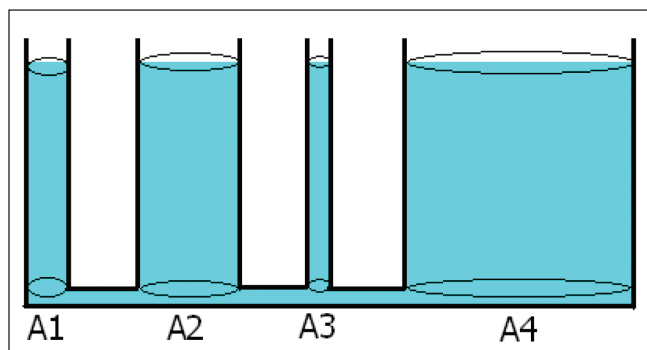


فیزیک به یافتن پاسخ مسائل ریاضی کمک می‌کند

کیوان آقابابایی سامانی
دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

با ارائه‌ی مثال نشان می‌دهیم که چگونه حباب صابون، یافتن پاسخ برخی مسائل دشوار ریاضی را آسان‌تر می‌کند.

با روش مستقیم هم به سادگی حل می‌شود ولی در بعضی موارد مسئله دشوار است و به سادگی قابل حل نیست.



شکل ۱

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

فرض کنید چهار شهر درست در چهار رأس مربعی قرار گرفته‌اند. می‌خواهیم این چهار شهر را با شبکه‌ی جاده‌ای به هم مرتبط کنیم طوری که بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر مسافرت کرد و مجموع طول جاده‌ها هم کمینه باشد. برای آگاهی از تاریخچه‌ی این مسئله به جعبه‌ی شماره‌ی ۱ مراجعه کنید. در

در ریاضیات مسئله‌هایی هست که صورت آنها با معلومات مقدماتی (مثلاً در حد دبیرستان) به سادگی قابل فهم است ولی حل آنها - دست کم با روش‌های مقدماتی - بسیار دشوار است. گاهی فیزیک کمک می‌کند که بدون حل مسئله، پاسخ آنها را به سادگی بیابیم. در این نوشته نگاهی به نمونه‌ای از این مسائل می‌اندازیم. علت کارکرد این روش این است که پدیده‌های فیزیک، در کمال شگفتی، از قوانین ریاضی پیروی می‌کنند. بنابراین گاهی می‌توان برای یافتن پاسخ مسئله‌ی ریاضی به پدیده‌ای فیزیکی مراجعه کرد که قانون ریاضی حاکم بر آن با مسئله‌ی ریاضی مورد نظر مرتبط است.

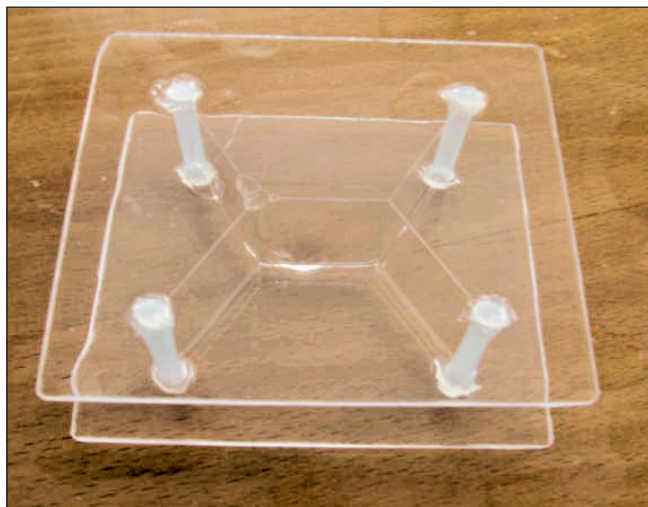
ابتدا به مثالی ساده می‌پردازیم:

فرض کنید می‌خواهیم عدد N را به صورت مجموع m عدد با نسبت‌های

مشخص بنویسیم یعنی

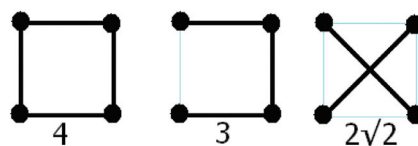
$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_m$$

طوری که نسبت هر زوج از عددهای N_i مشخص باشد. برای به دست آوردن پاسخ این مسئله می‌توان m ظرف استوانه‌ای تهیه کرد که نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت‌های خواسته شده باشد و این ظرف‌ها با لوله‌ی باریکی از پایین به هم متصل باشند (شکل ۱). اگر مقداری آب به حجم N در این ظرف‌ها بریزیم ارتفاع آب در همه‌ی ظرف‌ها یکسان خواهد بود. بنابراین حجم آب هر ظرف برابر با عدد N_i مربوط به آن ظرف خواهد بود. البته این مسئله، ساده است که

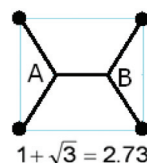


شکل ۴

شکل ۲ چند شبکه‌ی جاده‌ای به همراه مجموع طول جاده‌ها نشان داده شده (برای سادگی طول ضلع مربع را ۱ گرفته ایم). ولی هیچ کدام از اینها پاسخ مسئله نیستند. پاسخ درست در شکل ۳ نشان داده شده است:



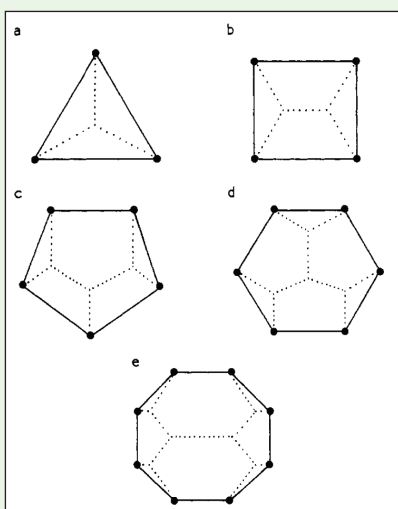
شکل ۲



شکل ۳

جعبه ۱

این مسئله آن طور که در کتاب ریاضیات چیست نقل شده [۱] به قرن نوزدهم برمی گردد. ظاهراً اولین بار ریاضی دان سویسی، اشتاینر (Jakob Steiner 1796-1863) این مسئله را مطرح کرده است. صورت اولیه‌ی مسئله این بوده است: سه نقطه در یک صفحه قرار دارند. نقطه‌ی P را در این صفحه چنان بیابید که مجموع فاصله‌های آن از سه نقطه‌ی مفروض کمینه شود. می توان نشان داد نقطه‌ی P را باید چنان انتخاب کرد که زوایای بین خطوطی که این نقطه را به سه نقطه‌ی مفروض وصل می کند 120° درجه باشد [۲]. برای تعمیم مسئله می توان به جای سه نقطه، N نقطه در نظر گرفت. در شکل ۵، تعدادی از این حالت‌ها را می توان مشاهده کرد. در حالت کلی مسیری که کمترین طول را دارد $N-2$ نقطه‌ی تقاطع میانی را در بر می گیرد.



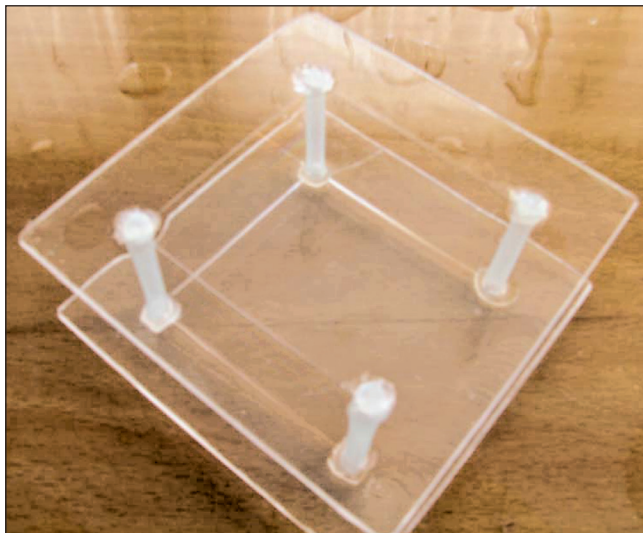
شکل ۵

این مسئله نمونه‌ای از رده‌ی بزرگی از مسائل است که هدف آنها کمینه کردن کمیته (مثلاً در اینجا مجموع طول جاده‌ها) است. برخی از این مسائل را می توان با روش‌های استاندارد، مانند معادلات اویلر-لاگرانژ حل کرد (با این روش می توان مثلاً نشان داد که کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه خط راست

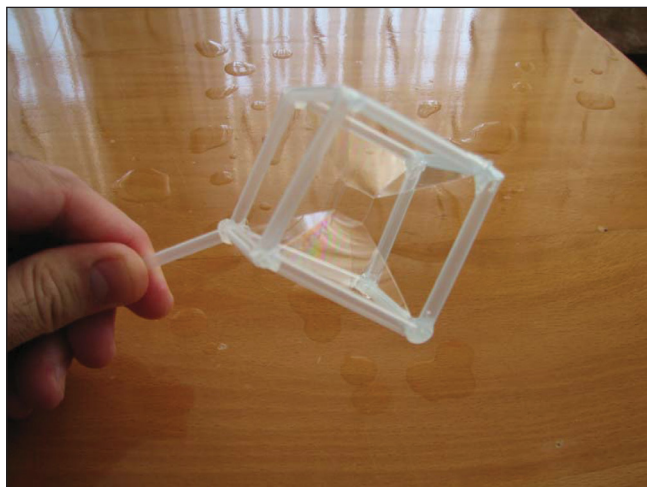
زاویه‌ی بین خطوطی که در نقاط A و B به هم می رسند 120° درجه است. اکنون نشان می دهیم چگونه می توان از حباب صابون برای یافتن پاسخ مسئله استفاده کرد. حباب صابون اگر به شکل آزاد تشکیل شود شکل کروی به خود می گیرد اما اگر شرایط مرزی مشخصی در کار باشد، این شرایط مرزی بر شکل حباب تأثیر می گذارد. در حالت کلی حباب صابون شکلی به خود می گیرد که انرژی سطحی آن کمینه شود. انرژی سطحی متناسب با مساحت است (به جعبه‌ی شماره‌ی ۲ مراجعه کنید). بنابراین کمینه کردن انرژی سطحی هم‌ارز است با کمینه کردن مساحت. از همین نکته استفاده می کنیم و پاسخ پرسش بالا را به دست می آوریم.

دو صفحه‌ی شفاف مربع شکل به ابعاد تقریبی 10 سانتی متر تهیه کنید (مثلاً می توانید از جلد سی دی استفاده کنید). این دو صفحه باید موازی با هم و به فاصله‌ی تقریبی 2 تا 3 سانتی متر از یک دیگر قرار گیرند و بین آنها چهار میله‌ی هم اندازه (مثلاً می توانید از نی یا لوله‌ی خودکار استفاده کنید) طوری قرار داده شوند که مربعی بسازند (ابعادی که برای صفحه‌ها و فاصله‌ی بین آنها داده شده تقریبی ست). اگر ابعاد بزرگ تر شوند انجام آزمایش مشکل تر می شود مثلاً به میزان بیش تری صابون حل شده در آب نیاز خواهید داشت. دیگر این که در ابعاد بزرگ تر پایداری حباب صابون کم تر می شود. حتماً دیده اید که حباب‌های بزرگ زودتر از حباب‌های کوچک می ترکند. به این ترتیب شرایط مرزی مورد نظر فراهم شده است. منظور از شرایط مرزی در این جا محل اتصال لایه‌ی صابون با دو صفحه و همین طور با میله‌ها است. البته این مرزها با هم تفاوت دارند. مرز اتصال با صفحه می تواند روی صفحه جابه‌جا شود ولی مرز اتصال با میله‌ها ثابت است.

کافی ست این مجموعه را در ظرفی محتوی صابون یا مایع ظرف شویی حل شده در آب فرو ببرید و به آرامی خارج کنید. به احتمال زیاد بین دو صفحه سطحی از حباب صابون مطابق شکل ۴ تشکیل می شود. توجه کنید که در این جا چون فاصله‌ی بین دو صفحه ثابت است، مساحت لایه‌ی حباب صابون متناسب با طول مرز (محل تماس لایه‌ی حباب صابون با صفحه‌های شفاف) است و کمینه کردن مساحت لایه‌ی صابون به معنی کمینه کردن این طول است که پاسخ مسئله‌ی ماست.



شکل ۷



شکل ۸

آیا می‌توانید مسائل دیگری طرح کنید که پاسخ آنها را بتوان با پدیده‌ای فیزیکی یافت. برای نمونه سعی کنید برای یافتن پاسخ مسأله‌ی زیر روشی فیزیکی بیابید:

اعداد x و y را چنان بیابید که در رابطه‌ی زیر صدق کنند

$$ax+by=c$$

و حاصل ضرب آن‌ها بیشینه شود؟ (a, b, c اعدادی معلوم‌اند).

مراجع

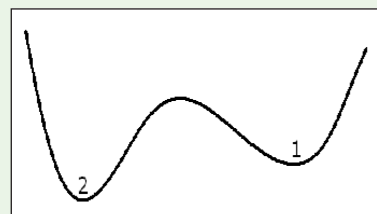
- [۱] ریاضیات چیست؟، ریچارد کورانت و هربرت رابینز، ترجمه‌ی سیامک کاظمی، نشر نی ۱۳۷۹.
- [2] "The Shortest Network Problem", Marshal W. Bern and Ronald L. Graham, Scientific American, January 1989, pp 84-89.

است) ولی این روش را نمی‌توان به‌آسانی برای مسئله‌ی چهار شهر به‌کار برد زیرا همان‌طور که می‌بینید برای ساختن مسیر از دو نقطه‌ی کمکی استفاده شده و منحنی مسیر در این نقطه‌ها هموار نیست بلکه زاویه‌دار است. یافتن چنین پاسخ‌هایی به کمک معادله‌های دیفرانسیل چندان ساده نیست. این نوع مسئله‌ها حتی برای مهندسان کامپیوتر هم جالب است و الگوریتم‌های متعددی برای حل آنها ارائه شده است. این مسئله از آن دسته مسائلی است که به آنها اصطلاحاً NP-Complete گفته می‌شود، یعنی زمانی که کامپیوتر برای حل مسئله نیاز دارد، به تعداد نقاط، بستگی نمایی دارد.

جعبه ۲

اگر بخواهید سطح لایه‌ی صابون را به‌اندازه‌ی ΔA افزایش دهید باید به اندازه‌ی $\sigma \Delta A$ کار انجام دهید که σ کشش سطحی مربوط به لایه‌ی صابون است. کشش سطحی پدیده‌ای است که به‌علت نیروی جاذبه‌ی بین مولکول‌های مایع به‌وجود می‌آید. این نیروی جاذبه باعث می‌شود که مولکول‌ها تمایل داشته باشند نزدیک به یک‌دیگر قرار گیرند. به‌همین دلیل قطره‌ای مایع که تحت اثر نیروی دیگری نباشد به شکل کره در می‌آید. لایه‌ی صابون هم در واقع لایه‌ی نازک مایع است که دو سطح دارد. بنابراین کشش مولکول‌ها به‌سوی یک‌دیگر سبب کاهش سطح می‌شود. به همین دلیل انرژی لایه‌ی صابون با مرزهای مشخص متناسب با مساحت آن است. چنین سیستمی تمایل به وضعیتی با کم‌ترین انرژی را دارد، درست مثل گلوله‌ی درون کاسه که تمایل دارد در قعر کاسه، یعنی جایی که انرژی پتانسیل کم‌ترین مقدار را دارد، قرار بگیرد. اما در اینجا کم‌ترین انرژی متناظر با کم‌ترین مساحت است. بنابراین لایه‌ی صابون شکلی را می‌گیرد که کم‌ترین مساحت را داشته باشد. البته اگر عوامل دیگری در کار باشند مثلاً فشار دو طرف لایه‌ی صابون یکسان نباشد، کم‌ترین انرژی سیستم معادل با کم‌ترین مساحت لایه‌ی صابون نخواهد بود و اثر این عوامل را هم باید در محاسبه‌ی انرژی در نظر گرفت.

باید به یک نکته‌ی دیگر هم اشاره کنیم. به مثال گلوله و کاسه برگردیم اما فرض کنید ته کاسه به شکل سطحی است که در شکل ۶ نشان داده شده است. گلوله می‌تواند در هر یک از نقاط ۱ و ۲ به سکون برسد. هر چند انرژی نقطه‌ی ۲ کم‌تر است ولی گلوله در نقطه‌ی ۱ هم پایدار می‌ماند. همین برای حباب صابون هم می‌تواند رخ دهد. ممکن است لایه‌ی صابون شکلی به خود بگیرد که مساحت آن در مقایسه با مساحت آرایش‌های نزدیک به آن کم‌تر باشد ولی کمینه‌ی مطلق نباشد. با کمی تمرین می‌توان این جواب‌ها را هم به‌دست آورد. شکل ۷ یکی از این جواب‌ها را نشان می‌دهد که در آن لایه‌ی صابون، سطحی به‌شکل سه‌ضلع مربع را ساخته است و طول کل مسیر برابر با ۳ است. می‌توان مرزها را طوری در نظر گرفت که سطوح کمینه‌ای با اشکال سه‌بعدی زیبا به‌وجود آید. در شکل ۸ نمونه‌هایی از این وضعیت‌ها را می‌توان دید.



شکل ۶