در نظر گرفته ایم. ناحیه سمت چپ از نوع ناخاصی  $p$  و ناحیه سمت راست از نوع ناخالصی نوع  $n$  می باشد.



$$\begin{aligned}
\Psi_{SF} = & a \begin{pmatrix} e^{i\beta} \\ e^{i\beta} e^{i\theta_s} \\ -e^{i\theta_s} e^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_2} \\ e^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} e^{ik_s x} + b \begin{pmatrix} e^{i\beta} \\ -e^{i\beta} e^{-i\theta_s} \\ e^{-i\theta_s} e^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_1} \\ e^{-i\gamma^e} e^{-i\phi_1} \end{pmatrix} e^{-ik_s x} + \\
& c \begin{pmatrix} e^{-i\beta} \\ e^{i\theta_s} e^{-i\beta} \\ -e^{i\theta_s} e^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_1} \\ e^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_1} \end{pmatrix} e^{ik_s x} + d \begin{pmatrix} e^{-i\beta} \\ -e^{-i\theta_s} e^{-i\beta} \\ e^{-i\theta_s} e^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_2} \\ e^{-i\gamma^h} e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} e^{-ik_s x}, \\
\Psi_N^L = & (1, e^{i\alpha}, 0, 0)^T e^{ik_1 x} + r^e (1, -e^{-i\alpha}, 0, 0)^T e^{-ik_1 x} + \\
& r^h (0, 0, 1, e^{-i\alpha})^T e^{-ik_1' x}, \\
\Psi_N^R = & t^{e'} (1, e^{i\delta}, 0, 0)^T e^{ik_4 x} + t^{h'} (0, 0, 1, -e^{i\delta})^T e^{ik_4 x}. \quad (2)
\end{aligned}$$

که پارامترهای موجود در اسپینورها به صورت زیر حاصل شده است:

$$\begin{aligned}
\beta = & \cos^{-1} \frac{\frac{E}{\Delta}}{\sqrt{1 - \left( \frac{m_s / \mu_F}{\mu_S / \mu_F} \right)^2}} \\
\gamma = & \sin^{-1} \left( \frac{K_{F1}}{K_S} \sin \alpha \right) \\
\delta = & \sin^{-1} \left( \frac{K_{F1}}{K_{F2}} \sin \alpha \right) \\
\theta_S = & \sin^{-1} \left( \frac{K_{F1}}{K_S} \sin \alpha \right) \\
K_S = & \sqrt{\mu_s^2 - m_s^2} \\
& \text{در روابط مربوط به اسپینورهای نواحی نرمال، } r^e, r^h, t^{e'}, t^{h'} \text{ به ترتیب ضرایب انعکاس نرمال، انعکاس آندریف، تونل زنی همزمان الاستیک و انعکاس متقطع هستند. باستفاده از اعمال شرایط مرزی در مرز سه ناحیه، می توان این ضرایب را بدست آورد. با اعمال این شرایط و محاسبات تحلیلی چهار معادله زیر حاصل می شود:}
\end{aligned} \quad (3)$$

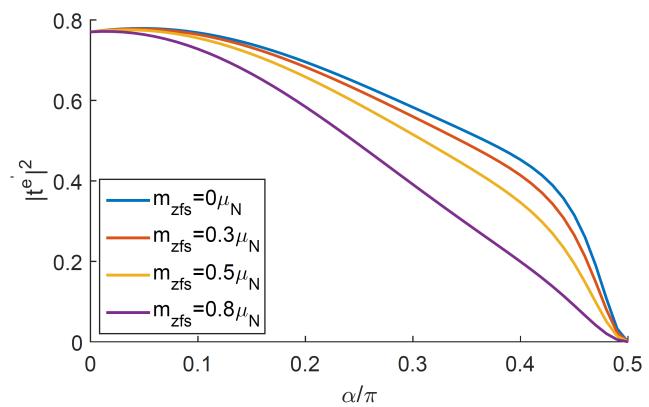
پرداخته شد. همانطور که میدانیم امکان این همزیستی در حالت عادی دارای محدودیت می باشد. اما با توجه به اثرگذاری متفاوت القای فرومغناطیس در عایق توپولوژیک این موضوع امکان بررسی به صورت تجربی را نیز دارد. لذا این نتایج می توانند مبنای برای مطالعات تجربی باشد.

نمودار ۱: احتمال انعکاس متقاطع آندریف بر حسب زاویه تابش

در نمودار ۲ رفتار احتمال تونل زنی همزمان الاستیک مشاهده می شود که مشابه انعکاس آندریف با افزایش مغناطش ناحیه ابررسانا کاهش میابد.

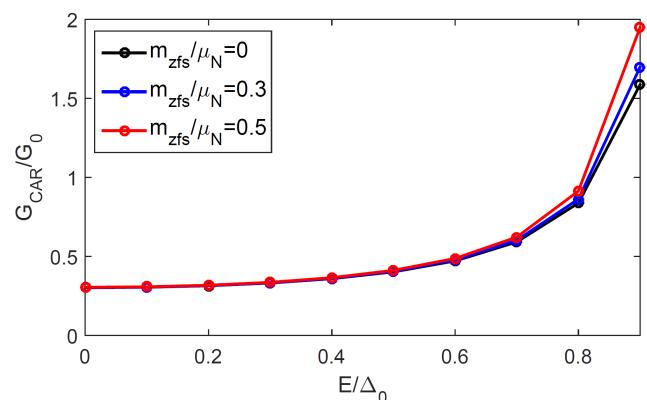
### مراجع:

- [۱] L. Fu, C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 096407.
- [۲] J. Linder, Y. Tanaka, T. Yokoyama, A. Sudbo, N. Nagaosa, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 067001.
- [۳] M. Khezerlou, H. Goudarzi, Physica C **508** (2015) 6.
- [۴] H. Goudarzi, M. Khezerlou, J. Alilou, J. Super. Nov. Mag. **26** (2013) 3355.
- [۵] J. Cayssol, phys. Rev. Lett. **100** (2008) 147001.
- [۶] H. Goudarzi, M. Khezerlou, S. Asgarifar, Physica E **87** (2017) 155.



نمودار ۲: احتمال تونل زنی همزمان الاستیک بر حسب زاویه تابش

رفتار رسانندگی بر حسب ولتاژ بایاس در نمودار ۳ نشان داده شده است. به علت کاهش گاف موثر ابررسانایی اعمال ولتاژ بایاس نیز دارای محدودیت است. از طرف دیگر افزایش مغناطش ناحیه ابررسانا در بایاس های بالاتر رسانندگی را افزایش می دهد.



نمودار ۳: رسانندگی حاصل از انعکاس متقاطع آندریف بر حسب ولتاژ بایاس

### نتیجه گیری:

در کار حاضر به بررسی اثر همزیستی فاز فرومغناطیس و ابررسانایی در انعکاس آندریف متقاطع بر پایه عایق توپولوژیک

## ناهمخوانی کوانتومی در سلول سه اسپینی ( $1/2, 1/2, 1/2$ ) در مدل XXZ هایزنبرگ

جلایی مقدم، مجید؛ نجارباشی، قادر

گروه فیزیک دانشگاه محقق اردبیلی، خیابان دانشگاه، اردبیل

### چکیده

در این مقاله ما ناهمخوانی کوانتومی را در سلول سه اسپینی ( $1/2, 1/2, 1/2$ ) در مدل XXZ هایزنبرگ بر حسب دما و میدان مغناطیسی، برای دو بر هم کنش پادفرومغناطیس و فرومغناطیس محاسبه می کنیم که با تغییر دما و میدان مغناطیسی نقاط گذار فاز کوانتومی را نشان می دهد. به ازای مقادیر بالای دما و میدان مغناطیسی ناهمخوانی کوانتومی به صفر میل می کند.

### Quantum Discord in Three Spin Cell ( $1/2, 1/2, 1/2$ ) in XXZ Heisenberg Model

Jalai Moghadam,Majid; Najarbashi,Ghader

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

### Abstract

In this paper, we compute the quantum discord in three-spin cell ( $1/2, 1/2, 1/2$ ) in the Heisenberg XXZ model in terms of temperature and magnetic field for antiferromagnetic and ferromagnetic interactions, which shows the quantum phase transition points by varying the temperature and magnetic field. For large values of temperature and magnetic field, the quantum discord tends to zero.

PACS No. 03.67.-a; 64.70.Tg

دهنده حضور همبستگی در حالت های غیر در هم تنیده است. تاکنون کارهای متعددی در زمینه ناهمخوانی کوانتومی در مطالعات گذار فاز کوانتومی [9,10]، همبستگی کوانتومی در سیستم های دو کیویتی [11,12] و... انجام شده است. هماطور که در مرجع [13,14] دیده می شود حالت هایی با ناهمخوانی غیر صفر حتی در صورت عدم در هم تنیدگی می تواند با یک سرعت نمایی در یک مدل محاسباتی کوانتومی به یک بیت گوانتومی منجر شود [15]. از این رو مفهوم ناهمخوانی کوانتومی در پروتکل های اطلاعات کوانتومی نقش مهمی ایفا می کند.

در این مقاله ما به مطالعه ناهمخوانی کوانتومی برای سه اسپین  $1/2$  مدل XXZ هایزنبرگ می پردازیم. وقتی که دما افزایش پیدا می کند میزان ناهمخوانی کاهش می یابد.

### مقدمه

ناهمخوانی کوانتومی می تواند همبستگی های کوانتومی مطرح شده در برخی از حالت های مخلوط جدایی نشان اسایی کند، که نمی توان آن را از طریق در هم تنیدگی بدست آورد. ناهمخوانی همچنین می تواند برای پیش بینی نقاط گذار فاز کوانتومی در دماهای صفر [1-4] و دماهای پایین [5] استفاده شود. گزارش هایی وجود دارد که می توان اندازه گیری ناهمخوانی کوانتومی را در NMR [6] و آزمایش های اپتیکی انجام داد [7].

ناهمخوانی کوانتومی، همانطور که توسط اولیور و زورک [8] معرفی شده است، اندازه گیری همبستگی کوانتومی است. همبستگی کوانتومی کلی تراز در هم تنیدگی است به این معنی که ناهمخوانی کوانتومی غیر صفر برای حالت های جداپذیر، نشان

$$\begin{aligned} S_{\Pi}(\rho_{a|b}) &= \sum_j P_j S(\rho_a^j) \\ P_j &= \text{tr}_b (\Pi_j \rho_b) \quad (v) \\ \rho_a^j &= \text{tr}_b (\Pi_j \rho_{ab} \Pi_j). \end{aligned}$$

بنابراین نسخه کوانتومی  $J(A:B)$  مستقل از جهت اندازه گیری در فضای هیلبرت است که می‌توان به این شکل تعریف کرد.

$$J(\rho_{ab}) := S(\rho_a) - \min_{\{\Pi_j\}} S_{\Pi}(\rho_{a|b}). \quad (8)$$

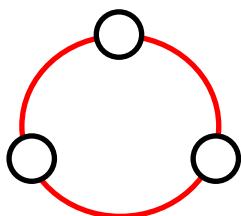
اولیور و زوریک متوجه شدند که بیان کلاسیکی  $I(A:B)$  و  $J(A:B)$  با هم برابر است اما در بیان کوانتومی ممکن است برابر باشد یا برابر نباشد، که اختلاف این دو بصورت ناهمخوانی کوانتومی تعریف می‌شود: [16]

$$QD(\rho_{ab}) := I(\rho_{ab}) - J(\rho_{ab}). \quad (9)$$

ناهمخوانی کوانتومی همواره یک مقدار نامنفی است ( $Q > 0$ ).

### مدل XXZ هایزنبرگ در سلول سه اسپینی $(1/2, 1/2, 1/2)$

یک سیستم سه اسپینی  $(1/2, 1/2, 1/2)$  هایزنبرگ غیرهمسانگرد  $XXZ$  در سلول مثلثی (شکل ۱) در نظر می‌گیریم. [17]



شکل ۱: سلول مثلث اسپینی یک بعدی، که هر دایره متناظر با اسپین  $1/2$  است.

هامیلتونین توصیف کننده سیستم  $XXZ$  عبارت است از:

$$H = \sum_{i=1}^3 [J(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) + \gamma S_i^z S_{i+1}^z] + BS_i^z \quad (10)$$

که  $J$  بیانگر ضریب جفت شدگی و  $\gamma$  ضریب ناهمسانگردی است به طوری که  $1 \leq \gamma \leq -1$  و  $B$  شدت میدان مغناطیسی است، اگر  $(J > 0)$  باشد نشان دهنده برهم کنش آنتی فرومغناطیس و اگر

### ناهمخوانی کوانتومی

در تعریف ناهمخوانی کوانتومی ابتدا برخی از مفاهیم کلاسیکی نظریه اطلاعات را بیان می‌کنیم.

برای یک متغیر تصادفی  $A$  که مقدار  $a$  دارد، آنتروپی شanon به این صورت بیان می‌شود:

$$H(A) = - \sum_a P_a \log_2 P_a, \quad (1)$$

$P_a := \Pr(A : a)$  که  $P_a$  برابر با احتمال متناظر  $A$  است.

در مورد دو متغیر تصادفی  $A$  و  $B$  که با هم ترکیب شده اند، آنتروپی شanon به این گونه بیان می‌شود:

$$H(A, B) = - \sum_{a,b} P_{a,b} \log_2 P_{a,b}, \quad (2)$$

که  $P_{a,b}$  برابر با احتمال توزیع مشترک است  $P_{a,b} \equiv \Pr(A : a, B : b)$  دو متغیر  $A$  و  $B$  برابر است با:

$$H(A : B) = H(A) - H(A | B), \quad (3)$$

که آنتروپی شرطی برابر است با،

$$H(A | B) = - \sum_{a,b} P_{a,b} \log_2 P_{a,b} \quad (4)$$

که  $A=a$  باشد، به شرطی که  $P_{a|b}=P_{a,b}/P_b$  است  $B=b$ .

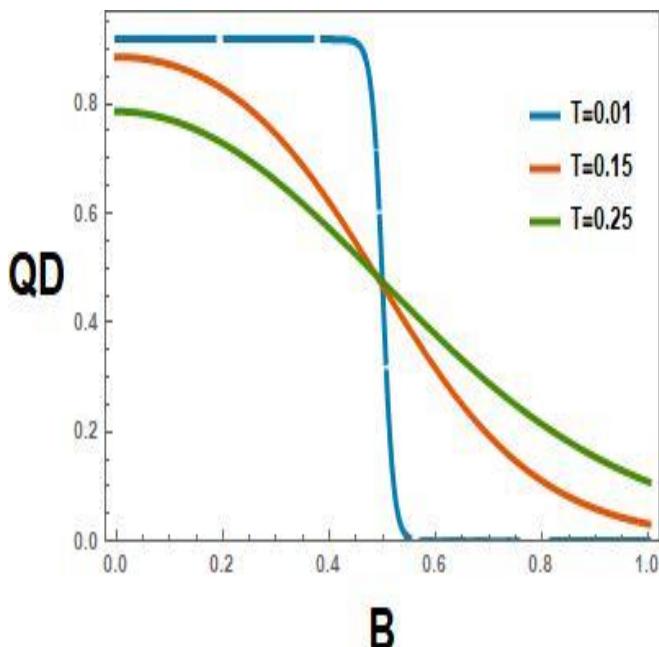
اطلاعات متقابل کلاسیکی را می‌توانیم به این شکل بنویسیم:

$$I(A : B) = H(A) - H(B) - H(AB). \quad (5)$$

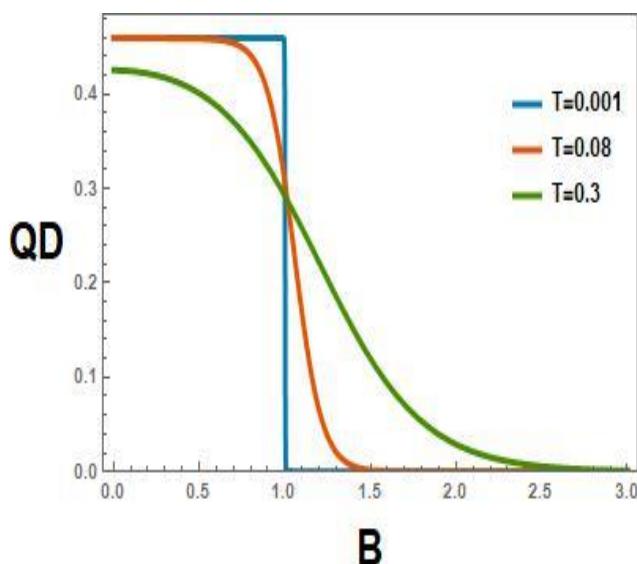
در حالت کوانتومی، عدم قطعیت برای حالت  $\rho$  با آنتروپی  $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ ، بنابراین تعمیم یافته  $I(A : B)$  در کوانتوم به این شکل بیان می‌شود:

$$I(\rho_{ab}) := S(\rho_a) + S(\rho_b) - S(\rho_{ab}), \quad (6)$$

مقدار  $I(\rho_{ab})$  اطلاعات متقابل کوانتومی نامیده می‌شود. از طرف دیگر عدم قطعیت متوسط در مورد وضعیت  $A$  بعد از مجموعه کاملی از اندازه گیری های  $\{\Pi_j\}$  که روی سیستم  $B$  انجام شده به این صورت است:



شکل ۲: مقدار ناهمخوانی کوانتومی بر حسب میدان مغناطیسی ، با در نظر گرفتن  $J=-1$  و  $\gamma=-(0.5)$ .



شکل ۳: مقدار ناهمخوانی کوانتومی میدان مغناطیسی، با در نظر گرفتن  $J=1$  و  $\gamma=(0.5)$ .

(J<0) باشد بیانگر برهم کنش فرومغناطیس است و  $S_i^x, S_i^y, S_i^z$  عملگرهایی بر حسب  $i$  (ماتریس های پاولی) می باشند و میدان مغناطیسی موثر  $B > 0$  نشان دهنده اثر متقابل اسپین ها با سطوح مرزی است.

مجموعه عملگرهای تصویر زیر را در نظر می گیریم.

$\{\cos(\theta)|0\rangle + e^{-i\phi}\sin\theta|1\rangle, e^{-i\phi}\sin\theta|0\rangle - \cos\theta|1\rangle\}$  (11) به ازای دو مقدار ( $J=1, J=-1$ )، ناهمخوانی کوانتومی بر حسب میدان مغناطیسی  $B$  را محاسبه می کنیم، که نتایج حاصل در شکل های (۲) و (۳) نشان داده شده است.

شکل های (۲) و (۳) نشان می دهد در  $J=-1$  در نقطه  $B=0.5$  یک گذار فاز کوانتومی رخ می دهد در حالی که در  $J=1$  در نقطه  $B=1$  گذار فاز اتفاق می افتد. همچنین در شکل ها (۲) و (۳) مشاهده می شود که با افزایش دما میزان ناهمخوانی کوانتومی کاهش می یابد.

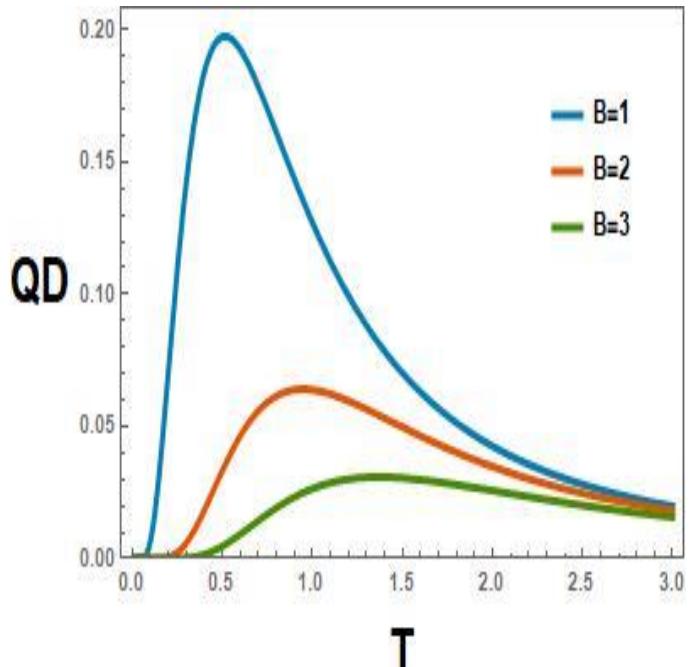
ناهمخوانی کوانتومی را بر حسب دمای  $T$  برای مقادیر قبلی ذکر شده محاسبه کردیم، که نتایج آن در شکل های ۴ و ۵ آمده است.

شکل ۴ نشان می دهد که به ازای دما و میدان مغناطیسی پایین حالت پایه، ناهمخوانی کوانتومی از صفر شروع می شود و حالت پایه جداپذیر است، به این علت که ناهمخوانی کوانتومی حالت های خالص همان نتایج سنجه تلاقی را می دهد. همچنین با افزایش دمای حالت پایه، اثر حالت های برانگیخته بعدی باعث افزایش ناهمخوانی کوانتومی می شود.

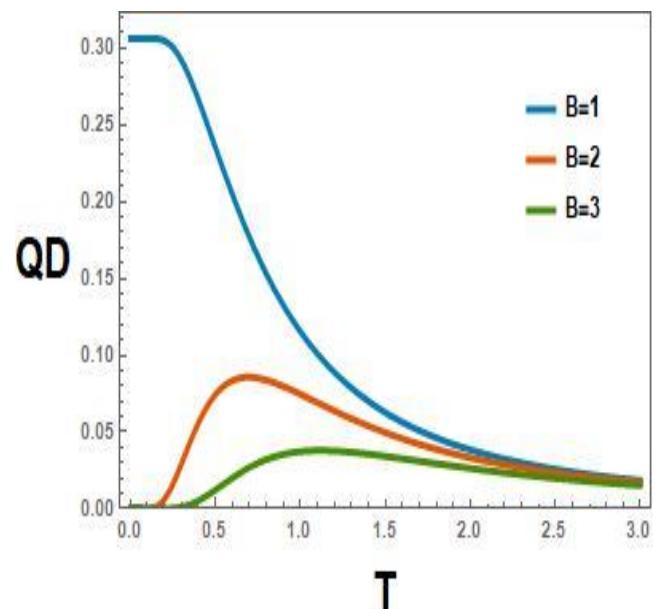
همچنین شکل ۴ نشان می دهد که حالت پایه، ناهمخوانی صفر دارد و با افزایش دما حالت های برانگیخته، ناهمخوانی را افزایش می دهد و نقشی در آن دارند، به همین دلیل نمودار نقطه بیشینه دارد. و با افزایش بیشتر دما ناهمخوانی به صفر میل می کند و مقدار بیشینه هر نمودار با افزایش میدان مغناطیسی تغییر میکند.

در شکل ۵ به ازای دما و میدان های کوچک حالت پایه در هم تنیده است و با افزایش دما اثر حالت های برانگیخته دیگر، باعث می شود ناهمخوانی کوانتومی کاهش یابد. ولی برای میدان های بزرگ حالت پایه جداپذیر است، که با افزایش دما اثر حالت های برانگیخته دیگر، ابتدا باعث افزایش و سپس باعث کاهش ناهمخوانی کوانتومی می شود.

- [6] R. Auccaise; *et al arXiv*; **1104**; 1596
- [7] J S. Xu; *et al Nature Commun*; **1** ;(2011); 7
- [8] H. Ollivier and W H. Zurek; *Phys. Rev. Lett*; **88**; (2001); 017901
- [9] M S. Sarandy; *Phys. Rev. A*; **80**; (2009); 022108
- [10] R. Dillenschneider; *Phys. Rev B*; **78** (2008); 224413
- [11] S. Luo; *Phys. Rev. A*; **77**; (2008); 042303
- [12] T. Werlang, S. Souza, F F. Fanchini and C J. Villas Boas; *Phys. Rev. A*; **80** ;( 2009);024103
- [13] A. Datta, A. Shaji and C. M. Caves; *Phys. Rev. Lett*; **100**; ( 2008); 050502
- [14] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M P. Almeida and A G. White; *Phys. Rev. Lett*; **101**; (2008); 200501
- [15] E. Knill and R. Laflamme; *Phys. Rev. Lett*; **81**; (1998); 5672
- [16] G.Najarbashi, L.Balazadeh and A.Tavana; *Int J Theor Phys*; **57**; (2018); 97
- [17] J. Maziero,L. C. Celera,R. M. Serra and M. S. Sarandy; *Phys. Lett. A*; **376**; (2012);1540



شکل ۴: مقدار ناهمخوانی کوانتومی بر حسب دما، با در نظر گرفتن  $J=-1$  و  $\gamma=-(0.5)$



شکل ۵: مقدار ناهمخوانی کوانتومی بر حسب دما، با در نظر گرفتن  $J=1$  و  $\gamma=(0.5)$

## مرجع ها

- [1] R. Dillenschneider; *Phys. Rev. B*; **78 22**; (2008); 4413
- [2] S. Luo; *Phys. Rev. A*; **77**; (2008); 042303
- [3] M. S. Sarandy; *Phys. Rev. A*; **80**; (2009) 022108
- [4] A K. Pal and I. Bose; *J. Phys. B*; **44**; (2011); 045101
- [5] T. Werlang; *Phys. Rev. Lett*; **105**; (2010) ; 095702

## بررسی نظری وابستگی دمایی ضریب شایستگی ترمولکتریک در سیستم های کم بعد نیمرسانای



یاشار عزیزان کلاندرق<sup>۱</sup>; علی اصغر جوان سیاه بیگدلیلو<sup>۲</sup>; عبدالله برهانی فر<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده علوم، گروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

<sup>۲</sup>دانشکده فن آوری های نوین، دانشگاه فن آوری های نوین سبلان، نمین

<sup>۳</sup>دانشکده علوم، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

### چکیده

در این پژوهش، محاسبات نظری مبنی بر وابستگی دمایی ضریب شایستگی ترمولکتریک در ساختارهای کم بعد نیمرسانای بیسموت تلوراید بر اساس چگالی حالت ها برای سیستم های کوانتمی به کار گرفته شده، گزارش شده است. از آنجایی که این نوع محاسبات بازده واقعی قطعات ترمولکتریک را پیش بینی نمیکنند، اما می توان به کمک این نوع محاسبات رفتار کوانتمی وابسته به دما و اندازه نانو ساختارهای نیمرسانا را توصیف کرد. نتایج محاسبات و بررسی رفتار نشان می‌هد که تفاوت میان اندازه های نانومتری مختلف، در نانو ساختارهای نیمرسانا در یک قطعه ترمولکتریک از محدود شدن حامل های بار کوانتمی در ابعاد کوانتمی و اندازه های نانومتری محدود شده ناشی می شوند. در این مقاله یک مطالعه مقایسه ای بر روی قطعه ترمولکتریک و نقش اندازه و بعد ذرات در این نوع قطعات است که با کاهش ابعاد و اندازه ضریب شایستگی ترمولکتریک افزایش می یابد.

### Theoretical investigation of temperature dependent thermoelectric figure of merit in low dimensional semiconductor system of $\text{Bi}_2\text{Te}_3$

Azizian-Kalandaragh, Yashar<sup>1</sup>; Javansiah-Bigdelu, Aliasghar<sup>2</sup>, Borhanifar, Abdollah

<sup>1</sup>Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

<sup>2</sup>Department of Advanced Technologies, Sabalan University of Advanced Technologies, Namin

<sup>3</sup>Department of Applied Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

### Abstract

In this paper, detailed calculations have been applied to low-dimensional semiconductor bismuth telluride materials in order to calculate size and temperature dependence of thermoelectric figure of merit (ZT), based on density of states for quantum systems. While these calculations do not predict the actual efficiency of the device, they may serve as a guide to describe the quantum mechanical behavior of temperature and size dependent of these semiconductor nanostructures. The results of analyses indicate that the difference between various nanometer sizes and dimensions in semiconductor nanostructures of thermoelectric device originated from quantum confinement of charge carriers in quantum dimensions and limited nanometer sizes. In order to improve thermoelectric efficiency, the size and dimension will be optimized. The comparative study of thermoelectric device improvements revealed an important role of size and dimension of thermoelectric materials for the increased thermoelectric figure of merit (ZT).

PACS No.

اعمال شده است. محاسبه ضریب شایستگی در نانوساختارهای کم بعد نیز به لحاظ نظری بررسی شده است [18-10]. که در این مقاله بیان ساده‌ای با مثال مشخص با استفاده از نظریه چگالی حالت هت ارایه گردیده است. فرضیات این نظریه بر اساس ترمودینامیک آماری و فیزیک کوانتمی است.

در این مقاله به کمک تحلیل آماری چگالی حالت‌ها بازده ترموالکتریک در نانو ساختارهای تولید بیسوموت بررسی شده است.

محاسبه رسانندگی الکتریکی در سیستم‌های محدود شده یک، دو و سه بعدی

در این بخش محاسبات مربوط به رسانندگی الکتریکی در سیستم‌های نیمه رسانا محدود شده است. ۱D، ۲D، ۳D ارایه گردیده است.تابع توزیع فرمی-دیراک برای حامل‌های بار، انتگرال فرمی برای چگالی حالت‌های الکترونی برای فرمیون‌ها، و همچنین رسانندگی الکتریکی برای سیستم‌های کم بعد محاسبه شده اند، بیان عمومی رسانندگی الکتریکی به صورت زیر است [20-24]

$$\sigma = -2 \frac{e^2}{3m} \int_{E=0}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial E} g(E) \pi \pi dE$$

که  $f$  تابع توزیع فرمی-دیراک برای فرمیون‌ها است.)

$$f_0 = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}}$$

در این معادله  $T$  = زمان واهلش الکترون،  $m$  جرم حالت سکون الکترون،  $e$  بار الکترون،  $K_B$  ثابت بولتزمن  $E_F$  انرژی فرمی و  $E$  انرژی کل یا گاف انرژی نیمه رسانا است. انتگرال فرمی عبارت است از

$$F_n = \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^n dx}{1 + e^{\frac{x-E_F}{k_B T}}}$$

و چگالی حالت دما برای یک سیستم سه بعدی عبارت است از

$$g_{3D}(E) = \frac{\sqrt{m_x m_y m_z}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{2E}$$

## مقدمه

مطالعه ویژگی‌های ترموالکتریک مواد نیمه رسانا حوزه جدیدی نیست تاریخ این موضوع به سال‌های ۱۸۲۱-۱۸۲۳ بر می‌گردد که توسط دانشمند مشهور آقای سیبک انجام شده است [1]. هر چند در سال‌های اخیر کارهای جدیدی بر روی اثرات ترموالکتریک هم در حوزه نظری و هم تجربی بدليل اهمیت موضوع انجام شده است [2-6]. پس از ظهور نانو فناوری و نانوساختارهای نیمه رسانا، کاربردهای قطعات ترموالکتریک نیز به دلیل قابل کنترل بودن بازده این قطعات با تغییر در اندازه نانو ذرات دارای اهمیت بیشتر گردیدند. بازده توان ترموالکتریکی مواد معمولاً با یک کمیت بدون بعد، به نام ضریب شایستگی تعریف می‌شود که عبارت است از [7-9]:

$$ZT = \frac{\sigma S^2 T}{\kappa_e + \kappa_{ph}}$$

که  $S$  ضریب سیبک،  $\sigma$  رسانندگی الکتریکی،  $T$  دما (در واحد کلوین)  $K$  رسانندگی گرمایی الکترون،  $\kappa_{ph}$  رسانندگی گرمایی فونون هستند.

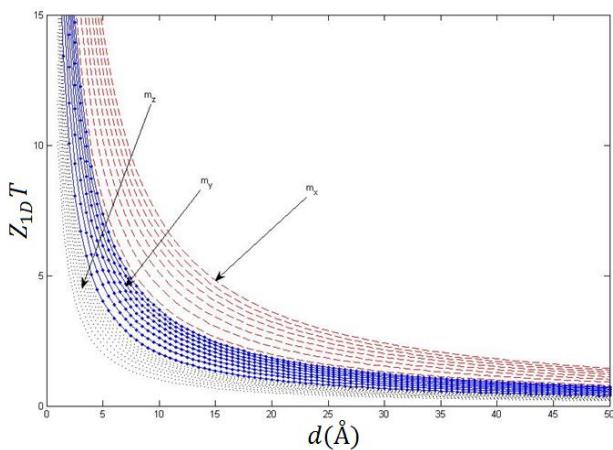
به منظور دستیابی به کارایی ترموالکتریک بالا یا ضریب شایستگی بالا، بایستی توان ترمولکتریک بالا داشته باشیم.

ضریب سیبک در مواد نیمه رسانا به خواص تراپرد حامل‌های بار نیمه رسانا وابسته است و تراپرد در نیمه رسانا نیز به پراکندگی‌های حامل‌های بار وابسته است.

محدود شدگی حامل‌های بار در ابعاد نانو متري در مواد ترمولکتریک موجب می‌شود که چگالی حامل‌های بار جایگزینه در واحد حجم نزدیک انرژی فرمی افزایش یابد. در حالیکه رسانندگی گرمایی بدليل محدود شدگی و پراکندگی فونون‌ها در فصل مشترک نانوساختارها کاهاش یابد.

حقیقان زیادی نظریه‌ها و کارهای تجربی برای تعیین و بهبود ضریب شایستگی در مواد ترمولکتریک ارایه کرده اند و هکچنین مکانیزم‌هایی مانند: اضافه شدن ناخالصی، تغییر ساختار بلوری مواد ترمولکتریک و تهیه مورفولوژی‌های جدید با ابعاد بهینه در اندازه‌های نانومتری برای این منظور از طرف پژوهشگران برای این مواد

اندازه و دما در سیستم های کم بعد کوانتومی به طور مقایسه ای بررسی شده اند. این بررسی نشان می دهد که اندازه ، بعد و دما چه تاثیری بر روی کارایی ترموالکتریک دارد. شکل ۱ وابستگی دمایی ضریب شایستگی در ابعاد نانومتری را برای سیستم های کم بعد تلویرید بیسموت در بازه دمایی ۴۵۵۰K-300K نشان میدهد. رفتار سهیمی گون در شکل مشخص است. همان طور که در شکل مشاهده می شود ، با افزایش دما ضریب شایستگی نیز افزایش می یابد. در مورد سیستم های دو بعدی نیز رفتار مشابه است.



شکل ۱- وابستگی دمایی ضریب شایستگی در ابعاد نانومتری را برای سیستم های کم بعد یک بعدی تلویرید بیسموت در بازه دمایی ۴۵۵۰K-300K

به دلیل اینکه جرم موثر در راستاهای عمود بر هم در بلور  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  متفاوت است. خواص وابسته به دمای ضریب شایستگی با اندازه های کوانتومی مختلف و همچنین دماهای مختلف در هر بعد با چرم موثر مختلف تحت عنوان ( $m_x, m_y, m_z$ ) متفاوت خواهد بود.

مقدار ضریب شایستگی در مورد  $m_z$  کوچک از  $m_y$  و همچنین  $m_y$  کوچکتر از  $m_x$  است، همچنین از شکل مشخص است که با افزایش دما یک همپوشانی بین  $m_x, m_y, m_z$  در یک دمای مشخص بالای ۱۰۰۰K اتفاق می افتد. از آنجایی که در سیستم های دو بعدی چاه کوانتومی هستند ، حالت های مورد محاسبه در این مورد عبارت هستند از  $m_x m_y, m_x m_z, m_y m_z$

به کمک روابط ۲ و ۵ رسانندگی الکتریکی برای سیستم های سه بعدی به صورت زیر بدست می آید

$$\sigma_{3D} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2K_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu s \sqrt{m_x m_y m_z} F_{1/2}$$

همچنین میتوان رسانندگی الکتریکی را برای سیستم های محدود شده دو بعدی و یک بعدی به صورت زیر بدست آورد

$$\sigma_{2D} = n e \mu = \frac{1}{2\pi d} \left( \frac{2K_B T}{\hbar^2} \right) \sqrt{m_x m_y} \mu F_0$$

$$\sigma_{1D} = n e \mu = \frac{1}{\pi d^2} \left( \frac{2K_B T}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{m_x} \mu F_{-1/2}$$

علاوه بر رسانندگی الکتریکی، رسانندگی گرمایی نیز برای سیستم های یک بعدی نیمه رسانا به ترتیب عبارتند از:

$$K_e = \frac{2\tau}{\pi d^2} \left( \frac{2K_B T}{\hbar^2} \right)^{1/2} m_x^{-1/2} K_B^2 T \left\{ \frac{5}{2} F_{3/2} - \frac{9F_{1/2}^2}{2F_{-1/2}} \right\}$$

همچنین ضریب سیبیک در سیستم های محدود کم بعد (2D)، (1D)، (3D) عبارتند از:

$$S_{3D} = - \frac{K_B}{e} \left( \frac{5F_{3/2}}{3F_{1/2}} - \xi^* \right)$$

$$S_{2D} = - \frac{K_B}{e} \left( \frac{2F_1}{F_0} - \xi^* \right)$$

$$S_{1D} = - \frac{K_B}{e} \left( \frac{3F_{1/2}}{F_{-1/2}} - \xi^* \right)$$

برای محاسبه ضریب شایستگی ترموالکتریک پس از انجام محاسبات تحلیلی روابط برای سیستم های کم بعد به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$Z_{1D}T = \frac{1/2(\frac{3F_{1/2}}{F_{-1/2}} - \xi^*)^2 F_{-1/2}}{\frac{1}{B_{1D}} + \left( \frac{5}{2} F_{3/2} - \frac{9F_{1/2}^2}{2F_{-1/2}} \right)}$$

$$Z_{2D}T = \frac{(\frac{2F_1}{F_0} - \xi^*)^2 F_0}{\frac{1}{B_{2D}} + \left( 3F_2 - \frac{4F_1^2}{F_0} \right)}$$

$$Z_{3D}T = \frac{3/2F_{1/2}(\frac{5F_{3/2}}{3F_{1/2}} - \xi^*)^2}{\frac{1}{B_{3D}} + (7/2F_{5/2} - \frac{25F_{3/2}^2}{6F_{1/2}})}$$

پس از بدست آوردن روابط نظری و با استفاده از بیان های نظری فوق، ضریب شایستگی ترموالکتریک و ضریب سیبیک و وابستگی

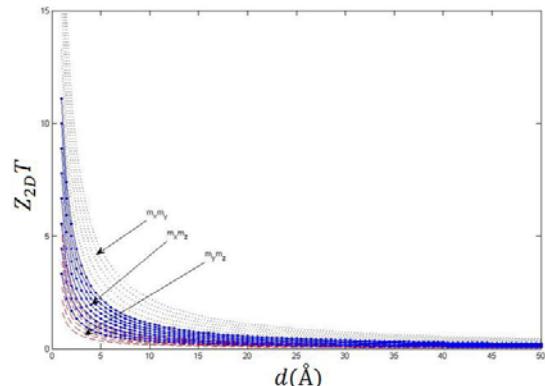
## نتیجه گیری:

در این پژوهش نظریه وابستگی ضریب شایستگی ترمولکتریک در سیستم های کم بعد نیمه رسانا تلویرید بیسموت بررسی گردیده است، بررسی مشاهدات نشان می دهد که اثرات کوانتومی در سیستم های کم بعد موجب تغییر رفتار می شوند، همچنین تغییر رفتار نیز وابسته به دما اندازه و بعد سیستم های کم بعد است. همچنین یک مطالعه مقایسه ای نیز فی ما بین سیستم های حجیم و کم بعد انجام شده است که تفاوت فاحش بین سیستم های کوانتومی و کلاسیک را نشان میدهد.

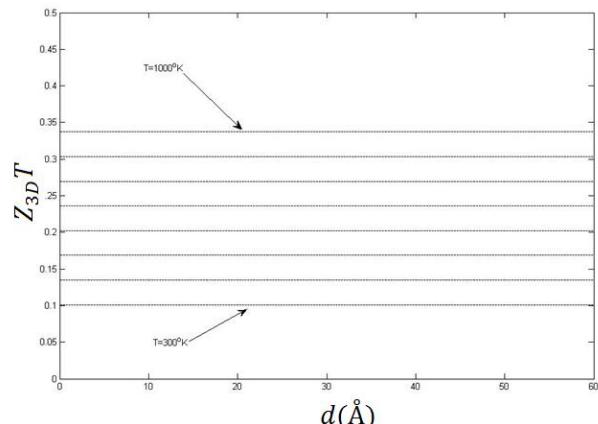
## مرجع ها

- [1] A. Treatise, *Semiconductors and Semimetals*, Recent Trends in thermoelectric materials Research I, **69**, Academic Press(2001).
- [2] G. Carotenuto, C. L. Hison, F. Capezzuto, M. Palomba, P. Perlo, P. Conte, Synthesis and thermoelectric characterisation of bismuth nanoparticles, *J Nanopart Res.*, **11**, 1729-1738 (2009).
- [3] J. Heremans and C. M. Thrush, Thermoelectric power of bismuth nanowires, *Phys. Rev B*, **59**, 12579, (1999).
- [4] A. Glatz and I. S. Beloborodov, Thermoelectric performance of granular semiconductors, *Phys. Rev B* **80**, 245440, (2009).
- [5] Jin-Cheng Zheng, Recent advances on thermoelectric materials, *Front. Phys. China*, **3**(3): 269–279 (2008).
- [6] A. F. Ioffe, “Semiconductor Thermoelements and Thermoelectric Cooling” *Infosearch Ltd.*, (1965).
- [7] H. J. Goldsmid: *Thermoelectric Refrigeration*, Plenum, New York (1964)
- [8] L. D. Hicks and M. S. Dresselhaus, *Phys. Rev. B* **47**, 12727 (1993).
- [9] M. S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, X. Sun, Z. Zhang, and S. B. Cronin, T. Koga, *Fiz. Tverd. Tela, St. Petersburg*, **41**, 755–758, (1999).
- [10] T.C. Harman, M.P.Walsh, B.E. Laforge, and G.W. Turner, *Journal of Electronic Materials*, **34**, 5, (2005).
- [11] K.F. Hsu, S.L.F. Guo, W. Chen, J.S. Dyck, C. Uher, T. Hogan, E.K. Polychroniadis, and M.G. Kanatzidis, *Science* **303**, 818 (2004).
- [12] D. J. Bergman, L. G. Fel, *J Appl. Phys.* **85**, 8205–16 (1999).
- [13] O. Yamashita, H. Odahara, S. Tomiyoshi, *J. Materials Sci.* **39** 5653 – 5658(2004).
- [14] M. Telkes, *Int. J. Appl. Phys.* **18**, 1116 (1947).
- [15] D. Vashaei, A. Shakouri, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 106103 (2004).
- [16] Balan L, Schneider R, Billaud D, Fort Y, Ghanbaja J *Nanotechnology* 15:940–944(2004).
- [17] Cho S, DiVenere A, Wong G.K., Ketterson J.B., Meyer J.R., Hoffman C.A., *Solid State Commun* **102**, 673–676(1997).
- [18] Lin Y. M, Sun X, Dresselhaus M. S, *Phys Rev B* **62**:4610–4623(2000).
- [19] L. D. Hicks, M. S. Dresselhaus, *Phys. Rev. B* **47**, 16631–4 (1993).
- [20] [www.me.utexas.edu/~lishi/electron.doc](http://www.me.utexas.edu/~lishi/electron.doc)
- [21] Sven Muller, Thermoelectric Properties of Bismuth Nanowires, Diploma theses, University of Heidelberg, (2005).
- [22] C.M. Bhandari, Thermoelectric Transport Theory, CRC Press LLC(1995).
- [23] A Treatise, *Semiconductors and Semimetals*, Recent Trends in thermoelectric materials Research III, **71**, Academic Press (2001).
- [24] B.Bhushan., *Nanometer-Scale Thermoelectric Materials*, Springer Handbook of Nanotechnology (2007).
- [۲] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik; “Tables of Integrals, Series, and Products”; 5<sup>th</sup> edition, Academic Press. (1994) 547 (8 normal)
- [۳] P. G. Debenedetti and E.. H. Stanley; “Supercooled and Glassy Water”; *Physics Today* **56**, No. 3 (2003) 40-46.

شکل ۲ وابستگی دمایی ضریب شایستگی در یک سیستم حجیم سه بعدی را برای نیمه رسانا تلویرید بیسموت در بین بازه دمایی 300 تا 1000K نشان میدهد، همانطوری که از شکل معلوم است.



شکل ۲- وابستگی دمایی ضریب شایستگی در ابعاد نانومتری را برای سیستم های کم بعد دو بعدی تلویرید بیسموت در بازه دمایی 4550K, 300K نشان میدهد



شکل ۳- وابستگی دمایی ضریب شایستگی در ابعاد حجیم نیمسانای تلویرید بیسموت در بازه دمایی 1000K, 300K در مقایسه با سیستم های کم بعد که حالت سهمی گون داشتند، رفتار حالت حجیم سه بعدی به صورت خطی است و وابستگی دمایی نیز طبیعت خطی از خود نشان می دهد. از تراکم نمودارها در سیستم های یک بعدی مشخص است که اثرات محدود شدگی کوانتومی در سیستم های یک بعدی در مقایسه با سیستم های دو بعدی قویتر است.

## بررسی اتصال ترجیحی در شبکه زمین‌لرزه‌های ایران

صغری رضائی<sup>۱\*</sup>، هانیه مقدسی<sup>۱</sup>، امیر حسین درونه<sup>۱</sup>، فتanhane تقی‌زاده فرهمند<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان

<sup>۲</sup>گروه فیزیک، واحد قم، دانشگاه آزاد اسلامی، قم، ایران

### چکیده

زمین‌لرزه‌ها از نظر زمانی و مکانی رفتار پیچیده‌ای دارند که می‌توانند با استفاده از نظریه شبکه‌های پیچیده مورد بررسی قرار گیرند. شبکه زمین‌لرزه‌ها به دلیل اضافه شدن رخدادهای لرزه‌ای جدید با گذشت زمان، یک شبکه پویا است که منجر به ایجاد گره‌ها و یال‌های جدید در شبکه می‌شوند. در این مقاله، فرضیه اتصال ترجیحی برای گره‌های جدید را بررسی می‌کنیم که تاییدی بر این موضوع است که گره‌های جدیدی که وارد شبکه می‌شوند، ترجیح می‌دهند به گره‌های با درجه بالا متصل شوند. نشان می‌دهیم که اتصال ترجیحی در شبکه زمین‌لرزه‌های ایران وجود دارد و نرخ اتصالات با درجه هر گره، رابطه خطی دارد.

### Investigation of preferential attachment in Iran earthquake network

Rezaei, Soghra<sup>1</sup>; Moghaddasi, Hanieh<sup>1</sup>; Darooneh, Amir Hossein<sup>1</sup>; Taghizadeh-Farahmand, Fataneh<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Zanjan University, Zanjan

<sup>2</sup> Department of Physics, Qom Branch, Islamic Azad University, Qom, Iran

### Abstract

Earthquakes have complex spatio-temporal behavior that can be studied using complex network theory. Earthquake networks are dynamical due to addition of new seismic events over time leading to creating new nodes and links in the network. Here we study the preferential attachment hypothesis for the connection of new nodes which states that it is more probable for newly added nodes to join the highly connected nodes. We showed that the preferential attachment is present in the case of Iran earthquakes network and the attachment rate has a linear relationship with node degree.

شبکه‌های تکاملی، رشد و اتصال ترجیحی است[۵]. رشد به معنی اضافه شدن گره‌های جدید به شبکه با گذشت زمان است و منظور از اتصال ترجیحی این است که گره‌های جدیدی که وارد شبکه می‌شوند، ترجیح می‌دهند به جای اتصال به گره‌های با درجه پایین به گره‌های با درجه بالا متصل شوند. تعداد یال‌های متصل به یک گره به عنوان درجه تعریف می‌شود. به زبان ریاضی، احتمال اتصال یک گره جدید به  $\alpha$ مین گره موجود در شبکه با درجه  $k_i$ ، به صورت زیر است،

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i^\alpha}{\sum_j k_j^\alpha} = C(t)k_i^\alpha \quad (1)$$

### مقدمه

در سال‌های اخیر نظریه شبکه‌های پیچیده به عنوان یک ابزار مناسب برای توصیف ویژگی‌های مختلف پدیده‌های پیچیده شناخته شده است[۱]. برای توصیف یک سیستم با استفاده از مدل شبکه‌ای، ابتدا باید گره‌ها و یال‌ها را شناخت. اجزای سیستم به عنوان گره و ارتباط بین آن‌ها به عنوان یال تعریف می‌شود. شبکه‌های دنیای واقعی به دلیل گسترش ارتباطاتشان با محیط اطراف دائما در حال تکامل هستند یعنی با گذشت زمان، گره‌ها به شبکه اضافه و یا از شبکه حذف می‌شوند و در نتیجه یال‌های آن‌ها نیز تغییر می‌کنند مثل شبکه‌های اجتماعی، شبکه اینترنت، شبکه متابولیک سلولی و شبکه همکاری‌های علمی[۲-۴]. دو مشخصه

در این مقاله ابتدا روش محاسبه اتصال ترجیحی و ساخت شبکه زمین‌لرزه‌ها را توضیح می‌دهیم و سپس نتایج حاصل را بیان می‌کنیم.

### روش تحقیق

در شبکه‌های تکاملی، با گذشت زمان گره‌ها و یال‌های جدید به شبکه اضافه می‌شوند که رابطه بین گره‌های جدید و گره‌های موجود در شبکه، با محاسبهتابع اتصال ترجیحی قابل توصیف است. در واقع بعد از ورود گره‌های جدید و ایجاد یال با گره‌های موجود در شبکه، تابع  $\Pi(k)$  با رسم تغییرات درجه گره‌های موجود در شبکه بر حسب درجه آن‌ها، از معادله ۱ به دست می‌آید.

برای محاسبه  $\Pi(k)$  در شبکه، همه گره‌های موجود در شبکه را با "گره" و گره‌های جدیدی که در بازه زمانی  $\Delta T$  به شبکه اضافه می‌شوند را با عنوان "گره" در نظر می‌گیریم که  $T_1 < T_2 < \dots < T_n$  است. تغییرات درجه "گره" را بعد از گذشت زمان  $\Delta T$  و اضافه شدن "گره" محاسبه می‌کنیم. با رسم  $\Delta k$  بر حسب  $k$  می‌توانیم  $\Pi(k, T_1, T_2, \dots, T_n)$  را به دست آوریم. برای حذف نوسانات بهتر است تابع توزیع تجمعی را به صورت زیر در نظر بگیریم،

$$\kappa(k) = \int \Pi(k) dk \quad (2)$$

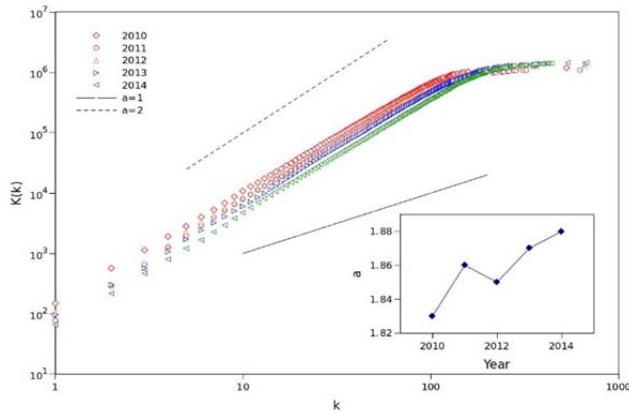
اگر تابع  $\Pi(k)$  وابسته به  $k$  باشد،  $\kappa(k) = k^{\alpha+1}$  خواهد شد و اگر  $\alpha = 1$  باشد در این صورت اتصال ترجیحی وجود دارد. برای ساخت شبکه زمین‌لرزه‌ها از مدل رضائی و همکاران استفاده می‌کنیم [۱۲]. در این مدل شبکه‌ای، ابتدا منطقه جغرافیایی مورد نظر به سلول‌های مربعی با اندازه یکسان تقسیم می‌شوند که این سلول‌های مربعی بدون هیچ همپوشانی کل منطقه را در بر می‌گیرند. سری زمانی لرزه‌ها را در نظر گرفته و هر زمین‌لرزه با هر بزرگاً که داخل این سلول‌ها اتفاق بیفتد به عنوان گره در نظر می‌گیریم. برای ایجاد ارتباط بین گره‌ها از روش پدیداری استفاده می‌کنیم به این ترتیب که، رخدادهای لرزه‌ای را مطابق شکل ۱ در یک نمودار میله‌ای که محور افقی آن زمان است، قرار می‌دهیم. هر میله مطابق با یک زمین‌لرزه است که ارتفاع آن بزرگای مریبوط به

در این رابطه  $C(t)$  ثابت بهنجارش و  $\alpha$  یک نمایه مثبت است. اگر  $\alpha = 1$  باشد در اینصورت اتصال ترجیحی خطی بوده، شبکه بدون مقیاس و تابع توزیع درجات توانی است.

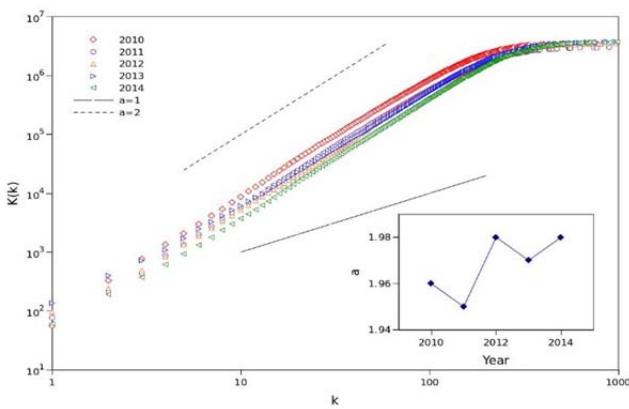
زمین‌لرزه‌ها پدیده‌هایی پیچیده از نظر زمانی و مکانی هستند که به طور ناگهانی به دلیل جایه‌جایی گسل‌ها در پوسته زمین به وجود می‌آیند. به دست آوردن یک مجموعه معادلات ریاضی که تمام عوامل دخیل در جایه‌جایی گسل‌ها را در بر گرفته و بتواند پدیده زمین‌لرزه را توصیف کند، کار سختی است. در نظریه شبکه‌های پیچیده نیازی به داشتن جزئیات سیستم گسلی نداریم بلکه تنها با داشتن اطلاعاتی در مورد مکان، زمان و بزرگی رخداد زلزله قادریم جنبه‌های مختلف پدیده زمین‌لرزه را دریابیم. شبکه زمین‌لرزه‌ها با گذشت زمان و با اضافه شدن رخدادهای لرزه‌ای تکامل می‌یابد، در واقع گره‌ها و یال‌های جدید به شبکه اضافه می‌شود. با توجه به نظریه اتصال ترجیحی، احتمال ارتباط رخدادهای لرزه‌ای جدید با رخدادهای با ارتباطات بالا، بیشتر از رخدادهای با ارتباطات پایین است.

برای بررسی اتصال ترجیحی در شبکه زمین‌لرزه‌ها، نخست باید سری زمانی زمین‌لرزه‌ها را با شبکه‌ای نشان دهیم. دو رویکرد اصلی توسط نویسنده‌گان برای ساخت شبکه زمین‌لرزه‌ها وجود دارد. در رویکرد اول، منطقه جغرافیایی مورد مطالعه به سلول‌هایی با اندازه یکسان تقسیم می‌شوند. اگر زمین‌لرزه‌ای در این سلول‌ها اتفاق بیافتد، آن‌ها به عنوان گره تلقی می‌شوند. رخدادهای لرزه‌ای پشت سر هم از نظر زمانی، توسط یال‌ها به هم متصل می‌شوند. در مقالات مختلفی ویژگی‌های چنین شبکه‌هایی مطالعه شده است [۶-۸]. نقاط فعال در منطقه جغرافیایی ایران توسط الگوریتم پیچونک توسط این روش محاسبه شده است [۹]. در رویکرد دوم، رخدادهای لرزه‌ای به عنوان گره در نظر گرفته می‌شوند و دو گره زمانی به هم وصل می‌شوند که توسط روابطی، به هم وابسته باشند [۱۰-۱۱]. رضائی و همکاران از رویکرد اول برای تعریف گره و برای ایجاد یال بین گره‌ها از روش پدیداری که در رویکرد دوم مورد استفاده قرار گرفته بود، استفاده کردند [۱۲]. آنها نشان دادند که قوانین گوتبرگ-ریشر و اموری قابل بازیابی از این شبکه هستند.

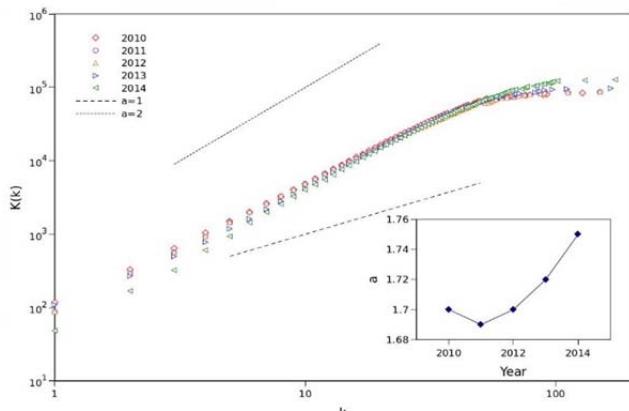
مشاهده می شود. در شکل ها  $a = \alpha + 1$  است. اگر اتصال ترجیحی وجود نداشت، باید  $\Pi(k)$  به  $k$  وابسته بوده و  $K(k)$  با  $k$  متناسب می شد. اما  $K(k)$  خطی نیست که نشان دهنده وجود اتصال ترجیحی است. نمایه  $\alpha$  متناظر



الف



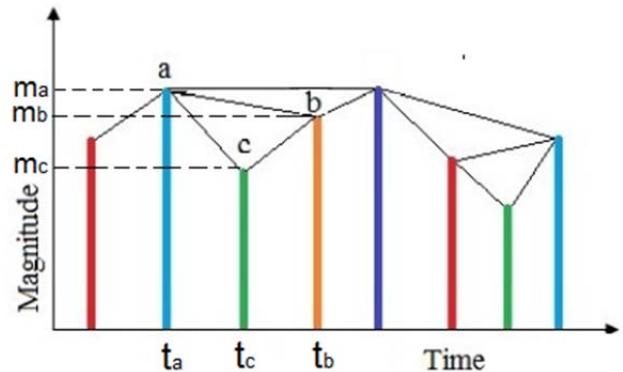
ب



ج

شکل ۲. تابع  $K(k)$  بر حسب  $k$  برای شبکه زمین لرزه های ایران به ازای (الف) تمام بزرگی ها، (ب)  $m_c = 2$  و (ج)  $m_c = 3$ .  $T_b$  مقدار  $T$  را به صورت  $[1999+x, 2010+x]$  که در آن  $x < 0$  بود، انتخاب کردیم. مقدار  $(K(k))$  بر حسب  $k$  برای بازه های زمانی مختلف و همه زمین لرزه های ذکر شده، در شکل ۲

زمین لرزه است. گره ها در بالای میله ها قرار می گیرند و دو گره زمانی توسط یال به هم متصل می شوند که شرط پدیداری برقرار باشد.



شکل ۱. نمونه ای از سری زمانی. شرط پدیداری نشان می دهد که بین کدام گره ها می تواند یال وجود داشته باشد.

در واقع شرط پدیداری را به زبان ریاضی می توان به این صورت توضیح داد که اگر یک خط راست بین دو گره وصل کنیم، این خط باید توسط هیچ میله ای که بین آن هاست قطع شود، یعنی،

$$m_c < m_b + (m_a + m_b) \frac{t_b - t_c}{t_b - t_a} \quad (3)$$

## نتیجه گیری

در این مقاله، داده های لرزه ای برای منطقه جغرافیایی ایران از سایت <http://irsc.ut.ac.ir> برای بزرگی این ۸۰۰ ریشت، در محدوده عرض جغرافیایی  $44^{\circ}N - 24^{\circ}N$  و طول جغرافیایی  $40^{\circ}E - 64^{\circ}E$  در بازه زمانی ۱ ژانویه ۱۹۹۶ تا ۱ ژانویه ۲۰۱۵ با تعداد ۹۱۶۵۰ زمین لرزه، به دست آمد. شبکه زمین لرزه ها را به روش بیان شده در قسمت قبل ساختیم. برای بررسی اتصال ترجیحی، زمان  $T$  را در بازه  $[1999, 2010]$  در نظر گرفته و  $\Delta T = 1$  سال انتخاب کردیم. بعد از گذشت زمان  $T$ ، به طور واضح شبکه تکامل می یابد و گره های جدید به شبکه اضافه می شود. با محاسبه تغییرات درجه هر گره نسبت به درجه هر گره، می توان  $\Pi(k)$  و  $K(k)$  را محاسبه کرد. برای گسترش بررسی، مقدار  $T$  را به صورت  $[1999+x, 2010+x]$  که در آن  $x < 0$  بود، انتخاب کردیم. مقدار  $(K(k))$  بر حسب  $k$  برای بازه های زمانی مختلف و همه زمین لرزه های ذکر شده، در شکل ۲

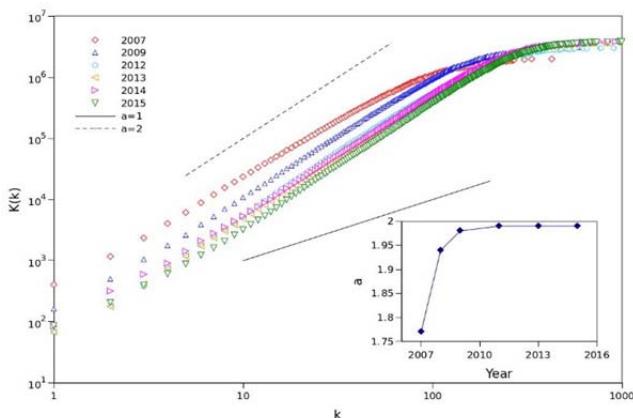
زیرا این گره‌ها دیگر گره‌ها را با احتمال بیشتری تحت تاثیر قرار می‌دهند.

$T$ . با مقدار انتهایی زمان مربوط و برآذش خطی با توان ۱ و ۲ در شکل مشخص شده است. مقدار  $\alpha$  در پیوست شکل برای  $T$ . های مختلف نشان داده شده است.

با هر بازه زمانی در پیوست شکل با مقدار میانگین ۰.۹۵ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، نمودار در درجه‌های بالاتر اشباع می‌شود زیرا تعداد گره‌ها با درجه‌های بالا خیلی کمتر از درجه‌های پایین است.

مطابق شکل ۲-ب و ۲-ج، مقدار  $(k)$  برای آستانه‌های ۲ و ۳ نیز محاسبه شد که در آن  $\alpha = <0.85>$  و  $m_c = <0.71>$  به ترتیب برای هر کدام به دست آمد.

برای بررسی بیشتر، مقدار بزرگی  $m$  را ثابت نگه داشته و مقدار  $T$ . را به صورت  $[x + ۱۹۹۶, ۲۰۰۶]$  که در آن  $x = <10>$  بود تغییر دادیم. با افزایش بازه زمانی  $T$ . همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود مقدار  $\alpha$  به عدد ۱ نزدیکتر می‌شود.



شکل ۳. تابع  $(k)$  بر حسب  $k$  برای شبکه زمین‌لرزه‌های ایران به ازای تمام بزرگی‌ها.  $T$ . ها به صورت  $[x + ۱۹۹۶, ۲۰۰۶]$  که در آن  $x = <10>$  است. هر  $T$ . با مقدار انتهایی زمان مربوط و برآذش خطی با توان ۱ و ۲ در شکل مشخص شده است. مقدار  $\alpha$  در پیوست شکل برای  $T$ . های مختلف نشان داده شده است.

این بررسی‌ها برای شبکه زمین‌لرزه‌های ایتالیا نیز مورد بررسی قرار گرفت که نتایج مشابهی با یافته‌های ذکر شده در این مقاله داشت. این مطالعات نشان‌دهنده وجود اتصال ترجیحی در شبکه زمین‌لرزه‌ها می‌باشد. از این روش می‌توان با مشخص کردن گره‌های با اتصالات بالا، برای برآورد خطر لرزه‌ای استفاده کرد.

## اثر تقارن زوجی اسپین سه گانه $f$ بر سطح انرژی آندریف در تک لایه $\text{MoS}_2$

رضایی سادati، طاهره؛ نوروزی، میلاد؛ خضرلو، مریم؛ گودرزی، هادی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

### چکیده

در کار حاضر، سطوح مقید آندریف در اتصال جوزفسون ابررسانا/نرمال/ابررسانا با پایه مولیبدن دی سولفاید محاسبه می‌شود، بطوریکه ناحیه نرمال دارای عرض متناسب با طول همایوسی می‌باشد. تقارن پارامتر نظم در نظر گرفته شده در این ساختار جفت شدگی غیر معمول اسپین سه گانه نوع ۳می باشد این تقارن زوجی با توجه مقادیر بالای اندازه حرکت اوربیتالی آن ( $l=3$ ) گاف پیچیده ای دارد. این گاف از طریق اثر مجاورت در مولیبدن دی سولفاید القا می‌شود. اثر پارامترهای مختلف ساختار نظیر زاویه ابررسانایی  $\theta_S$  بر روی سطوح مقید آندریف بررسی می‌شود.

### Effect of spin-triplet f-wave paring symmetry on Andreev energy state in monolayer $\text{MoS}_2$

Rezaei Sadati, Tahereh; Norouzi, Milad; Khezerlou, Maryam; Goudarzi, Hadi

Department of Physics, Faculty of Science, Urmia University, Urmia

### Abstract

In this work, we analytically calculate the Andreev bound states in monolayer molybdenum disulfide superconductor/normal/superconductor Josephson junction, in which the width of normal region is order of coherent length. The symmetry of pairing order, in this structure, is taken to be unconventional spin-triplet  $f$ -wave pairing. This pairing symmetry presents a complicated superconducting gap due to having a large orbital angular momentum ( $l=3$ ). This gap is induced to the monolayer  $\text{MoS}_2$  by the proximity-effect. We investigate the influence of structural parameters, such as superconductor incidence angle  $\theta_S$ , on Andreev bound states.

PACS No. ۷۴۱۰

ساختار ساندویچی شکل می‌باشد که یک لایه اتم‌های مولیبدن بین دو لایه سولفاید محصور شده است<sup>[۳]</sup>. در یک لایه یک اتم مولیبدن با شش اتم سولفاید و یک اتم سولفاید با سه اتم مولیبدن توسط پیوند کوالانسی به هم متصل می‌شوند. در مولیبدن دی سولفاید حجمی لایه‌ها توسط پیوند واندروالاسی روی هم قرار گرفته اند. وجود پیوند کوالانسی قوی بین لایه مولیبدن و سولفاید موجب شده است این ماده سخت‌تر از فولاد باشد<sup>[۴۵]</sup>. مولیبدن

### مقدمه

کشف ساختارهای دو بعدی نظیر گرافن و مولیبدن دی سولفاید [۲ و ۱]، شروعی برای مطالعات گسترده روی مواد دیراکی می‌باشد که در تولیدات آینده نانوازارها، به دلیل خواص منحصر به فرد آنها به کار گرفته می‌شود. ترکیب فلزات انتقال با چالکوژن‌ها مانند مولیبدن دی سولفاید در ساختار تک لایه‌ای دارای باند گپ قابل توجهی نسبت به گرافن می‌باشند. مولیبدن دی سولفاید دارای

فرمی  $v_f = 0.53 \times 10^6 \text{ m/s}$  می باشد. اسپین و چاهک به ترتیب توسط پارامترهای  $s = \pm 1$  و  $\tau = \pm 1$  معین می شوند. پارامترهای توپولوژیکی و تفاوت جرم الکترون-حفره در هامیلتونی بالا به ترتیب عبارتند از:  $\alpha = 0.43$  و  $\beta = 0.21$  [۱۲]. پتانسیل شیمیابی دو ناحیه نرمال  $\mu_N$  و ابررسانا ( $E_F - U(x) - \mu_S$ ) می باشند. پتانسیل جفت شدگی نوع f به فرم زیر می باشد [۹]:

$$\hat{\Delta}_s(\vec{k}) = [d(\vec{k}) \cdot \sigma] i \sigma_y, \quad d(\vec{k}) = \Delta_f(\vec{k}) \hat{z} \quad (3)$$

$$\Delta_f = \Delta_0 \cos \theta_s (\cos^2 \theta_s - 3 \sin^2 \theta_s) \quad (4)$$

اگر پارامترهای A و B به صورت زیر تعریف شود

$$A = \Delta_f + \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m_0} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) - E_f + U(x)$$

$$B = -\Delta_f + 2\lambda s \tau + \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m_0} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) - E_f + U(x)$$

در نتیجه می توان با محاسبات پیچیده تحلیلی انرژی پراکنده کی الکترون-حفره را برای ناحیه ابررسانا به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\varepsilon = \xi \sqrt{\frac{A+B}{2} + \nu \sqrt{\frac{(A-B)^2}{4} + \nu_f^2 \hbar^2 k^2 + |\Delta_f|^2 (1-\eta^2)}} + |\Delta_s|^2 \eta^2 \quad (5)$$

که در آن  $\eta^2 = 1 - \left( \frac{A-B}{A+B} \right)^2$  می باشد. پارامتر

برانگیختگی های شبه الکترون و شبه حفره را نشان می دهد در صورتیکه  $\nu = \pm 1$  بیانگر باند رسانش و باند ظرفیت است. نمودار انرژی پراکنده کی معادله (۵) را برای ناحیه ابررسانا برحسب K به صورت زیر داده می شود.

دی سولفاید حجمی دارای باند گاف غیرمستقیم ۱/۲ الکترون ولت و مولیبدن دی سولفاید تک لایه دارای باند گاف مستقیم ۱/۹ الکترون ولت می باشد [۷ و ۸]. مولیبدن دی سولفاید نیز مانند گرافن خاصیت ابررسانایی ندارد، ولی با استفاده از اثر مجاورت می توان خاصیت ابررسانایی را در این ماده القا کرد برای این کار یک الکترود ابررسانا را در روی ورقه مولیبدن دی سولفاید قرار می دهن. ساختار شش گوشه این مواد شرایط لازم برای جفت شدگی های تقارن های مختلف ابررسانایی را فراهم می کند [۸]. در سال های اخیر، در چنین ساختارهایی مباحث مختلفی مانند رسانندگی زیر گاف و جریان جوزفسون بررسی شده است [۸-۱۱]. در این مقاله، سطوح انرژی آندریف در پیوند دو اتصالی ابررسانا/نرمال/ابرسانا (S/N/S) با پایه مولیبدن دی سولفاید را محاسبه می کنیم که تقارن جفت شدگی نوع f در نظر گرفته شده است. در آخر با استفاده از محاسبات عددی نمودارهای طیف انرژی آندریف برحسب اختلاف فاز ابررسانایی رسم می شود.

### انرژی برانگیختگی ابررسانای سه گانه

برای بدست آوردن انرژی برانگیختگی های الکترون-حفره کم انرژی، معادله دیراک بوگولیوبوف-دوژن (DBdG) معرفی شده باید در مولیبدن دی سولفاید نوشته شود [۹] و سپس ویژه مقادیر محاسبه شود.

هامیلتونی ناحیه ابررسانا MoS<sub>2</sub>، به صورت زیر نوشته می شود:

$$H = \begin{pmatrix} h_0 - E_f + U(x) & \Delta_f \\ \Delta_f^* & -h_0 + E_f - U(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در آن:

$$h_0 = \hbar v_f \vec{k} \cdot \vec{\sigma}_\tau + \Delta \sigma_z + \lambda s \tau (1 - \sigma_z) \quad (2)$$

$$+ \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m_0} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \sigma_z \right).$$

$\sigma_\tau$  ماتریس های پائولی هستند. برهم کنش اسپین مدار با ثابت جفت شدگی  $\lambda = 40 \text{ meV}$  واقع می شود و سرعت

$$\psi_S^R = t \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 e^{i\tau\theta_s} \\ e^{i\tau\theta_s} e^{-i\varphi_e} e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix} e^{ik_s x} + t' \begin{pmatrix} \xi_3 \\ -\xi_4 e^{-i\tau\theta_s} \\ -e^{-i\tau\theta_s} e^{-i\varphi_h} e^{-i\varphi_2} \\ e^{-i\varphi_h} e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix} e^{-ik_s x} \quad (6)$$

همچنین اسپینور ابررسانای سمت چپ اتصال بدست می‌آید:

$$\psi_S^L = r \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 e^{-i\tau\theta_s} \\ -e^{-i\tau\theta_s} e^{-i\varphi_e} e^{-i\varphi_1} \\ e^{-i\varphi_e} e^{-i\varphi_1} \end{pmatrix} e^{-ik_s x} + r' \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 e^{i\tau\theta_s} \\ e^{i\tau\theta_s} e^{-i\varphi_h} e^{-i\varphi_1} \\ e^{-i\varphi_h} e^{-i\varphi_1} \end{pmatrix} e^{ik_s x} \quad (7)$$

برای اسپینور ناحیه نرمال هم داریم:

$$\psi_N = a(1 \ \ \tau\alpha e^{i\tau\theta} \ \ 0 \ \ 0)^T e^{ik_N x} + b(1 \ \ -\tau\alpha e^{-i\tau\theta} \ \ 0 \ \ 0)^T e^{-ik_N x} \quad (8)$$

$$+ c(0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ \tau\alpha_h e^{i\tau\theta_h})^T e^{-ik_h x} + d(0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ \tau\alpha_h e^{-i\tau\theta_h})^T e^{ik_h x}$$

سطح انرژی آندريف با شرایط مرزی زیر بدست می‌آید:

$$\psi_S^L = \psi_N \Big|_{x=0}, \quad \psi_N = \psi_S^R \Big|_{x=d}$$

بعد از محاسبات بسیار طولانی سطح انرژی آندريف به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{-Y_2 \pm \sqrt{Y_2^2 - Y_1 Y_3}}{2Y_1}} \quad (9)$$

که در آن

$$Y_1 = e^{2i\varphi} (K\alpha_1 - W\alpha_1)^2 + 1$$

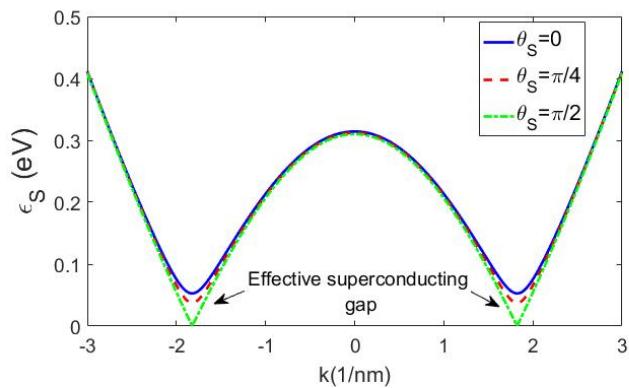
$$Y_2 = e^{i\varphi} (K\alpha_1 - W\alpha_1) (e^{-i\varphi_e} e^{-i\varphi_h}) \eta^2$$

$$\left[ \left( -\alpha_1 T (1 + e^{2i\varphi}) + e^{i\varphi} (XC + (Y + Z)D) - e^{i\varphi} (K\alpha_1 - W\alpha_1) \right) \right] + \eta^2$$

$$Y_3 = \left[ \eta^2 \left( e^{-i\varphi_e} e^{-i\varphi_h} \right) \left[ -\alpha_1 T (1 + e^{2i\varphi}) + e^{i\varphi} (XC + (Y + Z)D) - e^{i\varphi} \eta^2 (K\alpha_1 - W\alpha_1) \right] \right]^2$$

و  $C$  و  $X$  و  $T$  و  $W$  و  $Z$  توابع پیچیده و بزرگ وابسته به اسپینورهای نواحی نرمال و ابررسانا هستند.

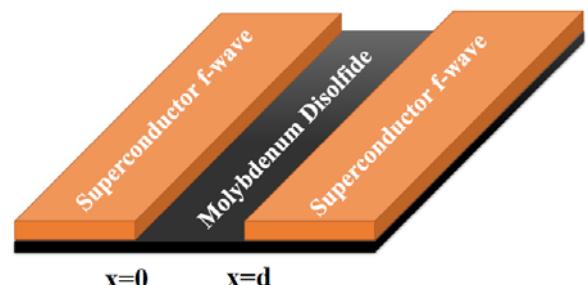
### سطوح انرژی آندريف



شکل ۱: نمودار انرژی پراکنده‌گی الکترون-حفره ابررسانای نوع  $f$

در شکل ۱، به ازای زوایای مختلف انرژی برانگیختگی ناحیه ابررسانایی رسم شده است که واپسگی گاف موثر ابررسانایی به زاویه تابش قابل مشاهده است. مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه تابش اندازه گاف موثر ابررسانایی کاهش می‌یابد. به طوری که به ازای  $\theta_s = \frac{\pi}{2}$  اندازه گاف ابررسانایی به صفر می‌رسد که باید انتظار داشته باشیم در چنین حالتی انعکاس آندريف متوقف شود. در رسم این نمودار اندازه انرژی فرمی برابر  $1/1 \text{ eV}$  در نظر گرفته‌ایم و اندازه دامنه پارامتر نظم  $V = 0/1 \text{ eV}$  می‌باشد، که در این صورت بیشترین گاف ابررسانایی مربوط به حالت  $\theta_s = 0$  است.

### اتصال جوزفسون



شکل ۲: ساختار اتصال جوزفسون با پایه مولیبدن دی سولفاید (S/N/S) با استفاده از هامیلتونی (۱) اسپینورهای ناحیه ابررسانا برای دو سمت راست و چپ به صورت زیر بدست می‌آید که  $t$  و  $t'$  و  $r$  و  $r'$  ضرایب احتمالات مربوطه هستند.

برای اسپینور ناحیه ابررسانایی سمت راست داریم:

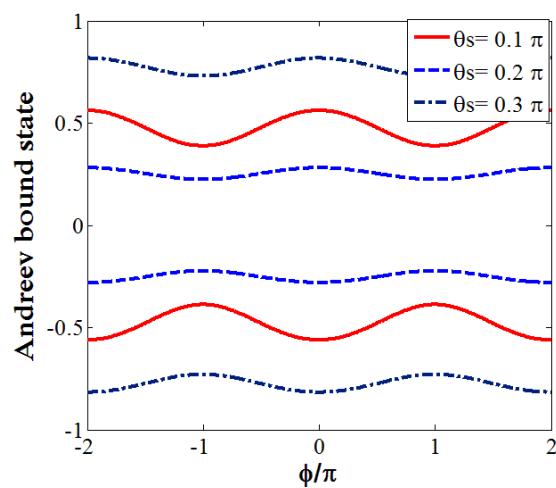
اختلاف فاز ابررسانایی رسم گردید. دیده شد که سطوح انرژی پریودیک آندريف با پریود  $2\pi$  حاصل می‌شوند و وابستگی

این سطوح انرژی به پارامتر گاف ابررسانایی موج  $f$  یعنی  $\theta_s$  شدید می‌باشد.

## مرجع‌ها

- [۱] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, A.A. Firsov, science, **306** (2004) 666-669
- [۲] K. F. Mak, C. Lee, J. Hone, J. Shan, and T. F. Heinz, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 136805.
- [۳] A. Kuc, N. Zibouche, T. Heine, Phys. Rev. B **83** (2011) 245213.
- [۴] R. Tenne, M. Redlich, Chem. Soc. Rev **39** (2010) 1423 -1434.
- [۵] K. F.Mak, C.Lee, J. Hone, J. Shan, T. F. Heinz, Phys. Rev. Lett **105** (2010)136805.
- [۶] M. Chhowalla, H. S. Shin, G. Eda, L. J. Li, K. P. Loh, H. Zhang, Nature Chemistry **5** (2013) 263-275.
- [۷] S. Lebegue, O. Eriksson, Phys. Rev. B **79** (2009) 115409.
- [۸] Y. Rahnavard, G. Rashedi, T. Yokoyama, *J. Phys.: Condens. Matter* **22** (2010) 415701
- [۹] H. Goudarzi, M. Khezerlou, H. Sedghi, and A. Ghorbani. Superlattices Microstruct. **104** (2017) 1-9.
- [۱۰] H. Goudarzi, M. Khezerlou, S. F. Ebadzadeh. Superlattices Microstruct. **93** (2016) 73-81.
- [۱۱] M. Khezerlou, H. Goudarzi. Phys. Rev B **93**, (2016) 115406.
- [۱۲] H. Rostami, A. G. Moghaddam, and R. Asgari. Phys. Rev. B. **88**, (2013) 085440.

نمودار سطوح مقید انرژی آندريف بر حسب اختلاف فاز به صورت زیر است.



شکل ۳: سطوح مقید انرژی آندريف بر حسب اختلاف فاز به ازای  $\theta_s$  مختلف.

با توجه به شکل ۳، سطوح انرژی آندريف بر حسب اختلاف فاز دو ناحیه ابررسانا دارای گاف انرژی هستند. گاف سطوح انرژی آندريف به ازای زوایای تابش حامل های بار تغییر می‌کند. نکته مهم این است که سطوح انرژی تابع نوسانی با پریود  $2\pi$  دارند که این نتیجه مشخصه اصلی اتصالات جوزفسون در حضور ساختارهای دو بعدی دیراک محسوب می‌شود. با تغییرات زاویه فرود الکترون به فصل مشترک در ناحیه ابررسانا اندازه انرژی مقید آندريف تغییر می‌یابد. شبیه این نمودارها متناسب با مقدار ابر جریان جوزفسون تونلی از این ساختار خواهد بود که دیده می‌شود که یک جریان مشابه سینوسی برای جریان جوزفسون حاصل شود. به دلیل پیچیدگی فرم گاف ابررسانایی اسپین سه گانه  $f$ ، سطوح انرژی آندريف وابستگی شدیدی به مقدار  $\theta_s$  دارند.

## نتیجه گیری

طیف انرژی آندريف برای اتصال ابررسانا/نرم‌مال/ابررسانا با جفت شدگی نوع  $f$  بر پایه مولیدن دی سولفاید به صورت دقیق بدست آمد و با استفاده از محاسبات عددی نمودار این نتایج بر حسب

## ناهمخوانی کوانتومی زنجیره هایزنبرگ سه کیو بیتی با اندرکنش سه تایی تحت کanal نویز پائولی

زینالی نسب، سمیرا؛ نجارباشی، قادر

گروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

### چکیده

در این مقاله رفتار ناهمخوانی کوانتومی را برای حالت تعادل گرمایی زنجیره سه اسپین -  $1/2$  هایزنبرگ  $XXZ$  با اندرکنش سه تایی تحت میدان مغناطیسی باحالته که تحت کanal نویز پائولی  $\eta$  فرار داده ایم، مقایسه می کنیم. در هر دو حالت نتایج نشان می دهد برای میدان  $B \geq 0$  و دمای  $T \geq 0$  ناهمخوانی کوانتومی برای ضرب کوپلر  $J^+ > J^-$  است؛ و این مطلب برای  $B < 0$  و  $T < 0$  در حالت کلی صادق نیست.

## Quantum discord in three-qubit Heisenberg chain with three-site interactions under pauli noise channel

**Zeinalinasab, Samira; Najarbashi, Ghader**

Department Of Physics, University Of Mohaghegh Ardabili, ardabil

### Abstract

In this paper, we compare the behavior of the quantum discord for thermal equilibrium state of a three spin-1/2 chain at the Heisenberg XXZ model with three-site interaction under magnetic field with state that have put under  $\eta$  pauli noise channel. In both state the results show that for field  $B \geq 0$  and temperature  $T \geq 0$ , the quantum discord for the case  $J^+ > 0$  is greater than for  $J^- > 0$ . But this issue does not hold for  $B < 0$  and  $T < 0$  in general.

03.67.-a; 05.40.Ca

### مقدمه

اگر ضرب  $J$  مثبت باشد برهمکنش اسپینی را پاد فرومغناطیس

می نامیم و اگر منفی باشد برهمکنش از نوع فرو مغناطیسی است؛

$$\begin{aligned} H_{XXZ} = & \sum_{l=1}^3 \left[ J \left( \sigma_l^x \sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^y \right) + J_z \sigma_l^z \sigma_{l+1}^z + B \sigma_l^z \right] \\ & + \sum_{l=1}^3 J^+ \left[ \sigma_l^x \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^y \right] \\ & + \sum_{l=1}^3 J^- \left[ \sigma_l^x \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^y - \sigma_l^y \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^x \right] \end{aligned} \quad (1)$$

که در اینجا  $J$  ضرب جفت شدگی همسایگی نزدیک جهت های  $x$

و  $y$  است و  $J_z$  ضرب جفت شدگی جهت  $z$  است. همه

پارامترهای دیگر از قبیل  $B, J^+, J^-, J_z$  بدون بعدند چون مقیاسی

از پارامتر  $J$  هستند و  $J^+, J^-, J_z$  ضرب اندرکنش سه تایی است.

ناهمخوانی کوانتومی اختلاف بین اطلاعات متقابل کوانتومی و کلاسیک است که نوع دیگری از همبستگی کوانتومی هست و متفاوت از درهم تنیدگی است [۲، ۱]. همبستگی به دو بخش کوانتومی و کلاسیکی طبقه بندی می شود. نتایج نشان می دهد که همبستگی کوانتومی نمی تواند تنها به درهم تنیدگی محدود شود؛ زیرا حالت های کوانتومی جدا پذیر نیز می توانند همبستگی داشته باشند که برای اندازه گیری این حالت از ناهمخوانی کوانتومی استفاده می شود.

### زنجره هایزنبرگ $XXZ$

هامیلتونین زنجیره ای هایزنبرگ  $XXZ$  سه کیو بیتی در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت  $B$  به شکل زیر در نظر می گیرد [۴، ۵] :

$$\begin{aligned} \rho_{ABC} &= \frac{1}{Z} \exp(-\beta H) \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^7 \exp(-\beta E_i) |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \\ Z &= \text{Tr}[\exp(-\beta H)] \\ &= \text{Tr} \sum_{i=0}^7 \exp(-\beta E_i) |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \end{aligned} \quad (4)$$

تابع پارش سیستم است و  $\kappa T = 1 / \beta$  که ثابت بولتزمن است و ما برای سادگی در محاسبات،  $\kappa = 1$  در نظر می‌گیریم.

### کanal نویز پائولی

برای به دست آوردن ماتریس چگالی اختلالی  $\rho'_{ABC}$ ، ماتریس چگالی  $\rho_{ABC}$  را تحت کanal نویز پائولی زیر قرار می‌دهیم [۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\rho] &= (1-\eta)\rho + \eta \frac{1}{d} \\ &= (1 - \frac{3\eta}{4})\rho + \frac{\eta}{4}(\sigma_x \rho \sigma_x^\dagger + \sigma_y \rho \sigma_y^\dagger + \sigma_z \rho \sigma_z^\dagger) \end{aligned} \quad (5)$$

در اینجا  $(1-\eta)$  احتمال این است که انتقال بدون اختلال باشد و  $d$  بعد سیستم اختلالی است. برای  $N=2$  تعداد ذرات سیستم  $\eta = [0.47, 1]$  است.

### ناهمخوانی کوانتومی

تعریف اصلی ناهمخوانی کوانتومی توسط اولیور و زورک بیان شد:  $[10 - 8]$

$$\delta(B|A) = \min_{\prod_A} [I(A:B) - S(B|\prod_A)] = S(B|\prod_A) - S(B|A) \quad (6)$$

که در اینجا آنتروپی‌های شرطی کوانتومی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} S(AB) &= S(\rho_{AB}) = -\text{Tr}[\rho_{AB} \text{Log}(\rho_{AB})] \\ &= -\sum_{ab} \lambda_{ab} \text{Log}(\lambda_{ab}) \end{aligned} \quad (7)$$

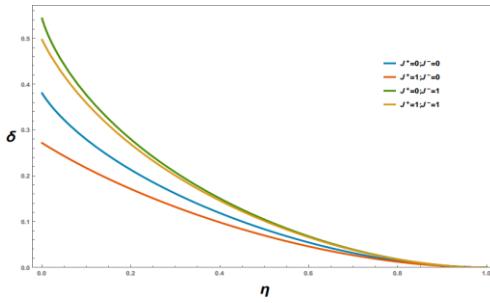
ویژه مقادیر  $\lambda_{ab}$  است.

وقتی که  $J^- = 1 = J^+$  باشد آنگاه مدل به ترتیب تبدیل به  $J_z = J$  باشد مدل  $XZY-YZX$  [۵] و  $XZX+YZY$  [۶] تبدیل به  $XXX$  می‌شود. اگر  $J_z = 0$  باشد، مدل از نوع  $H_{XXZ} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$  خواهد شد. با حل کردن معادله شرودینگر  $\hat{H}_{XXZ} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$  دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |000\rangle \\ |\psi_1\rangle &= (\omega |001\rangle + \omega^2 |010\rangle + |100\rangle) / \sqrt{3} \\ |\psi_2\rangle &= (\omega^2 |001\rangle + \omega |010\rangle + |100\rangle) / \sqrt{3} \\ |\psi_3\rangle &= (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) / \sqrt{3} \\ |\psi_4\rangle &= (\omega |110\rangle + \omega^2 |101\rangle + |011\rangle) / \sqrt{3} \\ |\psi_5\rangle &= (\omega^2 |110\rangle + \omega |101\rangle + |011\rangle) / \sqrt{3} \\ |\psi_6\rangle &= (|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle) / \sqrt{3}, \\ |\psi_7\rangle &= |111\rangle \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_0 &= 3(J_z + B) \\ E_1 &= B - J_z - 2J - 2J^+ - 2\sqrt{3}J^- \\ E_2 &= B - J_z - 2J - 2J^+ + 2\sqrt{3}J^- \\ E_3 &= B - J_z + 4J + 4J^+ \\ E_4 &= -B - J_z - 2J + 2J^+ - 2\sqrt{3}J^- \\ E_5 &= -B - J_z - 2J + 2J^+ + 2\sqrt{3}J^- \\ E_6 &= -B - J_z + 4J - 4J^+ \\ E_7 &= 3(J_z - B) \end{aligned} \quad (9)$$

که در اینجا  $|\psi\rangle = \exp(2i\pi/3)$  به ترتیب حالت‌های اسپین بالا و پایین هستند. حالت تعادل گرمایی سیستم سه اسپینی با هامیلتونین  $H$  در دمای  $T$  به شکل زیر است:



شکل ۲: ناهمخوانی کوانتومی بر حسب دما و نویز  $\eta$  و  
 $J = -1, J_z = 1, \theta = \pi/4, T = 1, B = 0$

در شکل ۳ ناهمخوانی کوانتومی  $\delta$  بر حسب میدان مغناطیسی  $B$  و  
 $T = 1$  رسم شده است. در اینجا ناهمخوانی کوانتومی با زاویه‌های

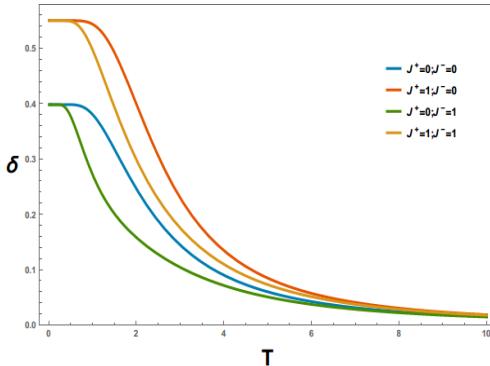
$$\varphi \text{ و } \theta \text{ تغییر می‌کند و در } \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{1}{4} \text{ کمترین مقدار}$$

ناهمخوانی کوانتومی به دست می‌آید. در  $0 \leq B \leq 0$  ناهمخوانی  
 کوانتومی برای  $J^+ > 0$  بزرگ‌تر از  $J^- > 0$  است. در حالی که این  
 مطلب برای  $0 < B$  صادق نیست. در کل می‌توان نتیجه گرفت:

$$\delta(J^+ = 0, J^- = 1, 0) < \delta(J^+ = 1, J^- = 0, 1) \quad (12)$$

نمودار برای  $J^+ = 0, J^- = 0, 1$  متقابرن و برای  $J^+ = 1, J^- = 0, 1$  نامتقابرن است. بیشترین مقدار ناهمخوانی در  $J^+ = 0, J^- = 1$  اتفاق می‌افتد. در اینجا با استفاده از ماتریس چگالی نویزی  $\rho'_{ABC}$  که در بخش قبلی معرفی شد محاسبات خود را انجام داده و نتایج خود را در شکل‌های ۴ و ۵ بررسی می‌کنیم. مقایسه شکل‌های ۱ و ۳ با

شکل‌های ۴ و ۵ نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده در معادلات ۱۱



شکل ۳: ناهمخوانی کوانتومی بر حسب دما و نویز  
 $J = -1, J_z = 1, \theta = \pi/4, \varphi = 1/4, B = 0, \eta = 0.53$

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &\rightarrow \sum_a \Pi_a \rho_{AB} \Pi_a \\ &= \sum_a P_a |a\rangle\langle a| \otimes \rho_{B|a} \end{aligned} \quad (8)$$

ماتریس چگالی شرطی  $\rho_{B|a}$ ، احتمال  $P_a$  برابر است با:

$$\rho_{B|a} = \text{Tr}_A [\Pi_a \rho_{AB}] / P_a \quad (9)$$

$$P_a = \text{Tr} [\Pi_a \rho_{AB}]$$

عملگرهای تصویری به شکل زیر هستند:

$$\Pi_1 = |\Pi^+\rangle\langle\Pi^+|, \Pi_2 = |\Pi^-\rangle\langle\Pi^-| \quad (10)$$

$$|\Pi^+\rangle = \cos\theta |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\theta |1\rangle$$

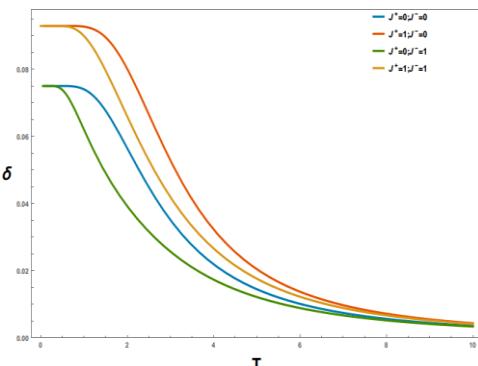
$$|\Pi^-\rangle = \cos\theta |1\rangle - e^{-i\varphi} \sin\theta |0\rangle$$

در اینجا با استفاده از ماتریس چگالی  $\rho_{ABC}$  که در بخش قبلی  
 معرفی شد محاسبات خود را انجام داده و نتایج خود را در  
 شکل‌های زیر بررسی می‌کنیم.

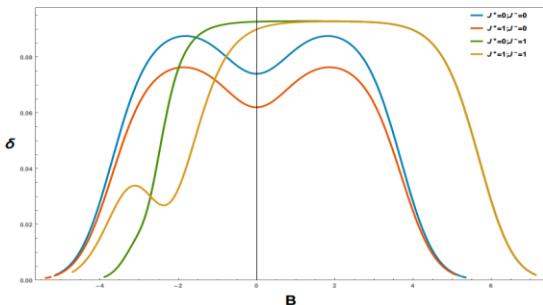
در شکل ۱ با در نظر گرفتن میدان مغناطیسی صفر، ناهمخوانی  $\delta$   
 بر حسب دما  $T$  رسم شده است. در اینجا  $\theta = 0$  در نظر می‌گیریم  
 چون ناهمخوانی کوانتومی به  $\theta$  بستگی ندارد و با زاویه  $\varphi$  تغییر

می‌کند و در  $\frac{\pi}{4}$  کمترین مقدار ناهمخوانی کوانتومی بدست می‌آید. ناهمخوانی کوانتومی با افزایش دما کاهش می‌یابد تا زمانی که دماهای خیلی بالا به صفر میل می‌کند. با افزایش دما ناهمخوانی کوانتومی برای  $J^+ > 0$  بزرگ‌تر از حالت  $J^- > 0$  است. درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\delta(J^+ = 0, J^- = 1, 0) < \delta(J^+ = 1, J^- = 0, 1) \quad (11)$$



شکل ۱: ناهمخوانی کوانتومی بر حسب دما و  
 $J = -1, J_z = 1, \theta = \pi/4, \varphi = 1/4, \eta = 0, B = 0$



شکل ۵: ناهمخوانی کوانتومی بر حسب میدان مغناطیسی و نویز

$$J = -1, J_z = 1, \theta = \pi/4, \varphi = 1/4, T = 1, \eta = 0.53$$

۳) در حالت بدون نویز نتایج نشان می دهد برای دمای  $T \geq 0$

ناهمخوانی کوانتومی برابر است با:

$$(J^+ = 1; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.55 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}, (J^+ = 0; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.4 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}$$

$$(J^+ = 0; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.4 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}, (J^+ = 1; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.55 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}$$

۴) در حالت نویزی نتایج نشان می دهد برای دمای  $T \geq 0$

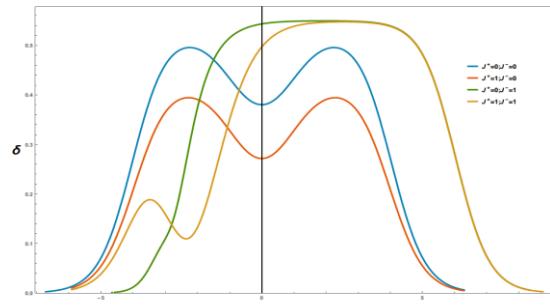
ناهمخوانی کوانتومی برابر است با:

$$(J^+ = 1; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.092 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}, (J^+ = 0; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.075 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}$$

$$(J^+ = 0; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.075 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}, (J^+ = 1; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.092 \\ \text{Min: } \delta = 0 \end{array}$$

## مرجع ها

- [۱] H. Ollivier and W. H. Zurek; “Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations”; Phys. Rev. Lett. **88**, (2001) 017901.
- [۲] L. Henderson and V. Vedral; “Classical, quantum and total correlations”; J. Phys. A **34**, (2001) 6899.
- [۳] A.A. Zvyagin and A. Klümper; “Quantum phase transitions and thermodynamics of quantum antiferromagnets with next-nearest-neighbor couplings”; Phys. Rev. B **68**, (2003) 144426.
- [۴] J.K. Pachos and M.B. Plenio; “Three-spin interactions in optical lattices and criticality in cluster Hamiltonians”; Phys. Rev. Lett. **93**, (2004) 056402.
- [۵] D. Gottesman and J. Röder; “Exact solution of spin chain with binary and ternary interactions of Dzialoshinsky–Moriya type”; Phys. Rev. B **60**, (1999) 9232.
- [۶] Titvinidze, and Japaridze, G.I.: Phase diagram of the spin extended model. Eur. Phys. J. B **32**, (2003) 393.
- [۷] Z. Huang and C. Macchiavello and L. Maccone “Noise-dependent optimal strategies for quantum metrology”; arXiv preprint arXiv;(2018)1801.08347.
- [۸] M. Horodecki and J. Oppenheim, and A. Winter; “Partial quantum information”; Nature, (2005) 436-673.
- [۹] L. del Rio, J. Aberg, R. Renner, O. Dahlsten, and V. Vedral; “The thermodynamic meaning of negative entropy”; Nature, 474:61, 2011.
- [۱۰] J. Oppenheim, M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. Phys. Rev. Lett, **89**, (2002), 180402J.



شکل ۶: ناهمخوانی کوانتومی بر حسب میدان مغناطیسی

$$J = -1, J_z = 1, \theta = \pi/4, \varphi = 1/4, T = 1, \eta = 0$$

و ۱۲ برای ماتریس چگالی نویزی نیز صدق می کند با این تفاوت که نقاط اکسترم ناهمخوانی برای ماتریس چگالی اختلالی تا حد محسوسی کاهش می یابد. شکل ۲ ناهمخوانی کوانتومی  $\delta$  بر حسب نویز  $\eta$  و  $B=0$  و  $T=1$  رسم شده است. در اینجا ناهمخوانی

کوانتومی با زاویه  $\theta$  تغییر می کند و در  $\frac{\pi}{4}$  کمترین مقدار

ناهمخوانی کوانتومی به دست می آید. می توان نتیجه گرفت:

$$\delta(J^- = 0, J^+ = 1, 0) < \delta(J^- = 1, J^+ = 0, 1) \quad (13)$$

## نتیجه گیری

رفتار ناهمخوانی کوانتومی را برای حالت تعادل گرمایی زنجیره سه اسپین - ۱/۲ هایزنبرگ XXZ با اندرکنش سه تایی تحت میدان مغناطیسی باحالتی که تحت کانال اختلالی پائولی قرار داده ایم، مقایسه می کنیم:

۱) در حالت بدون نویز نتایج نشان می دهد برای میدان  $B \geq 0$

ناهمخوانی کوانتومی برابر است با:

$$(J^+ = 1; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.39 \\ \text{Min: } \delta = 0.27 \end{array}, (J^+ = 0; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.54 \\ \text{Min: } \delta = 0.54 \end{array}$$

$$(J^+ = 0; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.49 \\ \text{Min: } \delta = 0.38 \end{array}, (J^+ = 1; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.54 \\ \text{Min: } \delta = 0.5 \end{array}$$

۲) در حالت نویزی نتایج نشان می دهد برای میدان  $B \geq 0$

ناهمخوانی کوانتومی برابر است با:

$$(J^+ = 1; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.076 \\ \text{Min: } \delta = 0.062 \end{array}, (J^+ = 0; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.092 \\ \text{Min: } \delta = 0.092 \end{array}$$

$$(J^+ = 0; J^- = 0) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.087 \\ \text{Min: } \delta = 0.074 \end{array}, (J^+ = 1; J^- = 1) \{ \begin{array}{l} \text{Max: } \delta = 0.092 \\ \text{Min: } \delta = 0.089 \end{array}$$

# آنالیز بس برخالی داده‌های زمان ثبیت حرکت چشم در حین خواندن متون فارسی به روش افت و خیز با حذف روند

شریفی، محمد<sup>۱</sup>؛ فراهانی، حامد<sup>۱</sup>؛ شهبازی، فرهاد<sup>۱</sup>؛ شریفی، مسعود<sup>۲</sup>؛ زارع، مرضیه<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشگاه فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان

<sup>۲</sup>پژوهشکده دانش‌های بنیادی

<sup>۳</sup>دانشگاه فیزیولوژی دانشگاه شهید بهشتی

## چکیده

شواهدی وجود دارد که فرایندهای شناختی ساختار فرکتالی دارند. در این تحقیق مسیر حرکت چشم در حین خواندن متون فارسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. خصوصیات مسیر حرکت چشم در حین خواندن متون فارسی توسط دستگاه ردیاب چشم ثبت شده است. مانشان می‌دهیم که مدت زمان ثبیت چشم در حین خواندن متون فارسی به عنوان انعکاس دهنده فرایندهای شناختی رفتار بسیارخالی از خود نشان می‌دهند. ما رفتار بسیارخالی برای خواندن متون فارسی تحت تاثیر حرکت‌های مانند فونت لوتوس و قلم و همچنین آشنا و ناآشنا بودن متن برای خواننده را آزمودیم و دریافتیم که الگوهای بسیارخالی میانگین داده‌های ثبیت حرکت چشم اختلاف معناداری ندارند.

## Complexity of eye fixation duration time series in reading connected Persian texts: A multifractal detrended fluctuation analysis

Sharifi, Mohammad<sup>1</sup>; Farahani, Hamed<sup>1</sup>; Shahbazi, Farhad<sup>1</sup>; Sharifi, Masood<sup>3</sup>; Zare, Marzieh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Isfahan university of technology, Isfahan, Iran

<sup>2</sup>School of Physics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran

<sup>3</sup>Department of Psychology, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

## Abstract

*There are evidence that cognitive processes have fractal structure. Here, we explore the eye movement trajectories generated during reading different Persian texts. Features of eye movement trajectories were recorded during reading Persian texts using an eye tracker device. We show that fixation durations, as the main components of eye movements reflecting cognitive processing, exhibits multifractal behavior. We test whether multifractal behavior varies as a function of two different fonts, and familiarity of the text for readers, during reading silently or aloud, and goal-oriented versus non-goal-oriented reading. We find that, while mean fixation duration is affected by some of these factors, the multifractal pattern in time series of eye fixation durations did not change significantly.*

PACS No. 64.60.AK, 89.90+n

موثر است. مطالعات بسیاری به بررسی اثر پارامترهای مختلف چون آشنایی با متن، پیش‌بینی پذیری کلمه، اندازه و شکل حروف و غیره بر حرکت چشم در حین خواندن پرداخته‌اند [۱]. در اکثر این پژوهش‌ها از روش ردیابی چشم برای بررسی حرکات چشم استفاده شده است [۲]. از میان انواع حرکات چشم به بازه‌های زمانی که چشم در آن بازه‌ها تقریباً بی‌حرکت می‌ماند ثبیت گفته می‌شود [۳]. مدت زمانی که فرد خواننده نگاهش را بر روی یک کلمه ثابت نگاه می‌دارد تا آن کلمه را درک کند تابع عوامل مختلفی

## مقدمه

خواندن به عنوان یک فرایند شناختی با ایجاد ارتباط بین چشم و اطلاعات نوشتاری آغاز می‌شود. بخش عمده‌ای از مهارت خواندن مربوط به حرکت چشم می‌باشد به همین دلیل بررسی حرکات چشم در حین خواندن متن و اینکه خواننده به کدام ناحیه از متن نگاه می‌کند و چشم خواننده در چه حد و به چه کلمه‌ای ثابت می‌شود در درک فعالیت‌های شناختی که زیربنای خواندن می‌باشد

می‌کنند و منظور از متن ناآشنا متن مشخصی از دانش فیزیک است که به‌طور میانگین دانشجویان رشته روانشناسی میزان آشنایی بسیار کمی با کلمات و محتوای این‌گونه متن‌ها دارند و این متن را ناآشنا تلقی می‌کنند. متن آشنا و ناآشنا با ویژگی‌های مورد نظر و رعایت کلمات با طول کوتاه (۳ تا ۵ حرف) و بلند (۶ حرف و بیشتر) و دو نوع فونت متفاوت انتخاب شده است. نصفی از متن آشنا و نصفی از متن ناآشنا با فونت لوتس نوشته شده است و نصفی دیگر از متن آشنا و ناآشنا با فونت خودکار در نرم‌افزار ورد که فونتی مشابه خط‌دست نویس به حساب می‌آید، نوشته شده است. هر دو متن آشنا و ناآشنا، از کلمات کوتاه و بلند به یک نسبت مساوی تشکیل شده‌اند. متن آشنا و ناآشنا که هر کدام به دو قسمت مساوی تقسیم شده‌اند با دو فونت لوتس و خودکار نوشته شده‌اند و به لحاظ میزان دشواری، بافت متن و بسامد کلمه همسان انتخاب شدند.

### روش آزمایش

در شروع آزمایش دو متن بر اساس نوع محرك آماده شد. سپس یک مطالعه آزمایشی بر روی ۱۰ نفر برای بررسی خصوصیات متن از نظر سطح آشنایی و عدم آشنایی، انطباق بین دو متن در فونت لوتوس و قلم و عمرکرد ابزار تحقیق انجام شد. در مرحله کالیبراسیون فاصله بین چشم شرکت کنندگان و دستگاه ردیاب چشم تنظیم شد. هر شرکت کننده در یک اتاق آرام در جلوی مانیتوری که روی میز قرار دارد می‌نشیند. برای هر آزمایشی یک متن با فونت لوتوس یا خودکار بر روی صفحه مانیتور ظاهر می‌شود که شرکت کنندگان باید متن مورد نظر را بخوانند. آزمایش‌ها شامل خواندن بدون صدا و بدون هدف<sup>۳</sup>، خواندن بدون صدا و هدف دار<sup>۴</sup>، خواندن با صدای بلند و بدون هدف<sup>۵</sup> بودند. در مرحله اول و دوم، متن آشنا با فونت لوتوس<sup>۶</sup> و متن آشنا با فونت قلم<sup>۷</sup> و در مرحله سوم و چهارم، متن ناآشنا با فونت لوتوس<sup>۸</sup>

مانند سطح دشواری آن کلمه می‌باشد [۴]. پژوهش‌های متعددی بر روی حرکات چشم در خواندن در زبان‌های مختلفی چون انگلیسی، آلمانی، فرانسه، چینی، ژاپنی، عبری و تایلندی انجام شده است [۵]. چون بین حرکات چشم در حین خواندن زبان‌های مختلف تفاوت‌های معناداری وجود دارد [۵] نمی‌توان نتایج بدست آمده از یک زبان را به زبان‌های دیگر نیز تعمیم داد، لذا لزوم انجام پژوهش‌های که به بررسی حرکات چشم در حین خواندن متون فارسی پردازد احساس می‌شود.

### جامعه آماری

جامعه آماری پژوهش پیش رو شامل ۷۲ نفر از دانشجویان کارشناسی رشته روانشناسی، دانشکده علوم تربیتی و روانشناسی دانشگاه شهید بهشتی می‌باشد. شرکت کنندگان در این پژوهش در بازه سنی بین ۱۸ تا ۲۴ سال و میانگین ۱۹/۵ و انحراف معیار ۹/۵ می‌باشند.

### ابزار سنجش

#### دستگاه پایشگر حرکات چشم:

برای اندازه‌گیری زمان ثبت چشم از دستگاه ردیابی چشمی الگوی اندازه‌گیری از دور مدل Eye Tracking SMI-RED-120Hz شرکت سنسومتریک اینسترمیت<sup>۱</sup> آلمان استفاده شده است که شامل یک صفحه نمایشگر ۲۲ اینچی برای ارائه محرك، دستگاه دریافت کننده امواج مادون قرمز<sup>۲</sup> برای ثبت حرکات چشم با سرعت نمونه‌برداری ۱۲۰ هرتز در ثانیه، نرم‌افزار Xiview برای ثبت حرکت‌ها و تغییرهای چشم، نرم‌افزار Experiment Center برای طراحی آزمایش و نحوه ارائه محرك‌ها و نرم‌افزار Begaze برای تحلیل داده‌های ثبت شده بود.

#### محرك‌های ارائه شده:

در پژوهش حاضر متن آشنا و ناآشنا و نوع حروف چاپی متن‌ها به عنوان محرك ارائه شده است که منظور از متن آشنا، متن مشخصی از دانش روانشناسی برای دانشجویان رشته روانشناسی است که معمولاً میانگین دانشجویان این رشته، متن را آشنا تلقی

<sup>6</sup>Familiar-Lotus

<sup>3</sup>SNGO

<sup>7</sup>Familiar-Pen

<sup>4</sup>SGO

<sup>8</sup>Unfamiliar-Lotus

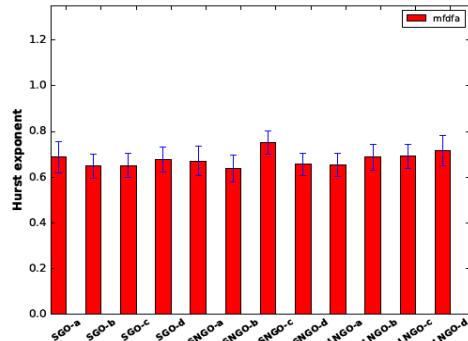
<sup>5</sup>LNGO

<sup>1</sup> SensoMotoric Instruments GmbH (SMI)

<sup>2</sup> ultra red

-۰/۸ تا ۰/۰ می باشد که نشان دهنده همبستگی بلند برد داده ها می باشد. از طرف دیگر با توجه به بزرگ بودم مقدار خطأ عملاً تفاوت معناداری بین این مقادیر وجود ندارد.

برای بررسی اینکه تفاوت معناداری بین داده های زمان ثبتیت حرکت چشم تحت آزمایش های مختلف وجود وجود دارد یا نه، طیف بس برخالی را با استفاده از روش تحلیل افت و خیز بدون روند شده (MF-DFA) محاسبه می شود. شکل (۲) نمودار طیف تکینگی،  $f(\alpha)$  را برای آزمایش خواندن متن فارسی نشان می دهد پیچیدگی سری زمانی با پهنه ای این نمودار نسبت مستقیمی دارد. سری زمانی با طیف گسترده شامل نقاط تکینگی بیشتری هستند به این معنی که آنها دارای زیرمجموعه های فرکتالی بیشتری هستند و از فرکتال های بیشتری تشکیل شده اند و از این رو پیچیدگی بیشتری دارند. شکل (۳) نشان می دهد که پهنه ای طیف یعنی  $\Delta\alpha$  از ۰/۸ تا ۱/۵ می باشد و با توجه به مقدار بزرگ خطأ پهنه ای  $\Delta\alpha$  در آزمایش های مختلف اختلاف معناداری ندارند.



شکل ۱: نمای هرست میانگین برای داده های ثبتیت حرکت چشم در حین خواندن متون فارسی.

برای بررسی دقیق تر ادعای یکسان بودن همه آزمایش ها از نظر میزان همبستگی و پهنه ای نمای تکینگی، از آزمون آنالیز واریانس استفاده می کنیم همانطوری که در جدول (۱) دیده می شود آماره آزمون آنالیز واریانس برای پهنه ای طیف تکینگی و نمای هرست به ترتیب برابر ۱/۳۷۰ و ۰/۹۳۶ می باشد که از مقدار آنالیز واریانس بحرانی با درجه آزادی ۱۱، ۱۶۸ و سطح معناداری ۰/۰۵، کمتر می باشد بنابراین فرض  $H_0$  مبنی بر مساوی بودن میانگین گروه های

و متن ناآشنا با فونت قلم<sup>۹</sup> خوانده شد. در تمام مراحل، حرکات چشم در حین خواندن متون فارسی ثبت می شود. قبل از آزمون از شرکت کنندگان خواسته شد، که برای تمرين مطابق دستورالعملی که بر روی برگه نوشته شده است، متن ها را با سرعت معمولی بخوانند که این عمل در این مرحله ۴۵ تا ۴۵ ثانیه طول کشید.

### آزمایش اول: خواندن بدون صدا و بدون هدف (SNGO)

در این نوع از آزمایش از ۳۶ نفر از شرکت کنندگان خواسته شد که متن را با سرعت طبیعی بخوانند این آزمایش هدف گرا نبوده بنابراین آنها نباید به هیچ سوالی پاسخ دهند.

### آزمایش دوم: خواندن بدون صدا و هدف دار (SGO)

در این آزمایش از ۱۸ نفر از شرکت کنندگان خواسته شد که متن را با سرعت طبیعی بخوانند و از آنجا که این آزمایش هدف گرا می باشد، در پایان از شرکت کنندگان سوال پرسیده می شود.

### آزمایش سوم: خواندن با صدای بلند و بدون هدف (LNGO)

در این آزمایش از شرکت کنندگان خواسته شد که متن مورد نظر را با صدای بلند و با سرعت طبیعی خودشان بخوانند این آزمایش هدف گرا نبوده، بنابراین آنها نباید به هیچ سوالی پاسخ دهند.

### تحلیل افت و خیز بدون روند شده (MF-DFA)

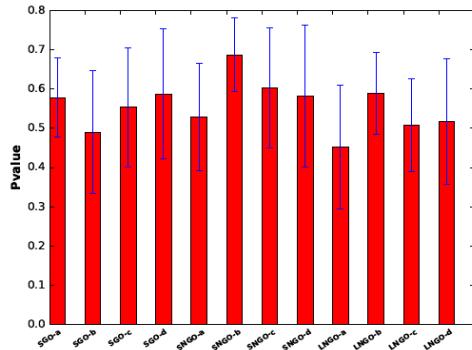
روش MF-DFA در حقیقت گونه تعمیم یافته DFA بوده که علاوه بر تعیین نمایانگی های فیزیکی مهم فرایندها، خواص بس برخالی آنها را نیز تعیین می کند. روش MF-DFA در حقیقت روشی بهینه برای بررسی فرایندهایی در حضور نویسه ها و روندهایی که ماهیت شان معلوم نیست می باشد [۷] .

### نتایج

برای بررسی همبستگی موجود در داده های زمان ثبتیت حرکت چشم نمای هرست میانگین را در نمودار (۱) آورده شده است. این شکل نشان می دهد که نمای هرست برای آزمایش های مختلف بین

<sup>۹</sup> Unfamiliar-Pen

آزمایش‌های مختلف تقریباً باهم در محدوده خطابارند. بنابراین تمامی آزمایش‌ها از نظر میزان پیچیدگی یکسان هستند. آزمون آنالیز واریانس نشان می‌دهد که میانگین نمای هرسن و پهنهای طیف تکینگی برای آزمایش‌های مختلف برابر است و آزمون نیکویی برآش نشان می‌دهد که داده‌های موجود در هر آزمایش توزیع لوگنرمال دارند.



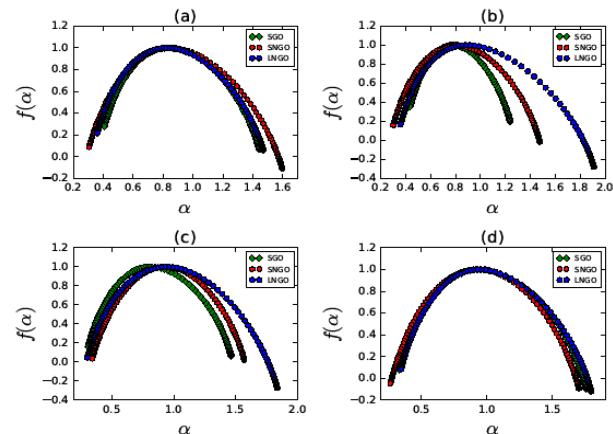
شکل ۳: نتایج حاصل از آزمون نیکویی برآش برای داده‌های ثبت حرکت چشم در حین خواندن متون فارسی.

جدول ۲: پارامترهای موجود در توزیع لوگنرمال (اعداد بیرون پرانتر میانگین و اعداد داخل پرانتر انحراف معیار)

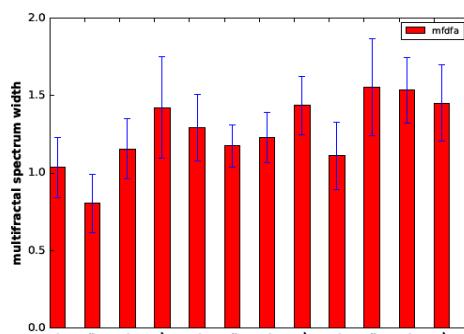
	SGO	SNGO	LNGO
(a)-Familiar-Lotus	۵/۷۹(۰/۱۷)	۵/۳۸(۰/۱۴)	۵/۸۸(۰/۲۱)
(b)-Familiar-Pen	۵/۶۹(۰/۱۴)	۵/۴۷(۰/۱۴)	۶/۰۹(۰/۱۷)
(c)-Unfamiliar-Lotus	۵/۵۳(۰/۱۶)	۵/۴۱(۰/۱۵)	۵/۸۹(۰/۱۶)
(d)-Unfamiliar-Pen	۵/۶۶(۰/۱۶)	۵/۴۳(۰/۱۵)	۶/۰۳(۰/۲۰)

## مراجع

- [۱] Paterson, K. B., Alcock, A., & Liversedge, S. P. (2011). Morphological priming during reading: Evidence from eye movements, *Journal of Language and Cognitive Processes*, 26(4-6): 600-623..
- [۲] Feng, G. (2011): Eye Tracking: A Brief Guide for Developmental Researchers. *Journal of Cognition and Development*, 12(1): 1-11.
- [۳] Van Der Schoot, M., Vasbinder, A. L., Horsley, T. M., & van Lieshout, E. C. D. M. (2008). The role of two reading strategies in text comprehension: an eye fixation study in primary school children. *Journal of research in reading*, 31(2): 203-223
- [۴] Roy-Charland, A., Saint-Aubin, J., Klein, R. M., MacLean, G. H., Lalande, A., & Bélanger, A. (2012). Eye movements when reading: The importance of the word to the left of fixation, *journal of Visual Cognition*, 20(3): 328-355..
- [۵] White, S. J. (2008). Eye movement control during reading: Effects of Word Frequency and Orthographic Familiarity. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 34(1): 205-223
- [۶] E. A. Ihlen, "Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in matlab," *Fractal Analyses: Statistical And Methodological Innovations And Best Practices*, p.97, 2012.
- [۷] R. Kutner, "Algorithm of the multifractal detrended fluctuation analysis (mf-dfa) and some remarks concerning our case,".



شکل ۲: طیف تکینگی میانگین برای داده‌های ثبت حرکت چشم در حین خواندن متون فارسی.



شکل ۳: پهنهای طیف بس برخالی میانگین (نمای هولدر میانگین)

مورد نظر رد نمی‌شود. موضوع دیگر بررسی داده‌ها از نظر نوع توزیع می‌باشد. به همین دلیل از نیکویی برآش استفاده شده است. نتایج نیکویی برآش که در شکل (۴) آورده شده است نشان می‌دهد که داده‌های مربوط به تمامی آزمایش‌ها با سطح معناداری ۰/۰۵ دارای توزیع لوگنرمال هستند.

جدول ۱: نتایج حاصل از آزمون آنالیز واریانس.

	Critical-Value	Fvalue	Pvalue	df1	df2
Hurst exponent	۱/۸۴۶	۰/۹۳۶	۰/۵۰۷	۱۱	۱۶۸
Singularity spectrum	۱/۸۴۶	۱/۳۷۰	۰/۱۹۰	۱۱	۱۶۸

## نتیجه گیری

مدت زمان ثبت حرکت چشم در حین خواندن متون فارسی در تمامی آزمایش‌ها و تحت حرکت‌های مختلف از خود رفتار بس- برخالی نشان می‌دهند و از آنجا که پهنهای طیف تکینگی در

## تأثیر برهمنکنش پلیمر و نانو حفره بر عبور پلیمر از کانال با استفاده از شلوغی

عبدالوهاب، روح الله؛ رجبی، نسیم

<sup>۱</sup>دانشکده فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

### چکیده

سلول محیطی بسیار شلوغ است که این شلوغی در متابولیسم آن نقش به سزایی دارد. عبور بیوپلیمرهای همچون پروتئین و DNA در چرخه متابولیسم سلول بارها تکرار می‌شوند. در این نوشتار با مدل کردن شلوغی با استفاده از کره‌هایی یکسان و با شعاع محدود، در تقریب حرکت دینامیکی این ذرات، تأثیر شلوغی بر زمان عبور پلیمر و واپستگی آن به طول برای کانال‌هایی با برهمنکنش‌های جاذبه و دافعه به صورت مدل سازی تئوری بررسی می‌شود. همچنین تأثیر طول کانال را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## The effect of polymer and nanopore interactions on the passage of polymer through the channel using crowding

Abdolvahab, Rohollah<sup>1</sup>; Rajabi, Nasim

<sup>1</sup> Department of Physics, Iran University of science and technology, Tehran,

### Abstract

Cells have a crowded environment and crowding has an important effect on its metabolism. Translocation of biopolymers such as protein and DNA; is repeated frequently in the cell's metabolism cycle. In this paper by a model of crowding with the dynamic motion approximation that uses uniform spheres with limited radius; We study the effect of the crowding on the translocation time of the polymer and its dependence on the length of channels with attractive and repulsive interactions,. We also consider the effect of the length of the channel.

وجود اندامک‌های فراوان، ماشین‌هایی همچون ریبوزوم‌ها و

مقدمه

پروتئین‌های مختلف در سیتوپلاسم سلول، این محیط را به محیط بسیار شلوغی تبدیل نموده است.

عبور بیوپلیمرها از نانو حفره‌های زیستی در اکثر فرآیندهای زیست شناختی مانند عبور RNA از میان حفره‌های هسته، عبور پروتئین‌ها از میان کانال‌های غشاء‌ها و همچنین تزریق RNA توسط ویروس به سلول میزبان مشاهده می‌گردد [2-1]. علاوه بر اهمیت این پدیده در متابولیسم سلول در موجودات زنده، فرایند عبور پلیمر از نانو حفره‌ها دارای اهمیت فراوانی در بیوتکنولوژی است. از کاربردهای مهم آن می‌توان به دارو رسانی کنترل شده [3]، و نیز توالی یابی سریع و ارزان DNA [4]، اشاره نمود.

کارهای تئوری زیادی در زمینه عبور با تأکید بر جزئیاتی چون بر همکنش پلیمر و نانو حفره [5-6] و ساختار پلیمر [7]، صورت گرفته است اما جنبه‌ای که توجه کمی به آن معطوف شده است اثر شلوغی بر دینامیک عبور است.

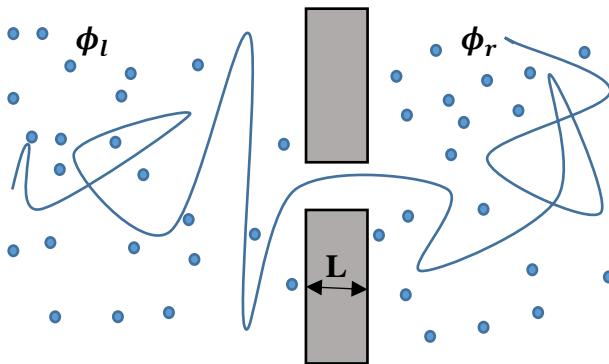
به منظور محاسبه زمان عبور پلیمر در اثر شلوغی تقریب‌های تئوری گوناگونی ارائه شده‌اند. ما در این نوشتار به دنبال بدست آوردن زمان عبور پلیمر از نانو حفره به صورت تئوری و با تقریب ذرات دینامیکی

$$\tau = \frac{l^2}{D} \sum_{n_1=1}^{N-1} \left( e^{F_c^{tot}(n_1)} \sum_{n_2=1}^{n_1} e^{-F_c^{tot}(n_2)} \right) \quad (3)$$

که  $D$  در این رابطه ثابت پخش مؤثر پلیمر از درون حفره است. زمان عبور رسم شده در شکل های این نوشتار بر اساس این معادله بدست آمده اند.

دقت کنید که این معادله با توجه به شرایط مرزی انعکاسی در ابتداء و جاذب در انتها نوشته شده است [10].

در این مقاله انرژی برهم کنش میان کanal و مونومرهای پلیمر از ۵-۵+ در مقیاس  $k_B T$ ، تغییر داده شده است. همچنین شلوغی ها از ۰ تا ۰,۵ تغییر کرده اند. طول کanal نیز از ۵ تا ۲۵ در واحد طول فاصله دو مونومر تغییر کرده اند.



شکل ۱: پیکربندی شماتیک مسئله: پلیمر از سمت چپ ب سمت راست حرکت می کند. غلظت شلوغی ها در سمت چپ،  $\phi_l$  و در سمت راست،  $\phi_r$  است.

## بحث و نتایج

چنان که شکل ۲ نشان می دهد، برای انرژی برهم کنش  $E = -1$  و بدون شلوغی در سمت چپ، زمان عبور با افزایش طول پلیمر افزایش می یابد. هر چند این افزایش زمان برای شلوغی های کم به صورت توانی است، برای شلوغی های بیشتر سرعت افزایش با افزایش طول بیشتر می شود.

هستیم. در این تقریب شلوغی با ذراتی مشابه که دینامیک آنها در برابر عبور پلیمر بسیار سریع تر است مدل می شود.

در ادامه پس از معرفی مدل ضمن بررسی تأثیر طول کanal و برهم کنش آن با پلیمر بر زمان عبور، به مرور نتایج می پردازیم.

## مدل سازی

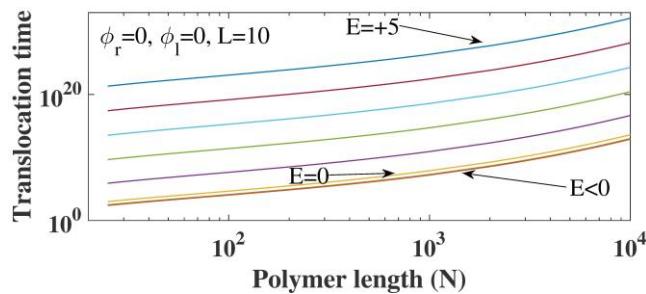
ذرات ایجاد کننده شلوغی را کره هایی یکسان به شعاع  $l$  که به ترتیب با غلظت های حجمی  $\phi_l$  و  $\phi_r$  در سمت چپ و راست دیواره قرار گرفته اند در نظر بگیرید (مطابق شکل ۱). پلیمری تشکیل شده از  $N$  مونومر در حال عبور از دیواره است. انرژی آزاد ناشی از قرار گرفتن  $n_r$  مونومر از پلیمر را در میان شلوغی در سمت راست، می توان با استفاده نظریه ذره مقیاس شده [9-8] به صورت زیر نوشت:

$$F_c(\phi_r, n_r) = \frac{3}{4\pi} \left( \frac{l}{r} \right)^3 \left( \frac{(1 + \phi_r + \phi_r^2)\phi_r}{(1 - \phi_r)^3} \right) n_r - \frac{9}{2} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{l}{r} \right)^2 \left( \frac{\phi_r^2(1 + \phi_r)}{(1 - \phi_r)^3} \right) n_r^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{\pi^2}{6} + 9 \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{l}{r} \right) \left( \frac{\phi_r}{1 - \phi_r} \right)^3 \right) n_r^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

که  $l$  در رابطه فوق برابر طول کوهن برای پلیمر در حال عبور است. اگر طول دیواره را  $n_W$  برابر طول یک مونومر و انرژی برهم کنش آن با پلیمر را برابر  $E$  بگیریم، انرژی آزاد پلیمر را در حالتی که بخشی از آن در سمت راست و بخشی از آن در سمت چپ دیواره است می توان به شکل زیر نوشت:

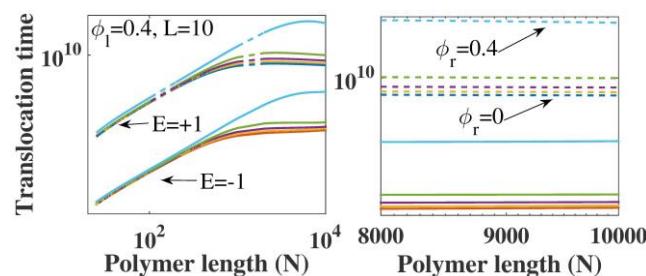
$$F_c^{tot}(\phi_r, n_r) = F_c(\phi_l, n_l) + n_W E + F_c(\phi_r, n_r) \quad (2)$$

زمان عبور پلیمر از سمت چپ به سمت راست را با استفاده حل معادله فوکر-پلانک می توان به صورت زیر بر حسب انرژی آزاد نوشت [10]:



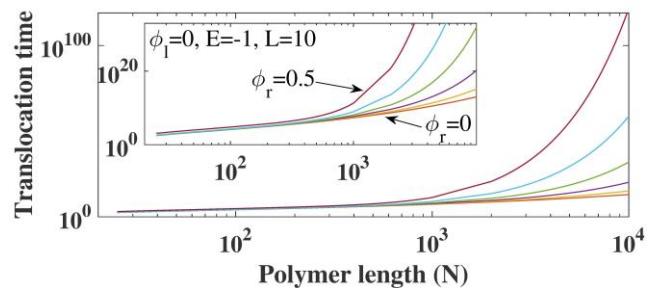
شکل ۴: نمودار زمان عبور پلیمر بر حسب طول را برای انرژی‌های مختلف و هنگام نبود شلوغی رسم شده است.

افزایش مثبت در انرژی برهمنش به دافعه بیشتر کanal می‌انجامد و باعث افزایش زیاد زمان عبور می‌شود. این در حالی است که با افزایش تمايل کanal به برهمنش جاذبه با پلیمر زمان عبور تغییر قابل ملاحظه‌ای نشان نمی‌دهد (شکل ۴ را ملاحظه کنید). رفتار در شلوغی بویژه برای طول‌های بلند جالب و قابل توجه است. چنان که شکل ۵ نشان می‌دهد، در طول‌های کوچک زمان عبور پلیمر با افزایش طول آن افزایش می‌یابد. همچنین افزایش شلوغی سمت راست به افزایش زمان عبور می‌انجامد. اما در طول‌های ۸ هزار و ۱۰ هزار، زمان عبور وابستگی ای به طول پلیمر از خود نشان نمی‌دهد و حتی در انرژی‌های برهمنشی با دافعه  $E = -1$ ، کاهش نیز نشان می‌دهد. هر چند این عدم وابستگی در هنگام شلوغی در برخی ناحیه‌ها قبل از دیده شده است [۵]، طبق دانش ما کاهش زمان برای اولین بار است که دیده می‌شود.



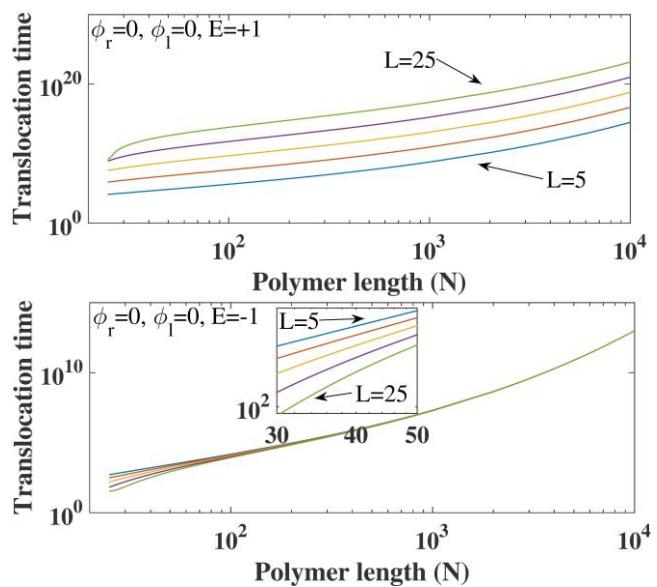
شکل ۵: نمودار زمان عبور پلیمر بر حسب طول را برای شلوغی ثابت در سمت چپ و شلوغی‌های متغیر سمت راست و برای انرژی‌های جاذبه و دافعه رسم شده است. خط ممتد مربوط به انرژی دافعه  $E = +1$  و خط چین‌ها مربوط به انرژی دافعه  $E = -1$  هستند. شکل سمت راست بزرگ شده بخش سمت راست نمودار سمت چپ است.

## نتیجه گیری



شکل ۶: نمودار زمان عبور پلیمر از نانوچفره بر حسب طول پلیمر برای کanalی با طول  $L = 10$  و انرژی برهمنش  $E = -1$  در حالی که شلوغی در سمت چپ وجود ندارد را برای مقادیر متفاوت شلوغی در سمت راست رسم شده‌اند. شکل داخلی بزرگ شده بخشی از شکل اصلی است.

شکل ۳ زمان عبور را برای کanal‌هایی با طول‌های متفاوت  $L = 5$  تا  $L = 25$ ، و برای هنگام نبودن شلوغی، بر حسب طول پلیمر رسم نموده است. چنان که مشاهده می‌شود هنگامی که انرژی برهمنش مثبت است و کanal تمايلی به برهمنش با پلیمر ندارد، افزایش طول به کاهش افزایش زمان عبور می‌انجامد. در نقطه مقابل هنگامی که پلیمر تمايل به برهمنش با کanal دارد، افزایش طول به کاهش زمان عبور می‌انجامد که البته بسیار جزئی است و تنها برای طول‌های کوچک قابل توجه است.



شکل ۳: نمودار زمان عبور پلیمر از نانوچفره بر حسب طول پلیمر، هنگامی که شلوغی وجود ندارد برای مقادیر مختلف طول کanal رسم شده است. در شکل بالا انرژی برهمنش  $E = +1$  و در شکل پائین  $E = -1$  است. شکل داخلی نمودار پائینی، بزرگ شده بخش ابتدائی نمودار اصلی است.

پلیمر نسبت به انرژی برهمکنش و دافعه یا جاذبه بودن آن کاملاً حساس است. انرژی جاذبه میان پلیمر و دیواره به احتمال بیشتر حضور پلیمر در کanal و عبور سریعتر آن می‌انجامد. در مقابل، دفع پلیمر توسط دیواره عبور پلیمر را از حفره سخت تر و آن را کند تر می‌نماید. هر چه طول کanal بیشتر باشد تأثیر آن نیز افزایش می‌یابد. در نتیجه، تغییر طول، بویژه در هنگام برهمکنش دافعه کاملاً در افزایش و یا کاهش زمان عبور مؤثر است. این تأثیر در مورد برهمکنش‌های جاذبه اندک و محدود به طول‌های کم است.

در هنگام شلوغی در هر دو سمت دیواره، تغییر زمان عبور پلیمر از نانوحفره بر حسب طول کاملاً به طول آن وابسته است. در برخی طول‌ها این وابستگی به طول می‌تواند محو و در موارد محدودی حتی معکوس شود.

## مرجع‌ها

- [1] B. Alberts, and A. Johnson, and J. Lewis, and M. Raff, and K. Roberts and P. Walter; “*Molecular Biology of the cell*”; 6<sup>th</sup> edition, Garland Science. (2007)
- [2] A. Guyton and J. Hall; “*Textbook of Medical Physiology*”; 7<sup>th</sup> edition, Saunders. (2005)
- [3] D.C. Chang; “*Guide to Electroporation and Electrofusion*”; Academic. New York (1992)
- [4] A. Meller; “*Dynamics of polynucleotide transport through nanometer-scale pores*”; Journal of Physics: Condensed Matter **15**, No. 17 (2003)
- [5] E.Slonkina and A. B. Kolomeisky, “Polymer translocation through a long nanopore”; Chem. Phys. 118,7112 (2003)
- [6] D.K. Lubensky and D. R. Nelson, “Driven polymer translocation through a narrow pore”; Biophys.J. 77, 1824(1999).
- [7] U. Gerland and R. Bundschuh and T. Hwa, “translocation of structured polynucleotides through nanopores”; Phys. Biol. 1,19(2004)
- [8] A. Gopinathan and Y. W. Kim;” *Polymer Translocation in Crowded Environments*”; Phys. Rev. Lett.**99**, 228106 (2007)
- [9] H. Reiss and H. L. Frisch;” *Statistical Mechanics of Rigid Spheres*”; The Journal of Chem. Phys.**31**, 369 (1959)
- [10] W. Sung and P. J. Park;” *Polymer Translocation through a Pore in a Membrane*”; Phys. Rev. Lett.**77**, 783 (1996)

## ترمودینامیک هندسی گازهای کوانتومی ناافراشی

علی، فرشته؛ محمدزاده، حسین

گروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

### چکیده

در این مقاله، ترمودینامیک هندسی گازهای بوزونی و فرمیونی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا با تعریفتابع توزیع ناافراشی برای آمارهای کوانتمی، کمیت‌های ترمودینامیکی مانند انرژی درونی و تعداد ذرات را به دست می‌آوریم. برای محاسبه‌ی این کمیت‌ها، توابع پلی‌لگاریتم  $q$ -تعمیم یافته را تعریف کرده و سپس آنها را به صورت سری حل می‌کنیم. در ادامه، ترمودینامیک هندسی را برای گاز بوزونی (فرمیونی) تشکیل می‌دهیم و نشان می‌دهیم که انحنای ترمودینامیکی به ازای مقادیر مختلف  $q$  مثبت(منفی) است. همچنین تکیه‌گی انحنای ترمودینامیکی در  $I = z$  نشان می‌دهد که پذیده‌ی چگالش در آمار بوزونی ناافراشی وجود دارد.

## Thermodynamic Geometry of Nonextensive quantum Gases

Adli, Fereshteh; Mohammadzadeh, Hosein

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

### Abstract

In this paper, thermodynamic geometry of boson and fermion gases is investigated. First, defining the nonextensive distribution function for quantum statistics, we obtain the thermodynamic functions such as internal energy and particle number. For calculating of these quantities, we define the  $q$ -generalized polylogarithm functions and then solve them in the form of series. In the following, we construct the thermodynamic geometry for Bose(Fermi) gas and show that the thermodynamic curvature for various values of  $q$ , is positive(negative). Also, singularity of thermodynamic curvature at  $z=1$  shows that the condensation phenomenon exists in nonextensive Bose statistics.

PACS No. 05

اقتصاد[۵] و غیره دارد . ما در این مقاله، گازهای کوانتومی

مقدمه

ناافراشی را با استفاده از رهیافت ترمودینامیک هندسی بررسی می‌کنیم. می‌توان نشان داد که کمیت ترمودینامیکی مهمی به نام انحنای ترمودینامیکی اطلاعات ارزشمندی درباره‌ی برهمکنش‌های ذاتی، گذار فاز و پایداری سیستم‌های تحت مطالعه دارد. نشان داده شده است که انحنای ترمودینامیکی گاز بوزونی (فرمیونی) ایده‌آل، برای تمام گستره‌ی فیزیکی مثبت (منفی) است که در تطبیق با برهمکنش آماری جاذبه (دافعه) است. انحنای ترمودینامیکی برای گاز کلامیکی ایده‌آل غیربرهمکنشی، صفر است که این می‌تواند

تلash‌های زیادی برای مطالعه‌ی تعمیم‌های ممکن مکانیک آماری رایج و کاربردهای آن ها در حوزه‌های مختلف علم انجام شده است. یکی از این تعمیم‌ها که بر پایه‌ی تعمیم آنتروپی است، توسط سالیس در سال ۱۹۸۸ معرفی شد [۱]. در حال حاضر، این آنتروپی تحت عنوان آنتروپی ناافراشی یا  $q$ -تعمیم یافته نامیده می‌شود. مکانیک آماری برگرفته شده از این آنتروپی که مکانیک آماری ناافراشی خوانده می‌شود، کاربردهای وسیعی در سیستم‌های کوانتومی درهمتنیده و غیردرهمتنیده [۲ و ۳]، پلاسماهای [۴]،

که  $\beta = 1/k_B T$ ،  $\epsilon$  انرژی حالت یک ذره،  $\mu$  پتانسیل شیمیایی و  $-1 \leq \alpha \leq 1$  (۳) متناظر با آمار بوزونی (فرمیونی) نافراشی است. در حد  $1 \rightarrow q$ ، رابطه (۳) تبدیل به تابع توزیع کوانتومی رایج می‌شود.

انرژی درونی و تعداد ذرات به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) \Omega(\epsilon) d\epsilon \quad (4)$$

$$N = \int_0^\infty n(\epsilon) \Omega(\epsilon) d\epsilon \quad (5)$$

که در آن  $a = ap^\sigma$  است ( $a$  عدد ثابت و  $\sigma$  در حد نسبیتی غیرنسبیتی) برابر با ۱ (۲) است. همچنین، با صرفنظر از اسپین ذرات، شکل استاندارد چگالی حالت‌ها یعنی  $\Omega(\epsilon)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Omega(\epsilon) = \frac{A^D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \epsilon^{\frac{D}{\sigma}-1} \quad (6)$$

که در آن،  $A$  عدد ثابت و  $D$  بعد فضای را نشان می‌دهد. برای یک گاز بوزونی و فرمیونی نافراشی، انرژی درونی و تعداد ذرات به صورت زیر به دست می‌آیند [۷]:

$$U = \beta^{-\frac{D}{\sigma}} \frac{\Gamma(\frac{D}{\sigma}+1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} Li_{\frac{D}{\sigma}+1,q}(z) \quad (7)$$

$$N = \beta^{-\frac{D}{\sigma}} \frac{\Gamma(\frac{D}{\sigma})}{\Gamma(\frac{D}{2})} Li_{\frac{D}{\sigma},q}(z) \quad (8)$$

بطوریکه ما تابع پلی لگاریتم تعیین یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Li_{v,q}(z) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty \frac{x^{v-1}}{(1+(q-1)(x-\ln z))^{\frac{1}{q-1}}} dx \quad (9)$$

که  $x = \beta\epsilon$  است و  $z = \exp(\mu/k_B T)$ ، گریزندگی گاز نامیده می‌شود. برای حل انتگرال‌های مربوط به روابط (۷) و (۸)، رابطه (۳) را به ازای  $\alpha = \pm 1$  به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$n_q(\epsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{j}{1-q}} \left[ 1 + \frac{(q-1)x}{\eta_q} \right]^{\frac{j}{q-1}} \quad (10)$$

معیاری برای برهمکنش آماری سیستم باشد. همچنین، نقاط تکینه-ی اanhای ترمودینامیکی در تطابق بلغایت گذار سیستم می‌باشد.

ما ابتدا مدل آماری نافراشی را معرفی می‌کنیم و کمیت‌های انرژی درونی و تعداد ذرات مربوط به آمارهای بوزونی و فرمیونی را به دست می‌آوریم. سپس توابع پلی لگاریتم را معرفی کرده و روشی برای تبدیل شکل انتگرالی آن به سری ارائه می‌دهیم. بعد از آن، ساختار ترمودینامیک هندسی سیستم را تشکیل داده و اanhای ترمودینامیکی را محاسبه می‌کنیم و نمودارهای مربوط به هر کدام از آمارها رارسم می‌کنیم.

### مدل آماری نافراشی

اگر در یک سیستم، برهمکنش‌های میکروسکوپیک مؤثر، کوتاه برد باشند و شرایط مرزی، غیرفراتالی در نظر گرفته شوند، آنتروپی رایج بولتزمن - گیبس (BG)، توصیف خوبی از آن سیستم را می‌تواند ارائه دهد. آنتروپی چنین سیستم‌هایی افراشی است، به این معنی که آنتروپی متناسب با اندازه سیستم است. ولی اگر شرایطی که ذکر شد برقرار نباشند، یعنی سیستم‌هایی با برهمکنش‌های مؤثر بلندبرد و شرایط مرزی غیرفراتالی وجود داشته باشند، آنگاه آنتروپی BG، دیگر افراشی نخواهد بود. برای کلاس مهمی از چنین سیستم‌هایی، آنتروپی وجود دارد که بر حسب جمله‌های احتمالات  $m$  یکروسکوپی، افراشی است. این آنتروپی، همان آنتروپی معرفی شده توسط سالیس است که بصورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$S_q = -k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{1-q}, \quad q \in R \quad (1)$$

که  $p_i$  احتمال یافتن سیستم در حالت میکروسکوپی  $i$ ،  $k_B$  ثابت بولتزمن،  $W$  تعداد کل میکروسکوپی، درجهی نافراشی بودن را تعیین می‌کند. عبارت (۱) در حد  $1 \rightarrow q$ ، به آنتروپی BG تبدیل می‌شود:

$$S_{q=1} = S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (2)$$

تابع توزیع نافراشی بصورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$n_q(\epsilon) = \frac{1}{(1 + (q-1)\beta(\epsilon - \mu))^{\frac{1}{q-1}} + \alpha} \quad (3)$$

$$g_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = - \left( \frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_{\gamma}$$

$$= \frac{15}{4} \frac{1}{\beta^{7/2} (q-1)^{5/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{5+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (16)$$

$$g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta \partial \gamma} = - \left( \frac{\partial N}{\partial \beta} \right)_{\gamma}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{\beta^{5/2} (q-1)^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{3+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (17)$$

$$g_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \gamma^2} = - \left( \frac{\partial N}{\partial \gamma} \right)_{\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta^{3/2} (q-1)^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{1+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (18)$$

انحنای ترمودینامیکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \\ g_{\beta\beta,\beta} & g_{\beta\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\beta} \\ g_{\beta\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\gamma} \end{vmatrix} \frac{1}{\begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} \\ g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}^2} \quad (19)$$

بطوریکه  $g_{ij,k} = \partial g_{ij} / \partial \beta^k$  مشتقات عناصر متريک هستند:

$$g_{\beta\beta,\beta} = -\frac{105}{8} \frac{1}{\beta^{9/2} (q-1)^{5/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{5+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (20)$$

$$g_{\beta\gamma,\beta} = -\frac{15}{4} \frac{1}{\beta^{7/2} (q-1)^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{3+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (21)$$

$$g_{\gamma\gamma,\beta} = -\frac{3}{2} \frac{1}{\beta^{5/2} (q-1)^{1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{1+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (22)$$

$$g_{\gamma\gamma,\gamma} = -\frac{3}{2} \frac{1}{\beta^{3/2} (q-1)^{-1/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{-\frac{1+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (23)$$

که  $\eta_q = 1 + (1-q) \ln z$  است. با جاگذاری رابطه (۱۰) در (۹) و استفاده از تغییرمتغیر  $y = (q-1)x/\eta_q$  و به کار بردن

انتگرال

$$\int_0^{\infty} (1+y)^{\mu} y^{\nu-1} dy = \frac{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\mu)} \quad (11)$$

جواب زیر برای توابع پلی لگاریتم تعیین یافته به دست می‌آید:

$$Li_{\nu,q}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\nu+\frac{j}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\nu)}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (12)$$

در این صورت به ازای  $D=3, \sigma=2$ ، انرژی درونی و تعداد ذرات به صورت زیر خواهد بود:

$$U = \frac{3}{2} \frac{1}{[\beta(q-1)]^{5/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{5+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (13)$$

$$N = \frac{3}{2} \frac{1}{[\beta(q-1)]^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} (\pm 1)^{j+1} \eta_q^{\frac{3+j}{2}-\frac{1}{1-q}} \frac{\Gamma(\frac{j}{q-1}-\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{j}{q-1})} \quad (14)$$

## ترمودینامیک هندسی

راپینیو و وینهارد دو نوع ساختار متريک ریمانی را معرفی کردند که به مشتق مرتبه ی دوم آنتروپی یا انرژی داخلی ارتباط داشت [۹]. اين نظریه يك ابزار كيفي برای مطالعه ي پدides های نوسانی معرفی می کند. هندسه راپینیو بر پایه ي نمایش آنتروپی است، در حالی که هندسه وینهارد بر پایه ي نمایش انرژی است. همچنین در مقاله دیگری نشان داده است که می توان از تابع پارش برای هندسه متريک استفاده کرد [۱۰]:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^i \partial \beta^j} \quad (15)$$

برای مسئله ما،  $\beta^2 = \gamma = -\mu/k_B T$  و  $\beta^1 = \beta = 1/k_B T$  است.

بنابراین عناصر متريک به صورت زير به دست می آيند:

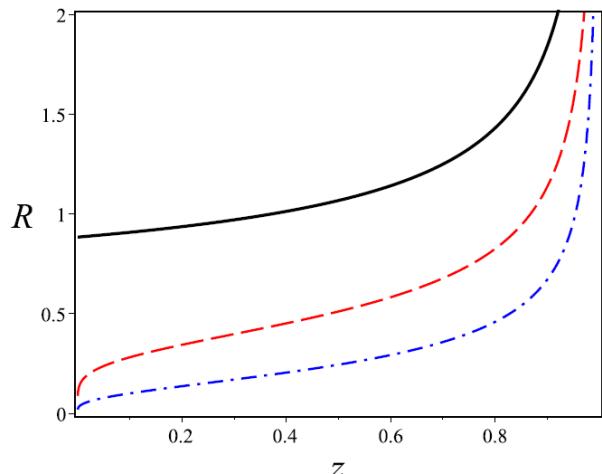
## نتیجه گیری

- ما ابتدا مدل آماری نافراشی را معرفی کردیم و کمیت های انرژی درونی و تعداد ذرات را برای گازهای بوزونی و فرمیونی را به دست آوردیم . بعد از آن، ساختار ترمودینامیک هندسی سیستم را تشکیل داده و انحنای ترمودینامیکی را محاسبه می کنیم. نمودار مربوط به گاز بوزونی نافراشی نشان می دهد که انحنای ترمودینامیکی برای گستره  $i$  فیزیکی تعریف شده، مثبت است و این نشان می دهد که برهمکنش آماری برای این آمار جاذبه است. همچنین در  $z=1$  تکینگی دیده می شود که نشان دهنده وجود گذار فاز در آن نقطه است . نمودار مربوط به گاز فرمیونی نافراشی بیان می کند که انحنای ترمودینامیکی برای گستره  $i$  فیزیکی تعریف شده، منفی است و این نشان می دهد که برهمکنش آماری برای این آمار دافعه است.

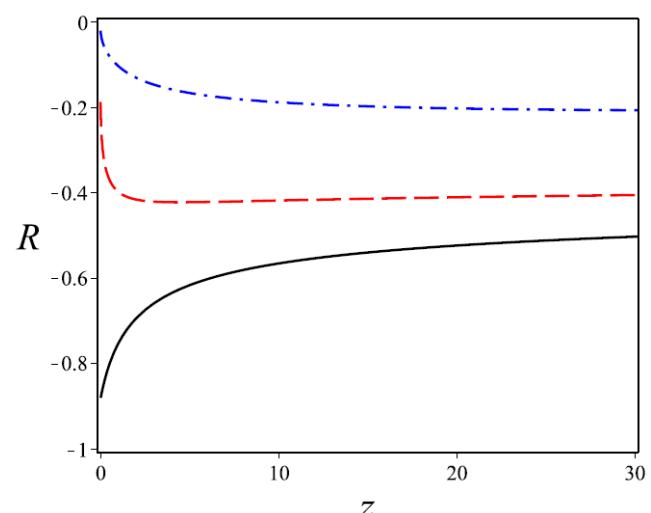
## مرجع ها

- [۱] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”, *J. Stat. Phys.* 52, 479 (1988).
- [۲] F. Caruso and C. Tsallis, “Nonadditive entropy reconciles the area law in quantum systems with classical thermodynamics”, *Phys. Rev. E* 78, 021102 (2008).
- [۳] F. D. Nobre, M.A. Rego-Monteiro and C. Tsallis, “Nonlinear Relativistic and Quantum Equations with a Common Type of solution”, *Phys. Rev. Lett.* 106, 140601 (2011).
- [۴] S. Guo, L. Mei and Z. Zhang, “Time-fractional Gardner equation for ion-acoustic waves in negative-ion-beam plasma with negative ions and nonthermal nonextensive electrons”, *Phys. Plasmas* 22, 052306 (2015).
- [۵] L. Borland, “Option Pricing Formulas Based on a Non-Gaussian Stock Price Model”, *Phys. Rev. Lett.* 89, 098701 (2002).
- [۶] F. Buyukluhc and D. Demirhan, “A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases”, *Phys. Lett. A*, 181, 24(1993).
- [۷] H. Mohammadzadeh, F. Adli, S. Nouri, “Perturbative thermodynamic geometry of nonextensive ideal classical, Bose, and Fermi gases” *Phys. Rev. E* 94, 062118 (2016).
- [۸] G. Ruppeiner, “Thermodynamics: A Riemannian geometric model” *Phys. Rev. A* 20, 1608 (1979).
- [۹] F. Weinhold, “Metric geometry of equilibrium thermodynamics”, *J. Chem. Phys.* 63, 2479 (1975).
- [۱۰] H. Janyszek and R. Mrugala, “Riemannian geometry and stability of ideal quantum gases” *J. Phys. A* 23, 467 (1990).

حال می توانیم انحنای ترمودینامیکی را برای دو حالت آمار بوزونی به ازای علامت  $+1$  و فرمیونی به ازای  $-1$  محاسبه کنیم. محاسبات را انجام داده و نتایج را بر حسب گریزندگی در شکل ۱-های (۱) و (۲) رسم می کنیم. همانطور که می بینیم به علت اینکه پتانسیل شیمیایی برای گاز بوزونی منفی است، گریزندگی بین  $0^+$  و  $1^-$  در نظر گرفته شده است.



شکل ۱ : نمودار انحنای ترمودینامیکی بر حسب گریزندگی برای گاز بوزونی نافراشی به ازای  $q=1$  (خط پر سیاه)،  $q=1.1$  (خط چین قرمز)،  $q=1.2$  (خط آبی)



شکل ۲ : نمودار انحنای ترمودینامیکی بر حسب گریزندگی برای گاز فرمیونی نافراشی به ازای  $q=1$  (خط پر سیاه)،  $q=1.1$  (خط چین قرمز)،  $q=1.2$  (خط آبی)

## مطالعه‌ی جواب‌های گردابی در ابرساناها در مدل هیگز آبلی ابرمتقارن

عزیز آغچه قلعه، ویگن<sup>۱</sup>؛ منصوری، مریم<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup>دانشگاه صنعتی ارومیه، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

### چکیده

از حل معادلات در مدل‌های مختلف و ابعاد مختلف فضا-زمانی، جواب‌های سالیتونی بدست آمدند. در این مطالعه جواب‌های سالیتونی در مدل هیگز آبلی در (۲+۱) بعد به عنوان گردابه‌ها شناخته شده‌اند. در اینجا گردابه‌ها و برخی از خواص فیزیکی آن‌ها را معرفی می‌کیم. گردابه‌ها نقش مؤثری در فیزیک ذرات بینایی و فیزیک ماده‌ی چگال دارند. گردابه‌های مدل هیگز آبلی با ابرمتقارن  $\mathcal{N}=1$  در (۲+۱) بعد معرفی می‌کنیم. در حالت جفت شدگی بحرانی این مدل به مدل ابرمتقارن  $\mathcal{N}=2$  کاهش می‌یابد. در نهایت معادلات بوگومولنی مرتبه‌ی اول برای حالت بحرانی گردابه‌های BPS از جبر ابرمتقارن  $\mathcal{N}=2$  در (۲+۱) بعد بدست خواهد آمد.

## Vortex solution in superconductors in the supersymmetric Abelian Higgs model

Aziz Aghchegala, Vigen<sup>1</sup>; mansoury, Maryam<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Department of Physics, Urmia University Of Technology

### Abstract

By solving field equations of several models in various space-time dimensions, different solitonic solutions were obtained. In this context, solitonic solutions of the Abelian Higgs model in (2+1) dimensions are known as vortices. We introduce vortex solutions and review some of their physical properties. Vortices have played an important role in the elementary particle and in the condensed matter physics. Vortices of the Abelian Higgs model are like the magnetic flux tubes in superconductors. We first introduce the Abelian Higgs model with  $\mathcal{N}=1$  supersymmetry in (2+1) dimensions. In the case of critical coupling, this model reduces to a model with  $\mathcal{N}=2$  supersymmetry. Hence we obtain relations between the coupling constants of the  $\mathcal{N}=1$  model in order to obtain a model with  $\mathcal{N}=2$  supersymmetry. Finally, the first order Bogomolny'i equation for the critical (BPS) vortices are rederived from the  $\mathcal{N}=2$  supersymmetry algebra in (2+1) dimensions.

تعمیم ابر متقارن  $\mathcal{N}=2$  رابطه‌ای را بین ثابت‌های جفت‌شدگی الزام می‌دارد. این رابطه برای بدست آوردن معادلات بوگومولنی لازم است. ارتباط بین ابر تقارن  $\mathcal{N}=2$  و معادلات بوگومولنی سپس از جبر ابر بارها نتیجه می‌شود.

### مدل ابرمتقارن $\mathcal{N}=1$ و تعمیم به $\mathcal{N}=2$

ابتدا یادآوری می‌کنیم که دینامیک مدل هیگز آبلی در فضای  $(+1)$  بعدی مینکوفسکی با کنش زیر داده می‌شود<sup>[۵]</sup>:

(۱)

$$S_H = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \lambda (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \right\}$$

در کنش بالا  $\phi = \phi^1 + i\phi^2$  یک میدان اسکالر مختلط است.

به کمک معادله حرکت آن‌ها سرانجام کنش زیر برای مدل  $\mathcal{N}=1$  در  $D=1+2$  بعد نتیجه می‌شود.

(۲)

$$\begin{aligned} S_{N=1} = & \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu M)(\partial^\mu M) + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - 2\lambda M^2 |\phi|^2 \right. \\ & - \lambda (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 + \frac{i}{2} \rho \bar{\phi} \phi + \frac{i}{2} \chi \bar{\phi} \phi + \frac{i}{2} \psi D \bar{\psi} - (2\lambda^{1/2}) M \bar{\psi} \psi + \\ & \left. \frac{ie}{2} (\bar{\psi} \rho \phi - \rho \bar{\psi} \phi^*) - (2\lambda^{1/2}) (\bar{\psi} \chi \phi - \chi \bar{\psi} \phi^*) \right\} \end{aligned}$$

اکنون می‌خواهیم شرایطی را فراهم کنیم که این تئوری تحت تبدیلات ابر تقارن  $\mathcal{N}=2$  ناورد باشد. برای این منظور کافی است تبدیلات را با پارامتر مختلط  $\eta$  در نظر بگیریم.  $\rho, \chi$  فرمیون‌های حقیقی هستند. با توجه به این نکته که یک فرمیون دیراک می‌تواند با استفاده از ترکیب دو فرمیون حقیقی به دست آید، با ترکیب  $\rho, \chi$ ، فرمیون دیراک  $\Sigma$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

### مقدمه

اگر در یک ابررسانا نازک یک جریان انتقالی را در طول ابررسانا برقرار کنیم، مقداری از این جریان الکتریکی اعمال شده به داخل هسته‌ی گردابه نفوذ می‌کند و بر آن عمود است. اگر این جریان و میدان الکتریکی هسته‌ی گردابه با هم موازی باشند گردابه عمود بر جریان اعمال شده حرکت می‌کند و پراکنده‌گی اتفاق می‌افتد. برای بررسی معادلات میدان یک گردابه از لاغرانژی مستقل از زمان مدل گینزبرگ-لاندau استفاده می‌شود<sup>[۱]</sup>.

در موضوع سالیتون‌ها سیستم‌هایی که از معادلات دیفرانسیلی مرتبه اول پیروی می‌کنند از اهمیت خاصی برخوردارند. این معادلات که دارای جواب‌هایی هستند که در معادلات مرتبه دوم صدق می‌کنند اصطلاحاً معادلات بوگومولنی نامیده می‌شوند<sup>[۲]</sup>. جواب‌های سالیتونی این معادلات (گردابه‌ها و تک قطبی‌هاو...) سالیتون‌های BPS (خوانده می‌شوند) که از خصیت‌های ویژه‌ای برخوردارند<sup>[۳]</sup>.

سالیتون‌های BPS به طور طبیعی در مدل‌هایی با ابرتقارن گسترش یافته ( $\mathcal{N}>1$ ) که جبر ابربارها در آن‌ها اجزاء بارهای مرکزی غیر صفر را می‌دهد ظاهر می‌شوند. بارهای مرکزی در این مدل‌ها همان نقش بارهای توپولوژیکی را ایفا می‌کنند و سالیتون‌های BPS که این بارها را حمل می‌کنند کمینه‌های انرژی هستند که بخشی از ابرتقارن مدل را حفظ می‌کنند. از سوی دیگر نشان داده شده است که وجود یک جریان پاییتی توپولوژیکی در یک نظریه با ابرتقارن  $\mathcal{N}=1$  در پیدا کردن یک توسعه با ابرتقارن  $\mathcal{N}=2$  از آن نظریه دارای اهمیت بسیار است<sup>[۴] و [۱]</sup>.

$$(5) \quad Q = \frac{\sqrt{2}}{e\phi_0} \int d^3x \left[ \left( -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu} \gamma_\lambda + i\cancel{D}M - \frac{e}{2} (\|\phi\|^2 - \phi_0^2) \right) \gamma^0 \Sigma + \left( i(\cancel{D}\phi)^* - \frac{e}{2} M \phi^* \right) \gamma^0 \psi \right]$$

$$\bar{Q} = \frac{\sqrt{2}}{e\phi_0} \int d^3x \left[ \bar{\Sigma} \gamma^0 \left( -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu} \gamma_\lambda - i\cancel{D}M - \frac{e}{2} (\|\phi\|^2 - \phi_0^2) \right) + \bar{\psi} \gamma^0 \left( -i\cancel{D}\phi - \frac{e}{2} M \phi \right) \right]$$

در اینجا به بررسی ارتباط بین جبر ابر بارها و معادلات بوگومولنی برای گردابهای در مدل هیگز آبلی می‌پردازیم مطالعه‌ی خود را به حالت بوزونی محدود می‌کنیم و ضمن قرار دادن  $M=0$  پس از محاسبه‌ی جبر ابربارها در پایان تمام فرمیون‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم. معادلات بوگومولنی مربوط به یک حالت ایستا با  $A_0 = 0$  هستند. با محاسبه‌ی پادجایجاگر  $Q, \bar{Q}$ ، پس از اعمال شرایط فوق، نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$(6) \quad \left\{ Q_\alpha, \bar{Q}^\beta \right\} = 2(\gamma_0)_\alpha^\beta P^0 + \delta_\alpha^\beta T$$

در این رابطه  $T$  بار مرکزی و  $P^0$  مؤلفه‌ی صفرم تکانه سه بعدی برابرند با:

$$(7) \quad P^0 = E = \frac{1}{2e^2\phi_0^2} \int d^3x \left[ \frac{1}{2} F_{ij}^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{e^2}{4} (\|\phi\|^2 - \phi_0^2)^2 \right]$$

$$(8) \quad T = -\frac{1}{e^2\phi_0^2} \int d^3x \left[ \frac{e}{2} \epsilon^{ij} F_{ij} (\|\phi\|^2 - \phi_0^2) + i\epsilon^{ij} (D_i\phi)(D_j\phi)^* \right]$$

بار مرکزی معرفی شده با بار توپولوژیکی مدل هیگز آبلی برابرند. برای نشان دادن ارتباط بین ابرتقارن  $N=2$  و معادلات بوگومولنی

بار مرکزی  $T$  و دو بردار  $V^i$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

(8)

$$T = \int \partial_i V^i d^3x$$

$$V^i = \left( \frac{1}{e} A_j + \frac{i}{e^2 \phi_0^2} \phi^* D_j \phi \right) \epsilon^{ij}$$

در اینجا  $\eta_c = \eta_1 + i\eta_2$  یک متغیر اسپینوری مختلط بی-نهایت کوچک است. همچنین کنش ابرتقارن  $N=1$  بر حسب متغیرهای جدید به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$S_{N=1} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu M) (\partial^\mu M) + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - 2\lambda M^2 |\phi|^2 - \lambda (\|\phi\|^2 - \phi_0^2)^2 \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \cancel{\nabla} \phi \cancel{\nabla} \phi + \frac{i}{2} \psi \cancel{\nabla} \psi - (2\lambda)^{1/2} M \psi \psi - \frac{e + (8\lambda)^{1/2}}{4} (\bar{\psi} \Sigma \phi + h.c.) \right. \\ \left. + \frac{e - (8\lambda)^{1/2}}{4} (\bar{\psi} \Sigma^* \phi + h.c.) \right\}$$

$$\eta_c = \eta e^{-ia} \quad \Sigma^c = \Sigma^* + i\rho$$

در این روابط متغیر مختلط  $\eta_c$  تحت تبدیل فاز به صورت  $\eta_c = \eta e^{-ia}$  معرفی می‌شود. در این صورت ابرتقارن  $N=2$  باید تحت دوران‌های فرمیونی ناوردا باشد. به راحتی قابل مشاهده است که ناوردایی تحت دوران فاز تنها در صورتی ممکن است که

$$\text{تحت دوران} \quad \text{فارز} \quad \text{عبارت} \quad \text{نهایی} \quad \text{بسط} \quad \lambda = \frac{e^2}{8}$$

دارای فاز  $e^{-2ia}$  است. برای حذف این

$$(3) \quad \lambda = \frac{e^2}{8} \text{ نیاز داریم.}$$

$$S_{N=2} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu M) (\partial^\mu M) + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) \right. \\ \left. - \frac{e^2}{4} M^2 |\phi|^2 - \frac{e^2}{8} (\|\phi\|^2 - \phi_0^2)^2 + \frac{i}{2} \cancel{\nabla} \phi \cancel{\nabla} \phi + \frac{i}{2} \psi \cancel{\nabla} \psi \right. \\ \left. - \frac{e}{2} M \bar{\psi} \psi - \frac{e}{2} (\bar{\psi} \Sigma \phi + h.c.) \right\}$$

## معادلات بوگومولنی و جبر ابربار

در این قسمت معادلات بوگومولنی و جبر ابربارها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابربار  $Q$  توسط رابطه‌ی وارد می‌شود. رابطه‌ی بین  $Q, \bar{Q}$  به صورت زیر نوشته می‌شوند:[۶]

$$(4) \quad Q = \bar{\eta}_c Q + \bar{Q} \eta_c$$

که در آن  $Q, \bar{Q}$  برابرند با:

این معادلات ، معادلات بوگومولنی مدل هیگز آبلی هستند و می-  
توان آنها را به فرم زیر نیز بنویسیم:

$$D_i \phi + i D_{\bar{i}} \phi = 0 \quad (13)$$

$$B - \frac{1}{2} (1 - \bar{\phi} \phi) = 0$$

### نتیجه گیری

با استفاده از جبر ابرمتقارن  $\mathcal{N} = |T|$  شرط  $E \geq |T|$  موسوم به حد بوگومولنی را برای گردابه در حالت بحرانی پیدا کردیم که یک پیکربندی میدان مثل  $\langle B \rangle$  وجود دارد که حد بوگومولنی را اشباع می‌کند. و در این حالت ترکیبی از مولدهای ابرمتقارن حالت  $\langle B \rangle$  را نابود می‌کنند. از این شرط معادلات بوگومولنی در مدل ابرمتقارن  $\mathcal{N} = 2$  به صورت زیر بدست آمدند:

این معادلات با معادلات بوگومولنی به دست آمده [۲] مطابقت دارند.

### مرجع‌ها

- [۱] Dorsey ,A.T ; “ Vortex motion and the Hall effect in type-II superconductors ”; *Phys. Rev* **46**, No.3 (1992) 76-83.
- [۲] Bogomolny,E.B; “The stability of classical solutions”; *Sov. J. Nucl. Phys* **24**, No. 25 (1976) 449.
- [۳] Hlousek , Z., Spector ,D; “ Vortex motion ”; *Nuclear Physics* **58**, No. 14 (1995) 70-92.
- [۴]Vilenkin ,A., Shellard ,E.P.S. ; “ Cambridge University Press”; 3<sup>rd</sup> edition, Academic Press (2001) 547 .
- [۵] Bilal ,A.; “ Introduction to Supersymmetry ”; *Phys.Rev.Lett* **22**, No. 10 (2001) 35-77.
- [۶] Sakai ,N; “ Supersymmetry in Field Theory ”; *Phys.Rev.Lett* **32**,No. 21 (1999) 39-39.

با استفاده از قضیه استوکس و با توجه به شرط  $0 \rightarrow D_i \phi \rightarrow \infty$  در می‌توان نتیجه گرفت که:

$$T = \frac{1}{e} \oint A_i dx^i = \frac{2\pi n}{e} \quad (9)$$

عدد صحیح  $n$  ، در این رابطه کلاس هموتوپی را مشخص می-  
کند.

در مورد فعلی، یعنی در مدل هیگز آبلی، شرط بین ثابت‌های جفت‌شدگی به صورت  $\lambda^2 = \frac{e^2}{8}$  است که این شرط هم برای به دست آوردن یک تعمیم ابرمتقارن  $\mathcal{N} = 2$  و هم برای پیدا کردن معادلات بوگومولنی در این مدل لازم است. توجه می‌کنیم که به دلیل هرمیتی بودن  $\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = \{Q^\alpha, \bar{Q}^\beta\}$  نامساوی زیر برقرار است:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} \{Q^\alpha, \bar{Q}_\beta\} \geq 0 \quad (10)$$

با توجه به معادله (۲۸-۵) برای پاد جابجاگرها از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که  $E \geq |T|$ .

$$E \geq |T| \Rightarrow E \geq \frac{2\pi}{e} |n|$$

مقدار کمینه انرژی از این رابطه  $E_{min} = \frac{2\pi}{e} |n|$ ، اصطلاحاً حد بوگومولنی نام دارد. روش متداول برای بدست آوردن معادلات بوگومولنی از جبر ابرمتقارن به این صورت است که: با استفاده از تعریف‌های زیر:

فرض می‌کنیم که یک پیکربندی میدان مثل  $\langle B \rangle$  وجود دارد که حد بوگومولنی را اشباع می‌کند. بنابراین  $\langle B \rangle$  باید در معادله زیر صدق کند:

$$(Q_I \pm Q_{II}) |B\rangle = 0 \quad (11)$$

بنابراین به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\epsilon^{ij} F_{ij} = \pm (|\phi|^2 - \phi_0^2) \quad (12)$$

$$i \epsilon_{ij} D^i \phi = \pm (D_j \phi)$$

## عملکرد سلول خورشیدی به صورت تابعی از عمق

عزیز آغچه قلعه ، ویگن<sup>۱</sup>؛ منصوری، مریم<sup>۲</sup>

<sup>۱,۲</sup>دانشگاه صنعتی ارومیه، دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

### چکیده

یک سلول خورشیدی یا سلول فتوولتیک یک وسیله‌ی الکتریکی است که با استفاده از یک اثرفتوولتیک انرژی نورانی را مستقیماً به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند که یک پدیده‌ی فیزیکی و شیمیایی است. سلول فتوولتیک به عنوان ابزاری اسا که مشخصات الکتریکی آن مانند جریان مشخص است. کاربرد الکترون و حفره را می‌توان با استفاده از تابع عمقی که الکترون و حفره پس از جذب فوتون در آن ایجاد شده است محاسبه کرد. می‌توان چنین فرض کرد که جفت الکترون و حفره هردو در یک عمق ایجاد شده‌اند و سپس احتمال اینکه بارها به ناحیه‌ی پیوند جریان یابند را محاسبه کرد.

## Solar cell Generation as a function of Depth

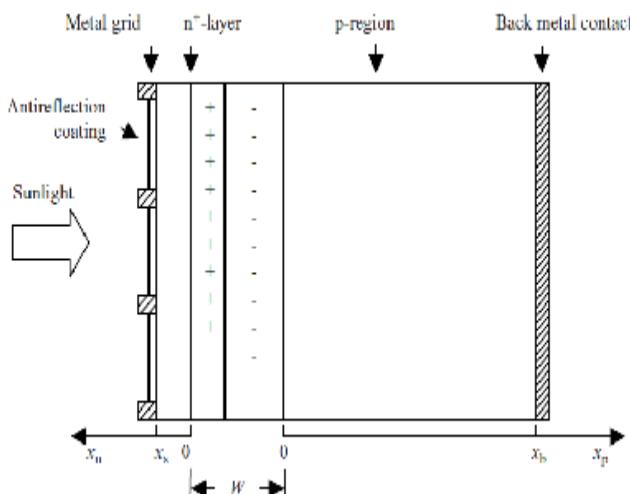
Aziz Aghchegala,Vigen<sup>1</sup>;mansoury,Maryam<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Urmia University of Technology, Department of Physics,

### Abstract

A solar cell, or photovoltaic cell, is an electrical device that converts the energy of light directly into electricity by the photovoltaic effect, which is a physical and chemical phenomenon. It is a form of photoelectric cell, defined as a device whose electrical characteristics, such as current. The efficiency of electron and hole pair collection in a solar cell can be analysed as a function of the depth at which carriers are generated by an absorbed photon. We can assume that generation occurs at only one depth, and then determine the probability that carriers are collected and cross over the junction.

یک سلول خورشیدی از جنس سیلیکون شامل یک لایه‌ی جلویی  $n^+$  است و یک دریچه‌ی فلزی (توري) روی این لایه قرار داده شده است که ناحیه‌ی اهمی را می‌سازد. ناحیه‌ی روی  $n^+$  که با تابش نور مواجه است با یک پوشش مناسب ضد بازتاب پوشیده شده است. دیواره‌های توري فلزی مانع از رسیدن و جذب بسیاری از پرتوهای نوری توسط نیمه‌هادی  $n^+$  هستند پس بسیار نازک ساخته می‌شوند. بیشتر تابش توسط ناحیه‌ی ضخیم  $p$  جذب می‌شوند. الکترون‌های موجود در ناحیه‌ی  $p$  باید به سمت پیوند رانده شوند. نور خورشیدی که به سلول خورشیدی می‌رسد، جذب می‌شود و این باید توسط رابطه‌ی  $I_x = I_0 e^{-\alpha x}$  تعریف می‌شود.



شکل ۱. اجزاء سازنده‌ی سلول خورشیدی

فرض می‌کنیم نرخ اپتیکی  $G$  در تمام طول اتصال  $p-n$  یکنواخت باشد. این موضوع بر این مطلب دلالت دارد که ثابت جذب  $\alpha$  کوچک است. همچنین فرض می‌کنیم که طول پراکندگی اقلیت بارها در نواحی  $n$  و  $p$  بسیار کوچکتر از طول این نواحی هستند. در واقع نقاط جلویی  $x_s = x_n$  و نقاط پشتی  $x_b = x_p$  از تراکم بارها دور هستند و در ناحیه‌ی  $n$  معادله‌ی پراکندگی برای حفره‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$D_p \frac{d^2 \delta p(x_n)}{dx^2} = \frac{\delta p(x_n)}{\tau_p} - G \quad (1)$$

در رابطه فوق  $G$  نرخ جذب اپتیکی و  $\tau$  ثابت زمانی باز ترکیب و  $D_p$  سرعت ترکیب هستند [۳ و ۴].

## مقدمه

امروزه سلول‌های خورشیدی سیلیکونی، از پرکاربردترین قطعات حالت جامد هستند. سیلیکون نیمه‌رسانایی با گاف نواری ۱/۱ تا ۱/۷ الکترون ولت مناسب برای جذب نور خورشید می‌باشد. جفت‌های الکترون-حفره در اثر تابش نور خورشید در نیمه‌رسانا تولید می‌شوند. این حامل‌های بار متحرک می‌توانند جریان الکتریکی تولید کنند [۱]. تولید ولتاژ الکتریکی به یک گاف انرژی بین ترازهای انرژی الکترونی نیاز دارد. اما چگونه می‌توان با استفاده از گاف انرژی، ولتاژ تولید کرد؟ برای این منظور، به یک پیوند  $p-n$  نیاز است. ساختار سلول‌های سیلیکونی، از یک فیلم نازک نوع  $n$  (ضخامتی در حدود یک یا چند میکرومتر) بر روی یک فیلم نوع  $p$  که ضخامت بیشتری دارد، تشکیل می‌شود. جفت‌های الکترون-حفره تولید شده بوسیله نور خورشید در فصل مشترک این دو ناحیه پخش می‌شوند، جایی که میدان الکتریکی داخلی موجب جدایی بار می‌شود. در سلول‌های خورشیدی پیوند  $p-n$ -بحث درباره تولید و بازنگری حامل‌ها، که بسته به ولتاژ اعمال شده بر روی پیوند در گاف ممنوعه انرژی نیمه‌رسانا رخ می‌دهد، ضروری به نظر می‌رسند [۲ و ۳].

## طراحی سلول‌های خورشیدی

در این قسمت طراحی سلول‌های خورشیدی سیلیکونی مورد بحث است. برای این منظور که نور به ناحیه‌ی پیوندی اتصال  $p-n$  برسد، باید اتصال نزدیک به سطح رسانا باشد و به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد که تابش کافی را دریافت کند. این مورد ایجاب می‌کند که یک لایه‌ی نازک  $n$  یا  $p$  روی ناحیه‌ای که نور تابیده است قرار بگیرد [۳].

برای اینکه بیشتر نور تابیده شده توسط سلول خورشیدی جذب شود، یک لایه سیلیکون را که به شدت به آن ناخالصی اضافه شده را به سطح سلول اضافه می‌کنیم و به عنوان یک ناحیه از اتصال  $p-n$  به کار برد می‌شود.

$$\delta n_p(x_p) = \alpha \exp\left(\frac{x_p}{L_n}\right) + \beta \exp\left(-\frac{x_p}{L_n}\right) \quad (4)$$

با استفاده از شرایط مدار کوتاه در  $x_p=0$  باید تراکم حاملها صفر شود. با استفاده از شرط پیوستگی در  $x_G x_p = x_b$ ، در نهایت تابع  $\delta n_p(x_p)$  را در فاصله‌ی بین  $x_b \leq x_p \leq x_G$  به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\delta n_p(x_p) = \alpha \left\{ \exp\left(\frac{2x_G}{L_n}\right) - 1 \right\} \exp\left(-\frac{x_p}{L_n}\right) \quad (5)$$

حال چگالی جریان را بدست می‌آوریم [۴]

$$J_n = q D_n \frac{dn_p}{dx_p}$$

در  $x_G = x_p$  دو مؤلفه از جریان پراکندگی وجود دارد. جریان مازاد الکترون‌ها در جهت کاهش تراکم بار از  $x_G$  دور می‌شود. اندازه‌ی چگالی جریان در سمت چپ  $x_G$  به صورت زیر خواهد بود:

$$J_{1n}(x_p = x_G) = q \alpha \frac{D_n}{L_n} \left\{ \exp\left(\frac{x_G}{L_n}\right) + \exp\left(-\frac{x_G}{L_n}\right) \right\}$$

و در سمت راست به صورت زیر خواهد بود:

$$J_{2n}(x_p = x_G) = q \alpha \frac{D_n}{L_n} \left\{ \exp\left(\frac{x_G}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{x_G}{L_n}\right) \right\}$$

در نهایت جریان کل برابر است با

$$J_{total} = 2q \alpha \frac{D_n}{L_n} \exp\left(\frac{x_G}{L_n}\right)$$

جریان کلی که به ناحیه‌ی خلا می‌رسد را با  $\eta$  نمایش می‌دهیم:

$$\eta = \exp\left(\frac{-x_G}{L_n}\right)$$

می‌دانیم که شار جریان به صورت تابع نمایی، به صورت تابعی از فاصله‌ی بین ناحیه‌ی خلا و مکان تولید جفت الکtron و حفره کاهش می‌یابد. به منظور استفاده بهینه از سلول‌های خورشیدی با ضخامت محدود  $x_b \gg L_n$  فرض می‌کنیم که عمق جذب فوتون‌ها از طول پخش  $L_n$  کوچکتر است. در سیلیکون عمق جذب فوتون  $100 \mu m$  و طول پراکندگی  $1 mm$  است. یعنی ضخامت سلول خورشیدی باید بیشتر از  $1 mm$  باشد. برای کاهش سرعت ترکیب می‌توان از نیمه‌رسانی نوع  $p^+$  استفاده می‌شود [۵].

و در ناحیه‌ی  $p$  معادله‌ی پراکندگی برای الکترون‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$D_n \frac{d^2 \delta n(x_p)}{dx^2} = \frac{\delta n(x_p)}{\tau_n} - G \quad (2)$$

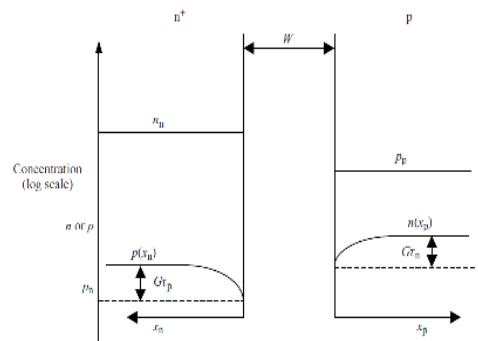
$$D_n \frac{d^2 \delta n(x_p)}{dx^2} = \frac{\delta n(x_p)}{\tau_n} - G$$

پس از اعمال شرایط مرزی و در نظر گرفتن طول پخش  $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$  تغییرات تراکم حفره‌ها و الکترون‌ها در نواحی  $n$  و  $p$  بدست خواهد آمد.

$$\delta p(x_n) = G \tau_p + \{p_n \left[ \exp\left(\frac{qv}{kT}\right) - 1 \right] - G \tau_p\} \exp\left(\frac{-x_n}{L_p}\right)$$

$$\delta n(x_p) = G \tau_p + \{p_n \left[ \exp\left(\frac{qv}{kT}\right) - 1 \right] - G \tau_p\} \exp\left(\frac{-x_n}{L_p}\right) \quad (3)$$

می‌توان براساس روابط فوق منحنی‌های  $\delta p(x_n)$  و  $\delta n(x_p)$  به صورت زیر رسم کرد.

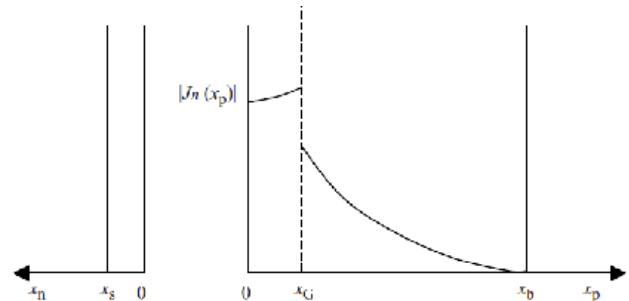


شکل ۲. نحوه تغییرات تراکم اقلیت بارها

### تابع عمق

کاربرد الکترون و حفره را می‌توان با استفاده از تابع عمقی که الکترون و حفره پس از جذب فوتون در آن ایجاد شده است محاسبه کرد. می‌توان چنین فرض کرد که جفت الکترون و حفره هردو در یک عمق ایجاد شده‌اند و سپس احتمال اینکه بارها به ناحیه‌ی پیوند جریان یابند را محاسبه کرد. از آنجا که بیشتر حامل‌ها در ناحیه‌ی  $p$  جذب می‌شوند، توجه خود را به ناحیه‌ی  $p$  جلب می‌کنیم.

برای  $x_G \leq x_p \leq 0$  تراکم بارها به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۳. نمودار چگالی جریان بر حسب فاصله

## مرجع‌ها

### نتیجه‌گیری

در این مقاله‌ی موروی، ابتدا به معرفی اجمالی سلول خورشیدی پرداختیم. و به صورت خلاصه عملکرد سلول خورشیدی را بررسی کردیم. سپس طراحی و اجزای سازنده‌ی سلول خورشیدی را مورد بررسی قرار دادیم و شکل شماتیکی از این اجزا را ارائه کردیم.

در نهایت تابع عمق را معرفی کرده و با استفاده از آن تراکم بارهای اقلیت را در هر دو طرف ناحیه‌های  $n$  و  $p$  بدست آوردیم و از روی تراکم اقلیت بارها، چگالی جریان را محاسبه کردیم و به این نتیجه رسیدیم که بیشینه‌ی جریان در  $\mathcal{X}_G$  اتفاق می‌افتد و نمودار چگالی جریان الکترون‌ها را بر حسب فاصله از ناحیه‌ی  $p$ ، برای هر دو سمت راست و چپ  $\mathcal{X}_G$  رسم کردیم. با توجه به رفتار جریان به این نتیجه رسیدیم که شار جریان به صورت تابع نمایی، به صورت تابعی از فاصله‌ی بین ناحیه‌ی خلا و مکان تولید جفت الکترون و حفره کاهش می‌یابد. به منظور استفاده بهینه از سلول‌های خورشیدی با ضخامت محدود  $x_b \gg L_n$  فرض کردیم که عمق جذب فوتون‌ها از طول پخش  $L_n$  کوچکتر است.

[۱] Fraas Lewis, Partain Larry, "Solar Cells and Their Applications", Second Edition, John Wiley & Sons, Inc.,(2010).

[۲] W. Shockley and H. J. Queisser, "Detailed Balance Limit of Efficiency of p-n Junction Solar Cells," *Journal of Applied Physics*, vol. 32, pp. 510-519, 03/00/ 1961.

[۳] Adrian Kitai, "Principles of Solar Cells, LEDs and Diodes The role of the PN junction," *Departments of Engineering Physics and Materials Science and Engineering, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada*,2011, DOI: 10.1002/9781119974543.

[۴] Miro Zeman" Introduction to photovoltaic solar energy" Delft University of Technology.

[۵] A. Luque and A. Martí, "Increasing the Efficiency of Ideal Solar Cells by Photon Induced Transitions at Intermediate Levels," *Physical Review Letters*, vol. 78, pp. 5014-5017, 06/30/ 1997.

## انتشار و پایداری امواج ناشی از فعالیت الکتریکی در کورتکس مغز

علی نژاد، حسن؛ حراره، آتنا؛ نعمتی اندواری، مسعود

گروه فیزیک، دانشکده‌ی علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

### چکیده

در این مقاله، با هدف مدل‌سازی رفتار فعالیت الکتریکی در کورتکس مغز به صورت انتشار امواج الکتریکی بر اساس مدل رابینسون، معادلات غیرخطی پیوسته‌ای معرفی شده است که شامل اثرات غیرخطی نورون‌ها، تأخیرات آکسونی و دندریتی، جمعیت‌های نورون‌های تحریکی و مهاری می‌باشند. با استفاده از این معادلات، رابطه‌ی پاشندگی را برای امواج خطی استخراج می‌کنیم و با تحلیل رابطه‌ی پاشندگی نشان خواهیم داد که پایداری تقاطع تعادل این سیستم پیچیده، به پارامترهای فیزیولوژیکی مغز وابسته است. علاوه بر این، با بررسی عددي حالت نرمال فعالیت کورتکس مغز نشان می‌دهیم که در این شرایط همه‌ی نورون‌ها پایین‌تر از حد فیزیولوژیکی خود شلیک می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: کورتکس، پایداری، رابطه پاشندگی، سیستم پیچیده.

## Propagation and stability of waves of electrical activity in the cerebral cortex

Alinejad, Hasan ; Harare, Atena ; Nemati Andevari, Masoud

Department of Physics, Faculty of Basic science, Babol Noshirvani University of Technology

### Abstract

In this paper, nonlinear continuum equations are introduced to model the behavior of cortical electrical activity by Robinson's model which incorporate nonlinearities, axonal and dendritic lags, excitatory and inhibitory neuronal populations. By using these equations, we derive dispersion relation for linear waves and by analyzing the dispersion relation we will show that the stability of the fixed point of this complex system are related to the physiological parameters of the brain. Furthermore, by studying numerically the normal activity state in cortex, we will show that in these conditions all neurons fire at rates far below their physiological limits.

**Keywords:** Cortex, Stability, Dispersion Relation, Complex System.

PACS No. 52.35.-g

نتیجه، یافتن چارچوب مناسب برای تجزیه و تحلیل این داده‌های تجربی به یکی از دغدغه‌های عصر حاضر تبدیل شده است. به این منظور مدل‌های مختلفی ارائه شده است تا یک توصیف دقیقی از ارتباط بین فیزیک اعصاب و فیزیولوژی نورون‌ها برقرار گردد که از آن جمله می‌توان به مدل میدان‌های عصبی اشاره کرد [۱] که بر مبنای انتشار چگالی پالس به صورت یک موج میرا که توسط چشممه‌ای برانگیخته می‌شود، فرمول‌بندی شده است. هدف از این مقاله تعیین رابطه پاشندگی و بررسی پایداری امواج خطی بر اساس مدل پیوسته میدان‌های عصبی رابینسون [۲] می‌باشد. شواهد زیادی وجود دارد که نشان می‌دهد فعالیت نوسانی مغز در حالت

### مقدمه

ثبت سیگنال‌های عصبی به روش الکتروآنسفالوگرام(EEG) ثیجه‌ای از فعالیت الکتریکی مجموعه‌ی زیادی از نورون‌های کورتکس مغز هستند. همبستگی سیگنال‌های EEG با عملکرد سیستم پیچیده‌ی مغز به طور وسیعی در تشخیص بیماری‌ها در حوزه‌ی علوم اعصاب و پزشکی استفاده می‌شود. تاکنون محتويات فرکانسی این نوسانات، تغییرات توان طیفی آن‌ها با عملکردهای شناختی و سرعت امواج به خوبی اندازه‌گیری شده است. ولی متأسفانه ارتباط بین سیگنال‌های ثبت شده با دینامیک نورون‌های ایجاد کننده این فعالیت‌های الکتریکی هنوز ناشناخته است. در

آنها در دندربیت، اندازه‌گیری می‌شود. یک تقریب خوبی برای  $V_{e,i}$  به شکل زیر می‌باشد [۴]

$$V_{e,i}(r,t) = g \int_{-\infty}^{+\infty} L(t-t') Q_{ae,ai}(r,t') dt', \quad (2)$$

$$L(u) = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} (e^{-au} - e^{-bu}), \quad (3)$$

که در عبارت بالا  $Q_{ae,ai}$  متوسط پتانسیل ورودی‌ها از نورون‌های دیگر به شاخه‌ی دندربیت نورون  $a$ ،  $g$  بهره‌ی دندربیتی و  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت زمانی دندربیت می‌باشد. در فضای فوریه  $(L(u))$ ، به عنوان یک فیلتر پایین‌گذار با فرکانس قطع  $\alpha$  و  $\beta$  برای دندربیت‌ها عمل می‌کند. پتانسیل‌های ورودی  $Q_{ae,ai}$  در یک موقعیت مشخص، متشكل از پتانسیل موج  $\phi_{e,i}$  و سایر ورودی‌های خارجی به کورتکس هستند که بر اساس مدل رابینسون به صورت زیر بیان می‌شوند

$$Q_{ae,ai}(r,t) = M_{e,i} Q_s + \mu_{e,i} Q_{ns}(r,t) + a_{ee,ie} \phi_e(r,t) - a_{ei,ii} \phi_i(r,t) \quad (4)$$

که در آن  $M_{e,i}$  به ترتیب چگالی سیناپسی مربوط به ورودی‌های مشخص به نورون‌های تحریکی و مهاری،  $\mu_{e,i}$  چگالی سیناپسی مربوط به ورودی‌های نامشخص از ساختارهای غیرکورتکسی به نورون‌های تحریکی و مهاری و ثابت‌های  $a_{ee,ei,ie,ii}$  چگالی سیناپسی مربوط به ورودی‌های تحریکی و مهاری به نورون‌های تحریکی و مهاری می‌باشد. هنگامی که مقدار پتانسیل‌های تجمعی در شاخه‌ی دندربیت نورون به مقدار آستانه می‌رسد، نورون می‌تواند شلیک کند. پالس ایجاد شده، در طول آکسون و شاخه‌ی آکسونی متشر می‌شود و پالس ورودی برای نورون‌های دیگر را تأمین می‌کند. اگر  $v$  سرعت مشخصه‌ی این پالس در طول آکسون باشد، می‌توان انتشار پالس خروجی را به صورت یک موج با پتانسیل  $\phi_{e,i}$  در نظر گرفت که توسط چشمتهای  $Q_{e,i}$  ایجاد می‌شود. بنابراین دینامیک حاکم بر چنین سیستمی مشابه معادله‌ی تحول یک موج میرا شونده به شکل زیر می‌باشد [۲]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_{e,i} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{e,i}^2 - v^2 \nabla^2 \right) \phi_{e,i}(r,t) = \gamma_{e,i}^2 Q_{e,i}(r,t), \quad (5)$$

که  $\gamma_{e,i} = v/r_{e,i}$  و  $r_{e,i}$  طول مشخصه‌ی آکسون است. مقادیر اندازه‌گیری شده برای ثابت  $r_{e,i}$  به ترتیب برای انسان  $m = 0.08m$  و  $r_e \approx 10^{-4} m$  می‌باشد [۲]. معادلات (۱)-(۵)،

استراحت در مقیاس بزرگ، به طور خطی پایدار است. این شرایط ایجاب می‌کند که در شرایط نرمال، مغز باید نزدیک مرز پایداری واقع باشد. در صورتی که خیلی از این شرایط پایداری دور شویم در محدوده‌ی کما و بیهوشی عمیق هستیم در حالی که عبور از این مرز پایداری به محدوده‌ی ناپایداری، به معنی گذار به فعالیت تشنج با دامنه‌ی بزرگ نوسانی است [۳]. بنابراین پایداری یک قید بسیار مهم در رفتار دینامیکی سامانه‌ی پیچیده‌ی مغز است که می‌تواند منجر به یک وضعیت نرمال گردد.

### معادلات حاکم بر دینامیک کورتکس

مغز به عنوان یک سیستم پیچیده شامل تعداد زیادی نورون است که به صورت خودسازگار و بدون هیچ مرجع کنترل کننده‌ای رفتار ماکروسکوپیک دارد. چنین محیطی را می‌توان مانند محیط‌های خودسازگاری همچون پلاسمای بر اساس یک مجموعه از معادلات غیرخطی توصیف کرد. از دید میکروسکوپیک، یک نورون تحریکی از طریق سیناپس با هزاران نورون دیگر در ارتباط است. در شاخه‌ی دندربیتی، توسط ورودی‌های سیناپسی نورون‌های دیگر، پتانسیل‌هایی شکل می‌گیرد. در صورتی که مجموع این پتانسیل‌ها به حد آستانه بر سر نورون می‌تواند با یک آهنگ شلیک انجام دهد. با توجه به اینکه در مدل میدان عصی [۱]، کورتکس مغز به صورت یک پیوستار در نظر گرفته می‌شود، روی تعداد زیادی از نورون‌ها میانگین‌گیری می‌شود. در این صورت متوسط آهنگ شلیک بر حسب کمیت  $Q_{e,i}$  (اندیس  $e$  مربوط به نورون‌های تحریکی و  $i$  مربوط به نورون‌های مهاری می‌باشد) و پتانسیل بدنی سلولی نورون بر حسب کمیت  $V_{e,i}$  نمایش داده می‌شود که ارتباط بین پتانسیل و آهنگ شلیک بر حسب تابع سیگموئیدی زیر می‌باشد

$$Q_{e,i} = \frac{Q_{\max}}{1 + \exp[-(V_{e,i} - \theta)/\sigma]}, \quad (1)$$

که در عبارت بالا  $Q_{\max}$ ، آهنگ شلیک ماکریم،  $\theta$  متوسط پتانسیل دندربیتی و  $\sigma$  انحراف از معیار آستانه می‌باشد که مرتبط با داده‌های فیزیولوژی است. کمیت  $V_{e,i}$  در عبارت بالا، پتانسیل در بدنی سلولی نورون‌ها است که بعد از تجمعی تمام ولتاژها و فیلتر کردن

شرطیت پایا و صرفنظر از ترم‌های  $(k, \omega) = (0, 0)$  که نقاط تعادل سیستم هستند، خواهیم داشت

$$Q_{e,i}(k, \omega) = \rho_{e,i} V_{e,i}(k, \omega), \quad (7)$$

$$V_{e,i}(k, \omega) = gL Q_{ae,ai}(k, \omega), \quad (8)$$

$$L = \frac{\alpha\beta}{(\alpha - i\omega)(\beta - i\omega)}, \quad (9)$$

$$D_{e,i} \phi_{e,i}(k, \omega) = \gamma_{e,i}^2 Q_{e,i}(k, \omega), \quad (10)$$

$$D_{e,i} = (\gamma_{e,i} - i\omega)^2 + k^2 v^2, \quad (11)$$

$$Q_{ae,ai}(k, \omega) = M_{e,i} Q_s + a_{ee,ie} \phi_e(k, \omega) - a_{ei,ii} \phi_i(k, \omega). \quad (12)$$

حال با استفاده از معادلات (7) و (8) می‌توان  $Q_{e,i}$  را بر حسب  $Q_{ae,ai}$  نوشت. همچنین با استفاده از معادله (12) می‌توان  $Q_{e,i}$  را به شکل ترم‌های  $\phi_{e,i}$  بازنویسی کرد. در ادامه با استفاده از نتایج حاصله و لحاظ کردن تقریب مهار موضعی  $Q_i = \phi_i$  برای نورون‌های مهاری [۲] که مرتبط با کوتاه برد بودن محدوده‌ی آکسون‌های مهاری است، رابطه پاشندگی به صورت زیر بدست می‌آید

$$(D_e - \gamma_e^2 \rho_e g L a_{ee}) \phi_e = \gamma_e^2 \rho_e g L (M_{e,i} Q_s - a_{ei} Q_i). \quad (13)$$

که پاسخ خطی کورتکس به سیگنال خاص  $Q_s$  در فضای فوریه است. برای انتشار امواج بدون تحریک خارجی یعنی حالتی که

$Q_s = 0$ ، رابطه پاشندگی به صورت زیر به دست می‌آید

$$(\alpha - i\omega)(\beta - i\omega) D_e - \alpha\beta\gamma_e^2 G = 0, \quad (14)$$

که کمیت بهره‌ی خالص  $G$  در آن به صورت  $G = \rho_e g a_{ee}$  تعریف می‌شود. برای دو شرط حدی  $\alpha, \omega \gg \beta, \omega$  می‌توان معادله پاشندگی را به دو صورت زیر تقریب زد

$$(\alpha - i\omega) D_e - \alpha\gamma_e^2 G = 0, \quad (15)$$

$$D_e - \gamma_e^2 G = 0. \quad (16)$$

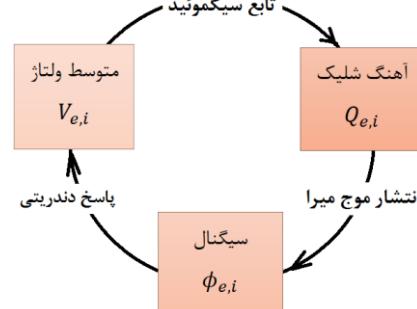
روابط پاشندگی (14)–(16) چندجمله‌ای‌هایی هستند که بر حسب مقادیر حقیقی و موهومی  $\omega$  می‌باشند. برای بررسی پایداری نقاط تعادل کورتکس مغز می‌توان ترم‌های حقیقی و موهومی را به صورت زیر برای معادله (16) نوشت

$$\omega = -i\gamma_e \pm i\sqrt{\gamma_e^2 G - k^2 v^2}. \quad (17)$$

در تحلیل پایداری امواج، مثبت بودن ترم موهومی نشان‌دهنده‌ی ناپایداری نقطه‌ی تعادل می‌باشد، لذا با توجه به رابطه‌ی فوق، ناپایداری زمانی رخ می‌دهد که شرط زیر صادق باشد

$$G > 1 + k^2 v^2 / \gamma_e^2 = 1 + k^2 r_e^2. \quad (18)$$

یک سیستم بسته‌ای از روابط خودسازگار در مدل میدان عصبی رابینسون هستند که دینامیک نوسانات را در کورتکس مغز توصیف می‌کند.



شکل ۱: طرح شماتیک چرخه‌ی ایجاد سیگنال در کورتکس مغز.

شکل ۱، طرح شماتیک چرخه‌ی ایجاد سیگنال را در این مدل نشان می‌دهد که معادلات فوق بر اساس این چرخه پایه‌ریزی شده‌اند. لازم به ذکر است که اثرات فیدبک ناشی از بخش‌های مختلف تalamوس به کورتکس و بالعکس در این مقاله در نظر گرفته نشده است.

## رابطه پاشندگی و تحلیل پایداری

همانطوری که در بخش قبل اشاره شد، مجموعه معادلات (۱) تا (۵)، رفتار موج‌گونه‌ی فعالیت الکتریکی کورتکس مغز را نشان می‌دهند که منع ایجاد سیگنال‌های مشاهده شده در اندازه‌گیری‌های EEG می‌باشند. برای حالتی که ترم تحریک خارجی  $Q_{ns}$  ثابت و یکنواخت باشد، می‌توان رفتار پایای این سیستم دینامیکی را با تعیین نقاط تعادل سیستم بررسی کرد. با توجه به این نقاط پایا، مانند هر سیستم پیچیده‌ای چون پلاسمما، اختلالات کوچک حول این نقاط تعادل، معادله‌ی موج خطی را ایجاد می‌کند. برای تعیین رابطه‌ی پاشندگی این امواج، فرض می‌کنیم که یک آشفتگی کوچک حول نقاط تعادل سیستم ایجاد شود. در این صورت معادله‌ی غیرخطی (۱) را حول نقاط تعادل به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$Q_{e,i} = Q_{e,i}^{(0)} + \rho_{e,i} [V_{e,i} - V_{e,i}^{(0)}], \quad (6)$$

که  $Q_{e,i}^{(0)}$  و  $V_{e,i}^{(0)}$  مقادیر حالت پایا هستند و در می‌باشد. علاوه بر این با تبدیل فوریه از معادلات (۲)–(۶) در

با توجه به منفی بودن  $\text{Im}\omega$  برای تمامی حالت‌ها در شکل ۲، می‌توان نتیجه گرفت که سیستم به ازای تمامی  $k$ ‌ها پایدار خواهد بود. با توجه به شکل (b) و (d)، سه مد با کمترین میرایی مربوط به روابط (۱۴) و (۱۵)، بسیار شبیه به هم هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تقریب (۱۵) تحت این شرایط تقریب مناسبی است. اما مشاهده می‌شود که مد میرایی برای مرتبه دو در معادله (۱۶)،  $\pm 1$ ، برای مرتبه سه در معادله (۱۵) و برای مرتبه چهار در معادله (۱۴)،  $-i\alpha$  - می‌باشد که این رفتار متفاوت معادله‌ی مرتبه دو را می‌توان به دو جواب معادله (۱۶) نسبت داد که با کاهش  $k$  سیستم را وادار به تغییر وضعیت از حالت انتشار به غیر انتشار می‌کند.

## نتیجه گیری

برای فرمول‌بندی فعالیت الکتریکی کورتکس مغز، به کمک مدل رابینسون مجموعه‌ای از معادلات پیوسته‌ی غیرخطی را ارائه کرده‌ایم که شامل پاسخ غیرخطی نورون‌ها، جمعیت نورون‌های تحریکی و مهاری و تأثیرات آکسونی و دندربیتی می‌باشد. در ادامه برای امواج خطی با دامنه‌ی کوچک، روابط پاشندگی را بدست آوردیم و با بررسی تحلیلی و عددی روابط پاشندگی نشان دادیم که مرزی برای پایداری انتشار امواج مغزی وجود دارد که فراتر از آن، تشنج(نایپایداری) رخ خواهد داد. اثرات فیدبک کورتکس-تalamوس و بالعکس که می‌تواند تحلیل دقیق‌تری از طیف این نوسانات ارائه دهد، در این مقاله لحاظ نشده است.

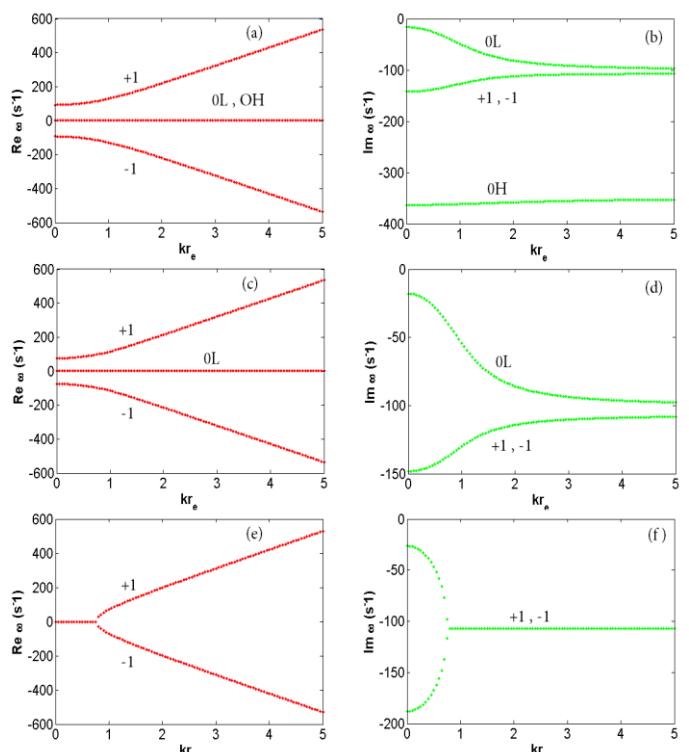
## مرجع‌ها

- [۱] P. L. Nunez and R.A. Srinivasan; "A Theoretical Basis for Standing and Traveling Brain Waves Measured with Human EEG with Implications for an Integrated Consciousness"; *Clin. Neurophysiol.* **117**, No. 11 (2006) 2424-2435.
- [۲] P. A. Robinson, C. J. Rennie, J. J. Wright; "Propagation and stability of waves of electrical activity in the cerebral cortex"; *Physical Review. E* **56**, No. 1 (1997) 826-840.
- [۳] C. J. Rennie, J. J. Wright and P. A. Robinson; "Mechanisms of Cortical Electrical Activity and Emergence of Gamma Rhythm"; *Journal of Theoretical Biology.* **205**, (2000) 17-35.
- [۴] W. J. Freeman; Predictions on Neocortical Dynamics Derived from Studies in Paleocortex. In: *Induced Rhythms in the Brain* edited by E. Başar, T.H. Bullock (eds), Brain Dynamics, Birkhäuser, Boston, MA (1992).

رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که مرز نایپایداری در شرایط اتفاق می‌افتد که  $G = 1 + k^2 r_e^2$ . برای رسیدن به شرط پایداری، برای پایین‌ترین حالت تعادل، می‌توان با قرار دادن  $G = \rho_e g a_{ee}$  و  $\rho_{e,i} = dQ_{e,i} / dV_{e,i}$  در معادله (۱۸) به رابطه‌ی زیر رسید

$$Q_e(1-Q_e) < (gCa_{ee})^{-1}. \quad (۱۹)$$

با توجه به داده‌های فیزیولوژی، این معادله نشان می‌دهد که به ازای  $Q_e$ ‌های کوچک، دو نقطه‌ی تعادل، یکی پایدار و یکی نایپایدار داریم که بیانگر حالت نرمال کورتکس هستند و به ازای  $Q_e$  بزرگ، یک جواب نایپایدار داریم که مربوط به وضعیت تشنج است.



شکل ۲: تغییرات فرکانس مدهای انتشار که از معادلات پاشندگی (۱۴)-(۱۶) حاصل شده است و از بالا به پایین به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ مد نوسانی را نشان می‌دهد. برای رسم این نمودارها از پارامترهای انسانی و  $G = 0.57$  و  $Q_{ns} = 0.7$  استفاده شده است.

به منظور بررسی خواص کلی امواج پایدار و نایپایدار، به کمک حل عددی معادلات پاشندگی (۱۴)-(۱۶)، تغییرات قسمت حقیقی و موهومی فرکانس  $\omega$  را بر حسب عدد موج رسم کردیم. برای  $k$ ‌های بزرگ طبق رابطه‌ی (۱۷)، میرایی با مدهای انتشاری  $\omega \approx \pm kv - i\gamma_e$  رخ می‌دهد که این جواب‌ها در شکل (۲) با علامت  $\pm 1$  نشانه‌گذاری شده‌اند.

# ناپایداری‌های هیدرودینامیکی در سوسپانسیونی از شناگرهای ریزمقیاس

فضلی، زهرا؛ نجفی، علی

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان

## چکیده

ما براساس یک مدل ساده از یک شناگر ریزمقیاس، رفتار یک سوسپانسیون از این ریزشناگرهای را بررسی می‌کنیم و این کار را به شکل پیوستار و با استفاده از معادلات تحول میدان‌های هیدرودینامیکی انجام می‌دهیم. در این کار قصد داریم اثر وجود برهمنش‌های هیدرودینامیکی بین شناگرهای را در رفتار بزرگ‌مقیاس این مجموعه بررسی کنیم و نشان خواهیم داد که وجود این برهمنش‌ها منجر به ایجاد ناپایداری‌های با طول موج بلند در سامانه می‌شود. سازوکار ایجاد این ناپایداری‌ها برای شناگرهای از نوع پوشر و پولر متفاوت است. در سوسپانسیونی از پوشرها، افت و خیزهای از نوع خمث منجر به ناپایداری در هر دو فاز همسانگرد و قطبیده می‌شوند و در پولرها، اختلالات از نوع گسترش در ناپایداری سامانه نقش دارند.

## Hydrodynamic instabilities in a suspension of micro-swimmers

Fazli, Zahra; Najafi, Ali

Department of Physics, Institute for advanced studies in basic sciences, Zanjan

## Abstract

*Using a simple model for a micro-swimmer, we study the behavior of a suspension of such swimmers and present a continuum description for the dynamics of hydrodynamic fields. We aim to investigate the effects of hydrodynamic interactions on the large-scale behavior of this system and we show that these interactions lead to long-wavelength instabilities in the system. The mechanism of these instabilities is different for pushers and pullers. In a suspension of pushers, bend fluctuations cause instabilities in both isotropic and polar phase, and for pullers, splay fluctuations destabilize the system.*

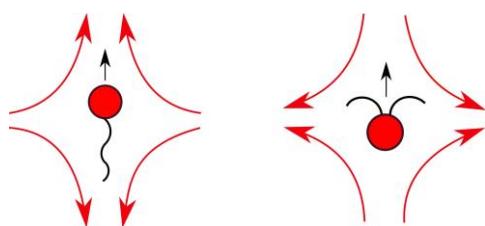
05.10.Gg, 05.65.+b, 47.63.mf

سامانه‌ها مشاهده می‌شود. این رفتارها در مقیاس‌هایی که خیلی بزرگ‌تر از اندازه‌ی تکذرات است اتفاق می‌افتد. مثال‌های متنوعی از این رفتارهای جمعی در طبیعت دیده می‌شود: دسته‌ای از پرندگان که برای جستجوی غذا و یا با تبعیت از یک یا چند رهبر در گروه، حرکات هماهنگی را از خود به نمایش می‌گذارند و یا مجموعه‌ای از باکتری‌های محدود شده در یک محفظه که به دلیل اثرات ناشی از برهمنش‌های هیدرودینامیکی، رفتارهای گردابی جالبی نشان می‌دهند.

## مقدمه

مواد پویا سامانه‌هایی هستند متشکل از ذراتی که می‌توانند با تبدیل انرژی آزاد ذخیره شده و یا دریافت شده از محیط اطراف، یک حرکت نظاممند انجام دهند. این مواد در ابعاد مختلف وجود دارند. از انسان‌ها، گله‌ی حیوانات، دسته‌های پرندگان و ماهی‌ها گرفته تا ارگانیزم‌های سلولی و شناگرهای ریزمقیاس مانند انواع باکتری‌ها. نکته‌ای که در مورد ذرات پویا اهمیت ویژه‌ای دارد این است که به دلیل برهمنش‌هایی که بین این ذرات با یکدیگر و با محیط پیرامونشان وجود دارد، رفتارهای جمعی جالبی در این

طول موج‌های بلند بررسی می‌کنیم، این ضرایب منجر به ایجاد ناپایداری در پولرها و پوشرها می‌شوند. طرح میدان سرعت شاره در اطراف یک شناگر پولر و پوشر در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱ : میدان شارش در اطراف پولرها (راست) و پوشرها (چپ).

### برهم‌کنش هم‌جهتی

علاوه بر برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی که بلندبرد هستند، ما یک برهم‌کنش کوتاهبرد هم‌جهتی نیز بین شناگرها در نظر می‌گیریم، به این شکل که اگر فاصله‌ی بین شناگرها کوچک‌تر از یک مقدار مشخص باشد، تمایل به هم‌جهت شدن با یکدیگر دارند. ما این پتانسیل هم‌جهتی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$U^S = \begin{cases} -U_0 \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}'} & ; R < l_c \\ 0 & ; R > l_c \end{cases} \quad (3)$$

در این رابطه،  $U_0$  قدرت برهم‌کنش است و  $l_c$  فاصله‌ی است که بزرگ‌تر از آن پتانسیل صفر می‌شود. سرعت خطی و زاویه‌ای هر شناگر در اثر این برهم‌کنش با شناگر دیگر به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{V}^S = -\frac{1}{k_B T} \mathbf{D} \cdot \nabla U^S, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^S = -\frac{D_R}{k_B T} \hat{\mathbf{t}} \times \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{t}}} U^S \quad (5)$$

$D_R$  و  $\mathbf{D}$  به ترتیب تانسور پخش انتقالی و ضریب پخش چرخشی ذرات هستند.

### توصیف یک سامانه از شناگرها

برای ارائه‌ی یک توصیف میدان متوسط از سامانه، فرض می‌کنیم کسر حجمی شناگرها در سامانه خیلی کوچک باشد، به

برخی مدل‌های پدیده‌شناسختی وجود ناپایداری‌های با طول موج بلند را در ذرات خودران نشان داده‌اند [۱]. ما در این مقاله از یک مدل ریزمقیاس برای بررسی این موضوع استفاده می‌کنیم. با توجه به این که شناگرهای ریزمقیاس از لحاظ زیستی اهمیت دارند، ما در این مقاله، رفتار جمعی یک سوسپانسیون از ریزشناگرهای را در حضور برهم‌کنش هم‌جهتی و هیدرودینامیکی بین آن‌ها به روش تحلیلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ما نشان خواهیم داد که وجود برهم‌کنش هیدرودینامیکی بین شناگرها اثرات مهمی در رفتار بزرگ‌مقیاس این سامانه دارد.

### برهم‌کنش هیدرودینامیکی

برهم‌کنش هیدرودینامیکی برهم‌کنشی بلندبرد است و یک مجموعه از شناگرها به دلیل حرکت در شاره با یکدیگر برهم‌کنش هیدرودینامیکی دارند. مدلی که ما برای شناگرها در نظر می‌گیریم مدل سه‌کرایی است [۲]. می‌توان نشان داد که این شناگر دارای یک سرعت ذاتی به اندازه‌ی  $v_0$  است که به مشخصات هندسی شناگر بستگی دارد. هر شناگر در اثر برهم‌کنش هیدرودینامیکی با شناگرهای دیگر یک سهم سرعت خطی و زاویه‌ای دیگر نیز کسب می‌کند. سرعت خطی و زاویه‌ای شناگری در مکان  $\mathbf{r}$  و جهت‌گیری  $\hat{\mathbf{t}}$  در اثر برهم‌کنش هیدرودینامیکی با شناگری در مکان  $\mathbf{r}'$  و جهت‌گیری  $\hat{\mathbf{t}}'$  را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد [۳] :

$$\mathbf{V}^L = A_1 \left( \frac{L}{R} \right)^2 \mathbf{G}_1 + \left( \frac{L}{R} \right)^3 [A_2 \mathbf{G}_2 + A_3 \mathbf{G}_3] \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^L = B_1 \left( \frac{L}{R} \right)^3 \mathbf{G}_4 + \left( \frac{L}{R} \right)^4 [B_2 \mathbf{G}_5 + B_3 \mathbf{G}_6] \quad (2)$$

در این روابط،  $L$  طول مشخصه‌ی شناگرها و  $R$  فاصله‌ی بین آن‌هاست. مجموعه ضرایب  $A$  و  $B$  بستگی به مشخصات هندسی شناگرها دارند و بردارهای  $\mathbf{G}$  توابعی از جهت‌گیری و مکان شناگرها هستند. برای مدل شناگری که ما در نظر گرفته‌ایم علامت ضرایب  $A_1$  و  $B_1$  که مربوط به سهم دوقطبی میدان شارش هستند برای دو دسته‌ی مهم از شناگرهای ریزمقیاس یعنی پولرها و پوشرها تغییر علامت می‌دهند. در ادامه که تحول سامانه را در حد

دسترسی برای سامانه را به دست آوریم و رفتار آن را در مقیاس‌های زمانی و مکانی بزرگ بررسی کنیم.

### جواب‌های حالت پایا

با صرف نظر از جملات گرادیان در معادلات تحول، می‌توانیم جواب‌های حالت پایای سامانه را به دست آوریم. خواهیم دید که این سامانه دارای دو حالت پایای همگن است: حالت همسانگرد که با مقادیر زیر مشخص می‌شود:

$$\rho^I = \rho_0, \quad \mathbf{P}^I = 0, \quad \mathbf{N}^I = 0 \quad (14)$$

در این حالت همهٔ ذرات در سامانه دارای توزیع مکانی یکنواخت هستند و با جهت‌گیری‌های تصادفی حرکت می‌کنند. حالت دیگر، حالت منظم قطبیده است که برابر است با:

$$\rho^P = \rho_0, \quad \mathbf{P}^P = \mathbf{P}^\infty, \quad \mathbf{N}^P = \mathbf{N}^\infty \quad (15)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{P}^\infty = \sqrt{\frac{15}{4\pi\rho_0 l_c^3 U_0}} \left(1 - \frac{9}{4\pi\rho_0 l_c^3 U_0}\right) \hat{\mathbf{n}} \quad (16)$$

$$\mathbf{N}^\infty = \left(1 - \frac{9}{4\pi\rho_0 l_c^3 U_0}\right) \left(\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{I}}{3}\right) \quad (17)$$

در این فاز، مجموعهٔ ذرات به طور میانگین دارای یک جهت حرکت مرجع است.

### پایداری فازهای همگن

پس از به دست آوردن جواب‌های همگن و حالت پایای سامانه، در این بخش می‌خواهیم پایداری آن‌ها را مطالعه کنیم. برای این منظور، اختلال کوچکی را در این جواب‌ها در نظر می‌گیریم و تحول آن‌ها را با زمان بررسی می‌کنیم. ابتدا اختلالی را در حالت همسانگرد وارد می‌کنیم. با استفاده از معادلات تحول ممان‌های تابع توزیع می‌توانیم تحول اختلال‌ها را بررسی کنیم. نتایج ما نشان می‌دهد که تنها اختلال‌های با طول موج بلند در تansور نظم نماییک در ناپایداری فاز همسانگرد نقش دارند. این ناپایداری‌ها چگالی مشخصه‌ای را معرفی می‌کنند که بالاتر از آن یک سوپرانسیون همسانگرد از پوشرها (پولرهای) تحت تاثیر افت و خیزهای خمث (گسترش) ناپایدار می‌شود.

طوری که فاصلهٔ شناگرها از یکدیگر خیلی بزرگ‌تر از اندازهٔ نوعی شناگرهاست. با این فرض می‌توانیم تحول تابع توزیع شناگرها را بر اساس معادلهٔ اسمولوکوفسکی بنویسیم:

$$\partial_t \psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{t}}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_T - \left(\hat{\mathbf{t}} \times \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{t}}}\right) \cdot \mathbf{J}_R \quad (6)$$

که  $\psi$  احتمال یافتن شناگری در مکان  $\mathbf{r}$  با جهت‌گیری  $\hat{\mathbf{t}}$  در زمان  $t$  است.  $\mathbf{J}_T$  و  $\mathbf{J}_R$  چگالی‌های جریان انتقالی و چرخشی شناگرها هستند که شامل جریان‌های ناشی از برهم‌کنش‌ها و هم‌چنین جریان‌های پخشی هستند. علاوه بر این، جریان انتقالی یک سهم ناشی از خودرانی ذرات نیز دارد:

$$\mathbf{J}_T = [v_0 \hat{\mathbf{t}} + \bar{\mathbf{V}}^{int}] \psi - \mathbf{D} \cdot \nabla \psi \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_R = \bar{\Omega}^{int} \psi - D_R \nabla_R \psi \quad (8)$$

برهم‌کنش‌های میدان متوسط را با انتگرال‌گیری روی مکان و جهت‌گیری همهٔ شناگرها به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$\bar{\mathbf{V}}^{int}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{t}}, t) = \int d\mathbf{r}' d\hat{\mathbf{t}}' V^{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{t}}') \psi(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{t}}', t) \quad (9)$$

$$\bar{\Omega}^{int}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{t}}, t) = \int d\mathbf{r}' d\hat{\mathbf{t}}' \Omega^{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{t}}') \psi(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{t}}', t) \quad (10)$$

که سرعت‌های خطی و زاویه‌ای در این رابطه، مجموع سهم‌های ناشی از هر دو برهم‌کنش هیدرودینامیکی و هم‌جهتی هستند که در بخش‌های قبل معرفی کردیم.

یکی از روش‌های معمول برای مطالعهٔ تحول سامانه‌های پویا که دور از تعادل ترمودینامیکی هستند، مطالعهٔ تحول ممان‌های تابع توزیع است که معمولاً کمیت‌هایی کنلتغیرنند. چگالی، قطبش و تانسور نظم نماییک، سه ممان اول تابع توزیع هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\hat{\mathbf{t}} \psi \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} \int d\hat{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{t}} \psi \quad (12)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} \int d\hat{\mathbf{t}} \left(\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{t}} - \frac{\mathbf{I}}{3}\right) \psi \quad (13)$$

با استفاده از معادلهٔ (6) می‌توانیم تحول هر یک از این کمیت‌ها را به دست آوریم. ما بر اساس این معادلات می‌توانیم فازهای قابل

هستند. در این مورد نتایج ما نشان می‌دهد که این افت و خیزها برای پولرها رشد کرده و برای پوشرها از بین می‌روند.



شکل 2: اگر در بخشی از سامانه تاوا بردار راهنمای غیر صفر باشد افت و خیزهای خمین (راست) و اگر واگرایی غیر صفر باشد افت و خیز از نوع گسترش (چپ) داریم. به دلیل برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی این افت و خیزها رشد کرده و هر دو حالت همسانگرد و قطبیده را ناپایدار می‌کنند.

### نتیجه‌گیری

ما در این مسئله بر پایه‌ی یک مدل ریزمقیاس، توصیفی پیوستار برای یک مجموعه از ریزشناگرها ارائه کردیم و با استفاده از این فرمول‌بندی توانستیم فازهای قابل دسترسی برای سامانه و پایداری آن‌ها را بررسی کنیم. نشان دادیم که هر دو فاز همسانگرد و قطبیده تحت تاثیر برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی ناپایدار هستند. سازوکار ناپایداری هر دو فاز برای پوشرها ناشی از رشد افت و خیزهای خمین و برای پولرها ناشی از رشد افت و خیزهای گسترش است.

### کارهای پیش رو

به جای استفاده از برهم‌کنش هم‌جهتی بین ذرات، می‌توان از نوع دیگری از برهم‌کنش استفاده کرد که نظم نماتیک در سامانه تولید کند. این برهم‌کنش اثری شبیه برهم‌کنش حجم ممنوعه دارد و با استفاده از پتانسیل زیر می‌توان آن را ایجاد کرد:

$$U^{ex}(\mathbf{r}_{ij}, \theta_i, \theta_j) = \begin{cases} 1 & \text{در غیر این صورت:} \\ 0 & \end{cases}$$

در بسیاری از سامانه‌ها که ذرات شکل میله‌ای دارند وجود این برهم‌کنشی می‌تواند نظم جهتی از نوع نماتیک تولید کند اما قادر به تولید نظم قطبی نیست. از روشهای که در این مقاله معرفی شد می‌توان برای مطالعه‌ی چنین سامانه‌هایی استفاده کرد.

### مرجع‌ها

- [1] R. A. Simha and S. Ramaswamy; "Hydrodynamic fluctuations and instabilities in ordered suspensions of self-propelled particles"; *Physical Review Letters* **89**, (2002) 058101.
- [2] A. Najafi and R. Golestanian; "Propulsion at low reynolds number"; *Journal of Physics: Condensed Matter* **17**, No. 14 (2005) S1203.
- [3] Z. Fazli, A. Najafi; "Long-wavelength instabilities in a system of interacting active particles"; *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2018**, (2018) 023201.

برای بررسی پایداری فاز قطبیده، فرض می‌کنیم اندازه‌ی پارامترهای نظم قطبیش و نماتیک ثابت است و تنها اختلال کوچکی را در جهت بردار راهنمای در نظر می‌گیریم. پس از به دست آوردن معادلات تحول افت و خیزهای چگالی و بردار راهنمای می‌توانیم معادلات جفت‌شده‌ی این افت و خیزها را به شکل ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta n_i \end{pmatrix} \quad (18)$$

با به دست آوردن مقادیر ویژه‌ی ماتریس ضرایب می‌توان رابطه‌ی پاشندگی مدهای هیدرودینامیکی سامانه را به دست آورد. این روابط پاشندگی می‌توانند در حالت کلی توابعی مختلط باشند که علامت بخش حقیقی آن‌ها می‌تواند رشد و یا از بین رفتان افت و خیزهای چگالی و قطبیش را با زمان مشخص کند. اگر بخش حقیقی مثبت باشد افت و خیزها رشد می‌کنند و اگر منفی باشد میرا می‌شوند. برای افت و خیزهای خمینی معادلات تحول چگالی و بردار راهنمای از هم مستقل می‌شوند و بخش حقیقی روابط پاشندگی مربوط به آن دو به شکل زیر است:

$$\chi_\rho, \chi_n \propto -\beta \rho_0 N^\infty + O(k)^2 \quad (19)$$

که از توانهای مرتبه بالاتر بردار موج صرف نظر کرده‌ایم. در این رابطه ضریب  $\beta$  برای پولرها مثبت و برای پوشرها منفی است. بنابراین افت و خیزهای با طول موج بلند خمینی برای پولرها از بین رفته و برای پوشرها رشد می‌کنند.

برای افت و خیزهای گسترش نیز می‌توان این کار را انجام داد اما در این حالت معادلات تحول چگالی و بردار راهنمای جفت‌شده

## طیف توانی رویدادهای نادر در مدل Bak-Tang-Wisenfeld دو بعدی،

### نقض فرضیه‌ی نویه‌ی $1/f$

مقدم، زهرا<sup>۱</sup>; نطاق نجفی، مرتضی<sup>۲</sup>; صابر، احمد<sup>۳</sup>; عبادی، زهرا<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده فیزیک دانشگاه محقق اردبیلی، خیابان دانشگاه، اردبیل

#### چکیده

در این مقاله ما چند سیگنال زمانی از جمله فعالیت در داخل یک بهمن ( $x(t)$ ) اندازه‌ی بهمن ( $T$ ) و زمان انتظار بین رویدادهای بزرگ ( $\tau(n)$ ) را مورد مطالعه قرار داده‌ایم و برخی رفتارهای پاد-همبستگی را برای ( $s(T)$ ) و ( $\tau(n)$ ) در زمان‌های کوچک گزارش کرده‌ایم که اثرات طول محدود هستند. در بررسی‌های ما دو مقیاس زمانی مشخصه  $s$  و  $\tau$  ظاهر شده‌اند و بیان کرده‌ایم که طیف توانی برای این سیگنال‌ها رفتاری به صورت  $(b_{s,\tau}(L)^2 + \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$  دارد که  $b_s$  و  $b_\tau$  پارامترهای وابسته به اندازه شبکه هستند و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای می‌باشد.

### Power spectrum of rare events in two-dimensional BTW model, violation of $1/f$ noise hypothesis

Moghadam, Zahra<sup>1</sup>; Nattagh-Najafi, Morteza<sup>2</sup>; Saber, Ahad<sup>3</sup>; Ebadi, Zahra<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

#### Abstract

In this paper we study some time signals namely the activity inside an avalanche ( $x(t)$ ), the avalanche sizes ( $s(T)$ ) and the rare events waiting time ( $\tau(n)$ ), and we report some exponential anti-correlation behaviors for  $s(T)$  and  $\tau(n)$  for small times which are finite-size effects. Two characteristic time scales  $\delta T_s$  and  $\delta T_\tau$  emerge in our analysis. It is proposed that the power spectrum of  $s(T)$  and  $\tau(n)$  behave like  $(b_{s,\tau}(L)^2 + \omega^2)^{-1/2}$ , in which  $b_s$  and  $b_\tau$  are some  $L$ -dependent parameters and  $\omega$  is the angular frequency.

PACS No. 05., 05.20.-y, 05.10.Ln, 05.65.+b, 05.45.Df

ما در این مقاله مدل تپه‌ی شنی دو بعدی را در نظر می‌گیریم و سه سیگنال زمانی را بررسی می‌کنیم: ( $x(t)$ ) که تعدادخانه‌های ناپایدار در زمان داخلی مربوط به یک بهمن  $t$  است، ( $s(T)$ ) که اندازه‌ی بهمن در زمان  $T$  ام (یا بعبارتی پس از اضافه کردن شن  $T$  ام) می‌باشد و ( $\tau(n)$ ) که زمان انتظار بین بهمن بزرگ  $n$  و بهمن بزرگ  $(n+1)$  ام است.

ما مشاهده کرده‌ایم که یک مقیاس زمانی برای ( $T$ ) و ( $n$ ) پدیدار می‌شود که حیطه‌ی پاد-همبستگی زمانی را محدود می‌کند و باعث می‌شود که طیف توانی متناظر به صورت  $(b_{s,\tau}(L)^2 + \omega^2)^{-1/2}$  رفتار کند.

مقدمه  
بسیاری از پدیده‌های طبیعی با استفاده از خودساماندهیت بحرانی<sup>۱</sup> توضیح داده می‌شوند [۱-۳]. ویژگی‌های مخرب برخی رویدادهای بزرگ-مقیاس در سوانح طبیعی، انگیزه مدل کردن رخداد آنها را ایجاد می‌کند که به پیش‌بینی رفتار آنها کمک می‌کند [۲]. علی‌رغم ماهیت تصادفی سیستم‌های خودسامانده بحرانی، رفتار توانی همبستگی‌های فضایی و زمانی و دیگر رفتارهای آنها را به شدت محدود می‌کند و شناسی را برای پیش‌بینی دنباله‌ی رویدادها ایجاد می‌کند [۳].

<sup>۱</sup> Self-organized criticality (SOC)

استفاده کرده‌ایم که طیف توانی بهمن‌ها با مدت زمان ثابت  $t_0$  می‌باشد. که برای آن:

$$PS_x(f|t_0) \equiv \frac{1}{t_0^2} \iint_0^{t_0} dt dt' \exp[-2i\pi f(t-t')] \times \langle x(t, t_0) x^*(t', t_0) \rangle \quad (2)$$

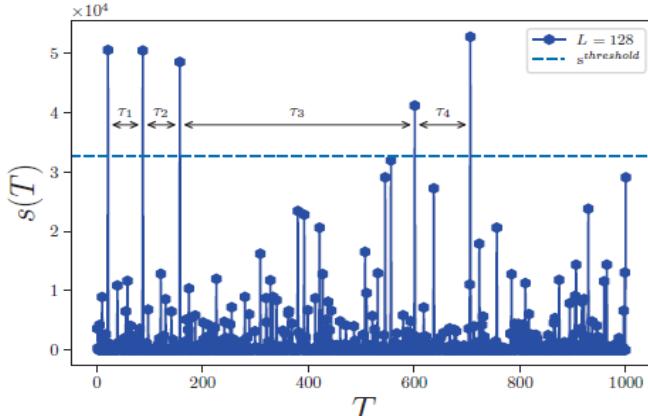
طیف توانی کل به آسانی با میانگین‌گیری دوباره روی اندازه‌ی بهمن‌ها محاسبه می‌شود، یعنی:

$$PS_x(f) = \int P(s) PS_x(f|s) ds \quad (3)$$

که  $P(s)$ تابع توزیع احتمال  $s$  است.

کمیت دیگری که می‌تواند به صورت یک سری زمانی ظاهر شود زمان انتظار رویدادهای نادر (REWLT)<sup>۳</sup> است. در این مقاله ما بهمن‌های نادر را به صورت بهمنی که اندازه‌ی آن بیشتر از دو برابر اندازه‌ی شبکه باشد تعریف می‌کنیم، یعنی  $s^{threshold} = 2L^2 = 2 \times 128^2 = 4096$ . رویدادهای نادر REWLT را به صورت  $(n)$  نشان می‌دهیم که به صورت فاصله‌ی زمانی بین دو رویداد نادر پی‌درپی  $S(T_n)$  و  $S(T_{n+1})$  هستند. رویدادهای نادر در شکل (۱) برای یک سیستم با اندازه‌ی  $L=128$  نشان داده شده است، که آستانه با خط

شکسته در شکل مشخص شده است.



شکل (۱): چهار زمان انتظار اولیه‌ی رویدادهای نادر با  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  و  $\tau_4$  نشان داده شده‌اند.

آمار REWLT ما را قادر می‌سازد تا برخی پیش‌بینی‌های آماری را در مورد رویدادهای بزرگ-مقیاس داشته باشیم که در سوانح طبیعی بسیار مهم است. همچنین پاد-همبستگی در  $s(T)$  و REWLT در تحلیل رویدادهای نادر بسیار مهم است. این رابطه گرایش یک

## طرح مسئله

در ابتدا مدل BTW<sup>۴</sup> استاندارد را روی شبکه مکعبی  $d$  بعدی منظم معرفی می‌کنیم [۴]. هر خانه‌ی  $i$  از شبکه، یک ارتفاع با مقدار صحیح  $1 \leq E_i \leq E_c$  (انرژی) دارد. در حالت اولیه میتوان ارتفاع هر خانه را به صورت تصادفی تنظیم کرد که در آن  $E_i \leq E_c$  است. ارتفاع آستانه‌ی  $E_c$  برابر با تعداد همسایه‌های نزدیک هر خانه می‌باشد (برای شبکه‌ی مکعبی  $E_c = 2d$ ). در هر گام زمانی یک دانه به خانه‌ای که به صورت تصادفی انتخاب شده است افزوده می‌شود، اگر ارتفاع این خانه از  $E_c$  بیشتر شود یک فروریزش اتفاق می‌افتد، به طوریکه ارتفاع هر کدام از همسایه‌های نزدیک یک واحد زیاد می‌شود و ارتفاع خانه‌ی نام،  $2d$  واحد کم می‌شود. هر کدام از خانه‌های همسایه در نتیجه‌ی فروریزش ممکن است ناپایدار شوند و فروریزش کنند، این فرایند آنقدر اتفاق می‌افتد تا هیچ خانه‌ای ناپایدار نماند. کل این فرایند که با ایجاد یک اختلال موضعی ایجاد می‌شود، یک بهمن نامیده می‌شود.

ما دو نوع زمان داریم، زمان داخلی که با  $t$  نشان می‌دهیم و زمان خارجی که با  $T$  نشان می‌دهیم. برای تعریف این زمان‌ها ماتعداد کل فروریزش‌ها در یک بهمن را به تعدادی گام زمانی  $L^2$  داخلی تقسیم کرده‌ایم. یک واحد زمان داخلی به صورت  $L^2$  جستجو برای خانه‌های ناپایدار تعریف شده است. مجموع فعالیت‌های داخلی کل موردنبیاز برای اینکه بهمن  $T$  به اتمام برسد، برابر با اندازه‌ی آن بهمن  $s(T)$  است که به عنوان یک نویه‌ی دیگر می‌تواند در نظرگرفته شود.

برای سیگنال زمان داخلی بهمن،  $(t)$  میتوان بحث مقیاسی زیر را برای محاسبه‌ی نمای  $\alpha$  ارائه کرد. طیف توانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PS_x(f) \equiv \left\langle \left| \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt x(t, t_0) \exp[-2i\pi f t] \right|^2 \right\rangle \quad (1)$$

که در آن  $\langle \rangle$  نشان‌دهنده‌ی میانگین آنسامبلی و  $t_0$  مدت زمان وقوع بهمن است و  $x(t, t_0)$  سری‌های زمانی هستند که مشروط به پایان یافتن در  $t_0$  شده‌اند. برای تسهیل در نوشتار ما از کمیت

می شود. درواقع در این نمودار از مقدار اصلی تابع، مقدار تابع در زمانهای زیاد را کم نموده ایم. ویژگی جالب در این نمودار پاد-همبستگی نمایی نوفه‌ی  $s(T)$  است. مشاهده می شود که  $A_s(T)$  برای زمانهای کوچک منفی است و به صورت نمایی با زمان افزایش پیدا می کند و برای زمانهای طولانی به صفر می کند. این تابع به طور صحیح با عبارت تحلیلی  $A_{s0}\exp(b_s T)$  برای تمامی اندازه‌های شبکه‌ی مطرح شده در این مقاله برازش شده است. برای نشان دادن این وابستگی در نمودار داخلی این شکل، نمودار  $A_s(T)/A_{s0}$  را بر حسب  $b_s T$  برای اندازه‌های شبکه‌های مختلف نشان داده ایم.

رفتار پاد-همبستگی به این معنی است که زمانی که یک رویداد نادر در زمان  $T$  روی می دهد، داشتن چنین بهمن بزرگ-مقیاسی در فاصله‌ی زمانی تقریبی  $(T + 1, T + 1/b_s)$  برای سیستم مطلوب نیست. با داشتن برازش تحلیلی برای تابع خودهمبسته می توان طیف توانی را با تبدیل فوریه محاسبه کرد که منجر به رابطه‌ی پایا رسید مشاهدات آماری، تجزیه و تحلیل می شوند. اکنون به محاسبه‌ی همبستگی می پردازیم. تابع خودهمبسته به صورت زیر تعریف می شود:

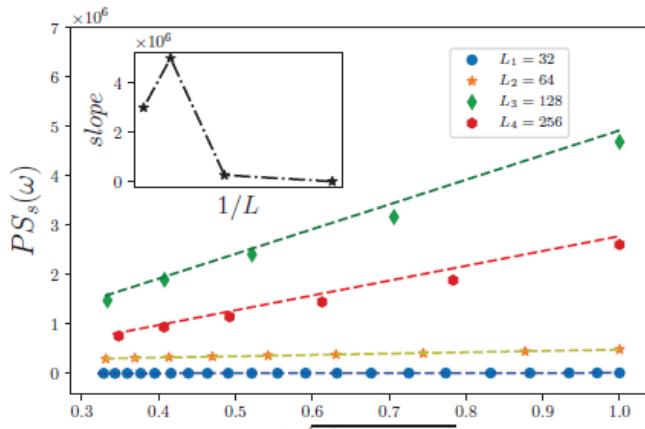
رویداد بزرگ را برای داشتن یک رویداد با وسعت کمتر یا بیشتر را در آینده نشان می دهد. یعنی پاسخ این سوال که آیا رویدادهای نادر در یک توالي زمانی همدیگر را تضعیف می کنند و یا تقویت می کنند. پاسخ هر چه که باشد، به نظر می رسد از اهمیت حیاتی در سیستمهای خودساماندهی بحرانی طبیعی برخوردار باشد، مشروط به آنکه ارتباط با مدل تئوری مطروحه درست باشد. در این مقاله ما عمدتاً روی سیگنالهای زمانی  $(n)$  و  $(s(T))$  متمرکز هستیم.

## نتایج

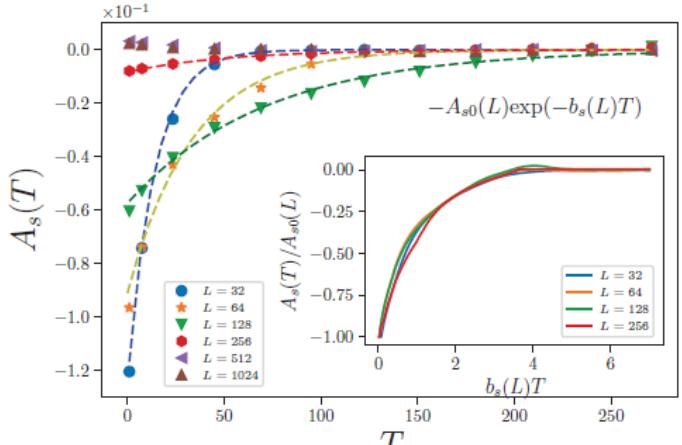
ما مدل BTW دو بعدی را روی شبکه‌ی مریعی با سایزهای  $L=32$ ،  $L=64$ ،  $L=128$ ،  $L=256$  و  $L=512$  بررسی قرار داده ایم. برای محاسبه‌ی کمیت‌های مورد نظرمان بیش از  $10^7$  بهمن را برای هر اندازه شبکه در نظر گرفته‌ایم. ما با یک توزیع تصادفی ارتفاع  $[1, 4] h_i \in [1, 4]$  و وارد کردن تصادفی دانه‌های شن از طریق نمونه شروع می کنیم و هنگامی که سیستم به حالت

نشان داده ایم، تجزیه و تحلیل می شوند.

پایان داشتن برازش تحلیلی برای تابع خودهمبسته می توان  $A_s(T) \equiv \langle s(T)s(T+T_0) \rangle_T - \langle s(T) \rangle_T^2$  که در یک مشاهده‌پذیر آماری دلخواه به صورت  $\langle O \rangle_T \equiv \frac{1}{T_{max}} \sum_{T=0}^{T_{max}} O(s(T))$  شکل (۲) تابع خودهمبسته باز مقیاس شده  $s(T)$  را نشان می دهد که به صورت  $A_s(T) \equiv \langle s(T) \rangle_T^{-2} f_s(T)$  تعریف



شکل (۳): طیف توانی  $s$  بر حسب  $1/\sqrt{b_s(L)^2 + \omega^2}$ . شیب خط برازش بر حسب  $1/L$  در شکل داخلی نشان داده شده است.



شکل (۴):  $A_s(T)$  بر حسب  $T$  برای شبکه‌های مختلف، با برازش متناظر آن

وابستگی خطی در  $1/b_\tau^2 + \omega^2)^{-1/2}$  تأیید می‌کند که  $b_\tau \ll 1$  یک مقیاس زمانی جدید در مسئله است. در اینجا برای  $s(T)$  و  $\tau(n)$  مشاهده می‌کنیم که رفتار  $1/f$  به ترتیب برای  $b_s \gg b_\tau$  و  $b_\tau \gg b_s$  روی می‌دهند. با وجود رفتار  $1/f$ ، بسیار مهم است که توجه داشته باشیم که برای فرکانس‌های به اندازه‌ی کافی کوچک، یک مقیاس زمانی وجود دارد که رفتار توانی را در طیف توانی این توابع در مدل BTW از بین می‌برد.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله ما ویژگی‌هایی را برای نوفه‌ها در مدل BTW بررسی کردیم. برای  $s(T)$  و  $\tau(n)$  برخی رفتارهای پاد-همبستگی نمایی مشاهده شد. رفتار پاد-همبستگی  $s(T)$  نشان می‌دهد که زمانی که یک رویداد بزرگ-مقیاس به وقوع می‌پیوندد، برای سیستم مطلوب است که بهمنهای کوچکتری را در قدم‌های بعدی تولید کند. این رفتار نشان می‌دهد که تپه‌های شنی اثرات تخلیه‌ای دارند. رفتار پاد-همبستگی در آنها به این معنی است که بزرگی دوره‌ی زمانی بین دو رویداد نادر پی‌درپی، موجب یک دوره‌ی زمانی کوچک بین دو رویداد نادر پی‌درپی در گام بعدی می‌شود. اگر برآورد ما در طیف توانی مربوط به  $s$  و  $\tau$  در مورد سیستم‌های بزرگ  $L \rightarrow \infty$  درست باشد و  $b_s$  و  $b_\tau$  بصورت توانی به صفر می‌کنند، سپس طیف توانی  $PS_\tau$  و  $PS_s$  در حد ترمودینامیکی به تابع دلتای دیراک می‌کنند.

### مرجع‌ها

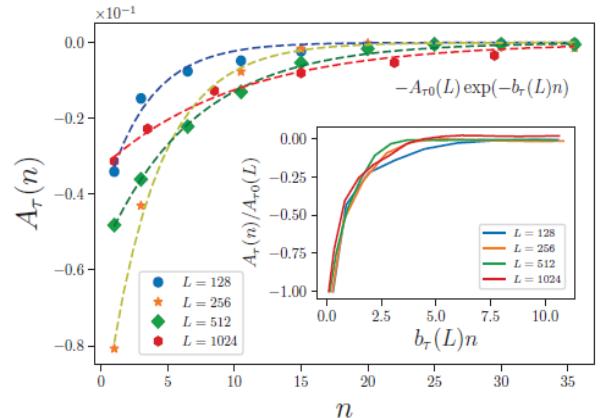
- [1] P. Bak and C. Tang, *Journal of Geophysical Research: solid Earth* 94, 15635(1989).
- [2] D. E. Alexander, *Natural disasters*(Springer Science & Business Media,(1993).
- [3] D. Dhar, *phy.Rev. let.* 64, 1613(1990).
- [4] P. Bak,C.Tang, and K.wisenfeld,  *phys. Reev. Lett.*59,381(1987).

از روی مشاهدات و تجربه به نظر می‌رسد که تحلیل REWT مهم‌تر باشد. سیگنال زمانی  $(n)\tau$  ارتباط مستقیمی با آمار سیگنال زمانی  $(T)s$  دارد. تحلیل آماری این کمیت به پیش‌بینی رویدادهای بزرگ-مقیاس پیش‌رو کمک می‌کند. یک تحلیل آماری کامل از این کمیت در شکل (۴) ارائه شده است، که تمام مقادیر ارائه شده برای  $s(T)$  بازتولید شده‌اند. همچنین در شکل (۴)،  $A_\tau(n)$  که با  $-A_{0\tau} \exp[-b_\tau T] - A_{0\tau} \exp[-b_\tau T]$  برابر بازش شده نشان داده شده است.

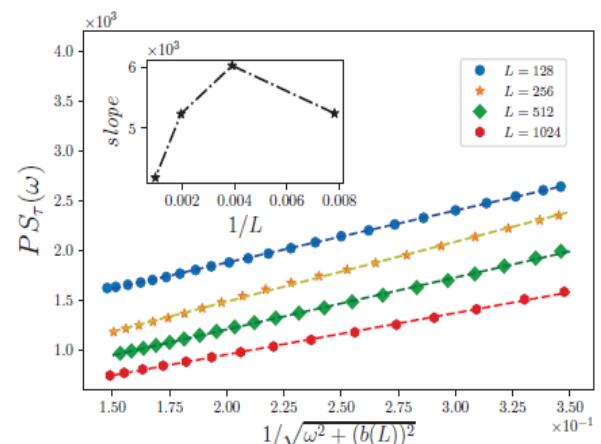
رفتار نمایی سیگنال‌ها وجود یک مقیاس زمانی مشخصه را نشان می‌دهد، یعنی سیگنال‌ها به طور جزئی کوچک می‌شوند. با داشتن این شکل از بازش خودهمبستگی، می‌توان به سادگی طیف توانی متناظر را محاسبه کرد که باید به صورت زیر باشد:

$$PS_\tau(\omega) \sim (\omega^2 + b_\tau(L)^2)^{-1/2}$$

این موضوع در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل (۴):  $A_\tau(n)$  بر حسب  $n$  برای شبکه‌های مختلف، با بازش متناظر آن



شکل (۵): طیف توانی  $\tau$  بر حسب  $1/\sqrt{\omega^2 + b_\tau(L)^2}$ . شیب خط بازش بر حسب  $1/L$  در شکل داخلی نشان داده شده است.

## تعییم مدل گرین وود - ویلیامسون با آمار مقادیر بیشینه

ملکان، آزاده<sup>۱</sup>; روحانی، شاهین<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف، خیابان آزادی، تهران

### چکیده

یک مدل بر پایه آمار مقادیر بیشینه EVS/ارئه دادیم و آن را با مدل های مختلف تماس تک قله از جمله کشسان-ناکشسان، مدل تماس چسبان برای بدست آوردن رابطه بین نیروی عمودی وارد و نیروی اصطکاک روی سطوح ناهموار ترکیب نمودیم. وقتی که تابع توزیع قله ها گامبل است با مدل تماسی هرتزی بیشترین تطابق با قانون آمونتونز را خواهیم داشت. محدوده ای که توزیع گامبل می تواند قانون آمونتونز را توصیف کند بیشتر از مدل گرین وود-ویلیامسون GW است. از سوی دیگر تغییر شکل ناکشسان در ناحیه تماس فشار نسبی را به آرامی کاهش می دهد. وقتی تماس کشسان-ناکشسان به همراه تابع توزیع گامبل در نظر گرفته شود قانون آمونتونز به بهترین شکل توضیح داده می شود. در مدل تماس چسبان در نبود نیروی خارجی و حتی در حضور نیروی اعمالی منعی مقادیر اصطکاک مشاهده می شود. ناهمواری ها با ارتفاع هایی کوچکتر از فاصله دو سطح می توانند با هم در تماس باشند. برای مقادیر کوچک پارامتر چسبندگی تطابق با قانون آمونتونز بیشترین است. فشار نسبی برای چسبندگی های بالاتر افزایش می یابد که به معنی غلبه اصطکاک ناشی چسبندگی بر اصطکاک ناشی از نیرو اعمالی است.

### Generalization of Greenwood-Williamson model by extreme value statistics

Malekan, Azadeh<sup>1</sup>; Rouhani, Shahin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

### Abstract

We propose a model based on extreme value statistics (EVS) and combine it with different models for single-asperity contact, including adhesive and elasto-plastic contacts, to derive a relation between the applied load and the friction force on a rough interface. We find that when the summit distribution is Gumbel and the contact model is Hertzian we have the closest conformity with Amontons' law. The range over which Gumball distribution mimics Amontons' law is wider than the Greenwood-Williamson (GW) Model. On the other hand plastic deformations in contact area reduce the relative change of pressure slightly with Gumbel distribution. Interestingly when Elasto-plastic contact is assumed for the asperities, together with Gumbel distribution for summits, the best conformity with Amontons' law is achieved. When adhesive contact model is used, the main observation is that for zero or even negative applied load, there is some friction. Asperities with height even less than the separation of two surfaces are in contact. For a small value of adhesion parameter, a better conformity with Amontons' law is observed. Relative pressure increases for stronger adhesion which means that adhesion controlled friction dominated by load controlled friction.

PACS No.

## مقدمه

صورت سلسله مراتبی روی هم سوار هستند [۷] و ثابت کرد که برای یک سطح کاملاً پیچیده مساحت واقعی تماس  $A$  به صورت  $A \sim N^\alpha$  به نیروی اعمالي  $N$  مربوط است بطوری که  $\alpha \approx 1$  است. پرسون [۸] مساحت واقعی تماس را به  $\lambda$  که طولی از سیستم است که سطح در ابعاد کوچکتر از آن هموار در نظر گرفته می شود، ربط داد. پرسون تابع توزیع تنش در سطح با بزرگنمایی،  $P(\sigma, \xi) = L/\lambda$  را پیدا کرد.  $L$  اندازه طولی سیستم است و دریافت که در یک معادله شبه پخشی صدق می کند. او همچنین یک رابطه خطی بین نیروی عمودی و سطح واقعی تماس بدست آورد. در این مقاله، ابتدا مدل گرین وود- ویلیامسون برای یک سطح را معرفی می کنیم. سپس آمار مقادیر بیشینه EVS را معرفی و گزینه های ممکن برای تماس تک قله ها و EVS را ترکیب می کنیم و رابطه بین فشار تماس و نیروهای اعمالي را بدست می آوریم.

## مدل گرین وود- ویلیامسون

در تئوری گرین وود- ویلیامسون تماس یک سطح هموار با یک سطح ناهموار که در فاصله  $d$  از هم قرار دارند در نظر گرفته می شود. تمام ناهمواری ها دارای شعاع یکسان  $R$  هستند و ارتفاع قله ها به صورت تصادفی حول یک مقدار میانگین توزیع شده اند شکل ۱. اگر  $\Phi(z)$  توزیع قله ها و تعداد قله ها  $N_0 = \eta A_0$  در سطح ظاهری تماس  $A_0$  است که  $\eta$  چگالی تعداد قله هاست.

مساحت واقعی تماس به صورت زیر است:

$$A = \pi N_0 \int_d^{\infty} dz \Phi(z) R(z-d) \quad (2)$$

نیروی کل اعمالي عبارت است از:

$$F = \frac{4}{3} N_0 E^* \int_d^{\infty} dz \Phi(z) \sqrt{R(z-d)^3/2} \quad (3)$$

که  $E^*$  و  $R$  به صورت زیر تعریف می شوند:  

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \quad (4)$$

اصطکاک بین سطوح جامد یک پدیده فیزیکی کاملاً پیچیده است [۱]. آمونتونز ادعا کرد که نیروی اصطکاک متناسب با نیروی عمودی و مستقل از سطح ظاهری تماس، سرعت نسبی و دما است. به عبارت دیگر ضریب اصطکاک تنها به جنس دو ماده در تماس مربوط است [۲]. به نظر می رسد قانون آمونتونز بطور کامل در همه موارد برقرار نیست. اما برای تقریب اول می توان اصطکاک را به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$f = \mu F \quad (1)$$

که  $\mu$  ضریب اصطکاک و  $F$  نیروی عمودی اعمالي است. کولن دریافت که نیروی اصطکاک بین دو سطح با زمان تماس افزایش می یابد [۳]. رابطه خطی بین نیروی اعمالي عمودی و اصطکاک وجود دارد اگرچه این وابستگی خطی برای تمام محدوده های نیروی اعمالي برقرار نیست و موادی مانند پلیمرها و فلزات نرم نقض می شود [۴]. تلاش های نظری بسیاری برای اثبات قانون آمونتونز انجام شده است. از آنجایی که سطوح واقعی در ابعاد مختلف ناهموار هستند، تماس ها در نوک قله ها رخ می دهد. مدل گرین وود- ویلیامسون [۵] تماس کاملاً کشسان و غیر چسبان در نوک ناهمواری ها و یک تابع توزیع گوسی برای توزیع ارتفاع قله ها در نظر می گیرد که یک رابطه فشار نسبی تقریباً ثابت در عین اعمال نیرو در سطح بدست می آورد. بودن و تابور است [۶] تماس های واقعی را در تعداد کمی از نقاط در نظر گرفتند. آنها تماس ها را کاملاً ناکشسان در نظر گرفتند و بنابراین نواحی واقعی تماس مربوط به سختی مواد است. آرچارد سطح رو به صورت کره هایی در نظر گرفت که به

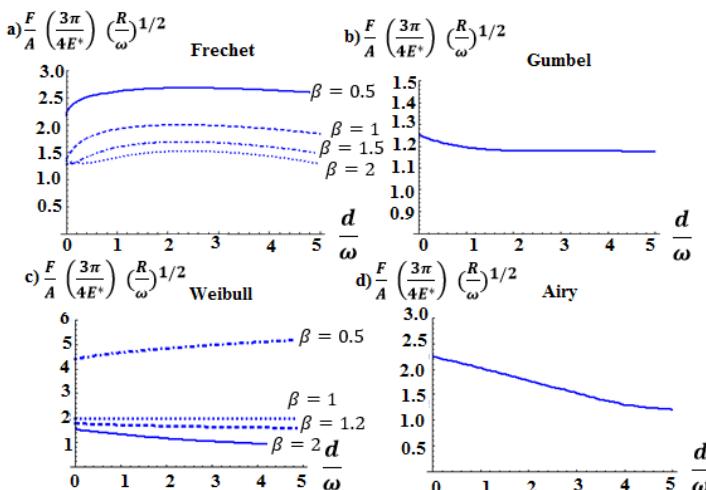
ماجومدار<sup>۵</sup> ارتفاع بیشینه  $EVS$  مدل  $KPZ(1+1)$  را محاسبه و متوجه شد که یک تابع توزیع ایری<sup>۶</sup> است که یک شکل مقیاسی برای تمام ها  $L\omega$  دارد.

$$A = \pi \omega N_0 R \int_{\frac{d}{\omega}}^{\infty} dz \Phi(z) \left(\frac{z}{\omega} - \frac{d}{\omega}\right) \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{b_k}{x^2}} b_k^{\frac{3}{2}} U\left(-\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{b_k}{x^2}\right) \quad (14)$$

که  $L$  طول سطح،  $\omega$  زیری سطح و  $a$  قدر مطلق صفرهای تابع ایری و  $U(a, b, z)$  تابع هیپرگومتری متقابل نوع دوم<sup>۷</sup> است.

تعمیم مدل گرین وود- ولیامسون با آمار مقادیر بیشینه فشار بدون بعد  $(E^*/\pi)^{1/2} * (F(d, R)/A(d, R))^{4/3}$  که نمایانگر ضریب اصطکاک است را بر حسب  $\frac{d}{\omega}$  برای توابع  $EVS$  با مدل تماس هرتزی به عنوان تماس تک قله ها در نظر می گیریم. درین توابع  $EVS$ ، توزیع گامبل به عنوان تابع توزیع قله ها، بیشترین تطابق با قانون آمونتونر که به معنی ثابت بودن فشار در نیروهای مختلف اعمالی هست را نشان می دهد در مورد توزیع ویبول با  $\beta = 1$  که همان تابع نمایی ضریب اصطکاک کاملاً یکنواخت است. اما این حالت نمی تواند توزیع مناسبی برای توزیع ارتفاع قله ها باشد [۵] شکل ۲.



شکل ۲. بیشترین تطابق با قانون آمونتونر در حالتی که توزیع قله ها به شکل گوسی است اتفاق می افتد.

<sup>۵</sup>Majumdar

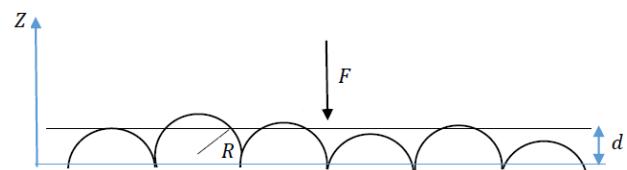
<sup>۶</sup>Airy

<sup>۷</sup> confluent hyper geometric function of the second kind

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5)$$

آنها یک توزیع گوسی برای ارتفاع قله ها در نظر گرفتند:

$$\Phi^*(z) = \left(\frac{1}{2\pi\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\omega^2}\right) \quad (6)$$



شکل ۱. طرح شماتیک مدل  $GW$

بهتر است یک مقیاس طولی مشخص سیستم را انتخاب کرده و و بهترین انتخاب زیری سطح  $\omega$  است که  $\Phi\left(\frac{z}{\omega}\right) = \omega\Phi^*(z)$  باشد. بنابراین سطح تماس واقعی و نیرو به صورت زیر داده می شوند:

$$A = \pi \omega N_0 R \int_{\frac{d}{\omega}}^{\infty} dz \Phi(z) \left(\frac{z}{\omega} - \frac{d}{\omega}\right) \quad (7)$$

$$F = \frac{4}{3} N_0 E^* \omega^{3/2} R^{1/2} \int_{\frac{d}{\omega}}^{\infty} dz \Phi(z) \left(\frac{z}{\omega} - \frac{d}{\omega}\right)^{3/2} \quad (8)$$

### آمار مقادیر بیشینه

آمار مقادیر بیشینه شاخه ای از آمار می باشد که در پی یافتن توزیع احتمال مقادیر کمینه یا بیشینه رویداد ها است که با تابع  $\varphi(x)$  داده می شود. متأسفانه  $EVS$  تمام توابع توزیع شناخته شده نیست ولی در موارد خاصی این تابع توزیع مشخص هستند که در این مقاله به این موارد خاص اشاره می کنیم. بر پایه تابع توزیع مادر سه تابع توزیع عمومی برای  $EVS$  متغیرهای مشابه و مستقل  $IID$  وجود دارد که به آن قانون کلاسیکی ژندنکو<sup>۸</sup> برای بیشینه ها می گوییم. این توابع فیشر- تریپت - گامبل<sup>۹</sup>، ویبول<sup>۱۰</sup> و فرچه<sup>۱۱</sup> به ترتیب عبارتند از:

$$f_1(z) = e^{-\frac{x}{\sigma} - e^{-\frac{x}{\sigma}}}, \quad \sigma > 0, x \in (-\infty, \infty) \quad (9)$$

$$f_2(x) = \beta \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{(\beta-1)} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta}, \quad \sigma > 0, x \in [0, \infty) \quad (10)$$

$$f_3(x) = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta-1} e^{-\frac{x}{\sigma}}, \quad \sigma > 0, x \in [0, \infty) \quad (11)$$

<sup>۸</sup>Gnedenko

<sup>۹</sup>Fisher-Tippett-Gumbel distribution

<sup>۱۰</sup>weibull

<sup>۱۱</sup>Ferechet

## نتیجه گیری

تابع  $EVS$  به همراه مدل های مختلف برای تک قله ها را به منظور یافتن تابع توزیع مناسب برای قله های سطوح ناهموار بررسی کردیم. مدل هرتز به همراه توزیع گامبل بیشترین تطابق با قانون آمونتونز را نشان می دهد. با در نظر گرفتن مدل الاستیک - پلاستیک به همراه توزیع گامبل حتی تطابق بیشتری با قانون آمونتونز نسبت به حالت هرتزی دارد. با در نظر چسبندگی برای تماس دو جسم مشاهده می شود با افزایش پارامتر چسبندگی از قانون آمونتونز دور می شویم.

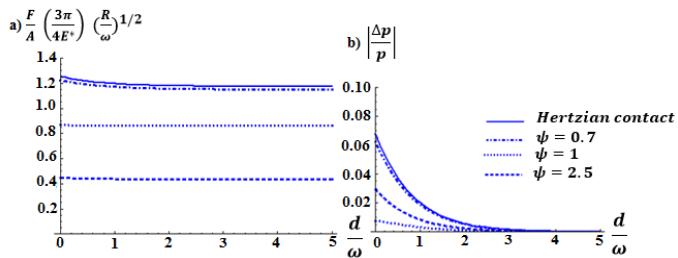
تابع توزیع ارتفاع ناهمواری ها در سطوح به طور کلی نا شناخته است با فرض ساده مستقل بودن ارتفاع ها و استفاده از تابع توزیع  $EVS$  نشان دادیم، تطابق با قانون تجربی آمونتونز تا حد بسیار خوبی برقرار است. همچین این مدل برای نشان دادن انحراف از قانون آمونتونز در مورد تماس چسبان نتایج قابل قبولی ارائه داد.

**سپاسگزاری**  
از آقایان دانیل بن و بارت ونر بخاطر بحث های سازنده در این زمینه تشکر می کنیم.

## مرجع ها

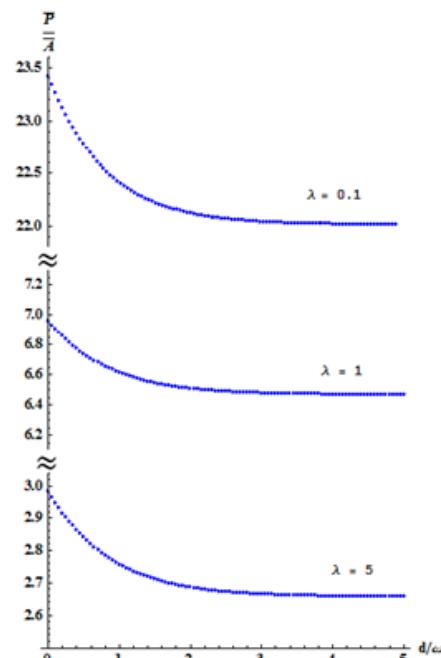
- [۱] B. Bhushan, and M. Nosonovsky, "Scale effects in dry and wet friction, wear, and interface temperature." *Nanotechnology* **15**.7 (2004) 749.
- [۲] C. A. Coulomb, "Theorie des machines simple (Theory of simple machines)." *Bachelier, Paris* (1821).
- [۳] N. V. Gitis, L. Volpe., "Nature of static friction time dependence." *Journal of Physics D: Applied Physics* **25**.4 (1992) 605-612.
- [۴] E. Rabinowicz,"Friction and wear of materials." *John Wiley & Sons Inc* (1966).
- [۵] J. A. Greenwood, JB Pl Williamson, "Contact of nominally flat surfaces" *Proc. R. Soc. Lond. A.* **295**(1966) 300–319.
- [۶] F. P. Bowden, D. Tabor, "Friction and Lubrication of Solids, vol. I. Clarendon." (1950).
- [۷] J. F. Archard, "Elastic deformation and the laws of friction." *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* **243**. No. 1233. The Royal Society, 1957.
- [۸] Bo NJ.Persson, "Contact mechanics for randomly rough surfaces." *Surface Science Reports* **61**.4 (2006) 201-227.
- [۹] W. R. Chang, I. Etsion, D. B. Bogy, "An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces." *Journal of tribology* **109**.2 (1987) 257-263.
- [۱۰] D. Maugis, "Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a Dugdale model." *Journal of colloid and interface science* **150**.1 (1992) 243-269.

زمانی که تماس تک قله ها با مدل CEB [۹] به همراه تابع توزیع گامبل در می گیریم نتایج حتی بهتر می شوند . شکل ۳ نشان می دهد با داشتن شدت های مختلف تماس پلاستیکی که با پارامتر  $\psi = \frac{2 E^*}{0.6\pi H} (\frac{\delta}{R})^{1/2}$  که در آن  $H$  مقدار سختی ماده نرمتر است، تطابق حتی بیشتری با قانون آمونتونز نسبت به حالت تماس هرتزی حاصل می شود.



شکل ۳ تماس الاستیک - پلاستیک تطابق بیشتری با قانون آمونتونز دارد.

وجود چسبندگی در سطح را با استفاده از مدل MD [۱۰] را با توزیع گامبل بررسی میکنیم. با افزایش میزان پارامتر چسبندگی  $\lambda$  مشاهده می شود رفتار اصطکاکی سطح از قانون آمونتونز دور می شود همان گونه که در فلزات نرم با چسبندگی بالا انتظار داریم شکل ۴.



شکل ۴. با افزایش پارامتر چسبندگی رفتار اصطکاکی از قانون آمونتونز دور می شود.

## هندسه‌ی ترمودینامیکی توزیع آماری تعمیم یافته‌ی کاپا

مهری‌دهنوی، حسین<sup>۱</sup>; محمدزاده، حسین<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، خیابان شریعتی، ۴۷۱۴۸-۷۱۱۶۷، بابل

<sup>۲</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، صندوق پستی ۱۷۹، اردبیل

### چکیده

در این مقاله به مطالعه‌ی سیستم گاز ایده‌آل با تابع توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  می‌پردازیم. با استفاده از یکی از رهیافت‌های هندسه‌ی ترمودینامیکی انحنای ترمودینامیکی توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  را برای گازه ایده‌آل کلاسیکی، بوزونی و فرمیونی را بدست می‌آوریم. نتایج ما بیانگر این امر است که برهمکنش بوزنها با توزیع تعمیم یافته، در بعضی از نواحی فیزیکی می‌تواند رفتار دافع داشته باشد. همچنین برای برخی از مقادیر گرینزندگی انحنای ترمودینامیکی و اگرا بوده، بنا بر این احتمال رخ دادن گذار فاز، و چگالش بوزن-انیشیون وجود دارد. برای گاز ایده‌آل کلاسیکی و فرمیونی با توزیع تعمیم یافته برهمکنش آماری ذرات دافعه است.

## Thermodynamic Geometry of generalized $\kappa$ distributed statistics

Mehri-Dehnavi, Hossein<sup>1</sup>; Mohammadzadeh, Hosein<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Babol Noshirvani University of Technology, Shariati Ave., Babol, 47148-71167, Iran,

<sup>2</sup> Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, P.O. Box 179, Ardabil, Iran

### Abstract

We consider an ideal gas system with generalized  $\kappa$ -dependent distribution function. Using a thermodynamic geometry approach, we derive the thermodynamic curvature of generalized  $\kappa$ -dependent distributed ideal classical, bosonic and fermionic gases. We show that the intrinsic statistical interaction of generalized bosons can be repulsive in some physical ranges. Also, the thermodynamic curvature of generalized boson gas is singular at a specified value of fugacity and therefore, a phase transition such as Bose-Einstein condensation can take place. For generalized fermi and classical gas, the intrinsic statistical interaction is repulsive.

PACS No. 05

ترمودینامیک هندسی مفاهیم چگالی ذرات، انرژی، تعداد کل ذرات، آنتروپی و دیگر کمیات ترمودینامیکی را به مشخصات هندسی مربوط به سیستم موردنظر مرتبط می‌سازد. در نقاطی که اسکار ریچی مربوط به فضای ترمودینامیکی منفی می‌شود سیستم مربوطه برهمکنش آماری دافعه یا فرمیونی خواهد داشت. همچنین با ثابت شدن این کمیت، سیستم فیزیکی برهمکنش آماری جاذب و یا بوزنی دارد. با واگرا شدن این کمیت هندسی، احتمال گذار فاز در سیستم وجود دارد. مثلاً انحنای ترمودینامیکی گاز بوزنی ایده‌آل در نقطه‌ی چگالش واگرا است[۲]. ترمودینامیک هندسی برای

### مقدمه

هندسه ترمودینامیکی توصیف دیگری برای حل مسائل ترمودینامیکی است. این رهیافت از ترمودینامیک، با استفاده از هندسه ریمانی و مینفلد، فرمولیندی جدیدی از علم ترمودینامیک ارائه می‌کند. جورج راپینیر با انتشار مقاله‌ای در سال ۱۹۷۹ تحت عنوان "ترمودینامیک : مدل هندسه ریمانی" برای اولین بار فرمولیندی منسجمی برای این رهیافت نوین از ترمودینامیک ارائه نمودند[۱]. به همین دلیل ترمودینامیک هندسی، ترمودینامیک راپینیر نیز نامیده می‌شود.

عنوان پارامترهای هندسی سیستم ترمودینامیکی در نظر گرفت [۱۶]. همچنین راپینیر، مشتقات مرتبه دوم آنتروپی به عنوان پارامترهای هندسی سیستم ترمودینامیکی در نظر گرفت [۱۷، ۱۸].

در این مقاله از فرمولبندی مرجع [۵] استفاده می‌کنیم، که متريک فضای هندسی مربوط به سیستم ترمودینامیکی به صورت

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^i \partial \beta^j}, \quad (5)$$

تعريف می‌شود که  $\beta^i = \frac{1}{k_B T} \frac{\partial S}{\partial X^i}$ . که  $\{X^i\}$  مجموعه‌ی پارامترهای موثر سیستم ترمودینامیکی مورد مطالعه هستند. برای سیستم مورد مطالعه‌ی ما  $(\beta^1, \beta^2) = (\beta, \gamma)$  که در آن  $z = e^{\beta\mu} = -\frac{\mu}{k_B T} = -\ln z$ , و به  $z = e^{\beta\mu}$  گریزندگی می‌گویند. بنابراین برای سیستم دو بعدی مورد مطالعه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial U}{\partial \beta}, \\ g_{\beta\gamma} &= g_{\gamma\beta} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta \partial \gamma} = -\frac{\partial U}{\partial \gamma}, \\ g_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \gamma^2} = -\frac{\partial N}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (6)$$

در سیستمی با فضای پارامترهای ترمودینامیکی دو بعدی انحنای ترمودینامیکی  $R$  برابر است با

$$R = -\frac{2 \begin{vmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \\ g_{\beta\beta,\beta} & g_{\beta\gamma,\beta} & g_{\gamma\gamma,\beta} \\ g_{\beta\beta,\gamma} & g_{\beta\gamma,\gamma} & g_{\gamma\gamma,\gamma} \end{vmatrix}}{\left| \begin{matrix} g_{\beta\beta} & g_{\beta\gamma} \\ g_{\beta\gamma} & g_{\gamma\gamma} \end{matrix} \right|^2}, \quad (7)$$

که در رابطه‌ی فوق از نمادگذاری  $g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \beta^k}$  استفاده نمودیم.

در ادامه سعی می‌کنیم تا رهیافت ترمودینامیک هندسی را برای توزیع تعییم یافته‌ی (۱) بررسی کنیم. درواقع با استفاده از روابط (۷-۳) برای این توزیع می‌توانیم مقدار انحنای هندسی سیستم ترمودینامیکی را بدست آوریم. نکته‌ی حائز اهمیت این است که مقدار انرژی حاصل از رابطه‌ی (۳) برای همه‌ی مقادیر  $\epsilon \geq 0$

مدل‌های مختلف فیزیکی شامل ذرات مکسول بولتزمن، فرمیونی و بوزونی در مراجع [۴، ۳] به کاربرده شد.

جانزک و مروگلا انحنای ترمودینامیکی را برای گازایده‌آل بوزونی و فرمیونی حساب کردند و گزارش دادند که علامت انحنای ترمودینامیکی همیشه برای این دو گاز ایده‌آل متفاوت است [۵].

اخیراً در مراجع [۶-۱۳] انحنای ترمودینامیکی برای آمارهای ناآبلی، آمارهای میانی از قبیل آمار کسری هالدن، آمار پلی-کروناکوس، آمار بوزونی و فرمیونی تسالیس و کاربردهای آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

نشان داده شده است که توزیع آماری مناسبی که می‌تواند مبانی نسبیت را نیز در بر بگیرد، توزیع تعییم یافته‌ی

$$n(\epsilon) = \frac{1}{\exp_\kappa(\beta(\epsilon - \mu)) + a}, \quad (1)$$

است [۱۴]. در این رابطه،  $\epsilon$  انرژی ذرات،  $\beta = \frac{1}{K_B T}$ ،  $\mu$  پتانسیل شیمیایی و پارامتر  $a$ ، برابر با یک برای فرمیونها و منفی یک برای بوزون‌ها و صفر برای ذرات کلاسیکی است. همچنین

$$\exp_\kappa(x) = (\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x)^{1/\kappa}, \quad (2)$$

که در حالت حدی داریم  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \exp_\kappa(x) = e^x$ .

در حد ترمودینامیکی، برای یک گاز ایده‌آل در یک جعبه‌ی  $D$  بعدی با حجم  $L^D$  با رابطه‌ی پاشندگی  $\sigma = \alpha p^\sigma$  معادل گاز کلاسیکی  $\sigma = 1$  معادل گاز فرانسیستی با استفاده از توزیع تعییم یافته‌ی نسبیتی داده شده در رابطه‌ی (۱)، انرژی کل و تعداد کل ذرات سیستم به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شود.

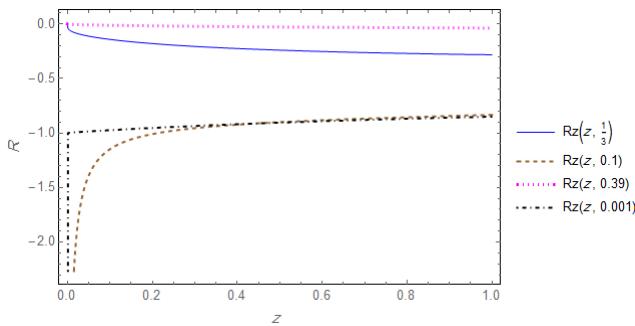
$$U = \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) \Omega(\epsilon) d\epsilon, \quad (3)$$

$$N = \int_0^\infty n(\epsilon) \Omega(\epsilon) d\epsilon, \quad (4)$$

که در آن  $\Omega(\epsilon) = \frac{A^D}{\Gamma(D/2)} \epsilon^{\frac{D-1}{2}}$  چگالی حالت‌ها می‌باشد. همچنین برای سادگی محاسبات ثابت  $A = L \sqrt{\pi} / (h \alpha^{\frac{1}{\sigma}})$  را برابر با یک فرض می‌کنیم.

### ترمودانامیک هندسی و آمار نسبیتی

سابقه‌ی ارائه‌ی ساختار هندسی برای سیستم ترمودینامیکی به گیبس بر می‌گردد [۱۵]. وینهولد مشتقات مرتبه دوم انرژی را به

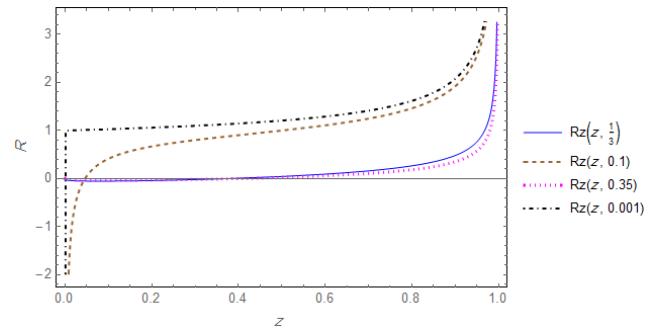


شکل ۲ : انحنای ترمودینامیکی برای سیستم فرمیونی با  $D=3$ ،  $\sigma=2$  و  $\kappa$  منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$ ، منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$ ، منحنی نقطه-خط چین مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشدند.

شکل ۲ انحنای ترمودینامیکی برای گاز ایدهآل فرمیونی،  $a=+1$  را نشان می دهد. همانطور که در شکل مشاهده می شود، نمودار خط- نقطه، مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد. می دانیم حد  $\kappa \rightarrow 0$  نشان دهندهی آمار متداول هست، و این نمودار نشان می دهد این منحنی نیز به رفتار فرمیونها با توزیع متداول شبیه است، با این تفاوت که مقدار انحنا، برای فرمیونهای متداول برای مقادیر کوچک  $z$  به سمت عدد منفی یک میل می کند [۲]. پس برای فرمیونهای متداول و همچنین فرمیونها با توزیع تعمیم یافته‌ی (۱) برهمکنش آماری یکسان و دافعه می باشد. همچنین، در شکل ۲ منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$  منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$ ، می باشدند. همه این نمودارها برای سیستم سه بعدی  $D=3$  و برای  $\sigma=2$ ، رسم شده‌اند.

شکل ۳ انحنای ترمودینامیکی برای گاز ایدهآل کلاسیک،  $a=0$ ، با توزیع تعمیم یافته‌ی (۱) را نشان می دهد. همانطور که در شکل مشاهده می شود، نمودار خط- نقطه، مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد. در واقع حد  $\kappa \rightarrow 0$  نشان دهندهی ذرات کلاسیکی در آمار متداول است. برای چنین ذراتی، انحنای ترمودینامیکی همواره برابر با صفر است [۲]. نمودار خط- نقطه در تمامی مقادیر غیر صفر  $z$  به ذرات کلاسیکی با آمار متداول شبیه است. همچنین، در شکل ۳ منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$  منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$ ، می باشدند. همه این نمودارها برای سیستم سه بعدی  $D=3$  و برای  $\sigma=2$ ، رسم شده‌اند.

منتهای نیست و برای اجتناب از واگرایی ماورای بنفس انرژی باید خود را به مقادیر  $\frac{\sigma}{\sigma+D} < \kappa \leq 0$  محدود کنیم.



شکل ۱ : انحنای ترمودینامیکی برای سیستم بوزنی با  $D=3$ ،  $\sigma=2$  و  $\kappa$  منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$ ، منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$ ، منحنی نقطه-خط چین مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشدند.

انحنای ترمودینامیکی برای حالت بوزنی،  $a=-1$ ، شکل ۱ رسم شده است. این نمودارها برای سیستم سه بعدی  $D=3$  و برای حالت  $\sigma=2$ ، رسم شده‌اند. همانطور که در این شکل مشاهده می شود، نمودار خط- نقطه، بالاترین نمودار، مربوط به  $\kappa=0.001$  می باشد، می دانیم حد  $\kappa \rightarrow 0$  که نشان دهندهی آمار متداول هست، رفتاری شبیه به این منحنی دارد، با این تفاوت که مقدار انحنا، برای مقادیر کوچک  $z$  به سمت عدد یک میل می کند [۲]. به عبارتی برای بوزونها با آمار متداول همیشه انحنای مثبت یا رفتار جاذبه خواهیم داشت، ولی در آمار تعمیم یافته‌ی مورد مطالعه، حتی برای مقادیر کوچک پارامتر  $\kappa$  بازه‌هایی وجود دارد که سیستم بوزنی دارای رفتار دافعه و یا فرمیونی است. برای بقیه مقادیر مجاز پارامتر  $\kappa$  نیز تغییر علامت انحنا مشاهده می شود. در شکل ۱ منحنی پر مربوط به  $\kappa=1/3$  منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.35$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.1$ ، می باشدند.

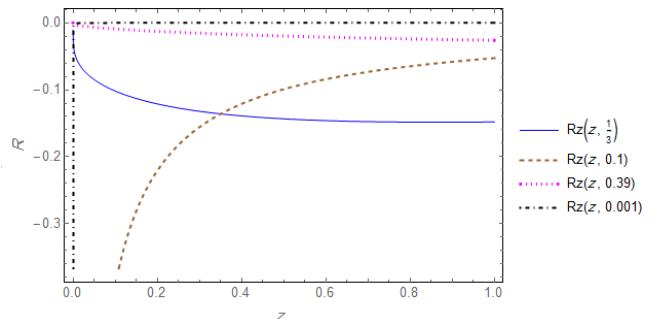
لازم به ذکر است که همه ای حالت‌های شکل ۲ در حد  $z \rightarrow 0$  مقدار انحنا واگرا می شود که می تواند مانند توزیع متداول دلیلی بر چگالش بوز-انتشیف باشد [۲].

مهمی باشند. توزیع تعمیم یافته کاپا در توصیف فیزیک پلاسمای بطور ویژه پلاسمای فضایی کاربردهای فراوانی یافته است. برخی بررسی ها موید توزیع تعمیم یافته کاپا در این نوع پلاسما است [۱۹, ۲۰].

بدیهی است که بررسی خواص آماری چنین توزیع هایی، بخصوص پدیده چگالش بوز اینیشتین، در این سیستم ها، راه را برای ارایه مدل های موثر در توصیف سیستم های مختلف فیزیکی که با مدل های متعارف ناسازگاری هایی دارند باز می کند.

## مرجع ها

- [۱] G. Ruppeiner; "Thermodynamics: A Riemannian geometric model"; *Phys. Rev. A* **20**, 1608 (1979)
- [۲] H. Mohammadzadeh and F. Adli and S. Nouri; "Perturbative, Thermodynamic Geometry of Nonextensive Ideal Classical, Bose and Fermi Gases"; *Phys. Rev. E* **94**, 062118 (2016)
- [۳] R. B. Laughlin; "Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations"; *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983)
- [۴] F. D. M. Haldane; "Fractional statistics in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle"; *Phys. Rev. Lett.* **67**, 937 (1991)
- [۵] H. Janyszek and R. Mrugaa; "Riemannian geometry and stability of ideal quantum gases"; *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 467 (1990)
- [۶] Z. Talaei, B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Condensation and critical exponents of an ideal non-Abelian gas"; *The European Physical Journal Plus* **132**, 463 (2017)
- [۷] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Ruppeiner geometry of anyon gas"; *Phys. Rev. E* **78**, 021127 (2008)
- [۸] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Nonperturbative thermodynamic geometry of anyon gas"; *Phys. Rev. E* **80**, 011132 (2009)
- [۹] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Thermodynamic geometry of fractional statistics"; *Phys. Rev. E* **82**, 031137 (2010)
- [۱۰] B. Mirza and H. Mohammadzadeh, "Condensation of an ideal gas obeying non-Abelian statistic"; *Phys. Rev. E* **84**, 031114 (2011)
- [۱۱] B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Thermodynamic geometry of deformed bosons and fermions"; *J. Phys. A: Math and Theor.* **44**, 475003 (2011)
- [۱۲] S. Zare, Z. Raissi, H. Mohammadzadeh and B. Mirza; "Condensation of an ideal gas with intermediate statistics on the horizon"; *Euro. Phys. J. C* **72**, 2152 (2012)
- [۱۳] Z. Ebadi, B. Mirza and H. Mohammadzadeh; "Infinite statistics condensates as a model of dark matter"; *JCAP* **11**, 057 (2013)
- [۱۴] G. Kaniadakis; "Statistical mechanics in the context of special relativity." *Physical Review E* **66**, 056125 (2002).
- [۱۵] L. Tisza; *Generalized Thermodynamics*; 1966 (Cambridge, MA: MIT)
- [۱۶] F. Weinhold; "Metric geometry of equilibrium thermodynamics"; *J. Chem. Phys.* **63**, 2479 (1975)
- [۱۷] G. Ruppeiner; "Thermodynamic curvature measures interactions"; *Am. J. Phys.* **78**, 1170 (2010)
- [۱۸] G. Ruppeiner; "Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory"; *Rev. Mod. Phys.* **67**, 605 (1995)
- [۱۹] M. P. Leubner "Fundamental issues on kappa-distributions in space plasmas and interplanetary proton distributions." *Physics of Plasmas* **11**, 1308 (2004)
- [۲۰] L. A. Gougam, and M. Tribeche. "Electron-acoustic waves in a plasma with a  $\kappa$ -deformed Kaniadakis electron distribution." *Physics of Plasmas* **23**, 014501 (2016)



شکل ۳ : انحنای ترمودینامیکی برای سیستم کلاسیکی با توزیع ماکسول بولزمن،  $D=3$ ،  $a=0$ ،  $\sigma=2$ ،  $\kappa=1/3$  و  $\kappa=0.1$ ، منحنی خط چین به  $\kappa=0.39$ ، منحنی نقطه چین مربوط به  $\kappa=0.001$  باشد.

نکته‌ی جالب توجه اینکه در گاز کلاسیکی با توزیع تعمیم یافته، برای تمامی مقادیر مجاز و غیر صفر پارامتر  $\kappa$ ، مقدار انحنا منفی است، و یا به عبارتی ذرات کلاسیکی در این توزیع برهمکنش آماری دافع یا فرمیون‌گونه دارند.

## بحث و نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه سیستم گاز ایده‌آل باتابع توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  پرداختیم. با استفاده از رهیافت ترمودینامیک هندسی انحنای ترمودینامیکی توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  را برای گازه ایده‌آل با برهمکنش کلاسیکی، بوزونی و فرمیونی را محاسبه نمودیم. همانطور که در شکل ۱ مشاهده نمودیم برهمکنش بوزنها با توزیع تعمیم یافته، در بعضی از نواحی فیزیکی مانند بوزن‌های متداول رفتار جاذبه و در بعضی از نواحی رفتار فرمیون-مانند، یا دافعه دارند. همچنین برای مقادیر گریزندگی نزدیک به یک انحنای ترمودینامیکی واگرا می‌شود. بنابراین احتمال رخ دادن گذار فاز و چگالش بوز اینیشتین وجود دارد. همانطور که در شکلهای ۲ و ۳ مشاهده می‌شود، برای گاز ایده‌آل کلاسیکی و فرمیونی با توزیع تعمیم یافته، برهمکنش ذرات جاذبه می‌باشد. همچنین رفتار انحنای ترمودینامیکی تمامی رژیم‌های گاز ایده‌آل با توزیع تعمیم یافته‌ی وابسته به پارامتر  $\kappa$  در حد  $\kappa \rightarrow 0$  منجر به رفتار مشابه گاز ایده‌آل متداول می‌باشد.

بررسی ترمودینامیک هندسی آمارهای رایج مدت‌هاست که انجام یافته است. اما آمارهای تعمیم یافته می‌توانند موضوع قابل تحقیق

# اثر افت و خیزهای بار بر امواج یون صوتی غباری در پلاسمای چند مولفه‌ای با توزیع ماکسولی

موسوی سمیه

<sup>۱</sup>دانشکده فیزیک شیمی دانشگاه الزهرا، خیابان شیخ بهایی شمالی میان شیخ بهایی، خیابان دموک

## چکیده

در این مقاله در چارچوب نظریه جنبشی روابط پاشندگی امواج طولی در پلاسمای همگن غیر مغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تاثیر افت و خیز بار و حضور یون منفی بر انتشار امواج یون صوتی غباری بررسی شد. در بررسی اثر افت و خیزهای بار توزیع ذرات غبار و یون منفی سنگین ساکن و ماکسولی است و توزیع الکترون‌ها و یون‌ها نیز به صورت ماکسولی در نظر گرفته می‌شود. حضور افت و خیز بار ناشی از برخورددهای ناکشسان و همچنین ذرات پر انرژی باعث افزایش رشد در امواج شد.

## The charge fluctuation effects on dust ion acoustic waves in multi-component plasma with Maxwellian distribution

Mousavi, Somayeh

<sup>۱</sup>Department of Physics, University of Alzahra, Tehran

## Abstract

In the frame of kinetic theory we investigated the dispersion relation of dust ion acoustic waves in unmagnatized homogeneous dusty plasma. In fluence of charge fluctuation and negative ions on the propagation of waves are investigated. The landau damping rate and growing rate have been found to be increased as the fraction of supratermal particals and charge fluctuation are increased on waves.

گرفته و اثرات ذرات بر میرایی و رشد مطالعه شده است و چگونگی واپستگی نرخ میرایی و رشد به نسبت چگالی‌ها و جرم‌های یون منفی، یون مثبت و عدد موج و سایر پارامترهای پلاسمما تا مرتبه اول رشد و میرایی نشان داده شده است. در تمامی مراحل تحقیق فرض کردیم که کاپای یون‌های مثبت و منفی و نیز الکترون‌ها مساوی‌اند، فرض کردیم بسامد گیر افتادن ذرات پلاسمما توسط ذرات غبار کوچک باشد و از مقدار میانگین آن استفاده کردیم [۳] ولی زمان بررسی سیستم را کوچک در نظر گرفتیم، زمان به تعادل رسیدن بار غبار بسیار طولانی‌تر از زمان‌های استفاده شده در این تحقیق است،  $G$  را کوچک در نظر می‌گیریم [۱] به طوری که در روابط توانستیم از آنان صرف‌نظر کنیم. تاثیر افت و خیز بار و حضور یون منفی بر انتشار امواج بررسی شد. و همچنین اثر ذرات پر انرژی بر میرایی امواج مذکور بررسی شد.

## مقدمه

پلاسما در اصل گازی است یونیزه، شامل فوتون‌ها، الکترون‌ها، یون‌های مثبت و منفی، اتم‌ها، رادیکال‌های آزاد و ملکول‌های برانگیخته و غیر برانگیخته که دائما در حال برهمنکنش با یکدیگر می‌باشند. الکترون‌ها و فوتون‌ها معمولاً به عنوان گونه‌های سیک و سایر مولفه‌های پلاسما تحت عنوان گونه‌های سنگین در نظر گرفته می‌شوند. در چارچوب نظریه جنبشی روابط پاشندگی امواج طولی در پلاسمای همگن غیر مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادیم. در بررسی افت و خیز بار، برخورد بین ذرات غبار و ذرات پلاسمایی را ناکشسان در نظر گرفتیم. برای الکترون‌ها و یون‌ها (مثبت و منفی) توزیع ماکسولی و کاپاییو برای ذرات غبار و یون منفی سنگین توزیع ماکسولی و ساکن در حالت تعادل فرض کردیم [۲,۴]. با محاسبه دیالکتریک از طریق حل معادله ولاسوف و بولتزمن، معادلات اساسی رابطه پاشندگی در حالت انتشار طولی مورد بررسی قرار

$$\chi_{\alpha}^{\sigma} = 2i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\omega_{pa}} \frac{K!}{(K-\frac{3}{2})!} \sum_{\alpha=+i,-i,e,M} \frac{1}{(k\lambda_{Da})^3} \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \left( 1 + \frac{1}{K(k\lambda_{Da})^2} \frac{\omega^2}{\omega_{pa}^2} \right)^{-K-1} \\ + \sum_{\alpha=+i,-i,e,M} 2i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\omega_{pa}} \frac{1}{(k\lambda_{Da})^3} \quad (8)$$

$$\zeta_K = \frac{\omega}{kv_{K\alpha}}, \zeta = \frac{\omega}{kv_{\alpha}} \quad (9)$$

بخش اول رابطه (۸) مربوط به ذرات با توزیع کاپا است و بخش

دوم این رابطه مربوط به ذرات با توزیع ماکسولی است. به کمک

رابطه (۱۰) نرخ رشد و میرایی را بدست می‌آوریم.

$$\gamma = -\frac{\epsilon^{im}(\omega_r, k)}{\left. \frac{\partial \epsilon^{re}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r}} \quad (10)$$

### امواج یون صوتی

انتشار امواج غبار یون-صوت همچون انتشار موج صوتی یا فشاری به صورت طولی و صوتی صورت می‌گیرد. امواج غبار یون صوت که مشابه امواج یون صوت در پلاسمای معمولی‌اند و فرکانسی از مرتبه‌ی فرکانس یون‌ها دارند (KHZ) با این تفاوت که رابطه‌ی پاشندگی آن‌ها به واسطه‌ی حضور ذرات غبار تغییر پیدا کرده است. اگر برخوردی انجام نشود امواج صوتی معمولی رخ نمی‌دهند. با این حال یونها باز هم به دلیل بارشان می‌توانند ارتعاشات را به یکدیگر منتقل کنند، و امواج آکوستیکی از طریق یک میدان الکتریکی واسطه می‌توانند حادث شوند.

همه ذرات تشکیل دهنده‌ی سیستم (الکترون-یون (مثبت و منفی) ذرات غبار و یون‌های منفی سنگین) را توزیع ماکسولی در نظر بگیریم. به جای یون‌های منفی، ذرات غبار در نظر می‌گیریم، بدست

می‌آوریم:

$$\frac{\gamma}{\omega_{pi}} = -2\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i}{\rho_d} \right)^{\frac{1}{2}} \eta_{ie} \left( \frac{(k\lambda_{De})}{(2+(k\lambda_{De})^2) \left( 1 + \left( \frac{\rho_i}{\rho_d} \right) \eta_{di}^2 \right) - 2 \left( \frac{\rho_e}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} \eta_{ie} (2+(k\lambda_{De})^2)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \left( \frac{\rho_i}{\rho_d} \right) \eta_{di}^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (11)$$

### روابط پاشندگی

در بررسی افت و خیز بار، برخورد بین ذرات غبار و ذرات پلاسما را ناکشسان در نظر گرفتیم.

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{m_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_P f_{\alpha} = \sum_{\beta} \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}^{\alpha\beta} \quad (1)$$

$\vec{F}$  نیروی وارد بر ذرات پلاسما است. جمله برخوردی را به فرم زیر تعریف می‌کنیم: [۱]

$$\left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}^{\alpha\beta} = - \int d\mathbf{q}_{\beta} \sigma_{\alpha}^{\beta} V (f_{\beta} f_{\alpha} - f_{\beta o} f_{\alpha o}) \quad (2)$$

زاویه برخورد بین جهت افت و خیز بار و حرکت ذره سنگین را درجه می‌گیریم (ذرات غبار به علت جرم زیادی که دارند تاثیر چندانی در روابط نداشتند) و به کمک روابط تعریف شده به ضریب

گذردگی طولی مورد نظر در این تحقیق می‌رسیم: [۱]

$$\epsilon^{lo} = 1 + \frac{4\pi}{k^2} \sum_a \frac{q_a^2}{m_a} \int d^3 p \frac{1}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V} + iV_{ao}^{\beta}(V)} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{ao}}{\partial V} \left( 1 + \frac{iV_{ao}^{\beta}(V)}{\omega + iV_{ch}} \frac{1 + \Gamma}{1 + G} \right) \quad (3)$$

$$\epsilon^{lo} = 1 + \chi_{\alpha}^{\sigma} + \chi_{\alpha} \quad (4)$$

$\chi_{\alpha}$  ضریب تاثیر پذیری وقتی افت و خیز بار در پلاسما وجود ندارد،  $\chi_{\alpha}^{\sigma}$  ضریب تاثیر پذیری وقتی افت و خیز بار در پلاسما وجود دارد.تابع توزیع الکترون‌ها و یون‌ها را توزیع کاپایی و ماکسولی و برای ذرات غبار و یون منفی سنگین ماکسولی و ساکن در نظر گرفتیم: [۲]

$$X_{\alpha} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_a \frac{q_a^2}{m_a} \int d^3 p \frac{1}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{ao}}{\partial V} \quad (5)$$

به کمک روابط (۶) و (۷) مطلوب را بدست می‌آوریم: [۲, ۶]

$$\left\{ Z(\zeta_{\alpha}) = \frac{1}{\zeta_{\alpha}} - \frac{1}{2\zeta_{\alpha}^3} - \frac{3}{4\zeta_{\alpha}^5}, |\zeta_{\alpha}| \rightarrow \infty \right. \quad (6)$$

$$\left. Z(\zeta_{\alpha}) = i\sqrt{\pi} e^{-\zeta_{\alpha}^2} - 2\zeta_{\alpha} + \frac{4}{3}\zeta_{\alpha}^3, |\zeta_{\alpha}| \rightarrow 0 \right. \quad (7)$$

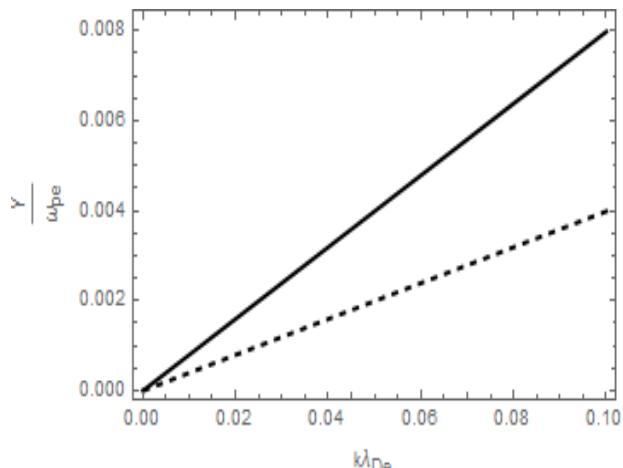
$$\left\{ Z_k(\zeta_k) = \frac{i k! k^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{(k - \frac{3}{2})!} \frac{1}{\zeta_k^2 (k+1)} \left[ 1 - \frac{k(k+1)}{\zeta_k^2} + \dots \right] - \frac{(2k-1)}{2k} \frac{1}{\zeta_k} \left[ 1 + \frac{k}{2k-1} \frac{1}{\zeta_k^2} + \frac{3k^2}{(2k-1)(2k-3)} \frac{1}{\zeta_k^4} + \dots \right], |\zeta_k| \rightarrow \infty \right. \quad (8)$$

$$\left. Z_k(\zeta_k) = \frac{i k! \sqrt{\pi}}{k^{\frac{3}{2}} (k - \frac{3}{2})!} \left[ 1 - \frac{k+1}{k} \zeta_k^2 + \dots \right] - \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k^2} \zeta_k \left[ 1 - \frac{2k+3}{3k} \zeta_k^2 + \dots \right], |\zeta_k| \rightarrow 0 \right. \quad (9)$$

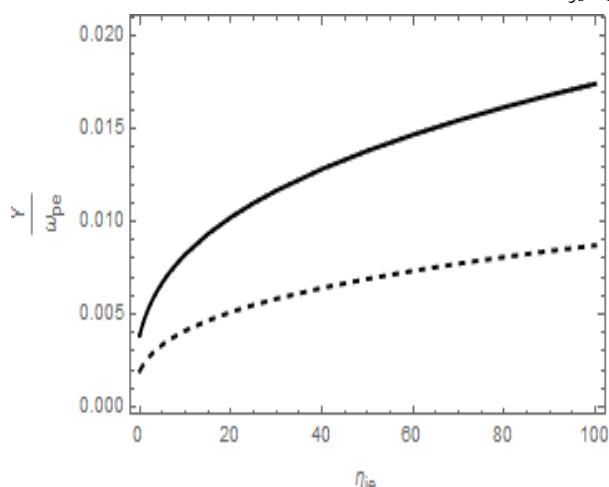
در امواج یون صوتی غباری با توزیع ماکسولی افزایش در نرخ رشد بر حسب عدد موج نرمالیزه شده را مشاهده کردیم و با حضور افت و خیز بار غبار این روند افزایش، با شبیه بیشتری اتفاق می‌افتد. افزایش در نرخ رشد بر حسب دیگر پارامترها را مشاهده کردیم، می‌توان گفت که افت و خیز بار غبار تاثیر بسزایی در افزایش نرخ رشد سیستم مورد بررسی در این مقاله را داشت.

## منابع:

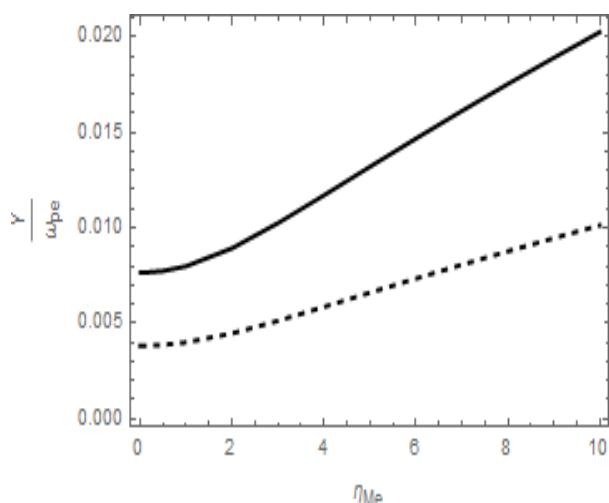
- [۱]: Vladimirov, *Phys. Plasmas* 1, ۲۷۶۲ (۱۹۹۴)
- [۲]: D.Summers and R.M.Thoren, *phys.Fluids* B۳, ۱۸۳۵ (۱۹۹۱)
- [۳]: M.C.de Juli and R.S.Schneider, L.F.Ziebell, and V.Jatenco-Pereira, *Phys. Plasmas* ۱۲, ۰۵۲۱۰۹ (۲۰۰۵)
- [۴]: A.Hasegawa, K. Mima, M. Duong-van, *Phys. Lett.* ۵۸ (۱۹۸۵) ۲۶۰۸
- [۵]: P.K.Shukla and A.A Mamum, "Introduction to Dusty Plasma Physics," Institute of Physics Publishing, Bristol. (۲۰۰۲)
- [۶]: Myoung-Jae Lee, " Effects of suprathermal particles on the dust ion-acoustic waves in a complex plasma, " *Sience Direct*. (۲۰۱۰)
- [۷]: V.Baumjohann and R.Treumann, "Basic space plasma physics," Imperial College Press (September ۱, ۱۹۹۶)
- [۸]: Francis F.Chen, "Basic space plasma physics," Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion ۲ nd ed, c۱۹۸۴,
- [۹]: A.F.Alexandrov, L.S.Bogdankevich, A.A.Rukhadze "Principles of plasma Electrodynamics," Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York



شکل(۱): نرخ رشد بر حسب عدد موج نرمالیزه شده، بدون افت و خیز(خط-خط)



شکل(۲): نرخ رشد بر حسب پارامتر پلاسمما، بدون افت و خیز(خط-خط)



شکل(۳): نرخ رشد بر حسب پارامتر پلاسمما، بدون افت و خیز(خط-خط)

نتیجه گیری:

# بررسی اثر افت و خیزهای بار، یون‌ها و ذرات پر انرژی بر امواج یون صوتی در پلاسمای غباری

سمیه موسوی

<sup>۱</sup>دانشگاه فیزیک شیمی دانشگاه الزهرا، خیابان شیخ بهایی شمالی میدان شیخ بهایی، خیابان دهونک

## چکیده

در این مقاله در چارچوب نظریه جنبشی روابط پاشندگی امواج طولی در پلاسمای همگن غیر مغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تاثیر افت و خیز بار و حضور یون منفی بر انتشار امواج یون صوتی غباری بررسی می‌شود. در بررسی اثر افت و خیزهای بار یون منفی ماکسولی است و توزیع الکترون‌ها و یون‌ها به صورت کاپاپی در نظر گرفته می‌شود. حضور افت و خیز بار ناشی از برخورددهای ناکشسان و همچنین ذرات پر انرژی باعث افزایش میرایی در امواج شد.

## The ions, suprathermal particels and charge fluctuation effects on ion acoustic waves in dusty plasma

Mousavi, Somayeh

<sup>۱</sup>Department of Physics, University of Alzahra, Tehran

## Abstract

In the frame of kinetic theory we investigated the dispersion relation of ion acoustic waves in unmagnetized homogeneous dusty plasma. In fluence of charge fluctuation and negative ions on the propagation of waves are investigated. The landau damping rate have been found to be increased as the fraction of suprathermal particals and charge fluctuation are increased on waves.

## مقدمه

پاشندگی امواج طولی در پلاسمای همگن غیر مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادیم. در بررسی افت و خیز بار، برخورد بین ذرات غبار و ذرات پلاسمایی را ناکشسان در نظر گرفتیم. برای الکترون‌ها و یون‌ها (ثبت و منفی) توزیع ماکسولی و کاپاپی و برای ذرات غبار و یون منفی سنگین توزیع ماکسولی و دیراکی (ساکن) در حالت تعادل فرض کردیم. با محاسبه دیالکتریک از طریق حل معادله ولسوخ و بولتزمن، معادلات اساسی رابطه پاشندگی در حالت انتشار طولی مورد بررسی قرار گرفته و اثرات ذرات بر میرایی و رشد مطالعه شده است و چگونگی واپستگی نرخ میرایی و رشد به نسبت چگالی‌ها و جرم‌های یون منفی، یون ثابت و عدد موج و سایر پارامترهای پلاسما تا مرتبه اول رشد و میرایی نشان داده شده است. در تمامی مراحل تحقیق فرض کردیم که

پلاسما در اصل گازی است یونیزه، شامل فوتون‌ها، الکترون‌ها، یون‌های ثابت و منفی، اتم‌ها، رادیکال‌های آزاد و ملکول‌های برانگیخته و غیر برانگیخته که دائما در حال برهمکنش با یکدیگر می‌باشند. اگر محیط کم یونیده شده باشد پلاسماهای غباری شامل یون، الکترون، ذرات غبار و همچنین ذرات خشی خواهد بود. بسیاری از پلاسماهای غباری فضایی، مزوسر و فتوسر خورشیدی علاوه بر الکترون، یون ثابت و غبار شامل مولفه‌ای از یون‌های منفی نیز هستند. جنس ذرات غبار در نواحی مختلف متفاوت است. به عنوان نمونه در مزوسر زمین اغلب از جنس یخ و یا در اگزو زرکهای فضایی به صورت گرده‌های اکسید آلومینیوم است. پلاسماهای غیر خشی قوی اصولا در آزمایشات لابرаторی رخ داده است. در چارچوب نظریه جنبشی روابط

$$\varepsilon^{lo} = 1 + \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} + \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^{\sigma} \quad (4)$$

زیرا ضریب تاثیر پذیری وقتی افت و خیز بار در پلاسمای وجود ندارد،  $\chi^{\sigma}$  ضریب تاثیر پذیری وقتی افت و خیز بار در پلاسمای وجود دارد.تابع توزیع الکترون‌ها و یون‌ها را توزیع کاپایی و ماسکولی و برای ذرات غبار و یون منفی سنگین ماسکولی و ساکن در نظر گرفتیم:

$$X_{\alpha} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3 p \frac{1}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha o}}{\partial \vec{v}} \quad (5)$$

به کمک روابط (۶) و (۷) ضرایب تاثیر پذیری مطلوب را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} Z(\zeta_{\alpha}) = \frac{1}{\zeta_{\alpha}} - \frac{1}{2\zeta_{\alpha}^3} - \frac{3}{4\zeta_{\alpha}^5} \dots, |\zeta_{\alpha}| \rightarrow \infty \\ Z(\zeta_{\alpha}) = i\sqrt{\pi} e^{-\zeta_{\alpha}^2} - 2\zeta_{\alpha} + \frac{4}{3}\zeta_{\alpha}^3 + \dots, |\zeta_{\alpha}| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} Z_k(\zeta_k) = \frac{ik! k^{k-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{(k-\frac{3}{2})!} \frac{1}{\zeta_k^2(k+1)} \left[ 1 - \frac{k(k+1)}{\zeta_k^2} + \dots \right] - \\ - \frac{(2k-1)}{2k} \frac{1}{\zeta_k} \left[ 1 + \frac{k}{2k-1} \frac{1}{\zeta_k^2} + \frac{3k^2}{(2k-1)(2k-3)} \frac{1}{\zeta_k^4} + \dots \right], |\zeta_k| \rightarrow \infty \\ Z_k(\zeta_k) = \frac{ik! \sqrt{\pi}}{k^{\frac{3}{2}} (k-\frac{3}{2})!} \left[ 1 - \frac{k+1}{k} \zeta_k^2 + \dots \right] - \\ - \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k^2} \zeta_k \left[ 1 - \frac{2k+3}{3k} \zeta_k^2 + \dots \right], |\zeta_k| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha}^{\sigma} &= -2i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\omega_{p\alpha}} \frac{K!}{(K-\frac{3}{2})!} \sum_{\alpha=+i,-i,e,M} \frac{1}{(k\lambda_{D\alpha})^3} \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \left( 1 + \frac{1}{K(k\lambda_{D\alpha})^2} \frac{\omega^2}{\omega_{p\alpha}^2} \right)^{-K-1} \\ &- \sum_{\alpha=+i,-i,e,M} 2i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\omega_{p\alpha}} \frac{1}{(k\lambda_{D\alpha})^3} \end{aligned} \quad (8)$$

کاپایی یون‌های مثبت و منفی و نیز الکترون‌ها مساوی‌اند، فرض کردیم بسامد گیر افتادن ذرات پلاسمای توسط ذرات غبار کوچک باشد و از مقدار میانگین آن استفاده کردیم ولی زمان بررسی سیستم را کوچک در نظر گرفتیم، زمان به تعادل رسیدن بار غبار بسیار طولانی‌تر از زمان‌های استفاده شده در این تحقیق است،  $G, \Gamma$  را کوچک در نظر می‌گیریم به طوری که در روابط توانستیم از آنان صرف‌نظر کنیم. تاثیر افت و خیز بار و حضور یون منفی بر انتشار امواج بررسی شد. در بررسی اثر افت و خیز بار توزیع ذرات غبار و یون منفی سنگین را ماسکولی و همچنین در حالتی که ساکن باشند در نظر گرفتیم و نیز توزیع الکترون‌ها و یون‌ها به دو حالت ماسکولی و کاپایی در سیستم‌ها در نظر گرفته شده است. همچنین تاثیر حضور ذرات پر انرژی بر میرایی امواج مذکور بررسی شد.

### روابط پاشندگی

در بررسی افت و خیز بار، برخورد بین ذرات غبار و ذرات پلاسمای ناکشسان در نظر گرفتیم.

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{m_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_P f_{\alpha} = \sum_{\beta} \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col} \quad (1)$$

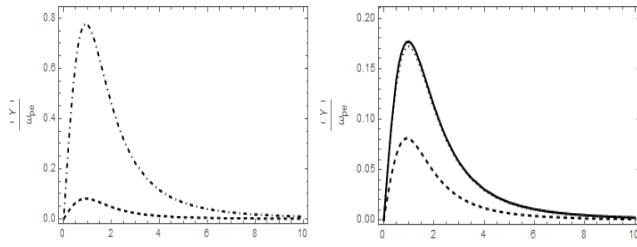
$\vec{F}$  نیروی وارد بر ذرات پلاسمای ناکشسان است. جمله برخوردی را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col} = - \int dq_d \sigma_{\alpha}^d V (f_d f_{\alpha} - f_{do} f_{\alpha o}) \quad (2)$$

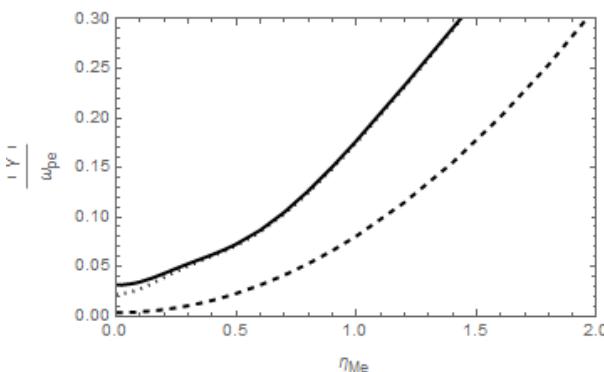
زاویه برخورد بین جهت افت و خیز بار و حرکت ذره سنگین را ۹۰ درجه می‌گیریم (ذرات غبار به علت جرم زیادی که دارند تاثیر چندانی در روابط نداشته‌اند) و به کمک روابط تعریف شده به ضریب گذردهی طولی مورد نظر در این تحقیق می‌رسیم:

$$\varepsilon^{lo} = 1 + \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3 p \frac{1}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V} + iv_{\alpha o}^d(V)} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha o}}{\partial \vec{v}} \left( 1 + \frac{iv_{\alpha o}^d(V)}{\omega + iv_{ch}} \frac{1 + \Gamma}{1 + G} \right) \quad (3)$$

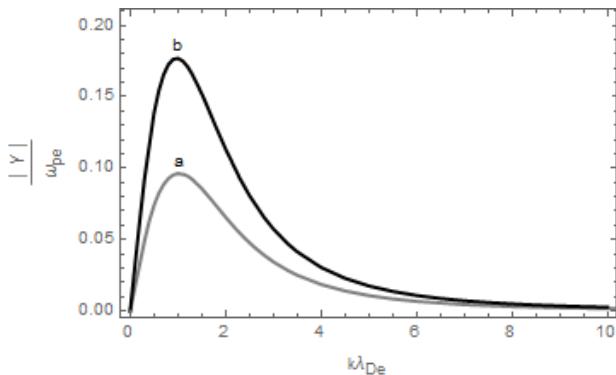
$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\omega_{pl}} = & \frac{\omega}{kv_{K\alpha}}, \zeta = \frac{\omega}{kv_\alpha} \quad (9) \\ & \text{بخش اول رابطه (8) مربوط به ذرات با توزیع کاپا است و بخش} \\ & \text{دوم این روابط مربوط به ذرات با توزیع ماکسولی است. به کمک} \\ & \text{رابطه (9) نرخ رشد و میرایی را بدست می‌آوریم.} \\ & \gamma = -\frac{\partial \epsilon^{im}(\omega_r, k)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r} \quad (10) \\ & \text{روابط امواج یون صوتی} \\ & \text{انتشار امواج غبار یون-صوت همچون انتشار موج صوتی یا} \\ & \text{فشاری به صورت طولی و صوتی صورت می‌گیرد. امواج غبار} \\ & \text{یون صوت که مشابه امواج یون صوت در پلاسمای معمولی‌اند و} \\ & \text{فرکانسی از مرتبه فرکانس یون‌ها دارند (KHZ) با این تفاوت} \\ & \text{که رابطه‌ی پاشندگی آن‌ها به واسطه‌ی حضور ذرات غبار تغییر} \\ & \text{پیدا کرده است. اگر برخوردی انجام نشود امواج صوتی معمولی} \\ & \text{رخ نمی‌دهند. با این حال یونها باز هم به دلیل بارشان می‌توانند} \\ & \text{ارتعاشات را به یکدیگر منتقل کنند، و امواج آکوستیکی از طریق} \\ & \text{یک میدان الکتریکی واسطه می‌توانند حادث شوند. وقتی تاثیر} \\ & \text{الکترون‌ها و یون‌ها (مثبت و منفی) با توزیع کاپا بر امواج یون} \\ & \text{صوتی و یون‌های منفی سنگین را با توزیع ماکسولی را در} \\ & \text{پلاسمای غباری بررسی کردیم به نتایج زیر رسیدیم.} \end{aligned}$$



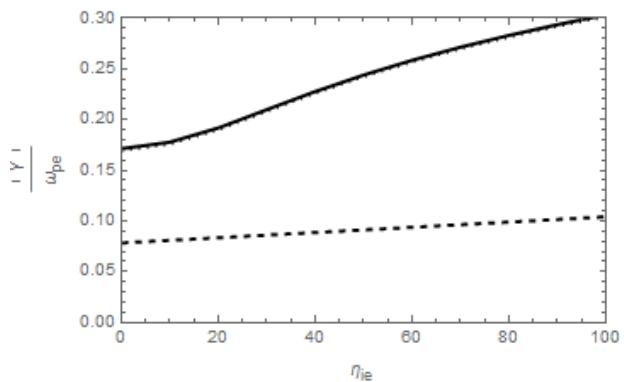
شکل(۱): نرخ میرایی لانداؤ بر حسب عدد موج نرمالیزه شده (خط-خط) و بدون یون منفی ( نقطه- نقطه). مقایسه میرایی لانداؤ دو یون مثبت پوزیترون و پروتون (شکل چپ)



شکل(۲): نرخ میرایی لانداؤ بر حسب پارامتر یون منفی سنگین (خط-خط) و بدون یون منفی ( نقطه- نقطه).



شکل(۵): نرخ میرایی بر حسب عدد موج نرمالیزه شده وقتی سرعت الکترون بالاست (a).

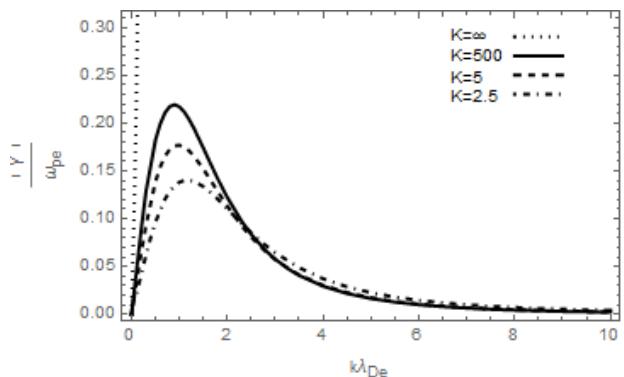


شکل(۳): نرخ میرایی لاندauer بر حسب چگالی عددی یون (مثبت) به الکترون (خط-خط).

یون منفی کوچک تاثیر چندانی در تغییر میرایی بر حسب چگالی عددی یون (مثبت) به الکترون نداشت ولی برخورد ذرات باردار با یون‌های منفی سنگین تاثیر بسزایی در افزایش میرایی داشت.

### منابع:

- [۱]: Vladimirov, *Phys. Plasmas* ۱, ۲۷۶۲ (۱۹۹۴)
- [۲]: D.Summers and R.M.Thoren, *phys.Fluids* B۳, ۱۸۳۰ (۱۹۹۱)
- [۳]: M.C.de Juli and R.S.Schneider, L.F.Ziebell, and V.Jatenco-Pereira, *Phys. Plasmas* ۱۲, ۰۵۲۱۰۹ (۲۰۰۵)
- [۴]: A.Hasegawa, K. Mima, M. Duong-van, *Phys. Lett.* ۵۸ (۱۹۸۵) ۲۶۰
- [۵]: P.K.Shukla and A.A Mamum, “*Introduction to Dusty Plasma Physics*,” Institute of Physics Publishing, Bristol. (۲۰۰۲)
- [۶]: Myoung-Jae Lee, “Effects of suprathermal particles on the dust ion-acoustic waves in a complex plasma,” *Science Direct*. (۲۰۱۰)
- [۷]: V.Baumjohann and R.Treumann, “*Basic space plasma physics*,” Imperial College Press (September ۱, ۱۹۹۶)
- [۸]: Francis F.Chen, “*Basic space plasma physics*,” Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion ۲ nd ed, c۱۹۸۴, ”
- [۹]: A.F.Alexandrov, L.S.Bogdankevich, A.A.Rukhadze “*Principles of plasma Electrodynamics*,” springer-verlag Berlin Heidelberg New York



شکل(۴): نرخ میرایی بر حسب عدد موج نرمالیزه شده برای

$$K = 2.5, 5, 500, \infty$$

برای این سیستم وقتی سرعت الکترون‌ها را بالا گرفتیم و مقایسه کردیم ملاحظه شد: شکل a مربوط به سیستمی است که تمام خصوصیات سیستم شکل b را دارد، با این اختلاف که سرعت الکترون‌ها در امواج یون صوتی بالاست (سرعت یون‌ها پایین است)، میرایی در این حالت به گونه‌ای یافت شد که بر خلاف سیستم شکل b، بدون حضور افت و خیز بار صفر می‌شود. همانطورکه در شکل ملاحظه می‌شود میرایی در مقادیر کوچک عدد موج در سیستم b بیشتر از سیستم شکل a است و هر چه عدد موج بیشتر می‌شود، این اختلاف کمتر می‌شود.

# بررسی اثر افت و خیزهای بار، یون‌ها و ذرات پر انرژی بر امواج لانگمیر در پلاسمای غباری

سمیه موسوی

<sup>۱</sup>دانشکده فیزیک شیمی دانشگاه الزهرا، خیابان شیخ بهایی شمالی میدان شیخ بهایی، خیابان دهونک

## چکیده

در این مقاله در چارچوب نظریه جنبشی روابط پاشندگی امواج طولی در پلاسمای همگن غیر مغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تاثیر افت و خیز بار و حضور یون منفی بر انتشار امواج لانگمیر بررسی می‌شود. در بررسی اثر افت و خیزهای بار توزیع ذرات غبار و یون منفی سنگین ساکن و ماکسولی است و توزیع الکترون‌ها و یون‌ها به صورت ماکسولی و کاپاچی در نظر گرفته می‌شود. حضور افت و خیز بار ناشی از برخوردهای ناکشسان و همچنین ذرات پر انرژی باعث افزایش میرایی در امواج شد.

## The ions, suprathermal particels and charge fluctuation effects on langmuire waves in dusty plasma

Mousavi, Somayeh

<sup>۱</sup>Department of Physics, University of Alzahra, Tehran

## Abstract

In the frame of kinetic theory we investigated the dispersion relation of langmuire waves in unmagnetized homogeneous dusty plasma. In fluence of charge fluctuation and negative ions on the propagation of waves are investigated. The landau damping rate have been found to be increased as the fraction of suprathermal particals and charge fluctuation are increased on waves.

## مقدمه

لابراتوری رخ داده است. در چارچوب نظریه جنبشی روابط پاشندگی امواج طولی در پلاسمای همگن غیر مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادیم. در بررسی افت و خیز بار، برخورد بین ذرات غبار و ذرات پلاسمایی را ناکشسان در نظر گرفتیم. برای الکترون‌ها و یون‌ها (ثبت و منفی) توزیع ماکسولی و کاپاچی و برای ذرات غبار و یون منفی سنگین توزیع ماکسولی و دیراکی (ساکن) در حالت تعادل فرض کردیم. با محاسبه دیالکتریک از طریق حل معادله ولسواف و بولتزمن، معادلات اساسی رابطه پاشندگی در حالت انتشار طولی مورد بررسی قرار گرفته و اثرات ذرات بر میرایی و رشد مطالعه شده است و چگونگی واپستگی نرخ میرایی و رشد به نسبت چگالی‌ها و جرم‌های یون منفی، یون ثابت و

پلاسما در اصل گازی است یونیزه، شامل فوتون‌ها، الکترون‌ها، یون‌های ثابت و منفی، اتم‌ها، رادیکال‌های آزاد و ملکول‌های برانگیخته و غیر برانگیخته که دائما در حال برهمکنش با یکدیگر می‌باشند. اگر محیط کم یونیده شده باشد پلاسماهای غباری شامل یون، الکترون، ذرات غبار و همچنین ذرات خشی خواهد بود. بسیاری از پلاسماهای غباری فضایی، مزوسر و فتوسفر خورشیدی علاوه بر الکترون، یون ثابت و غبار شامل مولفه‌ای از یون‌های منفی نیز هستند. جنس ذرات غبار در نواحی مختلف متفاوت است. به عنوان نمونه در مزوسر زمین اغلب از جنس یخ و یا در اگزوز راکتها فضایی به صورت گرده‌های اکسید آلومنیوم است. پلاسماهای غیر خشی قوی اصولا در آزمایشات

$$\varepsilon^{lo} = 1 + \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} + \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^{\sigma} \quad (4)$$

$\chi$  ضریب تاثیر پذیری وقتی افت و خیز بار در پلاسمای وجود ندارد،  $\chi^{\sigma}$  ضریب تاثیر پذیری وقتی افت و خیز بار در پلاسمای وجود دارد.تابع توزیع الکترون‌ها و یون‌ها را توزیع کاپایی و ماسکولی و برای ذرات غبار و یون منفی سنگین ماسکولی و ساکن در نظر گرفتیم:

$$X_{\alpha} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3 p \frac{1}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\omega}}{\partial \vec{v}} \quad (5)$$

به کمک روابط (۶) و (۷) ضرایب تاثیر پذیری مطلوب را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} Z(\zeta_{\alpha}) = \frac{1}{\zeta_{\alpha}} - \frac{1}{2\zeta_{\alpha}^3} - \frac{3}{4\zeta_{\alpha}^5}, \dots, |\zeta_{\alpha}| \rightarrow \infty \\ Z(\zeta_{\alpha}) = i\sqrt{\pi} e^{-\zeta_{\alpha}^2} - 2\zeta_{\alpha} + \frac{4}{3}\zeta_{\alpha}^3 + \dots, |\zeta_{\alpha}| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Z_k(\zeta_k) &= \frac{ik! k^{k-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{(k-\frac{3}{2})!} \frac{1}{\zeta_k^2(k+1)} \left[ 1 - \frac{k(k+1)}{\zeta_k^2} + \dots \right] - \\ &- \frac{(2k-1)}{2k} \frac{1}{\zeta_k} \left[ 1 + \frac{k}{2k-1} \frac{1}{\zeta_k^2} + \frac{3k^2}{(2k-1)(2k-3)} \frac{1}{\zeta_k^4} + \dots \right], |\zeta_k| \rightarrow \infty \\ Z_k(\zeta_k) &= \frac{ik! \sqrt{\pi}}{k^{\frac{3}{2}} (k-\frac{3}{2})!} \left[ 1 - \frac{k+1}{k} \zeta_k^2 + \dots \right] - \\ &- \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k^2} \zeta_k \left[ 1 - \frac{2k+3}{3k} \zeta_k^2 + \dots \right], |\zeta_k| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha}^{\sigma} &= -2i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\omega_{p\alpha}} \frac{K!}{(K-\frac{3}{2})!} \sum_{\alpha=+,-,e,M} \frac{1}{(k\lambda_{D\alpha})^3} \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \left( 1 + \frac{1}{K(k\lambda_{D\alpha})^2} \frac{\omega^2}{\omega_{p\alpha}^2} \right)^{-K-1} \\ &- \sum_{\alpha=+,-,e,M} 2i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{\omega_{p\alpha}} \frac{1}{(k\lambda_{D\alpha})^3} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\zeta_K = \frac{\omega}{kv_{K\alpha}}, \zeta = \frac{\omega}{kv_{\alpha}} \quad (9)$$

عدد موج و سایر پارامترهای پلاسمای تا مرتبه اول رشد و میرایی نشان داده شده است. در تمامی مراحل تحقیق فرض کردیم که کاپایی یون‌های مثبت و منفی و نیز الکترون‌ها مساوی‌اند، فرض کردیم بسامد گیر افتادن ذرات پلاسمای توسط ذرات غبار کوچک باشد و از مقدار میانگین آن استفاده کردیم ولی زمان بررسی سیستم را کوچک در نظر گرفتیم، زمان به تعادل رسیدن بار غبار بسیار طولانی‌تر از زمان‌های استفاده شده در این تحقیق است،  $G$  را کوچک در نظر می‌گیریم به طوری که در روابط توانستیم از آنان صرف‌نظر کنیم. تاثیر افت و خیز بار و حضور یون منفی بر انتشار امواج بررسی شد. در بررسی اثر افت و خیز بار توزیع ذرات غبار و یون منفی سنگین را ماسکولی و همچنین در حالتی که ساکن باشند در نظر گرفتیم و نیز توزیع الکترون‌ها و یون‌ها به دو حالت ماسکولی و کاپایی در سیستم‌ها در نظر گرفته شده است. همچنین تاثیر حضور ذرات پر انرژی بر میرایی امواج مذکور بررسی شد.

### روابط پاشندگی

در بررسی افت و خیز بار، برخورد بین ذرات غبار و ذرات پلاسمای ناکشسان در نظر گرفتیم.

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla}_P f_{\alpha} = \sum_{\beta} \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}^{\alpha\beta} \quad (1)$$

$\vec{F}$  نیروی وارد بر ذرات پلاسمای است. جمله برخوردی را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

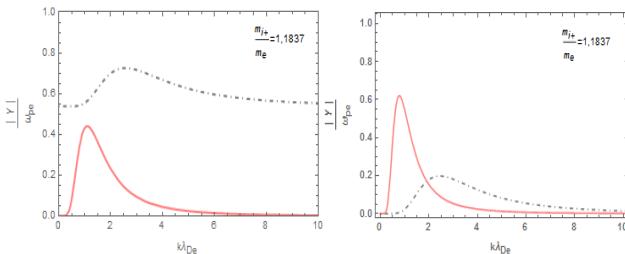
$$\left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}^{\alpha\beta} = - \int d\mathbf{q}_d \sigma_{\alpha}^d V (f_d f_{\alpha} - f_{do} f_{\alpha o}) \quad (2)$$

زاویه برخورد بین جهت افت و خیز بار و حرکت ذره سنگین را ۹۰ درجه می‌گیریم (ذرات غبار به علت جرم زیادی که دارند تاثیر چندانی در روابط نداشتند) و به کمک روابط تعریف شده به ضریب گازدهی طولی مورد نظر در این تحقیق می‌رسیم:

$$\varepsilon^{lo} = 1 + \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3 p \frac{1}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V} + iv_{ao}^d(V)} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\omega}}{\partial \vec{v}} \left( 1 + \frac{iv_{ao}^d(V)}{\omega + iv_{ch}} \frac{1 + \Gamma}{1 + G} \right) \quad (3)$$

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi-}^2 + \omega_{pi+}^2 + \omega_{pd}^2 + \omega_{pM}^2 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\omega_r} = & -\sqrt{\pi} \frac{K!}{\left(K-\frac{3}{2}\right)! K^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 + \frac{\rho_e}{\rho_m} (\eta_{de})^2 + (\eta_{ie+})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i+}} + (\eta_{ie-})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i-}} \right] \\ & \left( \frac{1}{k\lambda_{Di+}} \left( \frac{\rho_{i+}}{\rho_e} \right) \left( \frac{1}{\eta_{ie+}} \right) \right)^2 \left[ 1 + \frac{\left( 1 + \frac{\rho_e}{\rho_m} (\eta_{de})^2 + (\eta_{ie+})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i+}} + (\eta_{ie-})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i-}} \right) \left( \frac{\rho_{i+}}{\rho_e} \right) \left( \frac{1}{\eta_{ie+}} \right)^2}{K(k\lambda_{Di+})^2} \right]^{K-1} \\ & + \left( \frac{1}{k\lambda_{Di-}} \right)^2 \left( \frac{\rho_{i-}}{\rho_e} \right) \left( \frac{1}{\eta_{ie-}} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\left( 1 + \frac{\rho_e}{\rho_m} (\eta_{de})^2 + (\eta_{ie+})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i+}} + (\eta_{ie-})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i-}} \right) \left( \frac{\rho_{i-}}{\rho_e} \right) \left( \frac{1}{\eta_{ie-}} \right)^2}{K(k\lambda_{Di-})^2} \right]^{K-1} \\ & + (k\lambda_{De})^{2K-1} \left( \frac{1}{k\lambda_{De}} \right)^2 + \left( \frac{\rho_e}{\rho_m} (\eta_{de})^2 + (\eta_{ie+})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i+}} + (\eta_{ie-})^2 \frac{\rho_e}{\rho_{i-}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$



شکل (۱): نرخ میرایی بر حسب عدد موج برای دو ذره پوزیترون (خط- نقطه) و پروتون (خط ممتد)، سیستم الف (شکل سمت راست)، سیستم ب (شکل سمت چپ)

در سیستم پلاسمایی (الف) نسبت به سیستم پلاسمایی (ب) با توجه به نتایج بدست آمده نرخ میرایی بیشتری را مشاهده کردیم. و در هر دو سیستم پلاسمایی بدون افت و خیز بار میرایی صفر می شود. عدم حضور یون منفی (سبک) در سیستم های پلاسمایی با نسبت های چگالی عددی یون به الکترون یکسان و نیز در تعداد ذرات پر انرژی یکسان، باعث افزایش نرخ میرایی شد، این افزایش در پلاسمای نوع (ب) بسیار کم بود، ولی در پلاسمای نوع (الف) افزایش به نسبت بیشتری به شکل (۲-الف) بدست آمد:

بخش اول رابطه (۸) مربوط به ذرات با توزیع کاپا است و بخش دوم این روابط مربوط به ذرات با توزیع ماکسولی است.

به کمک رابطه (۹) نرخ رشد و میرایی را بدست می آوریم.

$$\gamma = - \frac{\partial \mathcal{E}^{im}(\omega_r, k)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r} \quad (10)$$

## امواج لانگمیر

یکی از اثراتی که سبب انتشار نوسانات پلاسمایی شود، اثرات حرارتی و در واقع حرکات حرارتی است. الکترون هایی که با سرعت های حرارتی به لایه های مجاور پلاسمایی جریان می یابند، اطلاعاتی در مورد آنچه در ناحیه نوسان کننده اتفاق می افتد، متقل می کنند. امواج لانگمیر را نوعی نوسان پلاسمایی می توان نامید. برای سیستم پلاسمایی (الف) با توزیع کاپا برای الکترون ها، توزیع ماکسولی برای یون ها و ذرات غبار ساکن (بدون یون منفی سنگین) بدست می آوریم:

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi-}^2 + \omega_{pi+}^2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\omega_r} = & -\sqrt{\pi} K^{K-1} \frac{K!}{\left(K-\frac{3}{2}\right)!} \left( 1 + \sum_{i=i_+, i \neq i_-, i \neq i_0} \frac{\rho_e}{\rho_i} \eta_{ie}^2 \right) \left( k\lambda_{De} \right)^{2K-1} \left( K \left( k\lambda_{De} \right)^2 + \left( 1 + \sum_{i=i_+, i \neq i_-, i \neq i_0} \frac{\rho_e}{\rho_i} \eta_{ie} \right) \right)^{-K-1} \end{aligned} \quad (9)$$

برای پلاسمایی (ب) با توزیع کاپا برای الکترون ها، توزیع کاپا برای یون ها و توزیع ماکسولی برای ذرات غبار و یون منفی بدست می آوریم:

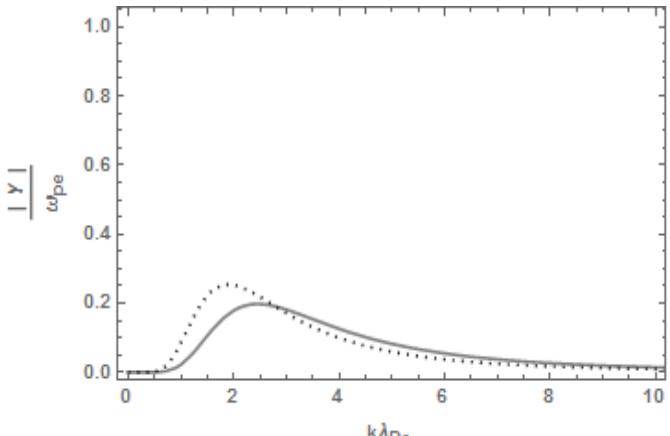
[۹]: P.K.Shukla and A.A Mamum, "Introduction to Dusty Plasma Physics," Institute of Physics Publishing, Bristol. (۲۰۰۲)

[۱۰]: Myoung-Jae Lee," Effects of suprathermal particles on the dust ion-acoustic waves in a complex plasma, "Sience Direct. (۲۰۱۰)

[۱۱]: V.Baumjohann and R.Treumann, "Basic space plasma physics," Imperial College Press (September ۱, ۱۹۹۶)

[۱۲]: Francis F.Chen, "Basic space plasma physics," Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion ۲ nd ed, c۱۹۸۴,"

[۱۳]: A.F.Alexandrov, L.S.Bogdanovich, A.A.Rukhadze "Principles of plasma Electrodynamics," springer-verlag Berlin Heidelberg New York



شکل(۲-الف): اثر حضور یون منفی (خط ممتد) در نرخ میرایی بر حسب  $k\lambda_{De}$  برای یون پوزیترون (سیستم الف)

وقتی پلاسم را در کاپاهاي مختلف رسم کردیم، در پلاسمای نوع

(ب) با  $\rho_e = 1, \eta_{Me} = 1$  و در پلاسمای نوع (الف) با نسبت-

های چگالی عددی یون (منفی و مثبت) به الکترون یکسان ملاحظه شد هر چه تعداد ذرات پرانرژی بیشتر شود، میرایی افزایش می‌یابد و نقاط پایدار میرایی را در اعداد موج بزرگتر می- یابیم، برای کاپا بی‌نهایت در حالت (ب) میرایی به شدت افزایش می‌یابد.

### نتیجه‌گیری:

در امواج لانگمیر در سیستم‌های نوع الف و ب، برای پوزیترون رفتارهای متفاوتی را مشاهده کردیم در صورتی که برای پروتون تفاوت‌ها بسیار کمتر می‌شود. با افزایش ذرات پرانرژی بر حسب عدد موج ، افزایش در میرایی را بدست آوردیم. در این تحقیق در همهی موارد بررسی شده میرایی لاندانو (میرایی غیر برخورده) صفر شد. حضور یون منفی کوچک بر سیستم نوع الف نسبت به سیستم نوع ب موثرتر واقع شد و باعث افزایش میرایی می‌شود.

### منابع:

[۱]: Vladimirov, *Phys. Plasmas* ۱, ۲۷۶۲ (۱۹۹۴)

[۲]: D.Summers and R.M.Thoren, *phys.Fluids* B۳, ۱۸۳۵(۱۹۹۱)

[۳]: M.C.de Juli and R.S.Schneider, L.F.Ziebell, and V.Jatenco-Pereira, *Phys. Plasmas* ۱۲, ۰۵۲۱۰۹ (۲۰۰۵)

[۴]: A.Hasegawa, K. Mima, M. Duong-van, *Phys. Lett.* ۵۸ (۱۹۸۵) ۲۶۰۸

## ظهور آشوب کوانتومی در زنجیره یک بعدی اسپین $\frac{1}{2}$

فروزان ، میرمحمودی ؛ صدیف ، احمدپور

دانشکده فیزیک دانشگاه محقق اردبیلی، انتهاخی خیابان دانشگاه ، اردبیل

### چکیده

تکنیک قطری سازی را برای یک سیستم یک بعدی شامل برهمنکنش اسپین  $\frac{1}{2}$  بکار می‌گیریم. یکی از روش‌های مهم در شناسایی آشوب در سیستم‌های کوانتومی، استفاده از توزیع انرژی سیستم می‌باشد. با مطالعه ویژه مقادیر و ویژه بردارها، نشان می‌دهیم ساختار ویژه مقادیر چگونه می‌تواند منجر به ظهر آشوب در این سیستم شود. اثرات نزدیک ترین همسایه‌های بعدی در زنجیره اسپینی می‌تواند با وجود یک تعضی در میانه زنجیره اسپینی منجر به انتگرال ناپذیری سیستم شود.

## Onset of Quantum Choas in one-dimensional spin chain $\frac{1}{2}$

F. Mirmasoudi , S. Ahadpour

Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

### Abstract

We used diagonalization technique for a one-dimensional system of spin. One important way to identify chaos in quantum systems is level spacing distribution. By studying the eigenvalues and eigenvectors, we show how values can lead to the appearance of chaos in the special structure of the system. The effects of next-nearest neighbors in the chain of spin can lead to a breach in the middle of the spin chain systems integration is irreversible.

PACS No. 2

طور کلاسیکی آشوبناک هستند، سر و کار دارد. توزیع نزدیکترین

### مقدمه

فاصله مجاور ترازهای انرژی کوآنتومی، یکی از مظاهر اصلی کوآنتومی از آشوب کلاسیکی است. نظریه ماتریس تصادفی، به طور کامل افت و خیزهای آماری طیف سیستم‌های آشفته کوآنتومی را توصیف می‌کند [3-4]. یکی از مهمترین نشانه‌های آشوب در سیستم‌های کوانتومی در توزیع فاصله میان ترازهای انرژی مجاور می‌باشد. در واقع هیستوگرامی از فاصله ترازهای انرژی مجاور هم با فاصله میانگین واحد می‌باشد. توزیع ترازهای انرژی در سیستم‌های کاملاً انتگرال پذیر به صورت توزیع پواسونی توزیع ویگنر دایسون  $P(s) = \exp(-s)$  و برای سیستم‌های آشوبناک به صورت توزیع ویگنر دایسون  $P(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(\frac{-\pi s^2}{2}\right)$  است [6]. پایه‌های انرژی سیستم‌های انتگرال پذیر به یکدیگر مرتبط نیستند. در حالیکه در سیستم‌های آشوبناک، پایه‌های انرژی به یکدیگر مرتبط

آشوب کلاسیکی با حساسیت به شرایط اولیه سیستم شناخته می‌شود. وقتی سیستم آشوبناک است می‌گوییم دو مسیری که در ابتدا بسیار به یکدیگر نزدیک هستند، با گذر زمان به سرعت از یکدیگر دور می‌شوند، نرخ واگرایی مسیرها به کمک نمای لیپانوف تعیین می‌شود. برای سیستم‌های کوانتومی تعیین حرکت مسیر فضای فاز سیستم طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ ممکن نمی‌باشد. از طرفی چون فیزیک کلاسیک یک حدی از مکانیک کوانتومی است، آن طبیعی است تا به جستجوی طبیعت آشوب در کوانتوم بپردازیم [1,2].

تاکنون تعریف کلی از آشوب کوآنتومی وجود ندارد. در حقیقت آشوب کوآنتومی با تناظر کلاسیک-کوآنتوم در سیستم‌هایی که به

تشکیل می‌دهد و همسایه‌های نزدیک بهم را به صورت زیر تبدیل می‌کند:

$$J_{xy}(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle = \frac{J_{xy}}{2} |\downarrow_i \uparrow_{i+1}\rangle \quad (2)$$

|↓⟩ اسپین در راستای مثبت و منفی محور Z به ترتیب با ⟨↑| و ⟨↓| بیان می‌شوند و انرژی آنها در سایت  $i-1$  ام به ترتیب  $\frac{\omega_i}{2}$  و

$\frac{\omega_i}{2}$  است. جمله برهمنکنشی آیزنینگ ایجاب می‌کند تا انرژی دو

اسپین موازی بیشتر از دو اسپین پادموازی باشد:

$$J_z S_i^z S_{i+1}^z |\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle = \frac{J_z}{4} |\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle \quad (3)$$

$$J_z S_i^z S_{i+1}^z |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle = -\frac{J_z}{4} |\downarrow_i \uparrow_{i+1}\rangle \quad (4)$$

هامیلتونین (1) تحت دوران حول محور Z ناورداست،  $[H, S^z] = 0$ ، یعنی تعداد کل حالت‌های براگیخته در سیستم ثابت است. در حضور برهمنکنش آیزنینگ با شرایط مرزی آزاد می‌توان به صورت تحلیلی ویژه بردارها و ویژه مقادیر را بدست آورد. در بخش بعد می‌خواهیم ظهور آشوب در سیستم را با محاسبه توزیع انرژی سیستم بحث و بررسی کیم.

### آنالیز آشوب در مدل آیزنینگ

با در نظر گرفتن برهمنکنش بین نزدیک ترین همسایه بعدی، هامیلتونین را به صورت زیر خواهد بود:

$$H = H_{NN} + \alpha H_{NNN} \quad (5)$$

که

$$H_{NN} = \sum_{i=1}^{L-2} [J'_{xy}(S_i^x S_{i+2}^x + S_i^y S_{i+2}^y) + J'_z S_i^z S_{i+2}^z]$$

برهمنکنش بین نزدیک ترین همسایه بعدی و  $\alpha$  پارامتر برهمنکنش بین نزدیک ترین همسایه بعدی است. می‌خواهیم با در نظر گرفتن مقدار مناسب  $\alpha = \epsilon_d$  و اثرات برهمنکنشی نزدیک‌ترین همسایگان بعدی و در نظر گرفتن نقض در وسط سایت

$d$ ، در دو حالت  $\alpha = 0$  و  $\alpha \neq 0$  بررسی کیم. در مرجع [7] با فرض اینکه  $\epsilon_d = 0.5$  و بسته به اینکه نقض در

اند که طبق پیش‌بینی نظریه رندوم ماتریس پایه‌های انرژی مرتبط از توزیع ویگنردايسون پیروی می‌کنند. فرم توزیع ویگنردايسون به خواص تقارنی هامیلتونین بستگی دارد. سیستم‌هایی که ناوردای زمانی هستند توسط آنسامبل متعامد گاووسی توصیف می‌شوند. توزیع آنسامبل‌های متعامد گاووسی مشابه توزیع ویگنردايسون است. بنابراین جهت شناسایی آشوب در سیستم ما می‌توانیم به مطالعه و بررسی ساختار ویژه حالت و ویژه بردار سیستم پردازیم. در این مقاله با در نظر گرفتن اثرات برهمنکنشی بین اسپین‌های نزدیک ترین همسایه بعدی در یک زنجیره یک بعدی با اسپین  $\frac{1}{2}$  ظهور آشوب در سیستم را نشان می‌دهیم. نقش قدرت کوپل اسپین‌ها در سیستم با بررسی ویژه مقادیر سیستم بررسی می‌شود.

### توضیف مدل

هامیلتونی یک زنجیره یک بعدی با اسپین  $\frac{1}{2}$  به صورت زیر است:

$$H = H_z + H_{NN} \quad (1)$$

$$S_i^{x,y,z} \text{ عملگر اسپین } \frac{1}{2} \text{ در سایت } i-1 \text{ ام می‌باشد. جمله اول}$$

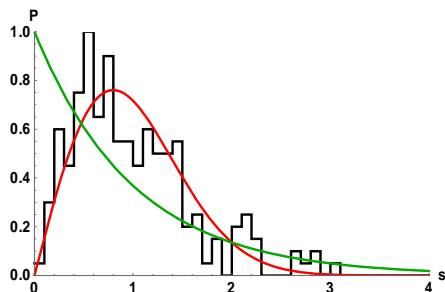
$$H_z = \sum_{i=1}^L \omega S_i^z + \epsilon_d S_d^z \text{ بیانگر انرژی زیمن مربوط به سایت}$$

سایت  $i-1$  است. جمله دوم

$$H_{NN} = \sum_{i=1}^{L-1} [J_{xy}(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) + J_z S_i^z S_{i+1}^z]$$

معروف به برهمنکنش مدل XXZ و بیانگر اندرکنش نزدیک ترین همسایه‌ها است.  $J_{xy}$  معرف برهمنکنش فلیپ-فلاب و  $J_z$  قدرت برهمنکنش آیزنینگ می‌باشدند. اگر  $J_z = J_{xy}$  مدل را XXX و اگر  $J_{xy} \neq J_z$  مدل XXZ را می‌گویند. به طوریکه، برای برهمنکنش‌های پادفرومغناطیسی  $J_z > 0$  است، برای فرومغناطیسی‌ها  $J_z < 0$  می‌باشد.  $\omega$  بیانگر انرژی زیمن اسپین در سایت  $i-1$  در معرض میدان مغناطیسی در راستای محور Z است. فرض می‌کنیم که انرژی زیمن سایت  $d$  کمی بزرگتر از انرژی سایتها دیگر و برابر با  $\epsilon_d + \omega$  است، این سایت به عنوان نقض در نظر گرفته می‌شود. جمله دوم عناصر غیر قطری هامیلتونین را

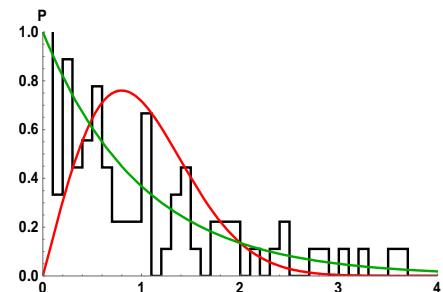
می توان گفت درنظر گرفتن اثرات برهمکنش های نزدیکترین همسایه بعدی در ظهور آشوب در سیستم نقش مهمی دارد.



شکل ۲: توزیع فضایی ترازهای انرژی  $P(s)$  برای هامیلتونین معادله (۵) برای زنجیره ایی به طول  $L = 15$  و  $J_{xy} = J'_{xy} = 1$ ,  $J_z = J'_z = 0.5$ . نمودار قرمز (توزیع ویکنردایسون)، نمودار سبز (توزیع تنظیم شده است. نمودار قرمز (توزیع ویکنردایسون)، نمودار سبز (توزیع پواسون) و نمودار مشکی (محاسبات عددی) را نشان می دهد.

میانه سایت یا در ابتدای سایت قرار گیرد به بررسی توزیع ترازهای انرژی پرداخته شده است.

- حالت اول : بدون در نظر گرفتن برهمکنش بین نزدیک ترین همسایه بعدی ( $\alpha = 0$ ), طول شبکه  $L = 12$  و تعداد اسپین های رو به بالا را سه تا (مثبت محور  $Z$ ) و تعداد اسپین های رو به پایین را ۹ تا (منفی محور  $Z$ ), نقص را در سایت در شکل (۱) توزیع فضایی ترازهای انرژی برای سیستم رسم شده است. همان طور که از شکل مشهود است با وجود درنظر گرفتن نقض در میانه سایت با درنظر گرفتن برهمکنش اسپینی نزدیک ترین همسایه ها، توزیع ترازهای انرژی منطبق با توزیع پواسونی است، که بیانگر انتگرال پذیر بودن سیستم در این حالت می باشد.



شکل ۱: توزیع فضایی ترازهای انرژی  $P(s)$  برای هامیلتونین معادله (۱) برای زنجیره ایی به طول  $L = 12$  و  $J_{xy} = J'_z = 1$  تنظیم شده است. نمودار قرمز (توزیع ویکنردایسون)، نمودار سبز (توزیع پواسون) و نمودار مشکی (محاسبات عددی) را نشان می دهد.

## مرجع ها

- [1] J. Gleick, *Chaos: Making a New Science* (Viking, New York, 1987).
- [2] R. V. Jensen, "Quantum chaos," *Nature* (London) 355, 311–318 (1992).
- [3] F. Haak, *Quantum signature of chaos*, *springer* (2000).
- [4] W.D. Heiss, A.A. Kotzé, Quantum chaos and analytic structure of the spectrum, *Physical Review A* 44 (1991) 2403–2409.
- [5] NATO Les Houches Lecture Notes 1981, Chaotic Behavior of Deterministic Systems, eds. G.Ioss, R.Helleman and R.Stora (North-Holland, Amsterdam, 1983).
- [6] L. F. Santos, F. Borgonovi, and F. M. Izrailev, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 094102 (2012).
- [7] Aviva Gubin and Lea F. Santos, *American Journal of Physics* **80**, 246 (2012);

- حالت دوم : با در نظر گرفتن برهمکنش بین نزدیک ترین همسایه بعدی ( $\alpha = 0.5$ ), طول شبکه  $L = 15$  و تعداد اسپین های رو به بالا (مثبت محور  $Z$ ) را سه تا و تعداد اسپین های رو به پایین (منفی محور  $Z$ ) را ۱۲ تا، نقص را در میانه سایت  $d = 7$  و  $J_{xy} = J'_z = 1$  در نظر می گیریم. در این حالت نمودار توزیع ترازهای انرژی را رسم می کنیم. از شکل (۲) ملاحظه می کنیم که با در نظر گرفتن برهمکنش نزدیک ترین همسایه بعدی و قرار دادن نقض در میانه سایت توزیع ترازهای انرژی منطبق با ویکنردایسون می باشد، یعنی سیستم رفتار آشوبی از خود نشان می دهد. بنابراین

## ناهمخوانی کوانتومی هندسی در مدل هایزنبرگ گرمایی سه کیو بیتی با بر هم کنش سه اسپینی

نوری زاده، فاطمه؛ نجار باشی، قادر

کروه فیزیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

### چکیده

در این مقاله ما ناهمخوانی کوانتومی هندسی را برای حالت تعادل گرمایی مدل سه اسپین  $1/2$  هایزنبرگ مدل  $XXZ$  با بر هم کنش سه اسپینی تحت میدان مغناطیسی یکنواخت محاسبه می کنیم. نشان می دهیم که ناهمخوانی کوانتومی هندسی با افزایش دما کاهش می یابد بعلاوه بسته به پارامترهای هامیتونین، ناهمخوانی کوانتومی هندسی می تواند نسبت به میدان مغناطیسی متقارن یا نامتقارن باشد. سرانجام در دماهای پایین برخی ناپیوستگی ها در ناهمخوانی کوانتومی هندسی مشاهده می شود، که می تواند شاهدی برای گذار فاز کوانتومی باشد.

## Geometric quantum discord in thermal three-qubit Heisenberg model with three- spin interactions

Noorizadeh,Fatemeh ;Najarbashi, Ghader

Department Of Physics, University Of Mohaghegh Ardabili ,ardabil

### Abstract

In this paper, we calculate the geometric quantum discord for thermal equilibrium state of a three spin-  $1/2$  model at the Heisenberg  $XXZ$  model with three-spin interaction under uniform magnetic field. We show that the geometric quantum discord decreases by increasing temperature. Furthermore, depending on the parameters of the Hamiltonian, the geometric quantum discord can be symmetric or non-symmetric with respect to the magnetic field. Finally, there are some non-continuity in geometric quantum discord at low temperatures which can be indicator for quantum phase transition.

PACS No. (۰۳ ۶۷.-a, ۴۲.۵۰. pq)

$$\begin{aligned} H_{XXZ} = & \sum_{l=1}^3 \left[ J(\sigma_l^x \sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^y) + J_z \sigma_l^z \sigma_{l+1}^z + B \sigma_l^z \right] \\ & + \sum_{l=1}^3 J^+ [\sigma_l^x \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^y] \\ & + \sum_{l=1}^3 J^- [\sigma_l^x \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^y - \sigma_l^y \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^x] \end{aligned} \quad (1)$$

که در اینجا  $J$  ضریب جفت شدگی همسایگی نزدیک ،  $J_z$  ضریب ناهمسانگردی ،  $B$  شدت میدان مغناطیسی و  $J^+$  ،  $J^-$  ضریب بر هم کنش سه اسپینی است. همه پارامترهای دیگر از قبل برهمکنش از نوع فرو مغناطیسی است و اگر مثبت باشد برهمکنش اسپینی را پاد فرو مغناطیسی می نامیم. اگر  $J_z = J$  باشد مدل تبدیل به  $XXX$  می شود. اگر  $J_z = 0$  باشد، مدل از نوع  $XX$  خواهد شد. با حل کردن معادله شرودینگر

### مقدمه

ناهمخوانی کوانتومی هندسی به صورت کمترین فاصله بین حالت سیستم و نزدیکترین حالت با ناهمخوانی صفر تعریف شده است. حالت کوانتومی یک سیستم می تواند جدا پذیر یا درهم تنیده باشد. همبستگی به دو بخش کوانتومی و کلاسیکی طبقه بندی می شود. همبستگی کوانتومی نقش اساسی در نظریه اطلاعات کوانتومی ایفا می کند. ناهمخوانی کوانتومی هندسی نوع دیگری از همبستگی کوانتومی و متفاوت از در هم تنیدگی است [۱, ۹].

### مدل هایزنبرگ $XXZ$

هامیتونین یک مدل هایزنبرگ  $XXZ$  سه کیوبیتی در حضور میدان مغناطیسی خارجی  $B$  به شکل زیر در نظر گرفته می شود [۶, ۸] :

## ناهمخوانی کوانتومی هندسی

تعریف اصلی ناهمخوانی هندسی توسط داکی؛ ودرال و بروکنر  
بیان شد [۴]

$$D_G(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_0} \| \rho - \chi \|^2 \quad (۵)$$

$\Omega_0$  نشان دهنده مجموعه ای از حالت های کلاسیک (ناهمخوانی صفر) است. نرم جذر در فضای هیلبرت اشمیت به صورت

$$\| X - Y \|^2 = Tr(X - Y)^2$$

ماتریس چگالی کلی دو اسپینی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\rho = \frac{1}{4} (I \otimes I + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma^i \otimes I + \sum_{i=1}^3 y_i I \otimes \sigma^i + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j) \quad (۶)$$

I در اینجا ماتریس واحد و  $\sigma^i (i=1,2,3)$  ماتریس های پاولی هستند.

نشان داده می شود که متغیرهای  $x_i$  و  $y_i$  و  $T_{ij}$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} x_i &= tr(\sigma^i \otimes I) \rho \\ y_i &= tr(I \otimes \sigma^i) \rho \end{aligned} \quad (۷)$$

$$T_{ij} = tr(\sigma^i \otimes \sigma^j) \rho$$

در نتیجه ناهمخوانی کوانتومی هندسی به صورت زیر به دست می آید:

$$D_G(\rho) = \frac{1}{4} (\| \vec{y} \vec{y}^T \|_2 + \| T \|_2^2 - K_{\max}) \quad (۸)$$

$K$  بزرگترین ویژه مقدار ماتریس  $\vec{y} \vec{y}^T + T^T T$  است.

$$\| T \|_2^2 = tr(T T^T) \quad (۹)$$

$$\| \vec{y} \|_2^2 = tr(\vec{y} \vec{y}^T)$$

در اینجا  $t$  نشان دهنده ترانهاده یک بردار یا ماتریس است.

برای ماتریس چگالی  $\rho_{ABC}$ تابع پارش به این صورت به دست می آید:

$$Z = e^{-\frac{3}{T}} 2 \cosh a + e^{+\frac{5}{T}} 2 \cosh b + e^{-\frac{1}{T}} 2 \cosh c + e^{-\frac{1}{T}} 2 \cosh d \quad (۱۰)$$

که در اینجا داریم:

$$H_{XXZ} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

با آن به شکل زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |000\rangle \\ |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (x |001\rangle + x^2 |010\rangle + |100\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (x^2 |001\rangle + x |010\rangle + |100\rangle) \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (x |110\rangle + x^2 |101\rangle + |011\rangle) \\ |\psi_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (x^2 |110\rangle + x |101\rangle + |011\rangle) \\ |\psi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle) \\ |\psi_7\rangle &= |111\rangle \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$E_0 = 3(J_z + B)$$

$$E_1 = B - J_z - 2J - 2J^+ - 2\sqrt{3}J^-$$

$$E_2 = B - J_z - 2J - 2J^+ + 2\sqrt{3}J^-$$

$$E_3 = B - J_z + 4J + 4J^+$$

$$E_4 = -B - J_z - 2J + 2J^+ - 2\sqrt{3}J^-$$

$$E_5 = -B - J_z - 2J + 2J^+ + 2\sqrt{3}J^-$$

$$E_6 = -B - J_z + 4J - 4J^+$$

$$E_7 = 3(J_z - B)$$

که در اینجا  $x = \exp(2i\pi/3)$  و  $|0\rangle$ ،  $|1\rangle$  پایه های

استاندارد اسپین  $1/2$  هستند. حالت تعادل گرمایی سیستم سه اسپینی با

هامیلتونین  $H$  در دمای  $T$  به شکل زیر است:

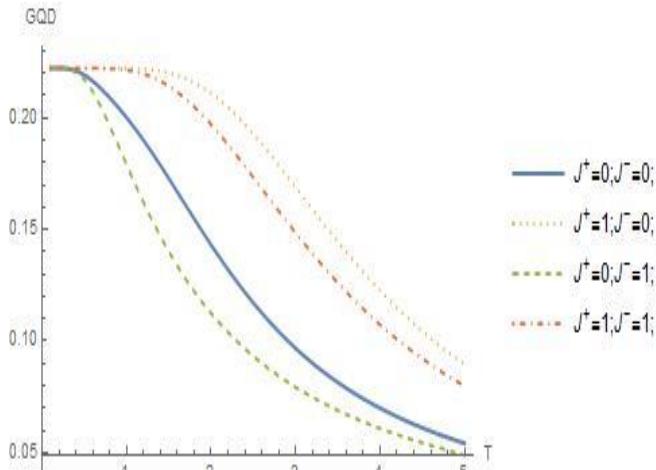
$$\rho_{ABC} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H) = \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^7 \exp(-\beta E_i) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (۱۲)$$

$$Z = Tr[\exp(-\beta H)] = Tr \sum_{i=0}^7 \exp(-\beta E_i) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (۱۳)$$

$Z$  تابع پارش سیستم و  $\beta = \frac{1}{kT}$  که  $\kappa$  ثابت بولتزمن است و

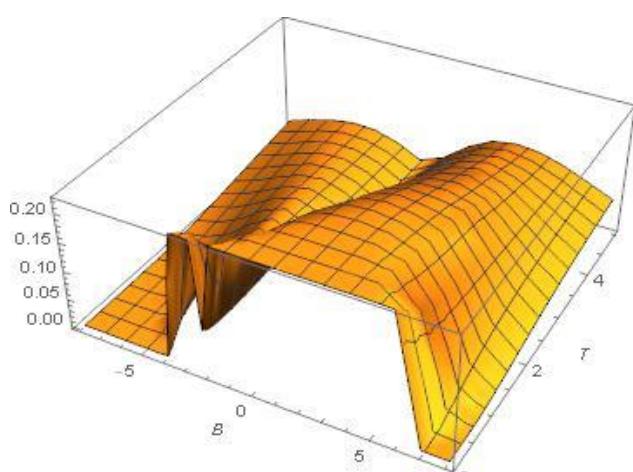
ما برای سادگی در محاسبات،  $\kappa = 1$  در نظر می گیریم.

نیستند. در حالتی که  $B = 0$  باشد، ناهمخوانی کوانتومی هندسی  $J^+ = 1; J^- = 0,1$  بزرگتر از حالت های  $J^+ = 0; J^- = 0,1$  است.



شکل ۲ : ناهمخوانی کوانتومی هندسی بر حسب دما و مقادیر  $J_Z = 1$  و  $J = -1, B = 1$

در شکل ۲ ناهمخوانی کوانتومی هندسی بر حسب دما  $T$  رسم شده است. حالت های  $J^+ = 0; J^- = 0,1$  رفتاری مشابه هم دارند و حالت های  $J^+ = 1; J^- = 0,1$  مشابه هم رفتار می کنند. همچنین مشاهده می شود در هر چهار نمودار ناهمخوانی کوانتومی هندسی با افزایش دما کاهش می یابند.



شکل ۳ : ناهمخوانی کوانتومی هندسی بر حسب دما و میدان مغناطیسی  $J^+ = 0; J^- = 0$  و  $J_Z = 1, J = -1$

$$a = \frac{3B}{T} \text{ و } b = \frac{-B-4J^+}{T}$$

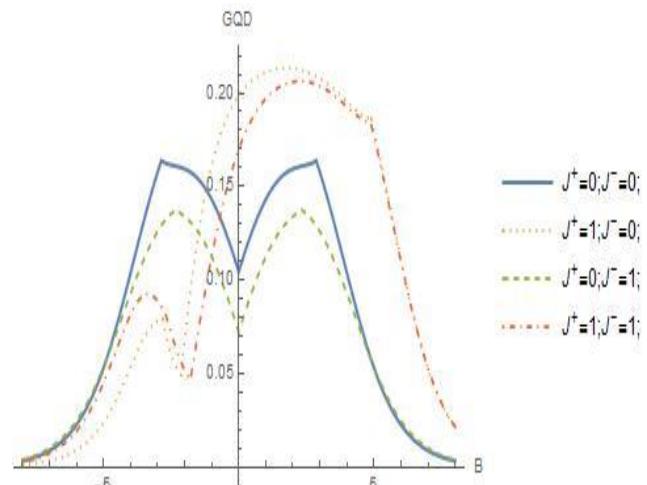
$$(11)$$

$$c = \frac{B-2J^+-2\sqrt{3}J^-}{T} \text{ و } d = \frac{B-2J^++2\sqrt{3}J^-}{T}$$

در اینجا روی ذره ی سوم ماتریس چگالی حالت تعادل گرمایی سیستم سه اسپینی رد می گیریم تا ماتریس چگالی کاهش یافته دو اسپینی به دست آید:

$$\rho_{AB} = Tr_C \rho_{ABC} \quad (12)$$

سپس ناهمخوانی کوانتومی هندسی را برای سیستم  $AB$  به دست آورده و در شکل های زیر بر حسب میدان مغناطیسی و دما رسم می کنیم.



شکل ۱: ناهمخوانی کوانتومی هندسی بر حسب میدان مغناطیسی و  $T = 2$  و  $J_Z = 1, J = -1$

در شکل ۱ ناهمخوانی کوانتومی هندسی بر حسب میدان مغناطیسی  $B$  و به ازای  $T = 2$  رسم شده است. حالت های  $J^+ = 1; J^- = 0,1$  رفتاری مشابه هم دارند و حالت های  $J^+ = 0; J^- = 0,1$  نیز مانند هم رفتار می کنند. همچنین مشاهده می شود در هر چهار نمودار ناهمخوانی کوانتومی هندسی با افزایش میدان مغناطیسی کاهش می یابد. در حالت های  $J^+ = 0; J^- = 0,1$  ناهمخوانی کوانتومی هندسی نسبت به میدان مغناطیسی متقارن هستند ولی در حالت های  $J^+ = 1; J^- = 0,1$  ناهمخوانی کوانتومی هندسی نسبت به میدان مغناطیسی متقارن

در شکل ۳ ناهمخوانی کوانتومی هندسی بر حسب دما  $T$  و میدان مغناطیسی  $B$  رسم شده است. مشاهده می شود که با افزایش دما و میدان مغناطیسی، ناهمخوانی کوانتومی هندسی به صفر میل می کند. همچنین در دماهای پایین در سه نقطه  $B=6$ ،  $B=-2$  و  $B=-4$  ناپیوستگی هایی در ناهمخوانی کوانتومی هندسی مشاهده می شود، که نشان دهنده ی گذار فاز کوانتومی است.

### نتیجه گیری

نتایج نشان می دهند برای میدان های مغناطیسی بزرگتر از صفر  $J^+$ ، ناهمخوانی کوانتومی هندسی را به ازای هر مقداری از میدان مغناطیسی افزایش می دهد و  $J^-$  آن را تضعیف می کند. با افزایش دما و میدان مغناطیسی ناهمخوانی کوانتومی هندسی کاهش می یابد. همچنین در دماهای پایین ناپیوستگی هایی در ناهمخوانی کوانتومی هندسی مشاهده می شود، که نشان دهنده ی گذار فاز کوانتومی است.

### مرجع ها

- [۱] D. Gottlieb and J. Rosler ; *Exact solution of spin chain with binary and ternary interactions of Dzialoshinsky-Moriya type*; *Phys.Rev.B* ۶۰, (۱۹۹۹) ۹۲۳۲.
- [۲] I. Titvinidze and G. I. Japaridze; *Phase diagram of the spin extended model*; *Eur.Phys.J.B* ۳۲, (۲۰۰۳) ۳۹۳.
- [۳] M. A. Nielsen and I. L. Chuang; *Quantum Computation and Quantum Information*; Cambridge University Press, England (۲۰۰۰)
- [۴] B. Dakic, and V. Vedral and C. Brukner; *Phys. Rev. Lett* ۱۰۵, (۲۰۱۰) ۱۹۰۵۰۲.
- [۵] F. Verstraete and J. Dehaene, and B. De Moor ; *Phys. Rev. A* ۶۴, (۲۰۰۱) ۰۱۰۱۰۱.
- [۶] J. K. Pachos and M. B. Plenio; *Three-spin interactions in optical lattices and criticality in cluster Hamil-tonians*; *Phys.Rev. Lett.* ۹۳, (۲۰۰۴) ۰۵۶۴۰۲.
- [۷] S. Luo and S. Fu; *Phys. Rev A*, ۸۲, (۲۰۱۰) ۰۳۴۳۰۲.
- [۸] A. A. Zvyagin and A. Klumper; *Quantum Phase transitions and thermodynamics of quantum antiferro magnets with next-nearest-neighbor couplings*; *Phys. Rev. B* ۶۸, (۲۰۰۳) ۱۴۴۴۲۶.
- [۹] H. Ollivier and W. H. Zurek; *Phys. Rev.Lett.* ۸۸, (۲۰۰۱) ۰۱۷۹۰۱.
- [۱۰] Y. X. Huang and M. S. Zhan; *Properties of entanglement molecules*; *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys* ۳۷, (۲۰۰۴) ۳۳۹۹.

## برآورد قابلیت اعتماد تنش- مقاومت برای توزیع‌های با تابع خطر توانی با استفاده از روش MCMC

آبروشن ، اکبر<sup>۱</sup>؛ گنجی، مسعود<sup>۱</sup>؛ مصطفائی، بهداد<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

### چکیده

قابلیت اعتماد تنش- مقاومت یکی از مفاهیم کاربردی در علوم مهندسی است که بعنوان شاخصی برای تعیین قابلیت اعتماد یک سیستم بکار می‌رود. در این مقاله، تابع زیان توان دوم خطا در نظر گرفته شده و یک برآوردگر بیزی برای قابلیت اعتماد تنش- مقاومت برای توزیع‌های با تابع خطر توانی ارائه می‌شود. برای محاسبه‌ی این برآوردگر از روش زنجیر مارکوف مونت کالو (MCMC) استفاده می‌شود. در پایان، عملکرد این روش با عملکرد روش‌های دیگر با استفاده از شبیه‌سازی در نرم افزار R مقایسه می‌شود.

### Estimation of Stress-Strength reliability for distributions with power hazard function using MCMC method

Abravesh, Akbar<sup>1</sup>; Ganji, Masoud<sup>1</sup>; Mostafaiy, Behdad<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Statistics and Computer sciences, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil

### Abstract

Stress-Strength reliability is one of the applied concepts in engineering which applied as a scale to determine the reliability of a system. In this paper, squared error loss function is considered and a Bayes estimator of Stress-Strength reliability is obtained for distributions with power hazard function. Finally, the performance of this method is compared with the performance of other methods using simulation in software R.

دارد. برای درک بهتر از کاربردهای قابلیت اعتماد تنش- مقاومت یک نمونه از کاربردهای این موضوع در ساخت موشک ارائه می‌شود. فرض کنید  $Y$  مقدار بیشینه فشار محفظه‌ی احتراق موشک باشد که توسط احتراق یک پیشران جامد تولید می‌شود. هم‌چنین، فرض کنید  $X$  مقاومت این محفظه باشد. بنابراین،  $P(X > Y)$  می‌تواند بعنوان یک احتمال برای شلیک موفقیت‌آمیز یک موشک بکار رود ([2]). فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل و دارای توزیع با تابع خطر توانی به ترتیب با پارامترهای  $(\alpha_1, \theta)$  و  $(\alpha_2, \theta)$  باشند. در این صورت توابع چگالی  $X$  و  $Y$  بصورت زیر هستند:

### مقدمه

قابلیت اعتماد تنش- مقاومت یک ارزیابی از قابلیت اعتماد یک مؤلفه بر حسب میزان "تنش" تحمل شده توسط مؤلفه ( $Y$ ) و "مقاومت" آن برای غلبه بر تنش ( $X$ ) است. هرگاه مقدار تنش از مقدار مقاومت تجاوز کند، یعنی  $X > Y$ ، مؤلفه با مشکل مواجه شده و از کار می‌افتد. بنابراین، قابلیت اعتماد بصورت احتمال عدم خرابی،  $P(X > Y)$ ، تعریف می‌شود [1]. در این مقاله، قابلیت اعتماد مدل تنش- مقاومت با R نشان داده می‌شود. این موضوع کاربردهای زیادی در علوم مهندسی، علوم پزشکی و علوم نظامی

$$\alpha_1, \alpha_2 | x, y \sim \text{Gamma}(n, \sum_{i=1}^n x_i^\theta / \theta) \cdot \text{Gamma}(m, \sum_{j=1}^m y_j^\theta / \theta). \quad (6)$$

قرار دهید  $R = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2)$ . بنابراین توزیع پسین  $R$

بصورت

$$\pi(r, w | x, y) = |J| \cdot \pi(w | x, y) \quad (7)$$

است که در آن  $|J|$  قدر مطلق ژاکوبی تبدیل بالا و برابر است با

$$|J| = \det \begin{bmatrix} -w & \frac{1}{r} - 1 \\ \frac{-w}{r^2} & r \end{bmatrix} = \frac{w}{r^2}. \quad (8)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \pi(r | x, y) &= \int_0^\infty \pi(r, w | x, y) dw \\ &= \frac{\Gamma(n+m)(\sum_{i=1}^n x_i^\theta)^n (\sum_{j=1}^m y_j^\theta)^m}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \\ &\times \frac{r^{m-1}(1-r)^{n-1}}{\left[ (1-r)\sum_{i=1}^n x_i^\theta + r\sum_{j=1}^m y_j^\theta \right]^{(n+m)}}, \quad 0 \leq r \leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

هرگاه  $r_1, r_2, \dots, r_k$  یک نمونه‌ی ارگودیک MCMC از  $\pi(r | x, y)$  باشد، که در آن  $k$  به اندازه‌ی کافی بزرگ است، آنگاه برآوردگر بیز  $R$  بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i. \quad (10)$$

### شیوه‌سازی

در این بخش، عملکرد برآوردگر بیز  $R$  بدست آمده از روش MCMC با برآوردگرهای کلاسیک بدست آمده از [5] و دیگر روش‌های بیزی بیان شده در [3] با استفاده از شیوه‌سازی مقایسه (n,m) می‌شوند. میانگین توان دوم خطای این برآوردگرهای بهمازای (n,m) مختلف بر اساس شیوه‌سازی با ۱۰۰۰ تکرار با هم مقایسه می‌شوند. هم‌چنین، در هر تکرار یک نمونه‌ی MCMC به حجم ۵۰۰۰ تولید می‌شود. میانگین توان دوم خطای این برآوردگرهای در شکل ۱ تا شکل ۴ رسم شده است.

$$f_x(x) = \alpha_1 x^{\theta-1} \exp(-\frac{\alpha_1}{\theta} x^\theta), \quad x > 0, \quad (1)$$

$$f_y(y) = \alpha_2 y^{\theta-1} \exp(-\frac{\alpha_2}{\theta} y^\theta), \quad y > 0. \quad (2)$$

در این صورت قابلیت اعتماد تنش- مقاومت برابر است با

$$R = P(X > Y) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (3)$$

توجه کنید که چون توزیع‌های واپول، ریلی و نمایی حالت‌های خاصی از توزیع با تابع خطر توانی هستند، نتایج بدست آمده در این مقاله یک حالت کلی داشته و برای این توزیع‌ها نیز برقرار است ([3]).

در عمل، اطلاعات کافی در مورد توزیع پارامترها وجود ندارد.

بنابراین، در این مقاله، با توجه به ویژگی‌های خوب پیشین جفریز

[4] از این پیشین ناگاهی بخش استفاده می‌شود. این پیشین بصورت نسبتی از جذر اطلاع فیشر تعریف می‌شود. چون برای توزیع با تابع خطر توانی اطلاع فیشر برابر  $nm / \alpha_1^2 \alpha_2^2$  بدست می‌آید. لذا پیشین جفریز  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ،  $(\alpha_j, \alpha_1, \alpha_2)$ ،  $\pi_j$ ، با  $1 / \alpha_1 \alpha_2$  متناسب است ([3]).

### برآوردگر بیز $R$

فرض کنید  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  و  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع با تابع خطر توانی به ترتیب با پارامترهای  $(\alpha_1, \theta)$  و  $(\alpha_2, \theta)$  باشند. اگر تابع زیان توان دوم خطای در نظر

گرفته شود، برآوردگر بیز  $R$  برابر

$$E(R | x, y) = \int_0^\infty r \cdot \pi(r | x, y) dr \quad (4)$$

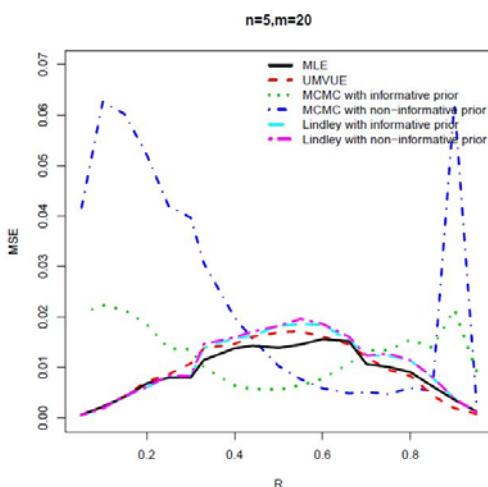
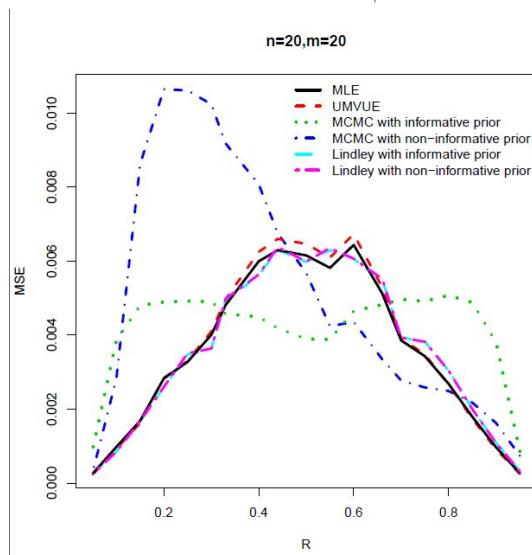
است که در آن  $(r | x, y)$  تابع چگالی پسین  $R$  است.

### روش MCMC برای محاسبه‌ی $R$

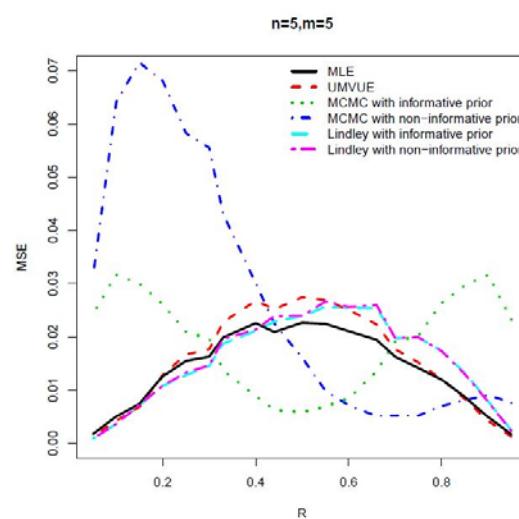
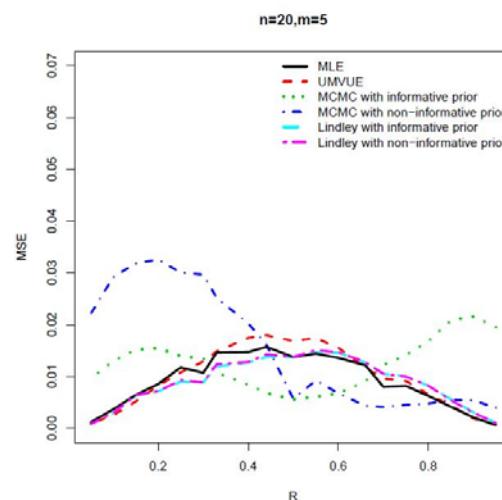
انتگرال (4) دارای فرم بسته‌ای نیست و بنابراین مقدار تقریبی آن را به روش MCMC بدست می‌آوریم. برای استفاده از این روش در ابتدا باید توزیع پسین  $R$  را بدست آوریم. با استفاده از پیشین جفریز، توزیع پسین  $(\alpha_1, \alpha_2)$  بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\pi(\alpha_1, \alpha_2 | x, y) = \alpha_1^{n-1} e^{-\alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i^\theta / \theta} \alpha_2^{m-1} e^{-\alpha_2 \sum_{j=1}^m y_j^\theta / \theta}. \quad (5)$$

بنابراین

شکل ۲: میانگین توان دوم خطای برای برآوردهای  $R$ شکل ۳: میانگین توان دوم خطای برای برآوردهای  $R$  برای  $n=5, m=20$ شکل ۴: میانگین توان دوم خطای برای برآوردهای  $R$  برای  $n=m=20$ 

هنگامی که حجم نمونه پایین باشد، شکل ۱ نشان می‌دهد که شکل میانگین توان دوم خطای برای روش MCMC محاسبه بوده و به ازای  $R$  های نزدیک به  $0.5$  کوچکترین مقادیر را دارد. خطای برآوردهای ارائه شده به ازای  $R < 0.5$  کمتر از برآوردهای کلاسیک متناظر است. با افزایش حجم نمونه‌ها، خطای برآوردهای میانگین توان دوم خطای برای برآوردهای  $R > 0.5$  کوچکتر از دیگر برآوردهای ارائه شده برای  $R > 0.5$  است. در حالت کلی، با توجه به شکل ۱ روش MCMC تحت پیشین ناگاهی بخش جفریز دارای عملکرد مناسبی است.

شکل ۱: میانگین توان دوم خطای برای برآوردهای  $R$  برای  $n=m=5$ 

## مرجع‌ها

- [1] S., Kotz, S. Lumelskii, and M. Pensky, . "The stress-strength model and its generalizations. Theory and Applications". (2003) Singapore: World Scientific.
- [2] Johnson, R. A. 3 Stress-strength models for reliability. Handbook of statistics, (1988) 7, 27-54.
- [3] A., Abravesh, M. Ganji, and B. Mostafaiy, "Estimation of Reliability  $P(X > Y)$  for Distributions with Power

Hazard Function Based on Upper Record Values".  
Mathematical population studies. (2018) accepted paper

[4] H, Jeffreys, "An invariant form for the prior probability  
in estimation problems". Proceedings of the royal society of  
London. Series A, mathematical and physical sciences,  
(1946) 453-461.

[5] Mugdadi, A. R. "The least squares type estimation of  
the parameters in the power hazard function." Applied  
mathematics and computation. (2005) 169(2), 737-748.