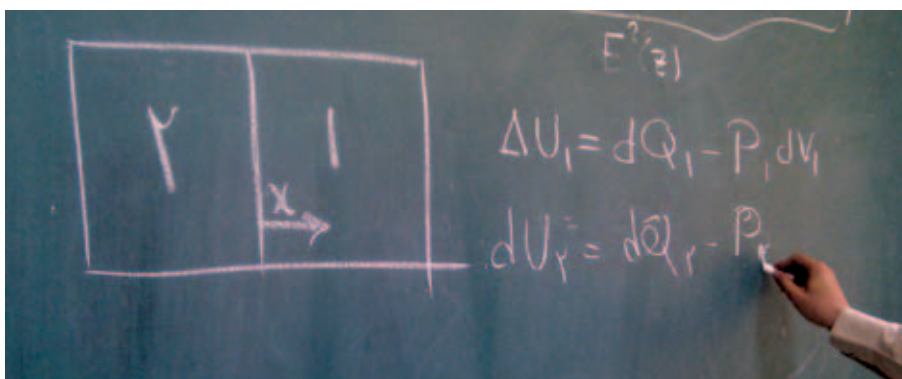


سؤالی در ترمودینامیک

سامان مقیمی عراقی

دانشکده فیزیک-دانشگاه صنعتی شریف



چکیده:

گاه حین درس دادن، متوجه سؤال‌هایی می‌شوم که در ذهن دانشجویان نقش می‌بندد و اذیت‌شان می‌کند. بیشتر اوقات بسیار سخت است که بتوانی این مشکلات را از ذهن دانشجویان بزدایی یا دست کم وضعیت را به نحوی سروسامان دهی که دانشجویان راضی شوند. گاهی هم شده که بتوانی با ارائه‌ی مثالی ساده این مشکل را حل کنی. این مقاله تلاشی است برای این که شاید مثال ارائه‌شده مشکلاتی را در درس ترمودینامیک رفع کند. امیدوارم به‌عکس، مشکلی نیافزاید. این مقاله در سه پرده ارائه می‌شود. پرده‌ی اول که کوتاه هم هست، صرفاً برای ورود به ماجرا نوشته شده است. پرده‌ی دوم اصل داستان است. پرده‌ی سوم هم به‌چالش کشیدن و دقیق کردن نتایجی است که در پرده‌ی دوم ارائه شده و کمی محاسبه دارد. هر چند که سعی کردم تا جای ممکن حجم محاسبات را کم کنم. بنابراین اگر خیلی فرصت ندارید می‌توانید فقط پرده‌ی دوم را بخوانید.

پرده‌ی اول:

سالن ناهارخوری دانشگاه. دو استاد سر یک میز نشسته‌اند و ناهار می‌خورند.

استاد اول: راستی تو سال پیش ترمودینامیک درس می‌دادی، نه؟

استاد دوم: همین‌طور است، چه‌طور مگر؟

استاد اول: بچه‌ها در قسمت‌های مربوط به بازگشت‌پذیری و

بازگشت‌ناپذیری و کلاً قانون دوم ترمودینامیک مشکل دارند. می‌خواستم

ببینم سر کلاس تجربه‌ی خاصی داری که به کمک بیاد؟

استاد دوم: کلاً بخش پردردسری است. من هم موقع درس دادن با

سؤال‌های زیادی مواجه شدم. حالا چی شده؟

استاد اول: حقیقتش دیروز گفته بودم که اگر کسی اشکال دارد بیاد به

اتاقم. دو تا از بچه‌ها آمده بودند و می‌پرسیدند آیا فرآیندی که در آن گرما

مبادله شود و طی آن کل سیستم بازگشت پذیر باشد وجود دارد یا نه. من

هم همان موقع مثالی به ذهنم رسید و برایشان مطرح کردم اما به نظرم مثالم

می‌لنگد. خواستم با تو هم در میان بگذارم ببینم نظر تو چیست.

استاد دوم: می‌خواهی به طرف دانشکده قدم بزنیم و داستان را دقیق‌تر

تعریف کنی؟

استاد اول: خوب است. داستان این جوری بود که ...

دو استاد قدم زنان به سمت دانشکده حرکت می‌کنند و مشغول صحبت

می‌شوند.

پرده‌ی دوم:

اتاق استاد اول. صدای در.

استاد: بفرمایید.

دانشجوی ۱: سلام.

دانشجوی ۲: سلام. گفته بودید این ساعت برای رفع اشکال درس

ترمودینامیک بیاییم. فرصت دارید؟

استاد: البته، بفرمایید. خوب وقتی آمدید. فقط شما دوتایید؟
دانشجوی ۱: بله.

استاد: خوب. مشکل چیست؟

دانشجوی ۱: استاد. مشکل ما فرآیندهای برگشت پذیر است. اصولاً ما نمی‌توانیم درک کنیم که چه طور در عمل چنین فرآیندهایی در چارچوب ترمودینامیک ممکن است وجود داشته باشد! بگذارید واضح تر و با مثال بگویم. برای این که ماشین گرمایی بسازیم، چرخه‌های مختلفی را معرفی کردید و گفتید که این‌ها ماشین‌های ایده‌آل هستند و فرآیندهای چرخه‌ها برگشت پذیر هستند. دقت کنید گفتید برگشت پذیر. اما با این ماشین‌ها مشکلاتی داریم. مثلاً همین ماشین کارنو را در نظر بگیرید. دو تا فرآیند بی‌دررو داریم که هیچ گرمائی رد و بدل نمی‌شود. اما مثلاً فرآیند تک‌دمائی که در آن گرما منتقل بشود و هنوز سیستم برگشت پذیر باشد، درکش برای ما سخت است.

استاد: چطور؟

دانشجوی ۲: بگذارید من بگویم: مثلاً در یکی از قسمت‌های چرخه ما باید به این مخزن گاز گرما بدهیم که حجمش زیاد شود، درست؟ اما اگر بخواهیم به این مخزن گرما بدهیم باید آن را کنار یک جسمی بگذاریم که دمایش اندکی بالاتر باشد تا گرما از این جسم گرم تر به این جسم سردتر منتقل شود. سر کلاس هم دیدیم که اگر گرما از جسم گرم به سرد منتقل شود حتماً آنتروپی زیاد می‌شود و یعنی فرآیند برگشت پذیر نیست. البته من جوابی دارم که از دید هر دوی ما خیلی راضی کننده نیست، از طرفی عملی هم نیست.

استاد: البته با توجه به این که کل سیستم را بسته گرفته‌اید می‌توان نتیجه گرفت که فرآیند برگشت پذیر نیست. وگرنه که در سیستم باز لزوماً افزایش آنتروپی به معنی بازگشت ناپذیری نیست. خوب، حالا بگویید آن جوابی که دارید چی هست؟

دانشجوی ۲: استدلال من این است که اگر اختلاف دمایی جسم گرم تر را با گاز مورد نظرمان خیلی کم بگیریم فرایند تقریباً برگشت پذیر می‌شود. دانشجوی ۱: دقت کن. خودت می‌گویی تقریباً. در ضمن من مفهوم تقریباً برگشت پذیر را نمی‌فهمم. یا برگشت پذیر هست یا نیست! تقریباً یعنی چه؟ استاد: (با خنده): خوب راست می‌گویی دیگر. تکلیف را باید مشخص کنی. یا برگشت پذیر یا برگشت ناپذیر. این وسط که چیز دیگری نداریم.

دانشجوی ۲: درست است. می‌فهمم چه می‌گوئید. خوب میزان برگشت پذیری برای چنین سیستم بسته‌ئی چیست؟ طبیعتاً میزان افزایش آنتروپی. فرض کنید مقدار گرمای ΔQ را قرار است به این سیستم بدهیم. اختلاف دما را هم ΔT بگیریم. در این صورت آنتروپی گاز به میزان $\Delta Q/T$ زیاد می‌شود و اگر جسم گرم را هم یک حمام گرمایی در نظر بگیریم که دمایش تغییر نمی‌کند به اندازه‌ی $\Delta Q/(T+\Delta T)$ کم می‌شود که اگر اختلاف دما را کوچک در نظر بگیریم تغییر کل آنتروپی می‌شود $\Delta Q \Delta T/T^2$ که بسیار کوچک است.

دانشجوی ۱: یعنی اگر اختلاف دما کم باشد تغییر آنتروپی کل کم است، اما صفر نیست! یعنی برگشت پذیر نیست.

دانشجوی ۲: اما تقریباً برگشت پذیر است. یعنی در حد این که این اختلاف دمایی صفر شود تغییر آنتروپی صفر می‌شود.

دانشجوی ۱: اما من ایراد دارم به این استدلال. ببینید، این را که تغییر آنتروپی را هر چه قدر بخواهید کوچک کنید می‌پذیرم. اما صفر نمی‌توانید

بکنید. حد به سمت صفر را هم قبول ندارم. اول این حد به سمت صفر با خود صفر فرق می‌کند. این را از یک مقاله‌ای که به نظر من توفت نوشته بود یاد گرفتم. مثال می‌زد که می‌گفت اگر شما سیبی را گاز بزنید و بعد داخل آن یک نصف کرم بیابید حالتان بد می‌شود که نصف دیگر کرم را خورده‌اید. اگر یک سوم کرم را درون سیب بیابید حالتان بدتر می‌شود، چون معلوم می‌شود که قسمت بیشتری از کرم را خورده‌اید. هر چه قسمت کوچک تری از کرم را بیابید وضع بدتر است. می‌توانید قسمت یافت شده را به سمت صفر میل دهید که یعنی تقریباً یک کرم کامل را خورده‌اید. اما اگر سیبی گاز بزنید و درون آن دقیقاً هیچ کرمی نبابید مشکلی ندارید. کرمی اصلاً در آن نبوده.

غیر از این اگر اختلاف دما را به سمت صفر ببرید من نمی‌توانم قبول کنم که گرما از یکی به یکی دیگر می‌رود. یعنی به نظر من اصلاً این فرآیند شکل نمی‌گیرد. من وقتی چنین استدلالی را می‌پذیرم که شما نشان دهید به ازای تفاوت دمای کاملاً صفر می‌توانید در یک جهت از یک سیستم به سیستم دیگر گرما منتقل کنید.

استاد: آفرین! هم مثالت جالب بود و هم استدلال. البته این مثال این جا کاربرد ندارد و مربوط به حدهای تکین می‌شود، ولی می‌فهمم که چه احساسی داری. نکته‌ات را هم می‌فهمم. من هم پیش ترها همین مشکل را داشتم. البته این را باید تأکید کنم که بازگشت پذیری تحول خود گاز با برگشت پذیری تحول گاز و محیط اطراف متفاوت است. این همان نکته‌ئی است

اما مثلاً فرآیند تک‌دمائی که در آن گرما منتقل
بشود و هنوز سیستم برگشت پذیر باشد، درکش
برای ما سخت است.

که در درس هم اشاره کردم. وقتی صحبت از بازگشت پذیری می‌کنیم، باید دقیقاً مشخص کنیم سیستمی که در نظر داریم چی ست. سیستمی می‌توان یافت که فرآیندی بازگشت پذیر را طی کند اما به محض این که سیستم را بزرگ تر کنیم و ارتباط‌های گرمایی دیگر را در نظر بگیریم دیگر کل سیستم بازگشت پذیر نباشد. چیزی به ذهنم رسید. بگذارید این مشکل را بعداً حل کنیم. الان می‌خواهم ببینم درس را چه قدر خوب یاد گرفته‌اید.

دانشجوی ۱: استاد، ما آمده بودیم که از شما سؤال کنیم نه این که شما از ما امتحان بگیرید!

استاد: البته! ولی چه می‌شود کرد. این جا حرف من برو دارد. حالا بگذارید سؤال را مطرح کنم.

(پای تخته می‌رود و شکلی می‌کشد)



استاد: ظرفی مانند این شکل در نظر بگیرید که با یک پیستون به دو بخش تقسیم شده است. دو بخش پیستون تعداد مشابهی اتم مشابه دارند. فعلاً این پیستون را با دست در جای نشان داده شده نگه می‌داریم. اگر این پیستون را رها کنیم، نقطه‌ی تعادل کجاست؟ پیش از این که جواب بدهید، بگذارید چند تا فرض هم اضافه کنم. اول این که کل ظرف تک‌افتاده است. یعنی با دنیای اطراف تبادل انرژی ندارد. دوم این که فرض کنید پیستون به راحتی گرما را انتقال می‌دهد و بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که گاز دو طرف

پیستون همواره هم‌دما می‌مانند.

دانشجوی ۲: به نظر من جواب بدیهه‌ای است. آن قدر بدیهه که آدم به شک می‌افتد که چرا این سؤال را پرسیده‌اید.

استاد: و جواب چیست؟

دانشجوی ۲: بنا به تقارن، تعادل جایی است که پیستون درست در وسط ظرف قرار بگیرد.

استاد: آفرین. اما حالا بگذارید مسئله را جور دیگری بررسی کنیم. سؤال: با این اوصافی که می‌گویید، دمای نهایی گازها چه قدر است؟

دانشجوی ۲: همان دمای اولیه. چون در گاز کامل انرژی فقط به دما بستگی دارد. دو گاز هم که هم‌دما هستند، پس باید دمای اول و آخر یکی باشد.

استاد: بسیار خوب. حالا قانون اول ترمودینامیک را برای هر کدام از گازهای قسمت‌های یک و دو بنویسید.

دانشجوی ۱: استاد این هم شد سوال! معلوم است دیگر.

(پای تخته می‌رود و می‌نویسد:)

$$\Delta U_1 = \Delta Q_1 + W_1$$

$$\Delta U_2 = \Delta Q_2 + W_2$$

دانشجوی ۱: فکر کنم که نمادها هم مشخص باشد چی هستند.

استاد: خوب اگر این دو رابطه را با هم جمع کنیم چه می‌شود؟ می‌خواهم هر طرف را مستقلاً حساب کنید.

دانشجوی ۱: از آنجائی که با بیرون تبادل انرژی نداریم، $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$. این از سمت چپ تساوی. سمت راست هم ساده است. گرمایی که هر کدام از گازها دریافت می‌کند برابر است با گرمایی که گاز دیگر می‌گیرد. پس مجموع گرماها هم صفر است. کار را هم راحت می‌توان حساب کرد:

$$W_i = \int_{V_i}^{V_i'} -P_i dV_i = Nk_B T \log(V_i/V_i')$$

که اگر برای گاز یک و دو این‌ها را با هم جمع کنیم برابر می‌شود با

$$W_1 + W_2 = Nk_B T \log(V_1 V_2 / V_1' V_2')$$

استاد: خوب، حجم‌های اولیه را برابر با V و $(1-\alpha)V$ بگیرید که طبیعتاً α بین صفر و یک است. حجم نهایی را هم که مشخص کرده‌اید. نتیجه چه می‌شود؟

دانشجوی ۱: کمی عجیب به نظر می‌رسد. چون جواب می‌شود $Nk_B T \log(4\alpha(1-\alpha))$ که خوب لزوماً صفر نیست. یعنی سمت راست معادله با سمت چپ نمی‌خواند. مثلاً اگر α را یک چهارم بگیریم عبارت بالا می‌شود $Nk_B T \log(3/4)$.

دانشجوی ۲: شاید فرضیات مان درست نبوده است. مثلاً به نظرم فرض شده که فرآیند تک دما است. شاید فرآیند تک دما نیست.

دانشجوی ۱: ولی طبق استدلال‌های خود باید تک دما باشد. چون حتی در مراحل میانی هم که انرژی‌ئی با بیرون رد و بدل نشده و انرژی کل هم که فقط تابعی از دماست. دو گاز هم هم‌دما فرض شده‌اند، پس حتماً دما همان دمای اولیه است.

دانشجوی ۲: (سرش را می‌خاراند): چه می‌دانم، لابد فرض هم‌دما درست نیست. **استاد:** نه، فعلاً با آن فرض کاری نداشته باشید. اگر فرآیند به اندازه‌ی کافی کند باشد شاید بتوان چنین فرضی کرد.

دانشجوی ۱: پس مشکل چیست؟

استاد: پس بگذارید یک سؤال دیگر بپرسم! کاسه‌ئی در اختیار داریم و تیله‌ئی را در درون آن می‌گذاریم تا بتواند قل بخورد. حالت اولیه را جایی بگیرید که تیله کف کاسه نیست و نزدیک لبه است. حالا اگر از شما بپرسم حالت تعادل تیله کجاست چه می‌گویید؟ طبیعتاً می‌گویید کف کاسه. حالا اگر از شما بپرسم انرژی در کف کاسه کم‌تر می‌شود یا همان می‌ماند چه می‌گویید؟

دانشجوی ۲: البته انرژی پتانسیل کم می‌شود، اما تیله همان پایین نمی‌ماند و از آن طرف کاسه بالا می‌رود و حرکت نوسانی خواهد داشت.

استاد: قربان آدم چیز فهم. خوب چرا همین را در مورد گازهای مسئله‌ی خودمان نمی‌گویید.

دانشجوی ۱: چون ربطی ندارد! این جا انرژی جنبشی داریم ولی در مسئله‌ی گاز که این جور نیست..... (با کمی تردید) هست؟

استاد: اصلاً یک سؤال دیگر. فشار دو طرف پیستون در مسئله‌ی ما برابر است؟ **دانشجوی ۲:** آها! چه قدر جالب. نه برابر نیست. یعنی به پیستون نیرو وارد می‌شود، یعنی شتاب می‌گیرد، یعنی انرژی جنبشی خواهد داشت و این را از سیستم گازی می‌گیرد! خیلی هیجان‌انگیز شد. به نقطه‌ی تعادل هم که می‌رسد سرعت دارد و به حرکتش ادامه می‌دهد تا حالتی مشابه حالت اول بگیرد، یا بهتر بگوییم تصویر آینه‌ای آن.

دانشجوی ۱: واقعاً؟!

استاد: به نظرتان بعد چه می‌شود؟

دانشجوی ۲: سیستم نوسان می‌کند، نه؟

استاد: البته. به نظرتان فرآیند بازگشت‌پذیری که در آن گرما رد و بدل شود نیافتید؟

دانشجویا: همین طور است! خیلی جالب شد. دو سیستم هم‌دما هستند. اما گرما به هم می‌دهند. تازه فرآیند تک‌دما هم هست. درست مثل چرخه‌ی کارنو. خیلی ممنون استاد، واقعاً جالب بود. برویم به بقیه هم بگوییم. خداحافظ استاد. **استاد:** خداحافظ. البته فعلاً چون به زودی با یک سؤال دیگر برمی‌گردید. (و بعد با خودش می‌گوید: ای بچه‌های عجول. آن قدر عجله می‌کنید که

دو سیستم هم‌دما هستند. اما گرما به هم می‌دهند.
تازه فرآیند تک دما هم هست. درست مثل
چرخه‌ی کارنو.

نفهمیدید فرآیند تک‌دما نیست. آخر اگر انرژی از سیستم گازی به پیستون برود که دمایش کم می‌شود. تازه باید ببینیم فرض هم‌دما بودن دو مخزن تا چه حدی می‌تواند درست باشد. چون کمی مسئله عجیب به نظر می‌رسد.

پرده‌ی سوم:

اتاق مشترک استادان در دانشکده. دو استاد مشغول صحبت هستند. استاد اول کاغذهایی در دست دارد.

استاد اول: بعد از این گفت‌وگو شروع به محاسبه کردم. پاک‌نویس شده‌ی محاسبه‌هایم را در این ورقه نوشته‌ام. می‌خواهی نگاهی بیاندازی؟ **استاد دوم:** بدم نمی‌آید.

فرض کنیم که طول کل محفظه $2L$ مساحت سطح مقطع آن A است. تعداد

dt/dx معادله دیفرانسیلی فقط بر حسب فشار به دست می آید:

$$\frac{dP_1}{du} = \frac{P_1}{3} \left(\frac{4}{1-u} - \frac{1}{1+u} \right)$$

که $u=x/L$

حل این معادله ساده است و به دست می آید $P_1 = \frac{P_0}{(1-u)^{4/3}(1+u)^{1/3}}$ فشار در نقطه تعادل است. حالا با داشتن فشار، به راحتی دما را هم می توان حساب کرد که عبارت ساده تری است:

$$T(x) - T_0 = \frac{2 AL P_0}{3 N k} \frac{u}{(1-u^2)^{1/3}}$$

در این رابطه T_0 دمای گاز در حالتی است که پیستون در حال تعادل قرار دارد. در $u=0$ دما همان مقدار T_0 است و هر چه به لبه های محفظه نزدیک شویم دما افزایش می یابد و در حالت حدی $|u| \rightarrow 1$ دما بسیار بزرگ می شود که طبیعی ست. چون اختلاف فشار در این وضعیت بسیار زیاد است و کار تبادل شده حتی در جابجایی های کوچک هم بزرگ است.

برای به دست آوردن بستگی x به زمان کافی ست به معادله (۱) توجه کنیم و سرعت را به شکل تابعی از دما و در نتیجه به عنوان تابعی از مکان حساب کنیم. نتیجه ی کار، یعنی بستگی مکان پیستون به زمان چیز پیچیده ای ست، برای همین شاید بهتر باشد نوسان های کوچک حول نقطه تعادل را بررسی کنیم. قانون دوم نیوتون را می نویسیم و با استفاده از برابری هایی که تا کنون به دست آورده ام آن را ساده می کنیم:

$$m\ddot{x} = -A(P_1 - P_2) = -AP_0 \frac{2u}{(1-u^2)^{4/3}}$$

که برای نوسان های کوچک دوره ی تناوبی برابر با $2\pi \sqrt{\frac{Lm}{2AP_0}}$ به دست می آید. می توان مقادیر نوعی گذاشت تا حسی از این عدد به دست بیاید. مثلاً فشار را یک جو در نظر می گیریم و ابعاد محفظه را هم $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ فرض می کنیم. اگر پیستون آهنی باشد و ضخامتی حدود چند میلیمتر داشته باشد جرم آن حدوداً چند صد گرم می شود، آن را 300 گرم می گیریم. با این حساب دوره ی تناوب حدود صدم ثانیه به دست می آید. این زمان آن قدر کوچک نیست که فرضیات ما درست از آب درآید: فرضیاتی مثل این که گاز دو طرف همواره هم دما می مانند. با چنین کمیت هایی بهترین فرض، فرض بی دررو بودن فرآیندها ست و در نتیجه تمام محاسبات را باید به دور ریخت. اما آیا واقعاً راهی نیست که کاری کنیم دمای دو طرف یکسان بماند؟

باشیم و فشار پیستون را هم به اندازه ی یک درصد فشار جو برسانیم در این صورت دوره ی تناوب حدود چند دقیقه می شود. شاید بتوان فرض کرد که با دوره تناوبی حدود دقیقه این دو محفظه فرصت هم دما شدن را داشته باشند.

استاد دوم: شاید به نظر برسد که این تغییرات شرایط را بهتر می کند، اما مساله این است که اگر فرآیند کند شود، تبادل گرما هم کند می شود، چون اختلاف دما بین دو گاز کم است و در نتیجه آهنگ تبادل گرمایی هم

ذرات گاز هر طرف را هم N می گیریم. فشارها و حجم های هر طرف را با اندیس های یک و دو نشان می دهیم. کل سیستم را هم که هم دما فرض کرده ام و نیازی به اندیس گذاری برای دما نیست. این فرض همدمایی در واقع فرض مناسبی نیست. همان طور که در محاسبه های انتهای این جا می بینیم، فرض بهتر برای حالت های معمول و سیستم هایی که دور و برمان می بینیم، فرض بی دررو است.

به مساله بپردازیم. مشخص است که حالت تعادل جایی است که پیستون دقیقاً در وسط محفظه قرار گرفته باشد. میزان جابجایی از نقطه تعادل را با کمیت x نشان می دهیم. با توجه به این که گاز کامل در نظر گرفته ایم برای فشار و دمای هر طرف می توانیم بنویسیم:

$$P_1 V_1 = N k T = P_2 V_2$$

یعنی با توجه به قراردادهای بالا داریم:

$$P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2} = P_1 \frac{L-x}{L+x}$$

بینیم سوال مهم برایم چیست. اول این که می خواهیم بدانم با تغییر مکان پیستون که دمای گاز چگونه تغییر می کند. به عبارتی می خواهیم بدانم دما چه تابعی از x است. نکته ی بعدی ئی که برایم جالب است این است که بدانم دوره ی تناوب نوعی چنین سیستمی چه قدر است. پس باید به نوعی وابستگی زمانی x را پیدا کنم. بپردازم به سؤال اولم: این جور استدلال می کنم که برابر با کاری که روی پیستون انجام می شود، از انرژی سیستم گازی کم می شود و به انرژی جنبشی پیستون اضافه می شود، یعنی

$$-(P_1 - P_2)A dx = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -d(3NkT) \quad (1)$$

با این حساب می توانم معادله دیفرانسیلی برای دما در بیآورم:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{A}{3Nk} (P_1 - P_2) = \frac{A}{3Nk} P_1 \left(1 - \frac{L-x}{L+x}\right)$$

اما هنوز فشار را به عنوان تابعی از مکان پیستون ندارم. نیاز به معادله ی دیگری دارم، شاید معادله ی حالت بتواند کمک کند. اگر از دو طرف معادله حالت نسبت به x مشتق بگیرم می توانم رابطه ای بین مشتق دما نسبت به مکان و مشتق فشار نسبت به مکان به دست آورم. بعد با ترکیب با معادله ی بالا و حذف

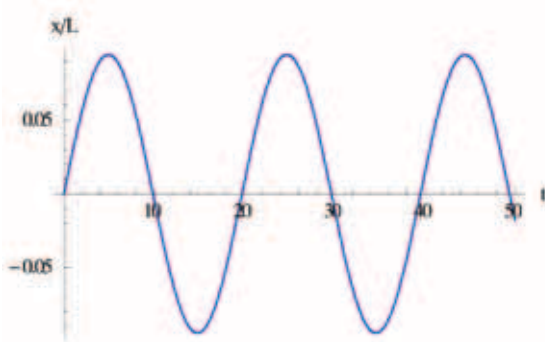
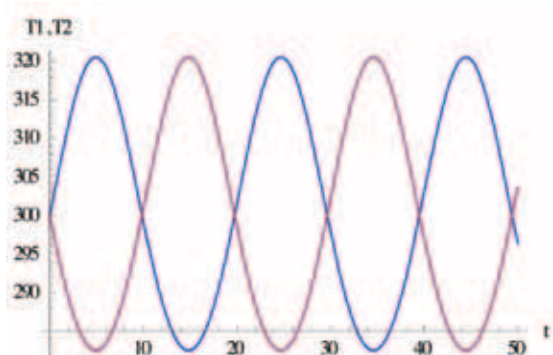
استاد اول: خوب، نظرت چیست؟

استاد دوم: همان طور که می گویی فرض هم دما بودن به نظر مشکل دار می آید. دست کم با این محاسبه های آخر که می توان مطمئن بود در حالت های معمول باید فرآیند را بی دررو فرض کرد.

استاد اول: اما می توان با سازوکاری جرمی بسیار سنگین را به پیستون متصل کرد که عملاً جرم آن را بسیار بزرگ کند، حتی جرمی مثلاً در حدود چند هزار تن! آزمایش فرضی ست دیگر! اگر چنین جرمی داشته

استاد دوم: بعید می‌دانم معادلات حل تحلیلی داشته باشد. اما به نظرم حل عددی کافی است. بگذار برویم سراغ کامپیوتری که تو این اتاق است. فکر کنم با استفاده از ممتیکا بتوانم در عرض چند دقیقه حلش را به دست آورم. به پای کامپیوتر می‌رود و کمی مشغول می‌شود.

استاد دوم: بین جواب‌ها خیلی جالبند. من R را گذاشته‌ام یک ده‌هزارم. فکر کنم با شرایطی که بالا گفتی معادل جرمی به اندازه‌ی چندصد تن باشد. شرایط اولیه را هم این جور گرفته‌ام که پیستون درست در وسط قرار دارد و در مورد سرعت اولیه هم فرض می‌کنم $\dot{x}(0) = 0.03 \text{ s}^{-1}$. دمای اولیه‌ی هر دو گاز را سیصد کلوین گرفته‌ام و فرض کردم فشار آنها در ابتدای حرکت برابر با یک صدم فشار جو است. حالا g را از صفر تا عددهای بزرگ تغییر می‌دهم و نمودارهای دما و مکان را برحسب زمان می‌کشم. نمودار اول حالت بی‌دررو است. آن را تا زمان ۵۰ ثانیه کشیده‌ام. دماهای دو طرف در فاز مخالف نوسان می‌کنند و همه چیز مرتب است. مکان جسم هم نوسانی غیر میرا دارد.



شکل ۱- نمودارهای دماها و مکان برحسب زمان به ازای $g=0$

شکل بعدی به ازای $g=1 \text{ s}^{-1}$ است. دقت کن که تا زمان ۱۰۰ ثانیه کشیده‌ام اتفاقی که می‌افتد این است که نوسان به تدریج میرا می‌شود و دمای مجموعه هم زیاد می‌شود، درست برخلاف حالت قبلی. این یعنی انرژی جنبشی به تدریج به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود و طبیعتاً سیستم فرآیندی برگشت پذیر را طی نمی‌کند. نکته‌ی دیگر این است که هم‌چنان دماهای دو طرف در فاز مخالف نوسان می‌کنند.

کم می‌ماند. علاوه بر این، انتقال گرما بین دو طرف باید آنتروپی کل را زیاد کند، یعنی کل سیستم نمی‌تواند حرکت تناوبی داشته باشد. در این معادلات هیچ اشاره‌ای به انتقال گرما نکرده‌ای. برای این که ببینیم این فرضیاتی که کرده‌ای در چه شرایطی معقول هستند، بیا دمای دو طرف را فعلاً یک‌سان بگیریم و قانون اول ترمودینامیک را برای هر کدام از قسمت‌های چپ و راست گاز جداگانه و با در نظر گرفتن تبادل گرمایی از طریق پیستون بنویسیم:

$$\frac{3}{2} Nk \dot{T}_1 = P_1 A \dot{x} + \frac{KA}{d} (T_2 - T_1)$$

$$\frac{3}{2} Nk \dot{T}_2 = -P_2 A \dot{x} - \frac{KA}{d} (T_2 - T_1)$$

که K ضریب رسانایی گرمایی پیستون و d ضخامت آن است. علاوه بر این دو، معادله‌ی حرکت پیستون را هم داریم: $m\ddot{x} = (P_2 - P_1)A$. از طرفی رابطه‌ای بین فشارهای هر طرف و x و دماها داریم: $P_1 = \frac{Nk}{LA} \frac{T_1}{1 - \frac{x}{L}}$ و $P_2 = \frac{Nk}{LA} \frac{T_2}{1 + \frac{x}{L}}$. به این ترتیب دسته معادلاتی داریم که عملاً باید برای مکان پیستون و دماهای هر طرف حل کنیم. حالا ضریب رسانایی گرمایی به‌دل خواه ماست و می‌توانیم کنترل کنیم که چه قدر دو طرف فرصت دارند به تعادل برسند. اگر K کوچک باشد تقریب بی‌دررو تقریب خوبی است و اگر K بزرگ باشد شاید دو طرف دماهای نزدیک به هم داشته باشند، البته مطمئن نیستیم.

استاد اول: موافقم. محاسبه‌اش سر راست است. ببین: روی کاغذ چیزهایی می‌نویسد و به استاد اول نشان می‌دهد.

$$\dot{T}_1 = \frac{2}{3} \frac{T_1}{1 - \frac{x}{L}} \frac{\dot{x}}{L} + g(T_2 - T_1)$$

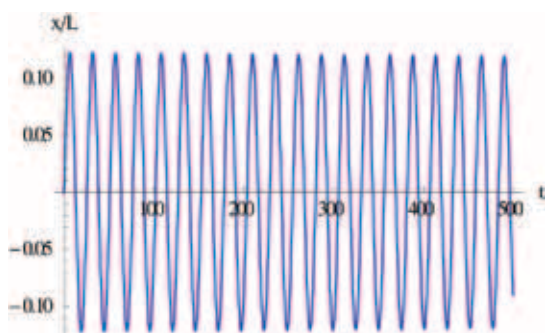
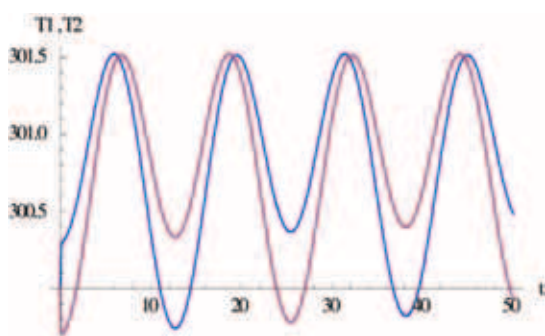
$$\dot{T}_2 = \frac{2}{3} \frac{T_2}{1 + \frac{x}{L}} \frac{\dot{x}}{L} - g(T_2 - T_1)$$

$$\frac{\ddot{x}}{L} = R \left(\frac{T_1}{1 - \frac{x}{L}} - \frac{T_2}{1 + \frac{x}{L}} \right)$$

استاد اول: همان‌طور که می‌بینی فقط دو تا پارامتر آزاد توی مسئله هست. یکی که اسمش را R گذاشته‌ام برابر است با $\frac{Nk}{mL^2}$ و دومی که نامش را g گذاشته‌ام برابر است با $\frac{2KA}{3dNk}$. با توجه به این که در اولی جرم پیستون در مخرج قرار دارد، می‌توان زمان تناوب را با آن کنترل کرد. اصولاً برای این که حالت تقریباً ایستا داشته باشیم خوب است که این کمیت کوچک باشد. در دومی هم ضریب رسانایی گرمایی وجود دارد و از نظر ابعادی وارون زمان است، به عبارتی عکس این کمیت مقیاس مشخصه‌ی زمانی‌ست که برای هم‌دما شدن نیاز است. همان‌طور که گفتی از حالت بی‌دررو تا حالتی را که کاملاً گرما به راحتی رد و بدل می‌شود می‌توان با آن بررسی کرد. به نظرت می‌شود این معادله‌ها را حل کرد؟

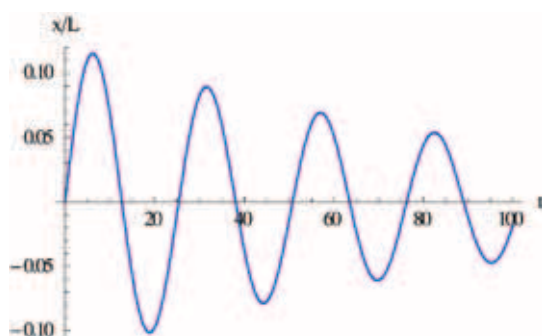
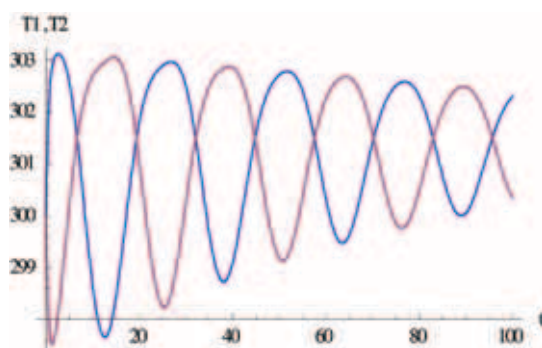
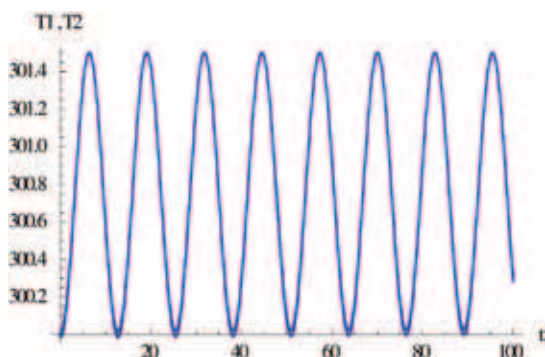
رفتار دماها خیلی عجیب تر شده و خیلی با نوسان سادهی میرا تفاوت دارد. اما به نوعی تناوبی است همراه با گرم شدن تدریجی کل مجموعه.

در گام بعدی g را برابر با 10 s^{-1} می گیریم. نوسان های دماها به هم فاز بودن نزدیک می شوند. اگر بیشتر دقت کنیم می بینیم که فاصله ی بین قله ها یکی در میان زیاد و کم می شود و برای هر قسمت گاز، این تناوب برعکس دیگری است. نوسان پیستون هم چنان میراست، اما برای این که میرایی نوسان را ببینیم ناچار شده ام نمودار مکان زمان را تا ثانیه ی ۵۰۰ بکشم.



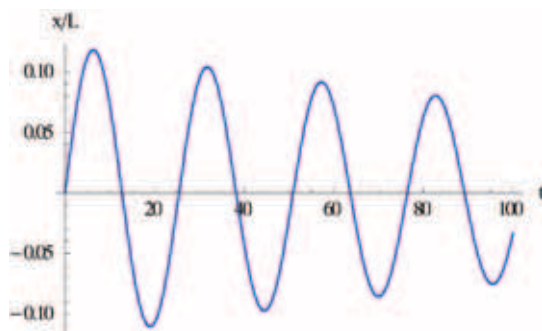
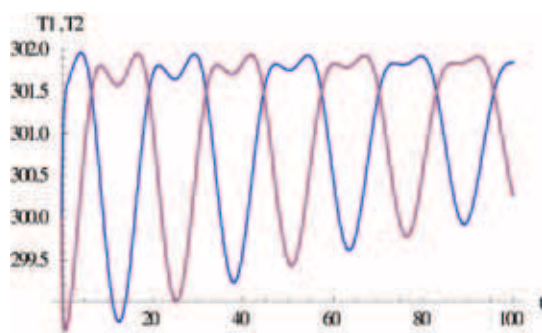
شکل ۴ - نمودارهای دماها و مکان بر حسب زمان به ازای $g = 10 \text{ s}^{-1}$

در نمودار آخر هم g را بسیار بزرگ گرفته ام. برابر با 200 s^{-1} . در این حالت دماها کاملاً روی هم می افتند و در تقریبی که من می بینم تفاوتی بین شان نیست. در مورد مکان پیستون هم تا ۵۰۰ ثانیه من افت نمی بینم.

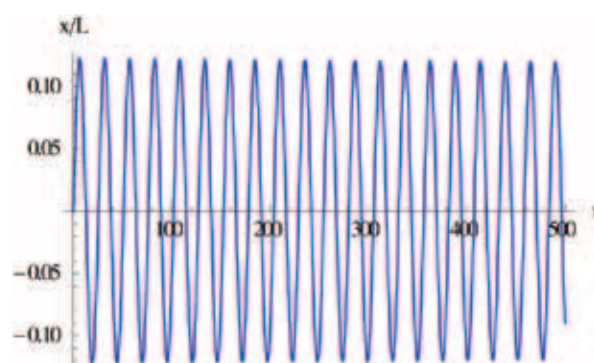
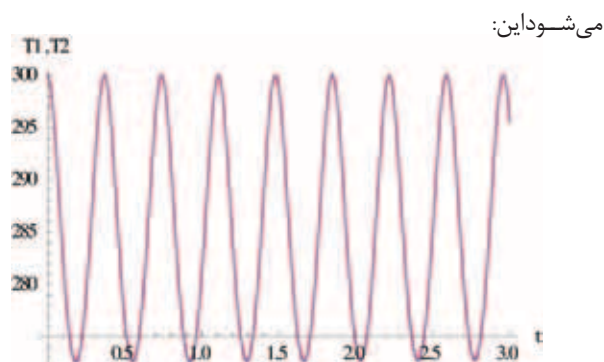


شکل ۲ - نمودارهای دماها و مکان بر حسب زمان به ازای $g = 10 \text{ s}^{-1}$

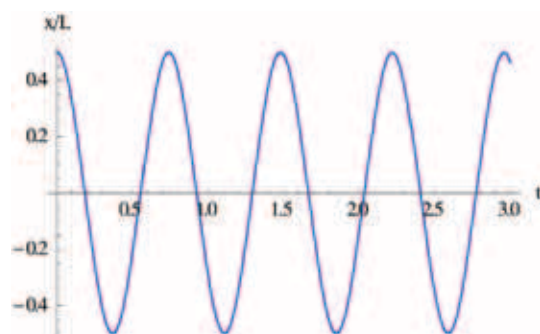
حالا $g = 2 \text{ s}^{-1}$ را بررسی می کنم. رفتار دماها خیلی عجیب تر شده و خیلی با نوسان سادهی میرا تفاوت دارد. اما به نوعی تناوبی است همراه با گرم شدن تدریجی کل مجموعه. مکان پیستون هم نوسانی و میراست.



شکل ۳ - نمودارهای دماها و مکان بر حسب زمان به ازای $g = 2 \text{ s}^{-1}$



شکل ۵ - نمودارهای دماها و مکان بر حسب زمان به ازای $g=200 \text{ s}^{-1}$



شکل ۶ - نمودارهای دماها و مکان بر حسب زمان به ازای مقادیر واقعی

چیزی که جالب است این است که زمانی که پیستون وسط مخزن است، کم‌ترین دما را داریم و وقتی در دو گوشه هستیم دما به بیشترین مقدار خود می‌رسد. البته طبیعی‌ست، چون وقتی پیستون در وسط مخزن است بیشترین سرعت را دارد و مقداری از انرژی سیستم را با خود به همراه دارد، بنابراین باید انرژی گرمایی کم‌ترین شود. اما وقتی به لبه‌ها می‌رسد سرعت پیستون صفر است و انرژی جنبشی هم صفر. پس باید دما در بیشترین حالت خودش باشد. به این ترتیب به نظر می‌رسد که جوابی که برای دانشجویان گفته‌ای درست است اما فقط زیاد کردن جرم و کم کردن فشار کافی نیست. باید ضریب رسانش گرمایی را هم زیاد در نظر بگیریم.

استاد اول: البته من این بین حساب کردم که اگر پیستون را از فلزی معمولی بگیریم با ضخامتی در حد سانتی‌متر و با فرضیاتی که در مورد دما و فشار کرده‌ایم، کمیت g از مرتبه‌ی 10^4 s^{-1} درمی‌آید که با توجه به این حد عددی بسیار خوب است. تنها عدد غیرمعقول همان جرم پیستون است.

واقعاً هیجان انگیز است. دما در کسری از ثانیه به اندازه‌ی ۲۵ درجه تغییر می‌کند و مس می‌تواند این قدر خوب گرمای یک طرف را به دیگری انتقال دهد!

استاد دوم: این که خیلی بزرگ است. شاید با این وضع لازم نباشد که جرم را این قدر بزرگ بگیریم. بیا یک مسئله‌ی واقعی‌تر را بررسی کنیم. مثلاً کل ظرف را استوانه‌ای به طول نیم متر ($L=0.25 \text{ m}$) و سطح مقطع 0.01 m^2 در نظر می‌گیریم. پیستون را هم فرض کنیم از جنس مس باشد با چگالی حدود ۹۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب. ضخامتش را هم یک سانتیمتر می‌گیریم. در این صورت جرمش حدوداً می‌شود ۹۰۰ گرم. ضریب رسانایی گرمایی مس $K=390 \text{ J/smK}$ است. دمای اولیه را ۳۰۰ کلوین می‌گیریم و فرض می‌کنیم $Nk=0.01 \text{ J/K}$ ، در این صورت دو پارامتر مسئله مقادیر زیر را در واحدهای SI دارند: $R=0.18$ و $g=26000$. بگذار این مقادیر را سراسر کنیم و فقط مرتبه‌ی بزرگی را نگه داریم، یعنی بگیریم $R=0.1$ و $g=10000$. حالا به اندازه‌ی حدود ده سانتیمتر پیستون را به طرف راست می‌کشیم و رها می‌کنیم. نمودارش

نوسان‌ها خیلی سریعند و من تا زمان سه ثانیه را بیشتر نکشیده‌ام. ولی جالب است که دماها یک‌سان می‌مانند. یعنی تقریب تک‌دما بودن، تقریب خوبی است. واقعاً هیجان انگیز است. دما در کسری از ثانیه به اندازه‌ی ۲۵ درجه تغییر می‌کند و مس می‌تواند این قدر خوب گرمای یک طرف را به دیگری انتقال دهد!

استاد اول: واقعاً هیجان انگیز است! شاید با این نوسان‌های شدید باید به این هم فکر کنیم که آیا خود گازهای هر طرف هم فرصت دارند که به تعادل برسند. البته موارد دیگری هم هست، مثلاً ما از ظرفیت گرمایی پیستون و این جور چیزها هم چشم‌پوشی کرده‌ایم که فکر می‌کنم خیلی اهمیت‌ندارد.

استاد دوم: قسمت میراشدن نوسان در حالت‌های که رسانش خیلی زیاد نیست هم برای من خیلی جالب بود. شاید این سؤال پیش بیاید که به نظر می‌رسد در اینجا چیزی شبیه اتلاف وجود دارد، با این حال انرژی داخلی کل تغییر نمی‌کند، پس اتلاف چه چیزی را تلف می‌کند؟ در واقع «اتلاف» در این جا باعث کاهش انرژی آزاد هلمهولتز می‌شود و نه انرژی.

استاد اول: خیلی ممنون. خیلی لطف کردی، حالا خیالم راحت‌تر شد. فکر کنم بتوانم محاسبه‌ی تغییرات آنتروپی و انرژی آزاد هلمهولتز را به عنوان تمرین به خود دانشجویان بسپرم.

تشکر:

دوست دارم از داور ناشناسی که با دقت مقاله را خواندند و نظرات بسیار روشن‌گرانه‌ای دادند و باعث شدند مقاله بهتر شود تشکر کنم. همچنین از دبیر مقالات مجله، دکتر فرهنگ لران که زمینه‌ی این بحث غیابی با داور را به وجود آورد متشکرم.