

سومین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی

3rd National Conference on Quantum Information and Computation, NCQIC 2019



آغاز ثبت نام و دریافت مقاله ۹۸/۰۲/۰۱
آخرین مهلت دریافت مقاله ۹۸/۰۳/۱۵
آخرین مهلت ثبت نام ۹۸/۰۴/۲۵
<http://www.psi.ir/?qi98>

کمیته علمی

سید جواد اخترشناس (دانشگاه فردوسی مشهد)
علی رضاخانی (دانشگاه صنعتی شریف)
مرتضی رفیعی (دانشگاه صنعتی شاهرود)
وحید سالاری (دانشگاه صنعتی اصفهان)
شهریار سلیمی (دانشگاه کردستان)
مصطفی عنابستانی (دانشگاه صنعتی شاهرود)
اسفندیار فیضی (دانشگاه شهید مدنی آذربایجان)
وحید کریمی پور (دبیر) (دانشگاه صنعتی شریف)

کمیته اجرایی

احسان ابراهیمی بسابی - سعید حسامی -
محمد رضا شجاعی - مرتضی رفیعی (دبیر)
مسلم سوهانی - مصطفی عنابستانی

زمان و مکان

۳۰-۳۱ مرداد ۱۳۹۸ - دانشگاه صنعتی شاهرود

محورهای کنفرانس

رایانش توپولوژیک
همدوسی کوانتومی
مترولوژی کوانتومی
شبیه سازی کوانتومی
ترمودینامیک کوانتومی
فرایندهای انتقال اطلاعات
مدل های رایانش کوانتومی
رمزنگاری و مخابرات کوانتومی
تحقق فیزیکی رایانه های کوانتومی
درهم تنیدگی، معیارها و کاربردهای آن

حامیان



ICQITs
مرکز فناوری های کوانتومی ایران

نشانی کمیته علمی

نشانی دبیرخانه اجرایی

فهرست پوسترهای ارائه شده در سومین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی، ۳۰ و ۳۱ مرداد ۱۳۹۸، دانشگاه صنعتی شاهرود

- ۳ بررسی امکان استفاده از روش ماتریسی در اندازه گیری میزان کوانتوم-ماکروسکوپیکی بودن یک حالت اسپینی متشکل از ذرات اسپین $\frac{1}{2}$
- ۶ تخمین زمان تحول الگوریتم های رایانش کوانتومی کند تغییر برای مسائلی با جواب های بهینه تبهگن
- ۱۰ درهم تنیدگی کیوبیت ابررسانا و مدار نوسانگر
- ۱۴ محاسبه درهم تنیدگی حالت های پایه شبکه مثلثی ۷ کیوبیتی دو بعدی اسپینی
- ۱۸ درهم تنیدگی حالت های عددی جابه جاشده دومی برهم نهاده
- ۲۲ بررسی تغییرات درهم تنیدگی گرمایی در سیستم اتم-کاواک با در نظر گرفتن ولگشت در مقایسه با حالت بدون ولگشت
- ۲۶ انتقال درهم تنیدگی در سیستم شش کیوبیتی با برهمکنش مدل هایزنبرگ در حضور میدان مغناطیسی
- ناهمخوانی کوانتومی و رابطه ی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی برای یک زنجیره ی اسپینی دو کیوبیتی با مدل XXX در حالت پایه
- ۳۴ دوربری حالت های چلانده در غیاب و در حضور اتلاف
- ۳۸ ایجاد درهم تنیدگی حالت های همدوس نامتعامل بین پیوند جوزفسون و کیوبیت های شار
- ۴۲ درجه غیرمارکوفی کانال حرکت براونی با استفاده از سنجشگر قدرت تداخل سنجی گاوسی
- ۴۶ غیردرهم تنیدگی در سیستم های کوانتومی بسته از طریق تله اندازی همدوس جمعیت
- ۵۰ راهبند تک فوتون کنترل پذیر در سامانه های اپتومکانیکی کوانتومی
- ۵۲ مطالعه قطبش کوانتومی حالت های عددی جابه جاشده درهم تنیده دومی توسط پارامترهای استوکس
- ۵۸ بررسی نامساوی کلاسیوس با استفاده از آنتروپی تسالیس
- ۶۲ بررسی خاصیت های ماکروسکوپیکی کوانتومی با همدوسی کوانتومی
- ۶۵ بررسی درهم تنیدگی بین دو اتم دو ترازوی در دو کاواک اپتومکانیکی جداگانه متصل شده به وسیله یک فیبر اپتیکی
- ۶۹ همبستگی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل
- ۷۳ ماشین گرمایی کوانتومی در جعبه استوانه ای در پوش دار
- ۷۷ توزیع کلید کوانتومی با استفاده از پروتکل دو بعدی قطبش- فاز
- ۸۱ حفظ حالت یک کیوبیت دلخواه از واهمدوسی ناشی از کانال پائولی توسط اندازه گیری ضعیف
- ۸۵ خطاهای تصحیح پذیر کد CSS نه کیوبیتی در کانال واقطبش
- ۸۹ تعیین تولید آنتروپی برای یک سیستم کوانتومی با بکار بردن خواص تک زوجیتی
- ۹۳ مطالعه ی درهم تنیدگی حالت های گراف سیستم سه کیوبیتی

۹۷	 بازده و کار ماشین اتو کوانتومی برای پتانسیل پوشل-تلر
۱۰۱	 رمزنگاری کوانتومی مستقل از چرخش با استفاده از مولفه‌های شعاعی کوانتومی نور لاگرگوسی
۱۰۵	 افزایش همبستگی های کوانتومی با استفاده از چلانندگی
۱۰۹	 نقش تقارن حالت‌های کوانتومی در محاسبه سنجه درهم‌تنیدگی شکل یابی
۱۱۳	 همبستگی غیر کلاسیکی ابزار- هدف در اندازه گیری ضعیف پس گزینشی
۱۱۷	 احیای درهم‌تنیدگی ماکروسکوپیکی
۱۲۱	 شبیه سازی معادله شرودینگر یک بعدی بر روی شبیه ساز کامپیوتر کوانتومی IBM
۱۲۵	 SU(1,1) دینامیک درهم‌تنیدگی و آمار کوانتومی در برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع A با میدان همدوس
۱۲۹	 تعیین فرکانس های بهینه برای سیستم بیولوژیک: رهیافت فیدلیتی
۱۳۳	 همبستگی دو کاواک اپتومکانیکی در یک حمام غیر مارکوفی مشترک
۱۳۵	 اثر جفت شدگی اتلافی بر همبستگی ها در کاواک اپتومکانیک
۱۴۱	 پیشنهاد روشی برای پیاده سازی گیت های کوانتومی هولونومی با استفاده از سیستم اپتومکانیک مرکب

بررسی امکان استفاده از روش ماتریسی در اندازه گیری میزان کوانتوم-ماکروسکوپی بودن یک

حالت اسپینی متشکل از ذرات اسپین $1/2$

ناصری، معین^۱؛ ریسی، صادق^۱

^۱دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

نظریه مکانیک کوانتومی از زمان کشف آن تاکنون، همواره در توصیف جهان ریز مقیاس با دقت بسیار بالا موفق عمل کرده است. اما هر چه از مقیاس میکروسکوپی فاصله گرفته و به مقیاس های بالاتر نزدیک تر می شویم، نمود اثرات کوانتومی کمرنگ تر می گردد. تا جاییکه در جهان ماکروسکوپی اثرات کوانتومی به ندرت مشاهده می گردد. همواره این سوال مطرح بوده است که حالت یک سیستم ماکروسکوپی تا چه اندازه خواص کوانتومی از خود نشان می دهد و آیا حدی برای آن وجود دارد؟ از ملزومات پاسخ به این پرسش آن است که معیار و متری داشته باشیم که بتوان میزان کوانتوم-ماکروسکوپی بودن یک حالت دلخواه را محاسبه کرد. در این مقاله معیار جدیدی برای سنجش کوانتوم-ماکروسکوپی بودن یک حالت سیستم متشکل از ذرات اسپینی، با استفاده از ابزار های ماتریسی و توابع توزیع معرفی شده است.

واژه های کلیدی: کوانتوم-ماکروسکوپی، همدموسی، معیار

Investigating Matrix Methods to Measure Macroscopic Quantumness of the State of Systems Made of Spin-1/2 Particles

Naseri, Moein¹; Raeisi, Sadegh¹

¹ Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

In This article we have introduced a new measure for quantum-macroscopicity of a system of spin-1/2 particles using matrix tools and normal distribution functions.

مقدمه

در این بخش به تعاریف مقدماتی می پردازیم:

۱- یک ذره اسپین d ، یک کیودیت است که می تواند در یک پایه محاسباتی d ویژه حالت داشته باشد. ویژه حالت

ژام:

$$|j\rangle, \quad 0 \leq j < (d-1)$$

بنابراین پایه های فضای هیلبرت یک سیستم متشکل از N ذره اسپین d به شکل زیر است:

$$\{|i_1 i_2 i_3 \dots i_n\rangle\} \quad 0 \leq i_j < d-1, \quad 1 \leq j \leq n$$

(d, i, j, n, N اعداد صحیح می باشند.)

برای این حالت ها یک ترتیب قایل می شویم، به طوریکه i امین حالت، حالتی است که عدد i در مبنای d به شکل $i_1 i_2 i_3 \dots i_n$ نوشته شود. بنابراین حالت $|i_1 i_2 i_3 \dots i_n\rangle$ امین حالت در مجموعه فضای هیلبرت موردنظر خواهد بود.

توجه: ذره اسپین ۲ همان ذره اسپین $1/2$ می باشد و از این به بعد عبارت اسپین $1/2$ را به جای آن به کار خواهیم برد.

را با انحراف معیار مربوط به این پارامتر ها تعریف می کنیم و با $M(\rho)$ نشان می دهیم.

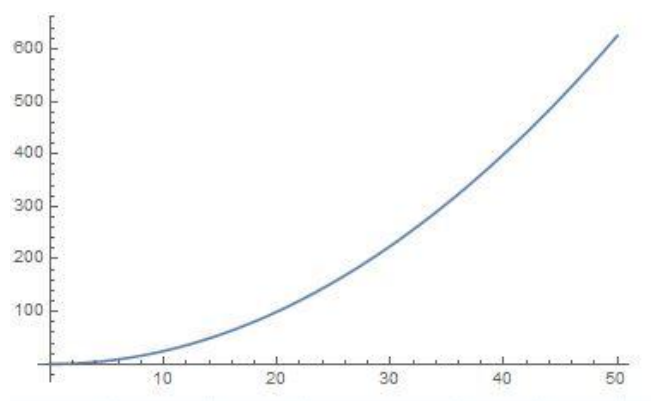
بررسی معیار برای حالت GHZ

حالت GHZ حالتی است که خاصیت کوانتوم-ماکروسکوپیکی دارد و با افزایش تعداد ذرات اسپینی درجه کوانتوم-ماکروسکوپیکی بودن آن افزایش می یابد. تقریباً در همه معیار هایی که برای سنجش کوانتوم-ماکروسکوپیسیته ارائه شده است به این حالت توجه ویژه شده است و در معیار هایی این حالت بالاترین درجه ماکروسکوپی بودن برای یک حالت کوانتومی متشکل از تعداد مشخص ذرات معرفی شده است. به هر نحو، چون در این حالت دو ویژه حالت با اثرات ماکروسکوپی قابل تمیز از هم بر هم نهی شده است پس کوانتوم-ماکروسکوپیکی بودن آن بالاست. لازم است معیاری که ارائه می دهیم مقدار بالایی برای آن بدست دهد.

مقدار $M(\rho)$ برای این حالت حساب شده است و مطابق ذیل می باشد:

$$M(\text{GHZ}) = N^2/4$$

نمودار معیار بر حسب تعداد کیوبیت ها مطابق زیر است:



شکل ۱: معیار $M(\rho)$ بر حسب تعداد کیوبیت ها برای حالت GHZ

۲- حالت GHZ برای یک سیستم متشکل از N ذره اسپینی:

$$| \text{GHZ}_N \rangle = (1/2)^{0.5} (| 0 \rangle^N + | d-1 \rangle^N)$$

۳- حالت Ordinary State که آن را به اختصار با OS

نمایش می دهیم، برای یک سیستم متشکل از N ذره اسپینی به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$| \text{OS}_N \rangle = ((1/2)^{0.5} (| 0 \rangle + | d-1 \rangle))^N$$

ماتریس فاصله و تابع توزیع ماتریس چگالی

۱- فاصله ۲ ویژه حالت i ام و j ام یک سیستم متشکل از N

ذره مطابق زیر تعریف می شود:

فرض کنیم ویژه حالت i ام به شکل زیر باشد:

$$| i \rangle = | i_1 i_2 i_3 \dots i_n \rangle$$

و ویژه حالت j ام به شکل زیر باشد:

$$| j \rangle = | j_1 j_2 j_3 \dots j_n \rangle$$

فاصله ۲ حالت مورد نظر که آن را با d_{ij} نشان می دهیم، برابر خواهد بود با:

$$d_{ij} = \text{HammingDistance}[i, j, \text{Base2}]$$

در واقع مفهوم فاصله بین دو حالت اسپینی به این مفهوم است که هر چه فاصله دو حالت از یکدیگر بیشتر گردد، از نظر ماکروسکوپیکی این دو حالت بیشتر متمایز می گردند.

۲- ماتریس فاصله:

با استفاده از تعریف فاصله d_{ij} می توان ماتریس فاصله را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\text{Distance Matrix} = D = [d_{i-1, j-1}]$$

۳- تعریف مجموعه

$$C(d)$$

$$C(d) = \{i, j \mid d_{ij} = d\}$$

معیار کوانتوم-ماکروسکوپیکی

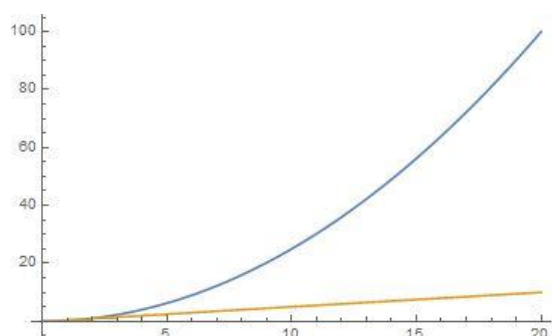
معیار کوانتوم-ماکروسکوپیکی بودن برای یک حالت دلخواه کوانتومی با ماتریس چگالی ρ و با استفاده از تابع توزیع ماتریس چگالی که از مجموعه $C(d)$ تعریف می گردد و ماتریس فاصله

بررسی معیار برای حالت OS

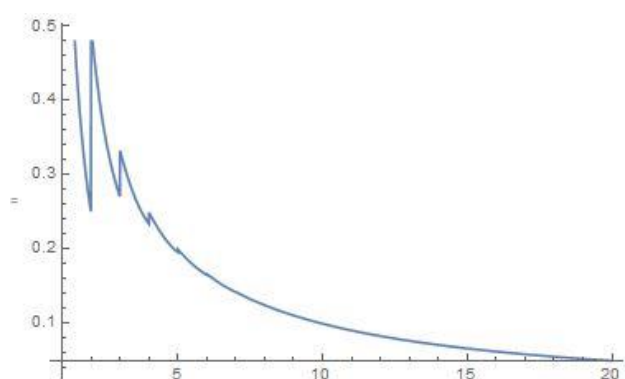
حالت OS از حالت هایی می باشد که نسبت به حالت GHZ، به ازای تعداد ذرات اسپینی معین، از درجه کوانتوم-ماکروسکوپیستی بسیار کمتری برخوردار است، زیرا مخلوط یکنواختی از همه ویژه حالت هاست. معیار $M(\rho)$ برای این حالت مطابق زیر است:

$$M(OS) = N/2$$

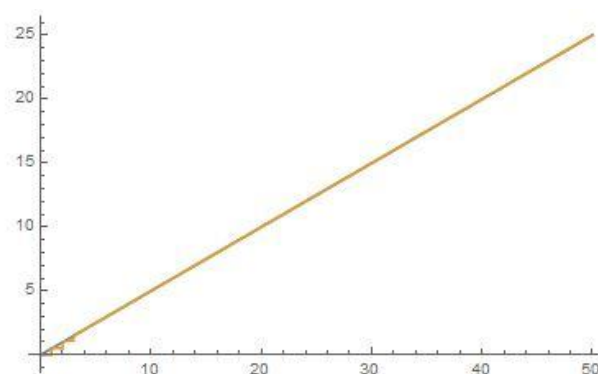
نمودار معیار بر حسب تعداد کیوبیت ها مطابق شکل زیر است:



شکل ۳: مقایسه معیار $M(\rho)$ بر حسب تعداد کیوبیت ها برای حالت OS و GHZ



شکل ۴: $M(OS)/M(GHZ)$ بر حسب تعداد کیوبیت ها



شکل ۵: معیار $M(\rho)$ بر حسب تعداد کیوبیت ها برای حالت OS

مرجع ها

- [1] B. Yadin and V. Vedral; "General framework for quantum macroscopicity in terms of coherence, PHYSICAL REVIEW A 93, 022122 (2016)
- [2] T.Farrow and V.Vedral; "Classification of Macroscopic Quantum Effects", arxiv 3 June 2014
- [3] F.Fröwis¹ and P.Sekatski and W.Dür and N.Gisin and N.Sangouard; "Macroscopic quantum states: measures, fragility and implementations", arxiv 19 June 2018
- [4] A.Streltsov and G.A Adesso and M.B.Plenio; "Colloquium: Quantum coherence as a resource", REVIEWS OF MODERN PHYSICS, VOLUME 89, OCTOBER –DECEMBER 2017

نتیجه گیری

همانطور که ملاحظه می شود، معیار معرفی شده در این مقاله مقدار کوانتوم ماکروسکوپی بودن حالت GHZ نسبت به حالت OS بیشتر بوده و با افزایش تعداد کیوبیت ها این اختلاف بسیار بیشتر میشود. در مقیاس های ماکروسکوپی و از مرتبه تعداد ذرات عدد آوگادرو نسبت $M(OS)/M(GHZ)$ به صفر میل می کند. این بدین معناست که حالت OS در مقیاس های ماکروسکوپی نسبت به حالت GHZ کوانتومی بودن خود را از دست می دهد، حال آنکه حالت GHZ از مقدار قابل توجهی کوانتومی بودن برخوردار است در نتیجه کوانتوم ماکروسکوپی بودن این حالت بالاست.

هم چنین این روش به دلیل استفاده از روش های ماتریسی از نظر محاسباتی مزیت دارد.

تخمین زمان تحول الگوریتم‌های رایانش کوانتومی کندتغییر برای مسائلی با جواب‌های بهینه تبهگن

حسینی، سیدمحمد؛ داودی دراره، مهدی؛ جانباز، شهرروز

مجتمع دانشگاهی علوم کاربردی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین‌شهر

چکیده

تخمین زمان الگوریتم‌های رایانش کوانتومی کندتغییر برای مسائلی با بیش از یک جواب بهینه، یک مسأله باز و چالشی برای اثبات کارایی این الگوریتم‌هاست. در این مقاله ضمن بررسی الگوریتم رایانش کوانتومی کندتغییر برای حل مسأله برچسب‌گذاری دلپذیر، راهکاری برای تخمین زمان تحول پیشنهاد می‌شود. واژه‌های کلیدی: رایانش کوانتومی، الگوریتم رایانش کوانتومی کندتغییر، برچسب‌گذاری دلپذیر، تخمین زمان تحول.

Estimating Evolution Time in Adiabatic Quantum Computation Algorithms for Optimization Problems with Degenerate Answer

Hosseini, Sayed Mohammad; Davoudi Darareh, Mahdi; Janbaz, Shahrooz

Faculty of science Malek-Ashtar University of Technology, Shahin-shahr

Abstract

Estimating the evolution time of an adiabatic quantum computation (AQC) algorithm for an optimization problem with more than one optimum answer, is a challenging open problem for the performance of these algorithms. Here we introduce an approach for estimating the evolution time while reviewing the AQC algorithm for graceful labelling problem.

Keywords: Quantum computation, adiabatic quantum computation algorithm, graceful labelling, estimating evolution time

PACS No. 03.67.-a, 03.67.Ac, 03.67.Lx, 03.65.Ta, 02.10.Ox

مقدمه

اگر این تحول به اندازه کافی کندتغییر باشد، سامانه در هر لحظه از تحول در ویژه‌حالت پایه خود باقی می‌ماند و اندازه‌گیری آن در پایان تحول، جواب بهینه مسأله را بدست می‌دهد. به طور خلاصه، هامیلتونی کل تحول کوانتومی کندتغییر برای حل یک مسأله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H(s(t)) = (1-s(t))H_0 + s(t)H_p; \quad 0 \leq s(t) \leq 1 \quad (1)$$

که در آن $s(t)$ مسیر تحول کندتغییر است. بنابراین، در استفاده از رایانش کوانتومی کندتغییر برای حل یک مسأله باید H_0 ، H_p و $s(t)$ تعیین شوند. اگر کمترین فاصله بین دو پایین‌ترین تراز انرژی سامانه فوق را $g_{\min}$ ، بنامیم، طبق قضیه کندتغییر، کمترین زمان (T) برای آن‌که چنین تحولی در شرایط کندتغییر صدق کند

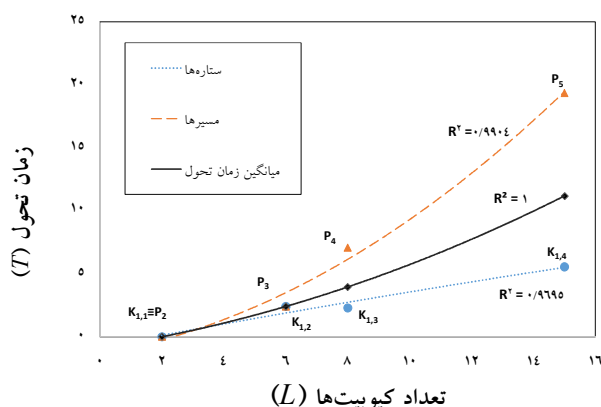
رایانش کوانتومی کندتغییر^۱ (AQC)، به معنی استفاده از گونه‌ای از رایانه‌های کوانتومی است که بر پایه قضیه کندتغییر (آدیاباتیک) عمل می‌کنند. این دسته از رایانه‌های کوانتومی، به طور ذاتی برای حل مسائل بهینه‌سازی کاربرد دارند. در الگوریتم‌های کوانتومی کندتغییر، اطلاعات اولیه مسأله در حالت پایه یک سامانه کوانتومی به نام هامیلتونی آغاز (H_0) کدگذاری می‌شود [۱]. هدف، تحول این سامانه در جهت رسیدن به سامانه‌ای است که حالت پایه آن بیانگر جواب بهینه مسأله باشد. هامیلتونی این سامانه را هامیلتونی جواب می‌نامیم (H_p). طبق قضیه کندتغییر،

$$H_p = \sum_{s_b} C(s_b) |s_b\rangle \langle s_b| \quad (3)$$

که در آن $C(s_b)$ تابع هزینه نامیده شده و متناسب با مسأله بهینه‌سازی مورد نظر انتخاب می‌شود.

تخمین زمان تحول کندتغییر در حضور جواب تبهگن

یک راهکار معمول برای تخمین زمان در مسائلی از این دست، حل معادله شرودینگر هامیلتونی کل (شبیه‌سازی تحول کندتغییر) برای مسأله در ابعاد کوچک به ازای زمان‌های مختلف، و برآورد زمان مطلوب برای کندتغییر ماندن تحول و در نتیجه بدست آمدن جواب از اندازه‌گیری، با یک احتمال مطلوب (مثلاً $P_s = 0/25$) است. به این ترتیب می‌توان با برونمایی، تخمینی از زمان مورد نیاز برای ابعاد بزرگتر مسأله که قابل شبیه‌سازی نیستند، بدست آورد [۴-۲]. ما زمان‌های بدست آمده از این روش را، برای مسأله دشوار برچسب‌گذاری دلیذر به ازای تمام گراف‌های با حداکثر ۴ یال و حاصل از شبیه‌سازی به ازای ۲۰ زمان برای هر گراف محاسبه کردیم [۲]. نمودارهای شکل ۲ نتایج این محاسبات را نشان می‌دهند. چنان که دیده می‌شود، رشد زمان مورد نیاز تحول بر حسب ابعاد مسأله، دست‌کم از مرتبه چندجمله‌ای (مربعی) است.



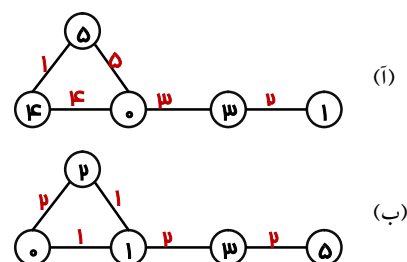
شکل ۲: رشد زمان تخمینی مورد نیاز با افزایش تعداد کیوبیت‌ها، برای تحول کندتغییر حل مسأله برچسب‌گذاری دلیذر [۲].

راهکار دیگر به منظور تخمین زمان، جایگزین کردن $g_{\min}$ به گونه‌ای است که بتوان با استفاده از قضیه کندتغییر، کران زمان تحول را تعیین نمود. به این منظور، با توجه به هرمیتی بودن

از رابطه $T \gg \frac{1}{g_{\min}}$ بدست می‌آید. این نوع رایانش کوانتومی، با

توجه به ماهیت قضیه کندتغییر، برای حل مسائل بهینه‌سازی، به ویژه مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی^۲ (COP)، مناسب است که طیف گسترده‌ای از مسأله‌های مطرح در نظریه گراف و برخی پدیده‌های فیزیکی را هم شامل می‌شود [۲ و ۳]. اما چالش مهم الگوریتم‌های کوانتومی کندتغییر آن است که اغلب یک COP بیش از یک جواب بهینه دارد. در نتیجه، ویژه‌حالت پایه هامیلتونی جواب (هامیلتونی در پایان تحول) تبهگن است. در نتیجه، $g_{\min} = 0$ و به این ترتیب نمی‌توان با استفاده از قضیه کندتغییر، کرانی برای زمان تحول سامانه و در نتیجه زمان مورد نیاز برای حل مسأله معرفی نمود. در این مقاله، پس از تخمین زمان مورد نیاز در تحول کندتغییر به منظور حل مسأله برچسب‌گذاری دلیذر، راهکاری برای حل این مشکل ارائه می‌کنیم که مبتنی بر کاهش بازه محاسبه $g_{\min}$ است به نحوی که از صفر شدن آن جلوگیری شود.

مسأله پیدا کردن برچسب‌گذاری دلیذر برای یک گراف مشخص، در دسته مسائل دشوار (NP) قرار می‌گیرد. به زبان ساده، فرض کنید در یک گراف با e یال، رأس‌ها با اعدادی از مجموعه $\{0, 1, \dots, e\}$ (بدون تکرار) برچسب‌گذاری شوند و روی یال‌ها، اندازه اختلاف بین برچسب رأس‌ها قرار گیرد؛ گوئیم گراف دلیذر است اگر بتوانیم رأس‌ها را به گونه‌ای برچسب‌گذاری کنیم که همه اعداد ۱ تا e (دقیقاً یک‌بار) روی یال‌ها مشاهده شوند (شکل ۱).



شکل ۱: (آ) یک برچسب‌گذاری دلیذر (ب) یک برچسب‌گذاری غیر دلیذر

چگونگی تبدیل این مسأله به یک COP، در [۲] شرح داده شده است. در آنجا هامیلتونی‌های آغاز و جواب به ترتیب توسط هامیلتونی‌های بی‌بعد شده زیر معرفی شده‌اند:

$$H_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i (I^i - \sigma_x^i) \quad (2)$$

حالت‌های مطلوب و ویژه‌مقدارهای متناظر با حالت‌های نامطلوب، بزرگتر از $g(s)$ در این بازه است. یعنی، برانگیختگی به ترازهای انرژی متناظر با جواب‌های نامطلوب، به ازای $s > s_*$ امکان‌پذیر نیست. حال، تعریف می‌کنیم:

$$g'_{\min} = \min_{s_* \leq s \leq s_0} g(s). \quad (6)$$

بنابراین، زمانی که تبهگنی در حالت پایه هامیلتونی جواب اجتناب‌ناپذیر است (مسئله بیش از یک جواب دارد)، $g'_{\min}$ جایگزینی برای $g_{\min}$ خواهد بود. چون تمام ویژه‌مقدارهای $H(s)$ حقیقی هستند، مرز دایره‌های G_1 و G_2 در لحظه $s = s_*$ تنها یک نقطه تماس دارند. از حل معادله $O_1(s) + r_1(s) = O_2(s) - r_2(s)$ برای s داریم:

$$s = s_* = \frac{L}{L + (\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (7)$$

به علاوه، چون در همسایگی $s = 1$ ، وقتی $s \rightarrow 1$ داریم $g \rightarrow 0$ ، بنابراین، هرچه s_* عدد کوچک‌تری باشد، طول بازه $[s_*, 1]$ کوچکتر است و با توجه به رابطه (۶)، ممکن است عدد بزرگتری برای $g'_{\min}$ به دست آید. در نتیجه، با کاهش s_* ، بالقوه می‌توان کران بهتری برای زمان تحول به دست آورد. پس، اگر فاصله بین دو کمترین مقدار متمایز تابع هزینه

$C(s_b)$ را با d_{cop} نشان دهیم، از (۷) داریم:

$$s_* = \frac{L}{L + d_{cop}}. \quad (8)$$

به عنوان یک فرع، از آن چه در این بخش گفتیم نتیجه می‌شود که استفاده از یک الگوریتم AQC بر پایه روابط (۱)، (۳) و (۴) برای حل یک مسئله بهینه‌سازی ترکیباتی کارآمد است اگر مقدار d_{cop} در مقایسه با تعداد کیوبیت مورد نیاز الگوریتم، قابل توجه باشد؛ هر چند، عکس این گزاره لزوماً برقرار نیست، چرا که در حالت کلی، کاهش طول بازه $[s_*, 1]$ ، لزوماً به معنای افزایش $g'_{\min}$ نیست.

در جدول ۱ نتیجه محاسبه $g'_{\min}$ برای گراف‌های با حداکثر ۴ یال آمده است. نکته قابل توجه در این جدول داده‌های سطر آخر برای درجه تبهگنی و مقدار $g'_{\min}$ برای گرافی است که برچسب‌گذاری

ماتریس هامیلتونی کل تحول و ساختار منظمی که در این ماتریس وجود دارد، از قضیه دواير گرشگورین استفاده می‌نماییم [۵].

قضیه: فرض کنید $\Delta_r(O) := \{z \in \mathbb{C} : |z - O| \leq r\}$ نشان‌دهنده گوی بسته مختلط به شعاع r حول نقطه O باشد. همچنین فرض کنید λ هر ویژه‌مقدار دلخواه ماتریس $(n \times n)$ مختلط و معلوم $A = [a_{ij}]$ باشد. در این صورت عدد صحیح و مثبت i (با $1 \leq i \leq n$) وجود دارد به طوری که $\lambda \in G_i(A)$ و در آن

$$G_i(A) := \Delta_{r_i(A)}(a_{i,i}), \quad (9)$$

و $r_i(A) := \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$ در این قضیه $G_i(A)$ را i -مین دایره گرشگورین A می‌نامند.

پس از جایگزینی روابط (۲) و (۳) در (۱) می‌توان مشاهده کرد که $H(s)$ یک ماتریس تُنک^۳ است که در هر سطر و هر ستون آن دقیقاً L دایره غیرقطری برابر با $(s-1)/2$ و یک دایره قطری برابر با $s\lambda_k + [(1-s)L/2]$ وجود دارد (k شماره آن سطر یا ستون است).

بنابراین، مکان هندسی مرکز k -مین دایره گرشگورین در این ماتریس از رابطه $O_k(s) = (1-s)L/2 + s\lambda_k$ به دست می‌آید و شعاع آن برابر است با $r_k(s) = \sum_{i=1}^L |(s-1)/2| = (1-s)L/2$. طبق این رابطه، دواير گرشگورین در ابتدای تحول بر هم منطبقند؛ اما در طی تحول (با افزایش s) شعاع آن‌ها کاهش می‌یابد و مراکز آن‌ها به گونه‌ای جابه‌جا می‌شوند که در پایان تحول بر ویژه‌مقدارهای هامیلتونی جواب ($H(1) = H_p$) منطبق گردند. به

خصوص، G_1 و G_2 به ترتیب حول دو کمترین ویژه‌مقدار متمایز (مثلاً صفر و یک) جمع شده و روی آن‌ها می‌رُمبند. از این رو، همواره یک لحظه یکتای $s_* < 1$ در طول زمان تحول وجود دارد که این دو دایره در آن لحظه به هم مماس هستند و پس از آن به طور کامل از یکدیگر جدا می‌شوند (شکل ۳ را ببینید). در نتیجه، به ازای $s > s_*$ ، دایره G_2 ، فقط شامل ویژه‌مقدارهای مطلوب خواهد بود (ویژه‌مقدارهایی که وقتی $s(t) \rightarrow 1$ ، به کمترین ویژه‌مقدار تباهیده H_p یعنی λ_1 میل می‌کنند). چون در بازه $[s_*, 1]$ ، این دو دایره هم‌پوشانی ندارند، شکاف بین ویژه‌مقدارهای متناظر با

جدول ۲: نمودار تحول چند ویژه مقدار اول برای گراف های ساده: (آ) مسیر تحول خطی؛ (ب) مسیر تحول غیر خطی.

گراف	مسیر تحول	$s(t) = \frac{t}{T}$	$s(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^2$
$K_{1,1}$			
$K_{1,2}$			
$K_{1,3}$			
K_3			
P_2			

مرجع ها

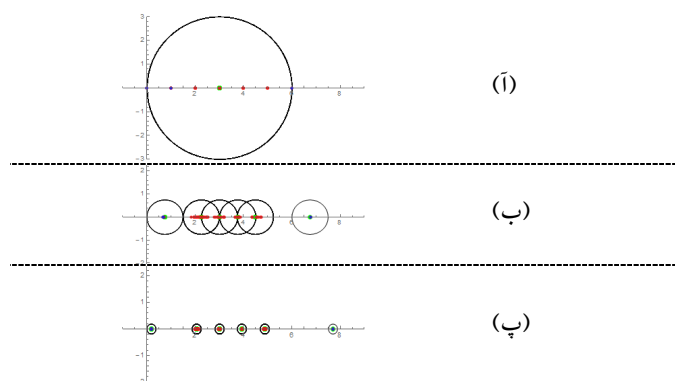
- [۱] E. Farhi and S. Gutmann; "Analog analogue of a digital quantum computation"; *Physical Review A* **57** (1998) 2403.
- [۲] S.M. Hosseini, M. Davoudi Darareh, S. Janbaz, and A. Zaghian; "An Adiabatic Quantum Algorithm for Determining Gracefulness of a Graph"; *Zeitschrift für Naturforschung A* **72** (2017) 637-645.
- [۳] X. Peng, Z. Liao, N. Xu, G. Qin, X. Zhou, D. Suter and J. Du; "Quantum adiabatic algorithm for factorization and its experimental implementation"; *Physical Review Letters* **101** (2008) 220405.
- [۴] F. Gaitan and L. Clark; "Ramsey numbers and adiabatic quantum computing"; *Physical Review Letters* **108** (2012) 10501.
- [۵] M. Hazewinkel; "Encyclopaedia of Mathematics Supplement"; Vol. III, Springer. (2002) 180.

^۱ Adiabatic quantum computation

^۲ Combinatorial optimization problem

^۳ Sparse matrix

دلپذیر ندارد. مشاهده می شود که هر چه درجه تبهگنی بیشتر باشد، کران زمان تحول بهتری بدست می آید.



شکل ۳: تحول دایره های گرگورین ماتریس تحول $H(s)$ برای گراف $K_{1,2}$:

(آ) در لحظه اول $(s(t)=0)$; (ب) لحظه تماس دایره های G_1 و G_2 $(s(t) = \frac{t}{T} = \frac{24}{37})$; (پ) در نزدیکی پایان تحول $(s(t) = \frac{t}{T} = \frac{30}{37})$.

جدول ۱: نتایج شبیه سازی برای الگوریتم کوانتومی کند تغییر برای حل مسأله برچسب گذاری دلپذیر، برای گراف های ساده با حداکثر $L=15$ کیوبیت [۲].

گراف	L	D	d_{cop}	g'_{min}
$K_{1,1}$	۲	۲	۲	-
$K_{1,2}$	۶	۴	۲	۰/۰۰۴۷
P_2		۴	۱	$1/09 \times 10^{-9}$
$K_{1,3}$	۸	۱۲	۲	۰/۰۰۰۲
K_3		۱۲	۱	۰/۰۰۰۷۶
P_3		۸	۱	$2/17 \times 10^{-8}$
$K_{1,4}$		۴۸	۲	۰/۰۰۱۸
C_4	۱۵	۱۶	۱	$1/05 \times 10^{-10}$
G_1^4		۱۲	۱	$4/98 \times 10^{-6}$
G_2^4		۲۰	۱	$9/33 \times 10^{-5}$
G_3^4		۱۲۰	۱	۰/۰۰۰۶

همچنین در جدول ۲، تفاوت در چگونگی تحول ویژه مقادیر با تغییر مسیر تحول، برای چند گراف ساده دیده می شود. می توان مشاهده کرد که در یک همسایگی از نقطه پایان فرایند تحول، خوشه ای از ترازهای انرژی به تدریج از سایر ترازها فاصله می گیرند و به صفر میل می کنند.

درهم تنیدگی کیوبیت ابررسانا و مدار نوسانگر

کردی، زینب^۱؛ امیری، فیروز^۲^۱ باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد خرم آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، خرم آباد، ایران^۲ گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی خرم آباد، خرم آباد، ایران

چکیده

کیوبیت های ابررسانا نقش اساسی در فهم جفت شدگی قوی و بسیار قوی بین اتم های مصنوعی و کاواک بازی می کنند. ما برای مدل مورد مطالعه، معادله شرودینگر را در شرایط مختلف حل کردیم. همچنین تحول همدموسی بین کیوبیت و نوسانگر LC به عنوان تابعی از زمان برای مقادیر مختلف ثابت جفت شدگی محاسبه شد. سپس درهم تنیدگی کیوبیت و حالت های نوسانگر را با استفاده از آنتروپی کاهش یافته محاسبه کردیم.

واژه های کلیدی: درهم تنیدگی، سیستم کوانتومی بسته، آنتروپی کوانتومی.

Entanglement of superconductor qubit- oscillator circuit

Kordi, Zeinab¹; Amiri, Firouz^{1,2}¹ Young Researcher and Elite Club, Khorramabad branch, Islamic Azad University, Khorramabad, Iran² Department of Physics, Islamic Azad University, Khorramabad, Iran

Abstract

Superconducting qubits have played a crucial role to understand the strong and ultrastrong coupling between artificial atoms and cavities. We have solved the Schrodinger equation in different situation. Also we were interested in calculating the dynamics of coherence between the qubit and LC circuit oscillator as a function of time for different values of coupling strengths. Then we measure the entanglement of the states between persistent-current states of the qubit and displaced Fock states of the oscillator by using the von Neumann entropy.

Keywords: Entanglement, closed-loop system, quantum entropy.

PACS No.

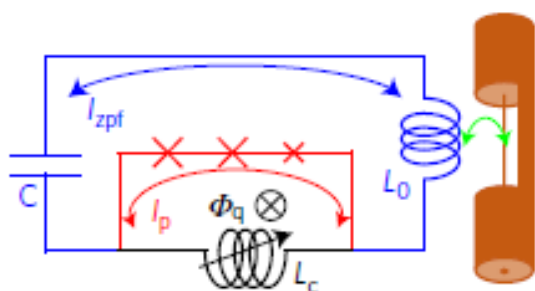
مقدمه

است [۲-۴]. اخیراً بر روی نه کیوبیت ابررسانا، آزمایش تجربی

صورت گرفته است [۵].

در مدارهای ابررسانا غیر خطی بودن اهمیت بسیاری دارد زیرا در مدل مورد مطالعه، سیستم به کیوبیت دو حالته تقریب زده می شود. در این تقریب اتصال جوزفسون نقش پررنگی دارد؛ این اتصال از دو ابررسانا که توسط یک مانع عایق از هم جدا شده اند تشکیل شده است و تنها عنصری است که هم غیرپاشنده و هم غیرخطی است. در این مطالعه، ما ابتدا مدل را توضیح می دهیم و سپس به

کیوبیت های ابررسانا نقش اساسی و مهمی در فهم ما از برهم کنش نور و ماده ایفا می کنند. شرکت های بزرگی مانند گوگل و آی بی ام بر روی کیوبیت های ابررسانا مطالعات تجری فراوانی انجام داده اند. مدارهای ابررسانا برای پردازش اطلاعات کوانتومی کاربرد بسیاری دارند. جفت شدگی میان کیوبیت ابررسانا و نوسانگر هارمونیک مورد بحث و بررسی قرار گرفته است [۱]. مطالعات زیادی در خصوص جفت شدگی قوی نیز انجام شده



شکل ۱

روش

ما برای بررسی درهم تنیدگی میان کیوبیت و مدار نوسانگر دو حالت مختلف را در نظر گرفتیم. در حالت اول فرض کردیم که شکافت تونلی برابر صفر است ($\Delta = 0$)؛ با در نظر گرفتن حالت اولیه سیستم به صورت $|\Psi(0)\rangle = (c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$ معادله شرودینگر را حل کردیم. پس از آن عناصر ماتریس چگالی را محاسبه نمودیم. همانطور که می دانیم مقدار عناصر غیر قطری ماتریس چگالی بیانگر همدموسی بین حالت هاست. در واقع تحول زمانی همدموسی در شرایط مختلف بررسی شده است.

معادله همدموسی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\rho_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} c_1 c_2^* e^{i(\varepsilon - \omega_0(n-n'))t} \left(\frac{g}{\omega_0}\right)^{n+n'} e^{\frac{-g^2}{\omega_0^2} \sum_{k=0}^{\min[n,n']} \frac{1}{k!(n-k)!(n'-k)!}} (-1)^k \left(2\frac{g}{\omega_0}\right)^{n'-k} \left(2\frac{g}{\omega_0}\right)^{n-k} e^{-2\left(\frac{g}{\omega_0}\right)^2}$$

۲

در معادله بالا ρ_{12} ، مقدار واندازه همدموسی را مشخص می کند.

محاسبه همدموسی کوانتومی می پردازیم. در ادامه اختلاف میان مقدار دقیق و اندازه تقریبی همدموسی را شبیه سازی کردیم. در نهایت معادله ویژه مقداری در دو حالت مختلف بررسی شده است.

مدل

در این بخش، مدل و محاسبات مربوط به آن را شرح می دهیم.

مدل مدار در شکل نشان داده شده است. هامیلتونین سیستم به صورت زیر تعریف می شود [۶]:

$$H = \frac{-\hbar}{2}(\Delta\sigma_x + \varepsilon\sigma_z) + \hbar\omega_0(\hat{a}^+a + \frac{1}{2}) + \hbar g\sigma_z(\hat{a} + \hat{a}^+)$$

۱

در معادله بالا اولین جمله، هامیلتونین کیوبیت است که از یک جریان دایمی در دوسمیر مختلف به دور حلقه کیوبیت تشکیل شده است. همچنین Δ میزان شکافت تونلی^۱ و ε تعیین کننده انرژی^۲ حالت های $|R\rangle, |L\rangle$ است. ماتریس های پاؤلی هستند. پراتنز دوم، هامیلتونین نوسانگر LC را توضیح می دهد. ω_0 فرکانس تشدید است. $a(a^+)$ عملگرهای نابودی (خلق) هستند. آخرین جمله در معادله بالا، هامیلتونین جفت شده میان کیوبیت و نوسانگر است. g شدت جفت شدگی است. زمانی که g با ω_0 و Δ قابل قیاس باشد؛ ویژه حالت های شامل حالت پایه درهم تنیده تر هستند و این رژیم قوی یا فوق قوی محسوب می شود.

^۱ Tunnel splitting

^۲ Energy bias

شکل بالا اختلاف حل دقیق و شبیه سازی تقریبی را برای همدوسی نشان می دهد. در این شکل این اختلاف برای مقادیر مختلف n بر حسب شدت جفت شدگی رسم شده است.

همانطور که از شکل پیداست اختلاف بین مقدار شبیه سازی و دقیق برای همدوسی یک صدم است.

در این بخش با در نظر گرفتن ($\Delta \neq 0$) معادله شرودینگر را برای سیستم حل می کنیم. هدف ما محاسبه درهم تنیدگی بین کیوبیت ابرسانا و مدار LC است. بنابراین باید ویژه مقادیر و ویژه حالت ها را محاسبه کنیم. در نهایت با استفاده از ویژه مقادیرهای ماتریس چگالی کاهش یافته و آنتروپی فون نیومن درهم تنیدگی قابل محاسبه است. معادله ویژه مقداری پس از ساده سازی به صورت زیر در می آید:

$$\sum_{n''=0}^{\infty} (F_{nn''}(E) - \delta_{nn''}) C_{n''}^{\dagger} = 0$$

۳

که در آن تابع F به صورت زیر تعریف می شود:

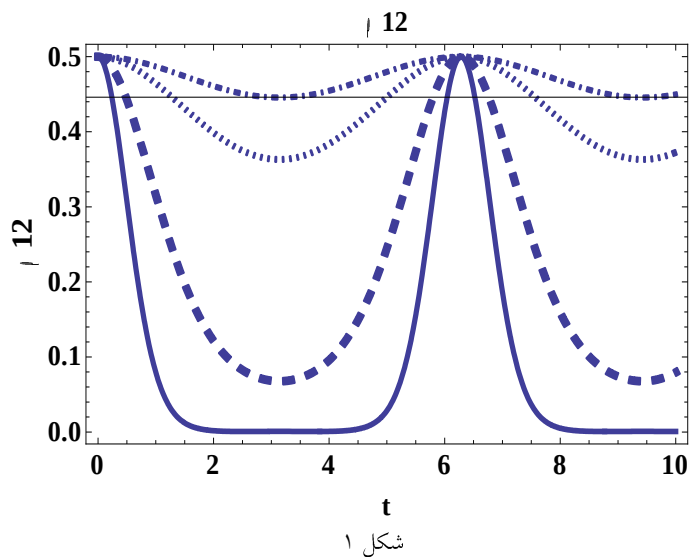
$$F_{nn''}(E) = \frac{1}{E_{\uparrow}^{(0)n} - E} \frac{\Delta^2}{4} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1}{E_{\downarrow}^{(0)n'} - E} \sum_{k'=0}^{\min(n', n'')} \frac{\sqrt{n'! n''!}}{k'!(n' - k')!(n'' - k')!} \left(-2 \frac{g}{\omega_0}\right)^{n'' - k'} \left(2 \frac{g}{\omega_0}\right)^{n' - k'} e^{-4 \left(\frac{g}{\omega_0}\right)^2} \times \sum_{k=0}^{\min(n, n')} \frac{\sqrt{n! n'!}}{k!(n - k)!(n' - k)!} \left(2 \frac{g}{\omega_0}\right)^{n' - k} \left(-2 \frac{g}{\omega_0}\right)^{n - k}$$

۴

می توان نشان داد که در این حالت کیوبیت ابرسانا و مدار هماهنگ LC در زمان اولیه درهم تنیده هستند.

نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه همدوسی بین حالت های کیوبیت و حالت های نوسانگر LC پرداختیم. همچنین اختلاف میان مقدار دقیق و



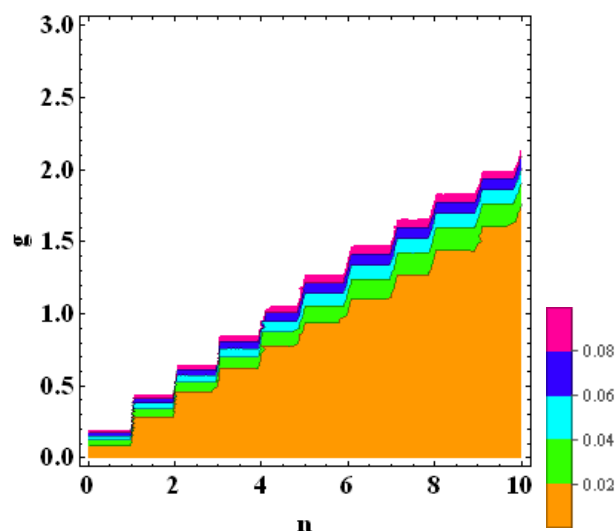
شکل ۱ تحول زمانی همدوسی را برای مقادیر مختلف شدت جفت شدگی نشان می دهد. این شبیه سازی تا جمله بیستم جمع موجود در معادله ۲ محاسبه شده است. مقادیر پارامترها در این شبیه سازی به صورت زیر است:

$g / \omega_0 = 1.0$ توپر، $g / \omega_0 = 0.5$ خط چین،

$g / \omega_0 = 0.20$ نقطه چین و $g / \omega_0 = 0.12$ توپر نقطه چین

است. سایر پارامترها عبارتند از: $\varepsilon = 0, c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$.

با وجود تقریبی بودن محاسبات ذکر شده، تطبیق بسیار خوبی بین حل دقیق و این تقریب برای همدوسی مشاهده می شود؛



شکل ۳

حل عددی همدوسی را شبیه سازی کردیم. سپس به حل معادله ویژه مقداری، زمانی که شکافت تونلی غیر صفر است پرداختیم. این نتایج در محاسبات کوانتومی بسیار پر کاربرد هستند.

سپاسگزاری

این تحقیق با حمایت های مرکز فیزیک نظری در ایتالیا (ICTP, INFN) صورت گرفته است. از این حمایت ها بسیار سپاسگزاریم.

مراجع

- [۱] I. Chiorescu et al; " Coherent dynamics of flux qubit coupled to a harmonic oscillator"; *Nature*, vol 431. (2004) p. 159.
- [۲] D. Z. Rossato et al ;"Spectral classification of coupling regimes in the quantum Rabi model";*Physical Review A*, 96. (2017) 013849.
- [۳] F. Beaudin; "Dissipation and ultrastrong coupling in circuit QED"; *Physical Review A*, 84. (2011) 043832.
- [۴] S. Ashhab et al; "Qubit- oscillator system in the ultrastrong- coupling regime and their potential for preparing non classical states"; *Physical Review A*, 81. (2010) 042311.
- [۵] R. Barends et al; "Digitized adiabatic quantum computing"; *Nature*, vol. 534. (2016) p. 2226.
- [۶] F. Yoshihara et al; "Superconducting qubit- oscillator circuit beyond the ultra strong- coupling regime"; *Nature Physics*, (2016).

محاسبه درهم تنیدگی حالت های پایه شبکه مثلثی ۷ کیوبیتی دو بعدی اسپینی

قنواتی^۱، صفرا^۱؛ جعفرپور، مجتبی^۲^۱ گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد امیدیه، امیدیه، ایران^۲ گروه فیزیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ایران

چکیده

در این تحقیق ابتدا حالت های پایه شبکه مثلثی ۷ کیوبیتی، در حضور میدان مغناطیسی محاسبه شده است. سپس نشان داده شده است که میدان مغناطیسی خارجی عامل تنظیم کننده درهم تنیدگی حالت های پایه است؛ به طوری که حالت های پایه درهم تنیده گلوبال، جداپذیر و حالت های بین این دو را از هم متمایز می سازد. با تشخیص این حالت ها، انتخاب و به کارگیری آن ها در فرآیندهای گوناگون اطلاعات کوانتومی آسانتر می شود. از تحلیل نتایج دیده می شود که با افزایش ضریب برهم کنش شبکه، درهم تنیدگی در گستره بزرگتری از میدان مغناطیسی وجود دارد.

کلیدواژگان: حالت پایه، درهم تنیدگی، شبکه دو بعدی اسپینی.

Calculation of the ground state entanglement of a two-dimensional spin 7-qubit triangle lattice

Ghanavati¹, Soghra; Jafarpour, Mojtaba²¹Physics Department, Omidiyeh Branch, Islamic Azad University, Omidiyeh, Iran^{1,2} Physics Department, Shahid Chamran University of Ahwaz, Iran

Abstract

In this study, the ground states of a 7-qubit triangle lattice, in the presence of a magnetic field are derived. Then it is shown that the external magnetic field is a tuning agent that determines the global entangled states, the separable ground states and the states in between. By detecting these states, it is easier to choose and use them in the various processes of quantum information. Also, analyzing the results, it is revealed that by increasing the interaction parameters; the entanglement appears in a larger range of the magnetic field.

Keywords: Ground state, Entanglement, Two-dimensional spin lattice

PACS No.3

مقدمه

داشتن حالت پایه یک سیستم می توان بسیاری از خصوصیات آن از جمله درهم تنیدگی بین اجزا را به دست آورد. از طرفی ظهور درهم تنیدگی کوانتومی به عنوان منبعی با کاربردهای فراوان و شگفت انگیز، در علم اطلاعات و محاسبات کوانتومی، منشأ مطالعات بسیار و واسطه ورود این علم به میان قلمروهای دیگر علوم بوده است. [۳-۵]. بررسی درهم تنیدگی کوانتومی حالت ها، برای مطالعه گذار فاز کوانتومی از اهمیت برخوردار است که

پیدا کردن حالت پایه هامیلتونی مربوط به برهم کنش بین اجزای یک سیستم متشکل از تعداد زیادی کیوبیت یکی از مسائل مهم در فیزیک ماده چگال و نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی است [۱-۲]. اهمیت آن در ماده چگال به این دلیل است که با پیدا کردن حالت پایه مدل های حل پذیر، می توان از آن ها به عنوان مرجعی برای روش های اختلالی و در نتیجه پیدا کردن حالت پایه مدل های واقعی و فیزیکی تر استفاده کرد. همچنین با

محاسبه حالت پایه

تعداد 2^7 ویژه مقدار و ویژه حالت هامیلتونی (۱) که تابعی از ضریب برهم کنش نزدیکترین همسایه، J و B ، میدان مغناطیسی اعمال شده در جهت محور Z است، برای شبکه مثلثی به آسانی محاسبه می شود. بر اساس این محاسبات و برای گستره هایی از J و B ، ویژه مقادیر پایه را می نویسیم.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(-B - 4J - \sqrt{5}J), \quad J \geq \frac{2B}{\sqrt{5}} \quad (4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(-3B - 4J), \quad \frac{2B}{3} \leq J < \frac{2B}{\sqrt{5}} \quad (5)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(-5B - J), \quad \frac{2B}{7} \leq J < \frac{2B}{3} \quad (6)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{-7}{2}B + 3J, \quad J < \frac{2B}{7} \quad (7)$$

ویژه بردارهای نظیر این ویژه مقادیر، به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle = & -\frac{1}{6(5+3\sqrt{5})}(-2(|0001111\rangle + |0011011\rangle + |0101101\rangle \\ & + |1011010\rangle + |1101100\rangle + |1111000\rangle) - 2(1+\sqrt{5})(|0010111\rangle \\ & + |0100111\rangle + |1010011\rangle + |1100101\rangle + |1110010\rangle + |1110100\rangle) \\ & + (3+\sqrt{5})(|0011101\rangle + |0011110\rangle + |0101011\rangle + |0101110\rangle - 4|0110110\rangle \\ & + |0111010\rangle + |0111100\rangle + |1001011\rangle + |1001101\rangle - 4|1010101\rangle \\ & + (2+\sqrt{5})(-4|0110011\rangle - 4|0110101\rangle - 6|0111001\rangle + |1000111\rangle \\ & + |1011001\rangle + |1011100\rangle - 4|1100011\rangle + |1101001\rangle + |1101010\rangle) \\ & - 6|1001110\rangle + 4|1010110\rangle + 4|1100110\rangle + 4|1110001\rangle) \quad (8) \\ |\psi_2\rangle = & \frac{1}{\sqrt{30}}(-2(|0110111\rangle + |1110011\rangle + |1110101\rangle - |1110110\rangle \\ & - |1010111\rangle - |1100111\rangle) + |0111011\rangle + |0111101\rangle) \end{aligned}$$

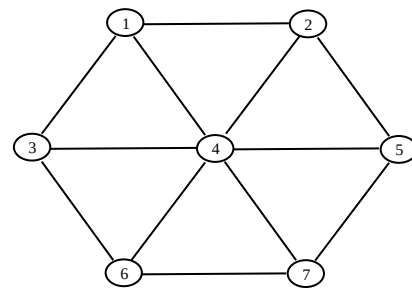
مطالعه آن منشأ شناسایی و معرفی مطالب و نکات جدید می گردد [۶].

شبکه مثلثی دو بعدی اسپینی

این سیستم متشکل از هفت ذره است که در گوشه ها و مرکز یک شش ضلعی قرار دارند و یک مدل دو بُعدی مثلثی آیزینگ را تشکیل می دهند. هامیلتونی حاکم بر این سیستم به صورت زیر است: [۷]

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + B \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \quad (1)$$

که در آن J ضریب برهم کنش نزدیکترین همسایه و $\vec{S}_i$ عملگر اسپین برای ذره i است. $\langle i,j \rangle$ یک جفت از نزدیکترین همسایه ها بر روی شبکه است. B میدان مغناطیسی اعمال شده در جهت محور Z است.



شکل ۱: شبکه مثلثی دو بُعدی اسپینی.

کانکرنس

این سنجشگر توسط ووترز برای سیستم های دو جزئی به صورت زیر معرفی شده است [۸-۱۰]:

$$C(\hat{\rho}) = \text{Max}(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}) \quad (2)$$

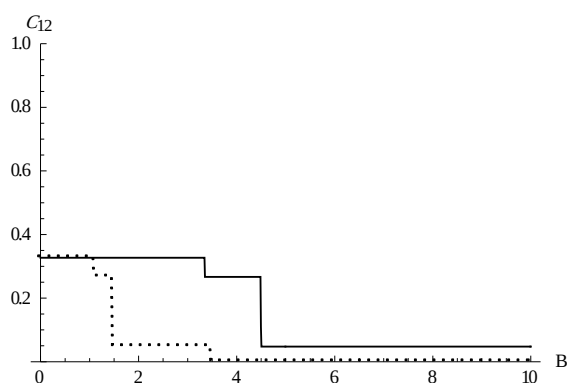
که در آن λ_i ویژه مقادیر ماتریس اسپین وارون R هستند، که به ترتیب نزولی مرتب شده اند.

$$R = \hat{\rho}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \hat{\rho}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \quad (3)$$

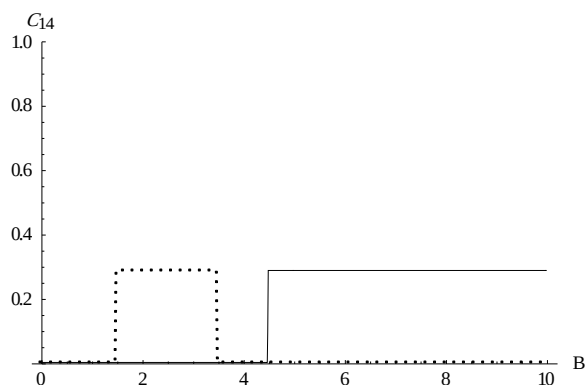
$\hat{\sigma}_y$ مؤلفه ی ماتریس پائولی، $\hat{\rho}$ ماتریس چگالی سیستم دو کیوبیتی و $\hat{\rho}^*$ مزدوج مختلط ماتریس چگالی است. برای حالتی با بیشترین مقدار $C(\hat{\rho}) = 1$ و برای حالت غیر درهم تنیده $C(\hat{\rho}) = 0$ است.

جدول ۱: محاسبه درهم‌تنیدگی دوتایی حالت‌های پایه شبکه مثلثی

Range	$J \geq \frac{2B}{\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{3} \leq J < \frac{2B}{\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{7} \leq J < \frac{2B}{3}$	$J < \frac{2B}{7}$
ground State	$ \psi_1\rangle$	$ \psi_2\rangle$	$ \psi_3\rangle$	$ \psi_4\rangle$
C_{12}	۰/۳۲۷	۰/۲۶	۰/۰۴۷	.
C_{14}	.	.	۰/۰۴۷	.



شکل ۱. C_{12} شبکه مثلث برحسب B به‌ازاء $J = 1$ (خط چین)،
 $J = 3$ (خط توپر)



شکل ۲. C_{14} شبکه مثلث برحسب B به‌ازاء $J = 1$ (خط چین)،
 $J = 3$ (خط توپر)

با توجه به جدول ۱ و شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود که در میدان‌های با شدت بالا درهم‌تنیدگی دو جزیی صفر است. همچنین نشان داده شده است که با افزایش ضریب برهم‌کنش شبکه، در گستره بزرگتری از میدان، درهم‌تنیدگی وجود دارد.

$$-|1001111\rangle - |1011110\rangle - |1101110\rangle + |1111001\rangle \quad (9)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{42}}(|0111111\rangle + |10111111\rangle + |1101111\rangle - 6|1111011\rangle + |1111011\rangle + |1111101\rangle + |1111110\rangle) \quad (10)$$

$$|\psi_4\rangle = |1111111\rangle \quad (11)$$

درهم‌تنیدگی حالت پایه

اکنون که حالت‌های پایه سیستم را به‌دست آورده شده است، درهم‌تنیدگی دوتایی آن را در حالت پایه با استفاده از سنجه کانکرنس محاسبه می‌شود. کانکرنس را با استفاده از رابطه (۲) به‌دست آورده می‌شود. با توجه به تقارن موجود در سیستم، درهم‌تنیدگی‌ها به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

$$C_{12} = C_{13} = C_{25} = C_{36} = C_{57} = C_{67}$$

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{45} = C_{46} = C_{47}$$

دسته اول درهم‌تنیدگی نزدیک‌ترین همسایه کناری را نشان می‌دهد؛ دسته دوم درهم‌تنیدگی کیوبیت وسطی را با دیگر کیوبیت‌ها نشان می‌دهد.

مقادیر کانکرنس برای حالت‌های پایه $|\psi_1\rangle$ ، $|\psi_2\rangle$ ، $|\psi_3\rangle$ و $|\psi_4\rangle$ در جدول (۱) آمده است.

با بررسی جدول (۱) مشاهده می‌شود که در محدوده $J < \frac{2B}{7}$ سیستم در حالت کاملاً جداپذیر $|\psi_4\rangle$ است. بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی را $|\psi_1\rangle$ دارد. تنها در محدوده $\frac{2B}{7} \leq J < \frac{2B}{3}$ کیوبیت مرکزی با دیگر کیوبیت‌ها درهم‌تنیدگی دارد.

جهت بررسی تاثیر میدان بر درهم‌تنیدگی دوتایی و رابطه آن با ضریب برهم‌کنش در شکل‌های ۲ و ۳ نمودار C_{12} و C_{14} برحسب میدان به‌ازاء مقادیر متفاوت ضریب برهم‌کنش شبکه رسم شده است.

سنجه گلوبال میر-والاش

نتیجه گیری

در سال ۱۳۸۰/۲۰۰۱ میر و والاش یک سنجه درهم تنیدگی برای سیستم های چند جزئی خالص معرفی کردند [۱۱]. در سال ۲۰۰۳/۱۳۸۲ برن این سنجه را بررسی کرد و نشان داد که درهم تنیدگی چندتایی بر اساس این سنجه تابعی یکنوا است. سنجه گلوبال یاد شده با رابطه زیر بیان می شود [۱۲]:

$$Q(\psi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2(1 - \text{Tr}[\rho_k^2]) \quad (12)$$

که در آن ρ_k ماتریس چگالی کاهش یافته k امین کیوبیت، با ردگیری روی بقیه کیوبیت ها است. $Q(\psi)$ مقادیری بین صفر و یک است؛ برای حالتی با بیشترین مقدار درهم تنیدگی برابر یک و برای حالت جداپذیر برابر صفر است.

درهم تنیدگی گلوبال

این پژوهش به بررسی یک مدل دوبعدی مثلثی آیزینگ که تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی قرار گرفته است؛ می پردازد و از روش دقیق قطری کردن برای حل هامیلتومی سیستم و یافتن حالت پایه در دمای صفر مطلق استفاده کرده است. چون حالت های پایه خالص هستند ماتریس چگالی برای هر حالت به صورت زیر به دست می آید:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

و درهم تنیدگی گلوبال سیستم به صورت زیر است:

$$Q(\psi) = \frac{2}{7} (7 - \text{Tr}[\rho_1^2] - \text{Tr}[\rho_2^2] - \text{Tr}[\rho_3^2] - \text{Tr}[\rho_4^2] - \text{Tr}[\rho_5^2] - \text{Tr}[\rho_6^2] - \text{Tr}[\rho_7^2])$$

برای چهار حالت پایه $Q(\psi)$ را محاسبه و در جدول (۲) نتایج را نشان داده شده است.

با بررسی داده های جدول ۲ ملاحظه می شود که در میدان های بزرگ درهم تنیدگی گلوبال صفر می شود. $|\psi_1\rangle$ یک حالت پایه با بیشینه درهم تنیدگی گلوبال است.

جدول ۲: محاسبه درهم تنیدگی گلوبال حالت های پایه شبکه مثلثی

Range	$J \geq \frac{2B}{\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{3} \leq J < \frac{2B}{\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{7} \leq J < \frac{2B}{3}$	$J < \frac{2B}{7}$
ground State	$ \psi_1\rangle$	$ \psi_2\rangle$	$ \psi_3\rangle$	$ \psi_4\rangle$
Q	۰/۹۴	۰/۶۴	۰/۱۵	۰

در این تحقیق حالت های پایه و درهم تنیدگی دوتایی و گلوبال شبکه مثلثی بررسی گردیده است. علاوه بر این تأثیر پارامترهای سیستم از قبیل ضرایب برهم کنش بین کیوبیت ها J_1, J_2 و پارامتر تأثیر محیط (میدان مغناطیسی) بر حالت پایه و درهم تنیدگی آن ها بررسی و مطالعه شده است. نتایج نشان می دهد که میدان مغناطیسی عامل تنظیم کننده درهم تنیدگی حالت های پایه است؛ به طوری که حالت های پایه درهم تنیده گلوبال، جداپذیر و حالت های بین این دو را از هم متمایز می سازد. ملاحظه می شود که در میدان های بزرگ درهم تنیدگی صفر شده است. همچنین با تحلیل نتایج دیده می شود که با افزایش ضریب برهم کنش، میزان درهم تنیدگی بیشتر می شود. ضمناً تنها در محدوده $\frac{2B}{7} \leq J < \frac{2B}{3}$ ، کیوبیت مرکزی با دیگر کیوبیت ها درهم تنیدگی دوتایی دارد. احتمالاً می توان از نتایج این تحقیق در بررسی گذار فاز کوانتومی، فیزیک ماده چگال، اطلاعات و محاسبات کوانتومی استفاده کرد.

مرجع ها

- [1] U. Scholl Wock, J. Richter, D.J.J. Farnell, R.F. Bishop (Eds.), *Quantum Magnetism*, Lect. Notes Phys. 645, Springer, Berlin Heidelberg (2004).
- [2] Gu. Shi-Jian, Lin. Hai-Qing, Scaling dimension of fidelity susceptibility in quantum phase transitions, *Euro physics Letters* **87**(2009) 10003-10005.
- [3] K.M. O'Conner, W.K. Wootters, Entangled rings, *Physical Review A* **63** (2001) 052302-1-052302-9.
- [4] X. Wang, Entanglement in the quantum Heisenberg XY model, *Physical Review A* **64** (2001) 01233-1-012313-7.
- [5] M. Jafarpour, S. Ghanavati, D. Afshar, Entanglement distribution in a two-dimensional 5-site frustrated J1-J2 spin system: Separable and globally entangled ground states, *International Journal of Quantum Information* **13** (2015) 1550047-1-1550047-11.
- [6] Gu. Shi-Jian and Lin. Hai-Qing, "Scaling dimension of fidelity susceptibility in quantum phase transitions," *EPL (Europhysics Letters)* **87**(2009) 10003.
- [7] Q. Xu, S. Kais, M. Naumov and A. Sameh, "Exact calculation of entanglement in a 19-site 2D spin system," *Phys. Rev. A* **81**(2010). 022324,1-12.
- [8] W. K. Wootters; "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits"; *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2245-2248.
- [9] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki ; "Quantum entanglement"; *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865-942.
- [10] S. Hill and W. K. Wootters; "Entanglement of a Pair of Quantum Bits"; *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 5022-5025.
- [11] D. A. Meyer, N.R. Wallach, "Global entanglement in multiparticle systems," *J. Math. Phys.* **43** (2002) 4273.
- [12] P.J. Love et al, "A characterization of global entanglement", *Quantum Information Processing* **6** (2007) 187-195.

درهم تنیدگی حالت های عددی جابه جاشده دومی برهم نهاد

بتوندی ابگاه، خدیجه^۱؛ افشار، داود^۱؛ جعفرپور، مجتبی^۱^۱ گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز^۲ مرکز تحقیقات لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

چکیده

در این مقاله حالت های عددی جابه جاشده برهم نهاد با اختلاف فاز π و $\frac{\pi}{2}$ را در نظر می گیریم. سپس درهم تنیدگی این حالت ها را با استفاده از سنج توافقی مورد بررسی قرار می دهیم. مشاهده می شود که از هشت حالت مورد مطالعه، دو حالت به ازای همه مقادیر پارامترها دارای بیشینه درهم تنیدگی هستند، در حالی که بقیه حالت ها بسته به مقادیر پارامترها ممکن است بیشینه درهم تنیدگی را نشان دهند یا جداپذیر باشند.

واژه های کلیدی: حالت های عددی جابه جا شده، درهم تنیدگی، حالت های غیر متعامد

Entanglement in superposed two-mode displaced number states

Batvandi abgah, Khadijeh¹; Afshar, Davood^{1,2}; Jafarpour, Mojtaba¹¹Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz²Center for Research on Laser and Plasma, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz

Abstract

In this paper we consider superposed displaced number-states with π and $\frac{\pi}{2}$ out of phase. Then, we investigate the entanglement of these states using concurrence. We observe that two of the eight states under study are maximally entangled in the all ranges of the parameters. The other states are entangled or separable depending on the parameters involved.

Keywords: Displaced number states, Entanglement, Nonorthogonal states

PACS No. 3

مقدمه

حالت های همدوس از یک حرکت کلاسیکی پیروی کرده و شکل خود را حفظ می کند. همچنین این حالت ها به روش تجربی نیز تولید شده اند [۲-۳]. برهم نهی حالت های عددی جابه جاشده و روش های تولید آنها نیز اخیراً مورد مطالعه قرار گرفته است [۴].

درهم تنیدگی کوانتومی به عنوان منبع اساسی در فرآیندهای اطلاعات و محاسبات کوانتومی است. از این رو تولید حالت های درهم تنیده از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. در سال های اخیر تولید حالت های درهم تنیده با استفاده از حالت های غیر متعامد مورد توجه قرار گرفته است [۵]. از جمله این حالت ها

حالت های همدوس حالت های مهمی در فیزیک کوانتومی، به ویژه در نورشناخت کوانتومی و اطلاعات کوانتومی هستند. یک تعمیم از حالت های همدوس، حالت های عددی جابه جاشده است [۱]. مطالعه این حالت ها به سال ۱۹۵۰ بر می گردد. یک حالت عددی جابه جاشده از تاثیر عملگر جابه جایی بر روی حالت های عددی نوسانگر هماهنگ به دست می آید. این حالت ها همانند حالت های همدوس غیر متعامدند و بسته موج آنها نیز همانند

$$|\psi\rangle_{1(2)} = N^{-1} (|\alpha, m\rangle_1 \otimes |-\alpha, n\rangle_2 \pm |-\alpha, n\rangle_1 \otimes |\alpha, m\rangle_2) \quad (4)$$

$$|\psi\rangle_{3(4)} = N^{-1} (|\alpha, m\rangle_1 \otimes |\alpha, n\rangle_2 \pm |-\alpha, n\rangle_1 \otimes |-\alpha, m\rangle_2) \quad (5)$$

$$|\psi\rangle_{5(6)} = N^{-1} (|\alpha, m\rangle_1 \otimes |\alpha, n\rangle_2 \pm |i\alpha, n\rangle_1 \otimes |i\alpha, m\rangle_2) \quad (6)$$

$$|\psi\rangle_{7(8)} = N^{-1} (|\alpha, m\rangle_1 \otimes |i\alpha, n\rangle_2 \pm |i\alpha, n\rangle_1 \otimes |\alpha, m\rangle_2) \quad (7)$$

که در آن‌ها حالت‌های $| \rangle_1$ و $| \rangle_2$ به ترتیب مربوط به دو زیر سیستم ۱ و ۲ می‌باشند. همچنین برای حالت $|\psi\rangle_{i(j)}$ علامت + مربوط به حالت $|\psi\rangle_i$ و علامت - مربوط به حالت $|\psi\rangle_j$ است.

درهم‌تنیدگی حالت‌های غیرمتعامد

برای مطالعه درهم‌تنیدگی می‌توان از سنج‌های مختلفی نظیر توافق، آنتروپی خطی، منفیت و درهم‌تنیدگی تشکیل استفاده کرد. در این مقاله برای محاسبه درهم‌تنیدگی حالت‌های معرفی شده، سنج توافق را به کار می‌بریم.

سنج توافق برای یک حالت خالص دوجزئی به صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$C = |\langle \psi | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi^* \rangle| \quad (8)$$

که در آن $|\psi^*\rangle$ مزدوج مختلط $|\psi\rangle$ می‌باشد. در صورتی که توافق صفر شود حالت جداپذیر است. همچنین حالت‌هایی بیشینه درهم‌تنیدگی را دارند که توافق مقدار یک را داشته باشد. اینک یک حالت دوجزئی، به صورت کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi\rangle = N^{-1} [\mu |\eta\rangle \otimes |\gamma\rangle + \nu |\zeta\rangle \otimes |\delta\rangle] \quad (9)$$

که در آن، $|\eta\rangle$ و $|\zeta\rangle$ ($|\delta\rangle$ و $|\gamma\rangle$) حالت‌های بهنجار و نامتعامد از سیستم ۱ (سیستم ۲) هستند. و ضریب بهنجاری N نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N^2 = |\mu|^2 + |\nu|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mu^* \nu p_1 p_2^*), \quad (10)$$

$$p_1 = \langle \eta | \zeta \rangle, p_2 = \langle \delta | \gamma \rangle$$

توافق برای حالت دوجزئی رابطه ۹ به صورت زیر به دست می‌آید [۵]:

$$C = \frac{2|\mu||\nu|}{N^2} \sqrt{(1-|p_1|^2)(1-|p_2|^2)} \quad (11)$$

می‌توان به برهم‌نهی حالت‌های همدوس دومدی و حالت‌های همدوس غیر خطی اشاره کرد [۵-۶]. در این پژوهش هدف ما مطالعه درهم‌تنیدگی برهم‌نهی حالت‌های عددی جابه‌جاشده دومدی با اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ و π است. میزان درهم‌تنیدگی این حالت‌ها با سنج توافق مورد مطالعه قرار گرفته و شرایط لازم برای داشتن بیشینه درهم‌تنیدگی یا جداپذیری بررسی خواهد شد.

بر این اساس در این مقاله پس از معرفی حالت‌های عددی جابه‌جاشده، حالت‌های برهم‌نهاد دومدی را معرفی می‌کنیم. سپس با مروری بر روش محاسبه درهم‌تنیدگی حالت‌های برهم‌نهاد غیرمتعامد، درهم‌تنیدگی حالت‌های معرفی شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حالت‌های عددی جابه‌جاشده

حالت‌های عددی جابه‌جاشده از تاثیر عملگر جابه‌جایی بر روی حالت‌های عددی نوسانگر هماهنگ به دست می‌آیند [۷]:

$$|\alpha, n\rangle = \hat{D}(\alpha) |n\rangle = \sum_m C_m^n |n\rangle \quad (1)$$

که در آن $|n\rangle$ ویژه حالت نوسانگر هماهنگ و عملگر جابجایی $\hat{D}(\alpha)$ نیز عبارت است از:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (2)$$

عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ در رابطه فوق به ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش نوسانگر هماهنگ هستند. همچنین ضرائب C_m^n به صورت زیر به دست می‌آیند [۸]:

$$C_m^n = \begin{cases} \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}(|\alpha|^2), m \geq n \\ \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} (\alpha^{n-m})^* L_n^{n-m}(|\alpha|^2), m \leq n \end{cases} \quad (3)$$

که در آن، $L_T^P(Y)$ تابع لاگر وابسته می‌باشد.

حالت‌های عددی جابه‌جاشده دومدی و برهم‌نهی آن‌ها

با استفاده از حالت‌های عددی جابه‌جاشده در معادله ۱،

حالت‌های دومدی برهم‌نهاد با اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ و π را به صورت

زیر می‌سازیم:

درهم تنیدگی حالت های عددی جابه جاشده دومی

برهم نهاده

اینک با استفاده از روابط ۱ تا ۳ و رابطه ۱۱ درهم تنیدگی حالت های ۴ تا ۷ را محاسبه می کنیم. به عنوان مثال برای حالت $|\psi\rangle_1$ داریم:

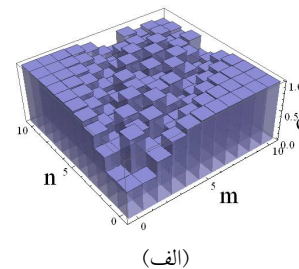
$$\mu = \nu = 1 \quad (12)$$

$$P_1 = P_2 = \langle \alpha, m | -\alpha, n \rangle = \sqrt{\frac{n!}{m!}} (-2\alpha)^{m-n} \times \quad (13)$$

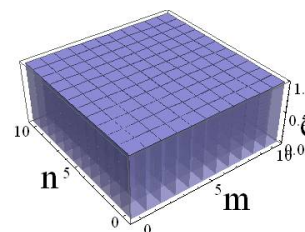
$$e^{-2|\alpha|^2} L_n^{m-n} (4|\alpha|^2)$$

$$N^2 = 2 + 2\text{Re}(P_1 P_2^*) \quad (14)$$

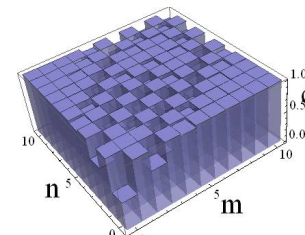
با جایگذاری روابط ۱۲ تا ۱۴ در رابطه ۱۱ توافق حالت $|\psi\rangle_1$ محاسبه می شود. برای ۷ حالت ساخته شده دیگر (روابط ۴ تا ۷) نیز به همین ترتیب می توان توافق را محاسبه کرد. در شکل های ۱ و ۲ به ترتیب توافق را برای حالت های برهم نهاده با اختلاف فاز π ($|\psi\rangle_1$ تا $|\psi\rangle_4$) و $\frac{\pi}{2}$ ($|\psi\rangle_5$ تا $|\psi\rangle_8$) بر حسب m و n و به ازای یک پارامتر همدوسی ثابت رسم کرده ایم.



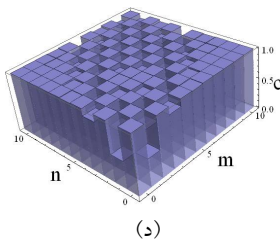
(الف)



(ب)

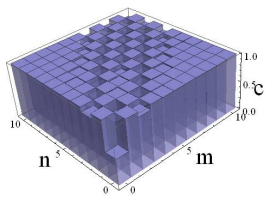


(ج)

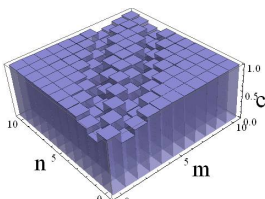


(د)

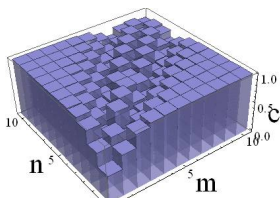
شکل ۱: نمودار توافق بر حسب m و n برای: الف) $|\psi\rangle_1$ ب) $|\psi\rangle_2$ ج) $|\psi\rangle_3$ د) $|\psi\rangle_4$ به ازای $\alpha = 0.5$.



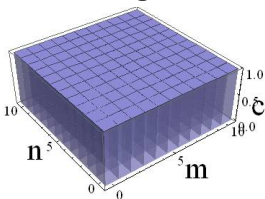
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۲: نمودار توافق بر حسب m و n برای: الف) $|\psi\rangle_5$ ب) $|\psi\rangle_6$ ج) $|\psi\rangle_7$ د) $|\psi\rangle_8$ به ازای $\alpha = 0.5$.

بررسی نتایج

با استفاده از شکل های ۱ و ۲ مشاهده می کنیم که حالت های $|\psi\rangle_2$ و $|\psi\rangle_8$ به ازای همه مقادیر m و n دارای بیشینه

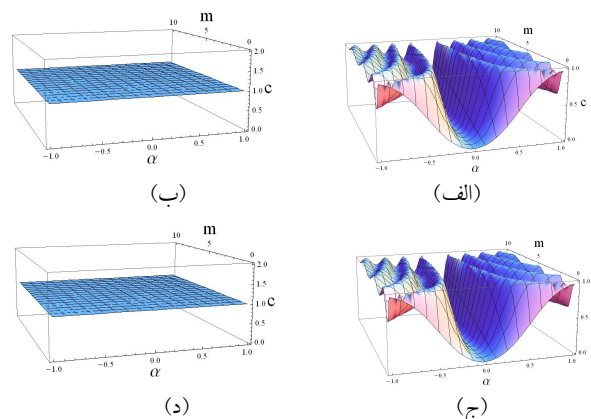
نتیجه گیری

در این مقاله درهم تنیدگی حالت های عددی جابه جاشده دومی برهم نهاده، با استفاده از سنجۀ توافق مورد مطالعه قرار گرفت. در ابتدا ۸ حالت دومی برهم نهاده را معرفی کرده و نمودار توافق آن ها را برحسب m و n رسم کردیم. سپس شرایط داشتن درهم تنیدگی یا جداپذیری در این حالت ها بررسی شد. مطالعه ما نشان داد که از هشت حالت مورد مطالعه، دو حالت دارای بیشینه درهم تنیدگی هستند. همچنین درهم تنیدگی این حالت ها به ازای $m = n$ مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده کردیم که چهار حالت به ازای همه مقادیر پارامتر همدوسی α دارای بیشینه مقدار درهم تنیدگی هستند. به علاوه در چهار حالت دیگر، در صورتی که پارامتر همدوسی صفر باشد، حالت ها جداپذیرند.

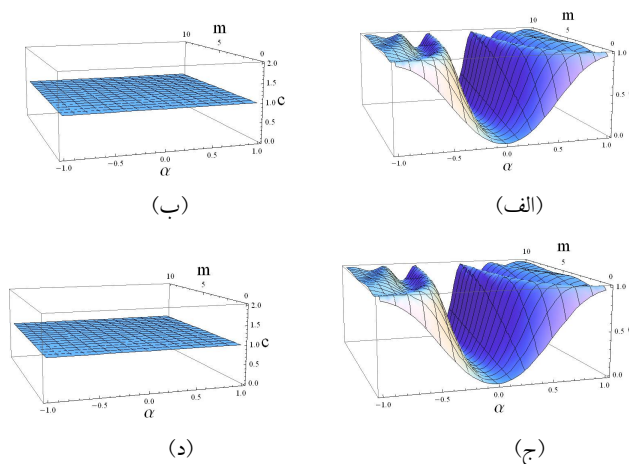
مرجع ها

- [۱] M. M. Nieto, "Displaced and squeezed number states", physics Letters A **22** (1997) 135–143.
- [۲] J. M. C. Malbouissona,, B. Baseiaban and A.T. Avelar, "A note on the generation of displaced number states", Physica A **376** (2007) 275–278.
- [۳] A. I. Lvovsky and S. A. Babichev, "Synthesis and tomographic characterization of the displaced Fock state of light", Physical Review A **66** (2002) 011801- 1-4
- [۴] H. Moya-Cessa, "Generation and properties of superpositions of displaced Fock states", Journal of Modern Optics **42**, No. 8 (1995) 1741–1754.
- [۵] X. Wang, "Bipartite entangled non-orthogonal states", Journal of Physics A: Mathematical and General **35** (2002) 165–173.
- [۶] D. Afshar and A. Anbaraki, " Nonclassical properties and entanglement of superposition of two-mode separable nonlinear coherent states ", Journal of the Optical Society of America B **33** (2016) 558-565.
- [۷] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight and V. Buzek, "Properties of displaced number states", Physical Review A **41** (1990) 2645–2652.
- [۸] G. C. de Oliveira, A. R. de Almeida, I. P. deQueiros, A. M. Moraes and C. M. A. Dantas, "Alternative proposal for the generation of the displaced number state", Physica A **351** (2005) 251–259.

درهم تنیدگی ($C = 1$) هستند. در بقیه حالت ها بسته به مقادیر m و n ممکن است درهم تنیدگی به مقدار بیشینه خود برسد. اینک به ازای $m = n$ ، وابستگی توافق را به پارامتر همدوسی α مورد مطالعه قرار می دهیم. در شکل های ۳ و ۴ توافق بر حسب پارامتر α و m رسم شده است.



شکل ۳: نمودار توافق برحسب m و α برای (الف) $|\psi\rangle_1$ (ب) $|\psi\rangle_2$ (ج) $|\psi\rangle_3$ (د) $|\psi\rangle_4$.



شکل ۴: نمودار توافق برحسب m و α برای (الف) $|\psi\rangle_5$ (ب) $|\psi\rangle_6$ (ج) $|\psi\rangle_7$ (د) $|\psi\rangle_8$.

مشاهده می شود که حالت های $|\psi\rangle_2$ ، $|\psi\rangle_4$ ، $|\psi\rangle_6$ و $|\psi\rangle_8$ به ازای $m = n$ و در همه مقادیر α دارای بیشینه درهم تنیدگی ($C = 1$) هستند. درهم تنیدگی حالت های دیگر بسته به مقدار α دارای مقادیر متفاوتی هستند، ولی به ازای $\alpha = 0$ جداپذیر هستند.

بررسی تغییرات درهم تنیدگی گرمایی در سیستم اتم-کاواک با در نظر گرفتن ولگشت در مقایسه با

حالت بدون ولگشت

محمدی، محمود^۱، جامی، صفا^۲

^۱دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد، مشهد

چکیده

سیستم اتم- کاواک شامل یک اتم یا مجموعه ای از اتم ها درون یک کاواک است. هنگامی که یک اتم درون کاواک با پمپ لیزری تحریک می شود تحت تاثیر برهمکنش اتم و میدان، رفتاری کوانتومی و شبه ولگشت انجام می دهد. این موضوع می تواند درهم تنیدگی گرمایی را تغییر دهد. در این پژوهش درهم تنیدگی گرمایی را در دو حالت مختلف، با حفظ ولگشت اتم و بدون ولگشت محاسبه و تغییرات آن را بررسی کرده ایم. مدل مورد بررسی، یک اتم دو ترازه درون کاواک الکترودینامیکی در مدل جینز- کامینگز است که با دو پمپ لیزری، طولی و عرضی تحریک می شود. نتایج نشان می دهد در حالتی که ولگشت اتم را در نظر بگیریم مقدار درهم تنیدگی گرمایی در دماهای پایین تری به صفر خواهد رسید و مقادیر بیشینه و کمینه آن کمتر می شود. کلید واژه: کاواک QED، ولگشت اتم، درهم تنیدگی گرمایی، پمپ لیزری

Investigation of the variation of thermal entanglement in an atom-cavity system with random walk compared to without random walk state

Mohammadi.Mahmoud¹, Jami.Safa²

^{1,2}Department of physics, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran

Abstract

An atomic-cavity system consists of an atom or group of atoms inside a cavity. When an atom in cavity is stimulated by a laser pump, it is affected by the interaction of the atom and the field, with quantum behavior and quasi-random walk. This can change the thermal entanglement. In this paper we investigated the change thermal entanglement of system in two different modes, with the preservation of random walk and without random walk. The model is a two-level atom in the electrodynamic cavity in the Jain-Cummings model, which is propelled by two laser pumps, longitudinal and transverse. The results show that the consideration of the atomic random walk, the amount of thermal entanglement will reach zero at lower temperatures and the maximum and minimum values will decrease.

Key word: Cavity QED, atom random walk, entanglement, pump laser

مقدمه

کاربردهای زیادی در مخابرات و محاسبات کوانتومی دارد. مانند

ترابرد کوانتومی [۲، ۳]، ارتباطات امن کوانتومی و محاسبات

کوانتومی [۴، ۵]. در دهه ۹۰، حالت های درهم تنیده ی دو اتم به

درهم تنیدگی یکی از مهمترین مفاهیمی است که باعث تمایز

فیزیک کلاسیک از فیزیک کوانتوم شده است [۱]. درهم تنیدگی

صورت تجربی با استفاده از یون های فوق سرد در تله [۷،۶]

والکترودینامیک کوانتومی درون کاواک (QED) [۸] مطالعه شده

است. همچنین می توان با تحریک اتم یا اتم ها در یک سیستم اتم

- کاواک با استفاده از میدان لیزری، درهم تنیدگی ایجاد کرد. در

این حالت می توان اثرات گرمایی و خنک کننده را مشاهده

کرد [۹-۱۴]. در هم تنیدگی گرمایی در مدل هایزنبرگ [۱۵-۲۴] و

در سیستم اتم کاواک [۲۵-۳۲]. تعدادی از سیستم های کوانتومی

هستند که همبستگی بیشتری نسبت به متناظر کلاسیکی شان دارند.

از طرفی در بحث پردازش اطلاعات کوانتومی، بررسی سیستم های

کوانتومی که با محیط اندرکنش دارند از اهمیت زیادی برخوردار

است چرا که در این صورت، سیستم کوانتومی در یک شرایط

واقعی تر مورد بحث قرار می گیرد همچنین در نظر گرفتن

ولگشت اتم درون کاواک نیز می تواند موثر باشد. اتم در حالت

پایه در دمای صفر قرار دارد و دما در آزمایشگاه همواره مخالف

صفر است بنابراین سیستم اتم کاواک در آزمایشگاه دمایی مخالف

صفر دارد در این پژوهش با توجه به موارد فوق یعنی درهم

تنیدگی و تغییرات دمایی سیستم و ولگشت اتم درون کاواک

و ایجاد شرایط واقعی تر، تغییرات درهم تنیدگی گرمایی را در

مقایسه با حالت بدون ولگشت مورد بحث قراردادده ایم.

۱. مدل

سیستم شامل یک اتم درون کاواک است که تحت تاثیر دو پمپ

لیزری قرار می گیرد. برهمکنش میدان و اتم را در مدل

کاملا کوانتومی جینز-کامینگز در نظر می گیریم.

$$H = H_0 + H_{a-f} + H_p$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}^z + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$H_{a-f} = i\hbar g f(x) (\hat{\sigma}^+ \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^-)$$

$$H_p = i\hbar \eta_L (\hat{a}^\dagger e^{-i\omega_L t} - \hat{a} e^{i\omega_L t}) +$$

$$i\hbar \eta_T (\hat{\sigma}^+ e^{-i\omega_T t} - \hat{\sigma}^- e^{i\omega_T t}) \quad (1)$$

p اندازه حرکت اتم، m جرم اتم، ω_a فرکانس اتم، ω_c فرکانس

میدان درون کاواک، $g(x) = g f(x)$ جفت شدگی اتم و میدان،

$f(x) = \cos(kx)$ تابع تغییر مکان اتم، η_L دامنه ی میدان پمپ

لیزری طولی، η_T دامنه ی میدان پمپ لیزری عرضی، k بردار موج،

ω_L فرکانس نوسان میدان پمپ لیزری طولی، ω_T فرکانس نوسان

میدان پمپ لیزری عرضی، $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ عملگرهای خلق و فنا، $\hat{\sigma}^z$ ،

ماتریس پائولی و $\hat{\sigma}^+$ ، $\hat{\sigma}^-$ عملگرهای نردبانی مربوط به اتم است.

حال می خواهیم درهم تنیدگی گرمایی را در سیستم اتم کاواک با

حفظ ولگشت و بدون ولگشت محاسبه کنیم.

۲. تغییرات درهم تنیدگی گرمایی با معیار توافق

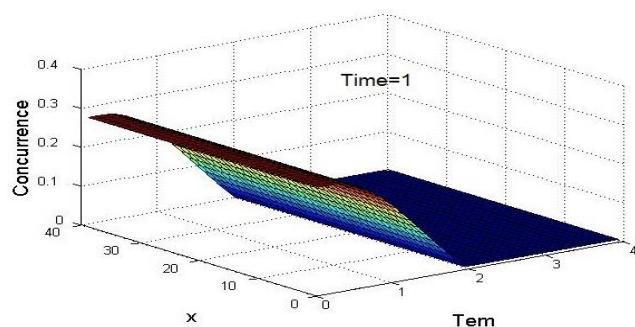
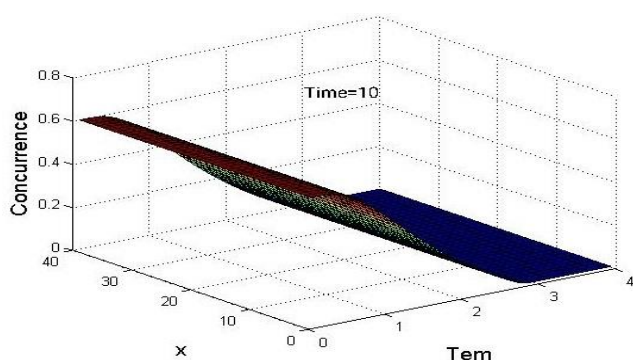
۱-۲ با در نظر گرفتن ولگشت اتم

هامیلتونی سیستم اتم کاواک با در نظر گرفتن ولگشت اتم به

صورت زیر است

$$H_{eff} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}^z + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + i\hbar g f(x) (\hat{\sigma}^+ \hat{a}$$

$$- \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^-) + i\hbar \eta_L (\hat{a}^\dagger e^{-i\omega_L t} - \hat{a} e^{i\omega_L t}) + i\hbar$$

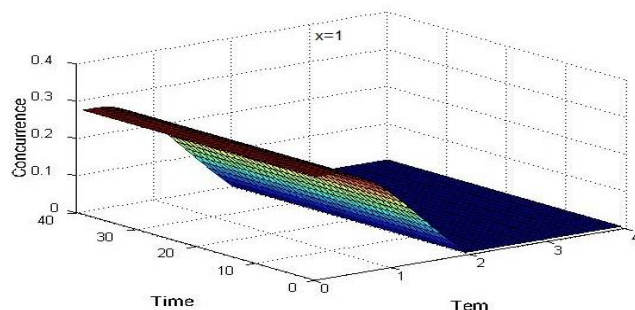
شکل ۲: بررسی تغییرات درهم تنیدگی گرمایی در $t=1$ شکل ۳: بررسی تغییرات درهم تنیدگی گرمایی در $t=10$

۲-۲ حالت بدون ولگشت اتم

در شرایط جدید هامیلتونی موثر سیستم هم به شکل زیر در می آید

$$H_{eff} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}^z + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + i\hbar g f(x) (\hat{\sigma}^+ \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^-) + i\hbar \eta_L (\hat{a}^\dagger e^{-i\omega_L t} - \hat{a} e^{i\omega_L t}) + i\hbar \eta_T (\hat{\sigma}^+ e^{-i\omega_T t} - \hat{\sigma}^- e^{i\omega_T t}) - i\hbar \Gamma_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar \Gamma_a \hat{\sigma}^z \quad (7)$$

مطابق روشی که در قبل استفاده کردیم.

شکل ۵: بررسی تغییرات درهم تنیدگی گرمایی بدون حفظ ولگشت اتم $x=1$.

$$\eta_T (\hat{\sigma}^+ e^{-i\omega_T t} - \hat{\sigma}^- e^{i\omega_T t}) - i\hbar \Gamma_p \frac{p^2}{2m} - i\hbar \Gamma_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar \Gamma_a \hat{\sigma}^z \quad (2)$$

درهم تنیدگی گرمایی با استفاده از رابطه ی توافق به صورت زیر

زیر بدست می آید

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (3)$$

λ_i ها جذر ویژه مقادیر ماتریس $\rho\hat{\rho}$ هستند.

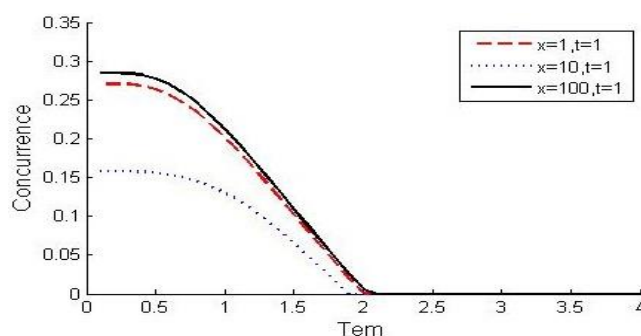
$$\hat{\rho} = (\hat{\sigma}^y \otimes \hat{\sigma}^y) \rho^* (\hat{\sigma}^y \otimes \hat{\sigma}^y) \quad (4)$$

$$\rho = \frac{\exp(-\beta H)}{Z} \quad (5)$$

$$Z = \text{trac}(\exp(-\beta H)), \beta = \frac{1}{kT} \quad (6)$$

با تشکیل ماتریس چگالی و محاسبه ی مقدار توافق شکل

های زیر حاصل می شود.



شکل ۱: بررسی درهم تنیدگی گرمایی با حفظ ولگشت در یک زمان مشخص

نمودار نشان می دهد میزان درهم تنیدگی گرمایی در ابتدا با تغییر

مکان، کاهش و سپس افزایش می یابد. درهم تنیدگی گرمایی با

افزایش دما تا حدود دمای ۲ واحد نوسان کرده و سپس به صفر

می رسد. اگر مولفه ی مکان و دما متغیر و زمان ثابت باشد

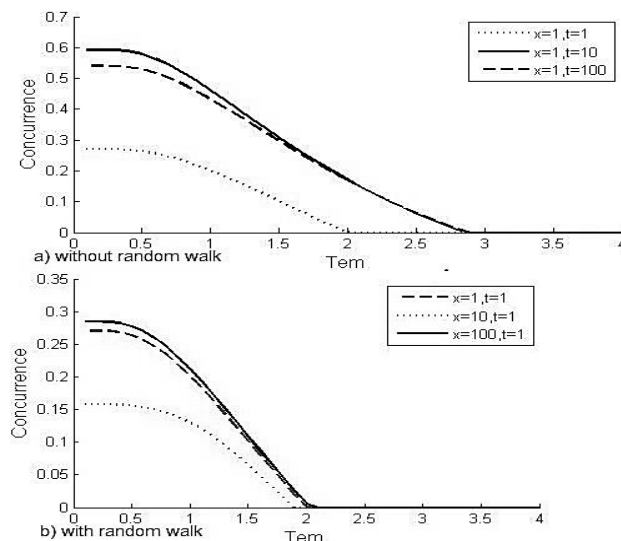
حال اگر بخواهیم حالت با حفظ ولگشت اتم و بدون ولگشت

اتم را در کنار هم مقایسه کنیم خواهیم داشت

ولگشت بیشتر است.

مرجع ها

- [1] Nielson, M. A., Chuang, I. L. Quantum Computation and Quantum Information Cambridge University Press, Cambridge, 2010
- [2] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).
- [3] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Nature 390, 575 (1997).
- [4] U. Marzolino, A. Buchleitner, Phys. Rev. A 91, 032316 (2015).
- [5] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, Nature 404, 247(2000).
- [6] S. Schneider and G.J. Milburn, Phys. Rev. A 65, 042107(2002).
- [7] M.S. Kim, J. Lee, D. Ahn, and P.L. Knight, Phys. Rev. A 65, 040101(R) (2002).
- [8] Mabuchi, H.; Ye, J.; Kimble, H.J. App.Phys. B 1999, 68, 1095–1108.
- [9] Hood, C.J.; Lynn, T.W.; Doherty, A.C.; Parkins, A.S.; Kimble, H.J. Science 2000, 287, 1447–1453. Atoms 2015, 3 448
- [10] Maunz, P.; Puppe, T.; Schuster, I.; Syassen, N.; Pinske, P.W.H.; Rempe, G. Nature 2004, 428, 50–52.
- [11] Leibrandt, D.R.; Labaziewicz, J.; Vuletić, V.; Chuang, I.L. Phys. Rev. Lett. 2009, 103, 103001.
- [12] Schleier-Smith, M.H.; Leroux, I.D.; Zhang, H.; van Camp, M.A.; Vuletić, V. Phys. Rev. Lett. 2011, 107, 143005.
- [13] Hinkel, T. Griesser, T. and Ritsch, H. and Genes, c. University Innsbruck, Technikerstrass 25, a-6020 Innsbruck, Austria (2014)
- [14] Mohammadi, M., Jami, S., Optik, International Journal for Light and Electron Optics 181 (2019) 582–587
- [15] Wang, X.: Phys. Rev. A 64, 012313 (2001)
- [16] Wang, X.: Phys. Rev. A 66, 34302 (2002)
- [17] Wang, X.: Phys. Rev. A 66, 044305 (2002)
- [18] Guo-Hui, Y.: Int. J. Theor. Phys 55, 3191 (2016)
- [19] Kamta, G.L., Starace, A.F.: Phys. Rev. Lett. 88, 107901 (2002)
- [20] Najarbashi, G., Balazadeh, L., Tavana, A.: Int. J. Theor. Phys 57, 95111 (2018)
- [21] Kheirandish, F., Akhtarshenas, S.J., Mohammadi, H.: Phys. Rev. A 77(4), 042309 (2008)
- [22] Arnesen, C.M., Bose, S., Vedral, V.: Phys. Rev. Lett 87, 017901 (2001)
- [23] Wang, A.G., Yang, W.S., Fang Lv, S., Yue, X.F., Wu, S.L., Liu, J.: Int. J. Theor. Phys 56, 339 (2017)
- [24] Zhou, L., Song, H.S., Guo, Y.Q., Li, C.: Phys. Rev. A 68, 024301 (2003)
- [25] Sh. Alizadeh, R. Safaiee, M. M. Golshan, Physica A, 428, 133-139(2015)
- [26] Vitalie Eremeev, V'ictor Montenegro, and Miguel Orszag, Physical Review A 85, 032315 (2012)
- [27] Abbasi, M.R.: Ann. Phys 365, 198 (2016)
- [28] Abbasi, M.R., Golshan, M.M.: Physica A 392, 6161 (2013)
- [29] Mojaveri, B., Dehghani, A., Fasihi, M.A., Mohammadpour, T.: Int. J. of Theoretical Phys 57:3396-3409(2018)
- [30] Bashkirov, E.K., Y.A. Nikiforova, Biomedical Optics and Imaging, Vol. 8699(2013)
- [31] Alizadeh, S.h., Safaiee, R., Golshan, M.M.: Physica A 428, 133 (2015)
- [32] Abbasi, M.R.: Physica. A 426, 1 (2015)



شکل ۷: بررسی تغییرات درهم تنیدگی گرمایی در دو حالت با حفظ ولگشت

اتم و بدون آن.

۳. نتایج

درهم تنیدگی گرمایی را در یک سیستم اتم-کاوایک که با دو

پمپ لیزری تحریک می شود و با محیط اندرکنش دارد در

دو حالت با حفظ ولگشت اتم و بدون آن بررسی کردیم نتایج نشان

می دهند سیستم در ابتدا در حالت درهم تنیده قرار دارد و مقدار

آن برای دو حالت متفاوت بوده و با افزایش دما در حالت بدون

ولگشت میزان درهم تنیدگی در دماهای بالاتری به صفر می رسد و

این مقدار تا حدود دمای ۳ واحد می رسد. همچنین در مقایسه با

حالت بدون ولگشت مقدار درهم تنیدگی گرمایی با سرعت بیشتری

افزایش و کاهش می یابد. مقدار بیشینه و کمینه درهم تنیدگی

گرمایی در حالت با حفظ ولگشت کمتر از حالت بدون ولگشت

است. دمای بحرانی (دمایی که بعد از آن درهم تنیدگی گرمایی

انتقال درهم‌تنیدگی در سیستم شش کیوبیتی با برهمکنش مدل هایزنبرگ در حضور میدان

مغناطیسی

قنواتی^۱، صغرا^۱؛ صبور، عباس^۲؛ مهربان کار، سمیه^۳^{۱،۲} گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد امیدیه، امیدیه، ایران^۳ گروه فیزیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

چکیده

در این پژوهش، انتقال درهم‌تنیدگی در یک نردبان اسپینی، تحت تاثیر میدان مغناطیسی را بررسی می‌کنیم. برهمکنش بین اجزاء این سیستم را می‌توان با مدل هایزنبرگ توصیف کرد. هدف ما این است که جفت اولیه به عنوان ورودی رشته، دارای درهم‌تنیدگی کامل باشد و در طول زمان، درهم‌تنیدگی جفت نهایی به ماکزیمم مقدار (نزدیک به واحد)، برسد و این ماکزیمم‌ها افت محسوسی نکنند. همچنین درهم‌تنیدگی جفت‌های میانی تقریباً صفر بماند، به عبارتی این رشته درهم‌تنیدگی واحد را منتقل کند.

کلید واژگان: درهم‌تنیدگی، نردبان اسپینی، مدل هایزنبرگ

The Entanglement Transferring in a six Qubits Systems with Heisenberg Model Interaction in the Presence of Magnetic Field

Ghanavati, Soghra¹, Sabour, Abbass², Somayeh Mehrabankar³^{1,2} Department of physics, omidiyeh branch, Islamic Azad University, omidiyeh, Iran³ Department of Physics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran,

Abstract

In this study, the transfer of entanglement of a spin ladder under the effect of magnetic field is investigated. The interaction between the components of the considered system can be described by the Heisenberg model. Our goal is to have the first pair as a string input with full entanglement and over the time, the entanglement of the final pair reaches the maximum value (close to unit), and these maxima do not drop significantly. Also, the entanglement of the middle pairs is almost zero, in other words, it transfers the unit entanglement.

Keywords: Entanglement, Spin ladder, Heisenberg model.

PACS No.3

مقدمه

الکترون آنها در پروسه درهم‌تنیدگی شرکت دارند، مورد بررسی نظری قرار گرفته‌اند. آرایش سایت‌ها را می‌توان به دو گروه رشته تک بعدی یا رویه دو بعدی تقسیم کرد [۱۲-۸]. در این پژوهش ما یک رشته دو بعدی، شبیه نردبان یا یک مولکول DNA مطابق شکل ۱ را در نظر گرفته‌ایم.

در این مقاله، برای اینکه میزان درهم‌تنیدگی هر جفت را محاسبه کنیم، روشی رایج و مرسوم را انتخاب می‌کنیم [۱۴]؛ یعنی به کمک تقلیل حالت به روش ردگیری جزئی، روی همه سایت‌ها به جز سایت‌های تشکیل دهنده جفت مورد نظر، رد جزئی می‌گیریم تا عملگر چگالی آن جفت به دست آید و سپس به کمک سنج

مطالعه درهم‌تنیدگی کوانتومی به دلیل نقش اساسی آن در فرایندهای اطلاعات کوانتومی بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۲-۱]. درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت در یک زنجیره، به دلیل برهمکنش سیستم با محیط (میدان مغناطیسی) یا عوامل درونی دستخوش تحول می‌شود، که در نهایت به تقویت یا تضعیف آن می‌انجامد [۳-۴]. تحول زمانی درهم‌تنیدگی در یک سیستم اسپینی تک بعدی در حضور فرم‌های مختلف میدان‌های مغناطیسی خارجی مورد بررسی قرار گرفته است [۷-۵]. تاکنون آرایشهای متنوع و بی-شماری از سایت‌های دو تراز، مانند مجموعه‌ای از اتمهایی که یک

و g_2 و d_1 برای سایت‌های افقی است. ما در اینجا پارامترهای رابطه فوق را به طور هدفمندی انتخاب می‌کنیم تا مورد دلخواه حاصل شود.

هدف ما این است که جفت اولیه (یعنی دو سایت سمت چپ در شکل ۱ که نسبت به هم عمودی قرار گرفته اند) و ما آن را ورودی رشته می‌نامیم، دارای درهم‌تنیدگی کامل باشد (ϕ^+) و در طول زمان، درهم‌تنیدگی جفت نهایی (یعنی دو سایت سمت راست در شکل ۱) به ماکزیمم‌های نزدیک به واحد برسد و این ماکزیمم‌ها افت محسوسی نکنند و همچنین درهم‌تنیدگی جفت‌های میانی تقریباً صفر بماند. به عبارت دیگر، این رشته درهم‌تنیدگی واحد را منتقل کند.

بحث و بررسی

ابتدا سیستمی را در نظر می‌گیریم که پارامترهای تعیین کننده هامیلتونی سیستم به صورت زیر باشند:

$$J_1 = J_2 = 1, \quad g_1 = g_2 = 1, \quad d_1 = d_2 = 0.5, \quad h = 100$$

؛ حالت اولیه سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

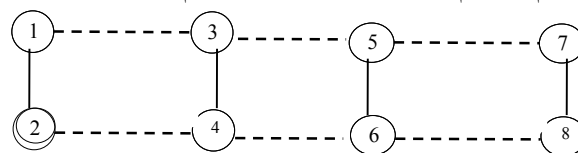
$$|\psi\rangle = \phi_+^{1,2} \otimes |0\rangle^3 \otimes |0\rangle^4 \otimes |0\rangle^5 \otimes |0\rangle^6 \quad (4)$$

یعنی فقط دو جزء تشکیل دهنده جفت ابتدایی کاملاً درهم‌تنیده‌اند و بقیه اجزاء در حالت ویژه $|0\rangle$ و بدون درهم‌تنیدگی با اجزاء دیگر هستند. میدان مغناطیسی h هم در جهت Z و فقط بر روی جفت-های میانی به غیر از جفت‌های ابتدایی و انتهایی اعمال می‌شود. در شکل ۲، به ترتیب درهم‌تنیدگی جفت ابتدایی، میانی و انتهایی ترسیم شده است. به وضوح، دامنه نمودارها در جفت ابتدایی و انتهایی تغییر محسوسی نمی‌کنند و از نظر مشخصات ظاهری مانند هم هستند و فقط تاخیر زمانی وجود دارد. جالب است که در زمان اوج یکی، نمودار دیگر صفر است. همچنین درهم‌تنیدگی جفت میانی عملاً صفر است، در واقع چیزی شبیه به پاندول نیوتون ایده‌آل اتفاق می‌افتد.

تاثیر حالت‌های اولیه مختلف بر انتقال درهم‌تنیدگی سیستم

وقتی حالت جفت ابتدایی را به صورت $\psi_+^{1,2}$ انتخاب می‌کنیم، یعنی درهم‌تنیدگی جفت اول واحد و دو جفت دیگر بدون درهم‌تنیدگی، مانند رابطه زیر باشند:

کانکرنس [۱۴]، درهم‌تنیدگی بین اجزای جفت را به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه میزان درهم‌تنیدگی به زمان بستگی دارد، نمودارهایی ترسیم می‌کنیم که در یک بازه زمانی، درهم‌تنیدگی را نشان دهد.



شکل ۱: نردبان اسپینی

کانکرنس

این سنجشگر توسط ووترز برای سیستم‌های دو جزئی به صورت زیر معرفی شده است [۱۶-۱۴]:

$$C(\hat{\rho}) = \text{Max}(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}) \quad (1)$$

که در آن λ_i ویژه مقادیر ماتریس اسپین وارون R هستند، که به ترتیب نزولی مرتب شده‌اند.

$$R = \hat{\rho}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \hat{\rho}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \quad (2)$$

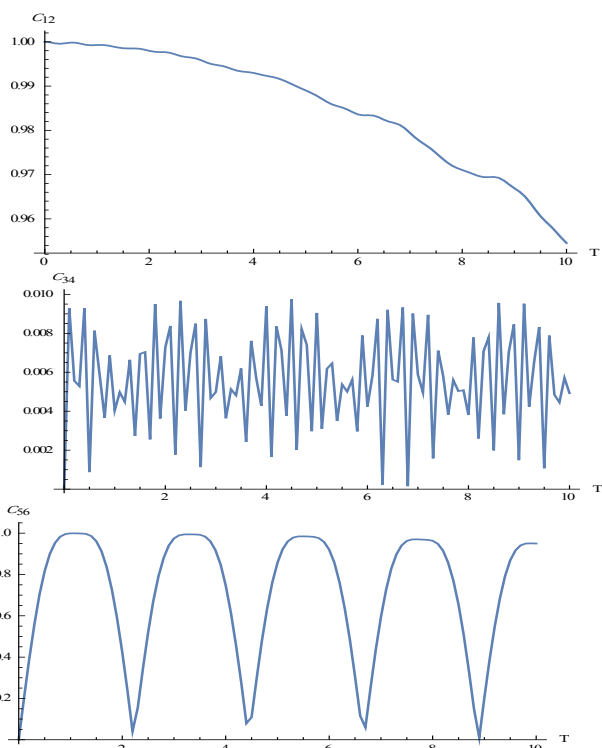
که در آن $\hat{\sigma}_y$ مؤلفه‌ی y ماتریس پائولی، $\hat{\rho}$ ماتریس چگالی سیستم دو کیوبیتی و $\hat{\rho}^*$ مزدوج مختلط ماتریس چگالی است. برای حالتی با بیشترین مقدار $C(\hat{\rho}) = 1$ و برای حالت غیر درهم‌تنیده $C(\hat{\rho}) = 0$ است.

هامیلتونی

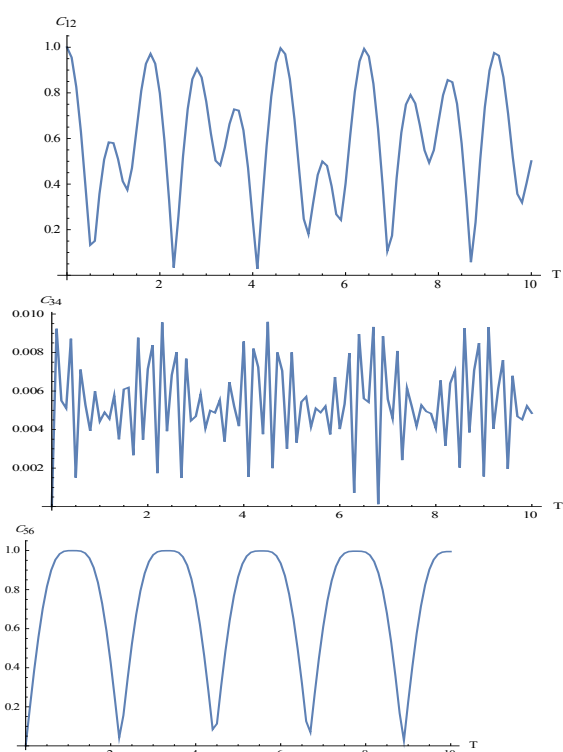
مانند اغلب پژوهش‌ها در مورد رشته‌ها یا رویه‌ها، در اینجا از هامیلتونی‌ای استفاده کرده‌ایم که در حالت کلی به مدل هایزنبرگ موسوم است [۱۷]. رابطه این هامیلتونی برای مقصود ما به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \vec{H} = & J_1 \left(\frac{1+g_1}{2} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \sigma_x^{2n-1} \sigma_x^{2n} + \frac{1-g_1}{2} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \sigma_y^{2n-1} \sigma_y^{2n} \right. \\ & \left. + d_1 \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \sigma_z^{2n-1} \sigma_z^{2n} \right) + J_2 \left(\frac{1+g_2}{2} \sum_{n=1}^{N-2} \sigma_x^n \sigma_x^{n+2} + \right. \\ & \left. \frac{1-g_2}{2} \sum_{n=1}^{N-2} \sigma_y^n \sigma_y^{n+2} + d_2 \sum_{n=1}^{N-2} \sigma_z^n \sigma_z^{n+2} \right) + h \sum_{n=3}^{N-2} \sigma_z^n \end{aligned} \quad (3)$$

در اینجا σ_{xyz} ماتریس‌های پاولی هستند و با انتخاب مناسب دیمانسیون h ، میدان مغناطیسی اعمال شده در جفت‌های میانی و بقیه ضرایب به نحوی تعیین کننده میزان اندرکنش بین سایت‌ها می‌باشد. اندیس J_1 و g_1 و d_1 برای سایت‌های عمودی و اندیس d_2



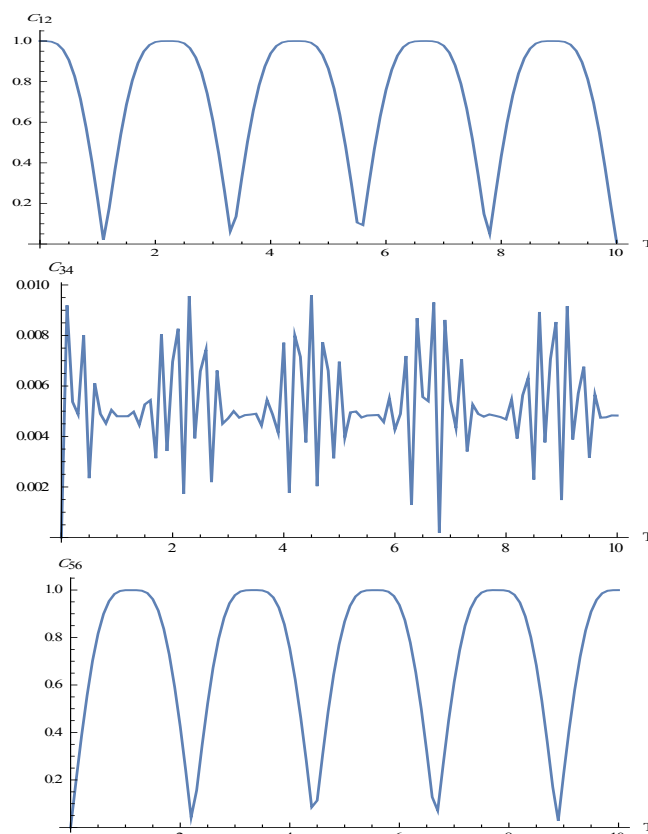
شکل ۳: درهم‌تنیدگی جفت ابتدایی C_{12} ، جفت میانی C_{34} و جفت انتهایی C_{56} به ازاء $J_1 = J_2 = 1$ ، $g_1 = g_2 = 1$ ، $d_1 = d_2 = 0.5$ ، $h=100$ ترسیم شده است.



شکل ۴: درهم‌تنیدگی جفت ابتدایی C_{12} ، جفت میانی C_{34} و جفت انتهایی C_{56} به ازاء $J_1 = J_2 = 1$ ، $g_1 = g_2 = 1$ ، $d_1 = d_2 = 0.5$ ، $h=100$ ترسیم شده است.

$$|\psi\rangle = \psi_+^{1,2} \otimes |0\rangle^3 \otimes |0\rangle^4 \otimes |0\rangle^5 \otimes |0\rangle^6 \quad (5)$$

همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود رابطه درهم‌تنیدگی جفت انتهایی و همچنین قدرت موجک جفت میانی با زمان تغییری نمی‌کنند. اما تابعیت درهم‌تنیدگی جفت ابتدایی دیگر شبیه جفت انتهایی نیست و اگر تناوبی باشد، دوره تناوب آن بسیار بیشتر از دوره تناوب نمودار جفت انتهایی است.



شکل ۵: درهم‌تنیدگی جفت ابتدایی C_{12} ، درهم‌تنیدگی جفت میانی C_{34} و درهم‌تنیدگی جفت انتهایی C_{56} به ازاء $J_1 = J_2 = 1$ ، $g_1 = g_2 = 1$ ، $d_1 = d_2 = 0.5$ ، $h=100$ ترسیم شده است. وقتی حالت جفت ابتدایی را به صورت $(\frac{\psi_-^{1,2} + \phi_+^{1,2}}{\sqrt{2}})$

انتخاب می‌کنیم، داریم:

$$|\psi\rangle = (\frac{\psi_-^{1,2} + \phi_+^{1,2}}{\sqrt{2}}) \otimes |0\rangle^3 \otimes |0\rangle^4 \otimes |0\rangle^5 \otimes |0\rangle^6 \quad (6)$$

مانند حالت قبل، در شکل ۴ رابطه درهم‌تنیدگی جفت انتهایی و قدرت موجک جفت میانی با زمان تغییری نمی‌کنند. اما تابعیت درهم‌تنیدگی جفت ابتدایی به نظر بهم ریخته می‌رسد.

درهم تنیدگی واحد را منتقل کند. مسلما انتظار نمی رود که درهم- تنیدگی در این جفت ها در طول زمان ثابت بماند ولی بایستی دارای قله هایی نزدیک به واحد باشند. واضح است که در لحظه ای که جفت انتهایی دارای درهم تنیدگی بالایی است، می توان اندرکنش آنرا با بقیه سیستم قطع کرد و مقدار درهم تنیدگی را برای جفت نهایی حفظ نمود. درمی یابیم که خواسته ما از چنین سیستمی به ازای ترکیب خاصی از پارامترها و حالت اولیه برای سیستم واقعا قابل دستیابی است.

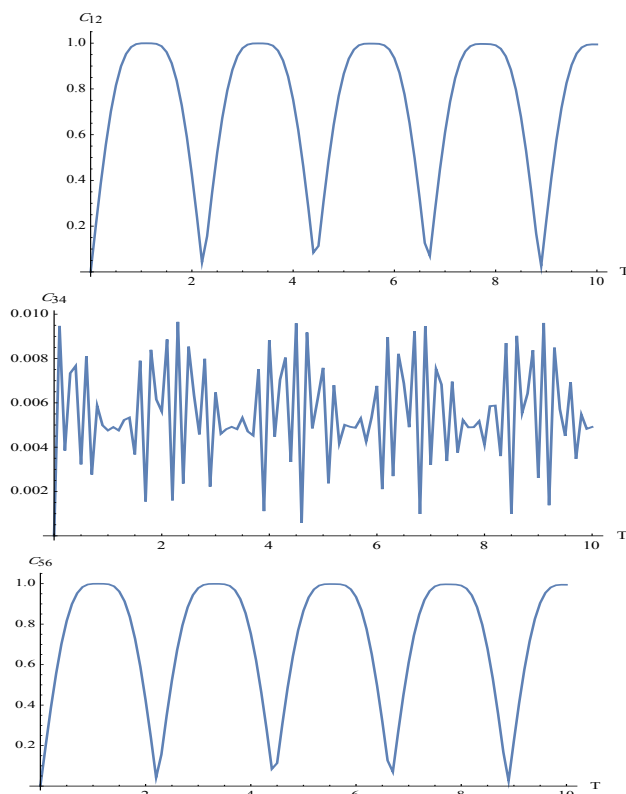
مرجع ها

- [1] Z. Hong-Fang, S. Bin, L. Jion; "Entanglement sudden death induced by the Dzialoshinskii-Moriya interaction"; *Chinese Physics B* **18** (2009) 3265-3270.
- [2] S. Chuan-Jia, C. Wei-Wen, L. Ji-Bing; "Sudden Death, Birth and Stable Entanglement in a Two-Qubit Heisenberg XY Spin Chain"; *Chinese Physics Letters* **25** (2008) 3115-3118.
- [3] GF Zhang, SS Li; "Thermal entanglement in a two-qubit Heisenberg XXZ spin chain under an inhomogeneous magnetic field"; *Physical Review A* **72** (2005) 1-4.
- [4] M. Jafarpour, M.R. Pourkarimi, A. Akhound; "Entanglement sudden death and its suppression in multi-qubit channels, using a magnetic field"; *Il NUOVO Cimento B* **124** (2009) 269-279
- [5] F. Glave, D. Zueco, S. Kohler, E. Lutz, and P. Hanggi; "Entanglement resonance in driven spin chains"; *Phys. Rev. A* **79**(2001) 032332
- [6] Z. Huang and S. Kais; "Dynamics of entanglement for one dimensional spin system in an external time dependent magnetic field"; *Int. J. Quantum. Inf.* **3**, (2005) 483.
- [7] Z. Huang and S. Kais; "Entanglement evolution of one-dimensional spin systems in external magnetic fields"; *Phys. Rev. A* **73**, (2006) 022339.
- [8] J. Jordan, B. Eng, "Studies of infinite two-Dimensional Quantum Lattice systems with projected entangled pair states" A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy at School of Physical Sciences at the university of Queensland in January (2011).
- [9] S. El Shawish, A. Ram'sak, J. Bon'ca, "Thermal entanglement of qubit pairs on the Shastry-Sutherland lattice"; *Phys. Rev. B* **75**, (2007) 205442-205452
- [10] G. Sadiek, "Impurity effect on entanglement in an XY two-dimensional spin lattice" *Journal of King Saud University – Science* **24**, (2012) 331–338.
- [11] Q. Xu, G. Sadiek, S. Kais "Dynamics of entanglement in a two-dimensional spin system" *Phys. Rev. A* **83**, (2011) 062312-062338.
- [12] Q.g Xu, S. Kais, M. Naumov, A. Sameh, "Exact calculation of entanglement in a 19-site 2D spin system" *Phys. Rev. A* **81** (2010) 022324,1-12
- [13] R. Zhang, Sh. Zhu, "Thermal entanglement in a two-dimensional Heisenberg XY model", *Phys. Lett. A* **348**(2006) 110–118.
- [14] W. K. Wootters; "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits"; *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2245-2248.
- [15] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki; "Quantum entanglement"; *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865-942.
- [16] S. Hill and W. K. Wootters; "Entanglement of a Pair of Quantum Bits"; *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 5022-5025.
- [17] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral, "Entanglement in many-body systems" *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 518-580.

اکنون حالت جفت ابتدایی که کاملا جدایی پذیر است را به عنوان حالت اولیه بررسی کنیم.

$$|\psi\rangle = |0\rangle^1 \otimes |0\rangle^1 \otimes |0\rangle^3 \otimes |0\rangle^4 \otimes |0\rangle^5 \otimes |0\rangle^6 \quad (v)$$

در شکل ۵ مشاهده می شود که نمودارهای درهم تنیدگی جفت اول و انتهایی مانند اولین حالت مورد بررسی است با این تفاوت که دیگر تاخیر زمانی نیز وجود ندارد.



شکل ۵: درهم تنیدگی جفت ابتدایی C_{12} ، جفت میانی C_{34} و جفت انتهایی

C_{56} به ازاء $J_1 = J_2 = 1$, $g_1 = g_2 = 1$, $d_1 = d_2 = 0.5$, $h=100$

ترسیم شده است.

نتیجه گیری:

در این پژوهش، انتقال درهم تنیدگی بین اجزاء یک نردبان اسپینی که برهمکنش بین اجزاء آن با مدل هایزنبرگ توصیف می شود و تحت تاثیر میدان های مغناطیسی است را بررسی کرده ایم. هدف اصلی از این تحقیق، این است که جفت اولیه دارای درهم تنیدگی کامل باشد و در طول زمان، درهم تنیدگی جفت نهایی به ماکزیم های نزدیک به واحد برسد در حالیکه این ماکزیم ها افت محسوسی نکنند و درهم- تنیدگی جفت های میانی تقریبا صفر بماند. به عبارت دیگر، این رشته

ناهمخوانی کوانتومی و رابطه‌ی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی برای یک زنجیره‌ی اسپینی دو کیوبیتی با مدل XXX در حالت پایه

حدادی، سعید^{۱*}؛ پورکریمی، محمدرضا^۲؛ آخوند، احمد^۳؛ قمی نژاد، مهرداد^۱

^۱ دانشکده فیزیک، دانشگاه سمنان، ص. پ. ۳۶۳-۳۵۱۹۵، سمنان، ایران.

^۲ گروه فیزیک، دانشگاه سلمان فارسی کازرون، کازرون، ایران.

^۳ گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۱۹۳۹۵-۳۶۹۷، تهران، ایران.

چکیده

در این مقاله، ناهمخوانی کوانتومی و رابطه‌ی آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی برای حالت پایه یک زنجیره اسپینی دو کیوبیتی با هامیلتونی مدل XXX در حضور میدان مغناطیسی ناهمگن مورد مطالعه قرار می‌گیرند. بر اساس محاسبات تحلیلی، ارتباطی ساده بین ناهمخوانی کوانتومی و آنتروپی عدم قطعیت وجود دارد که بیانگر رابطه‌ای معکوس بین آن‌ها است.

واژه‌های کلیدی: زنجیره اسپینی، حالت پایه، رابطه‌ی آنتروپی عدم قطعیت، ناهمخوانی کوانتومی.

Quantum Discord and Entropic Uncertainty Relation in the Presence of Quantum Memory under Two-qubit XXX-Spin Chain Model in the Ground State

Haddadi, S.^{1,3*}; Pourkarimi, M.R.²; Akhound, A.³; Ghominejad, M.¹

¹ Faculty of Physics, Semnan University, P.O.Box 35195-363, Semnan, Iran.

² Department of Physics, Salman Farsi University of Kazerun, Kazerun, Iran.

³ Department of Physics, Payame Noor University, P.O.Box 19395-3697, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, quantum discord and entropic uncertainty relation in the presence of quantum memory are studied under the effect of two-qubit XXX-spin chain Hamiltonian in the ground state. Based on analytical calculations, there is a simple relation between the quantum discord and the entropic uncertainty, which indicates a fully anti-correlated relationship between them.

Keywords: Spin chain; ground state, entropic uncertainty relation; quantum discord.

PACS No. 03.67.-a, 75.10.Pq, 03.67.Hk, 03.67.Lx

مقدمه

قطعیت در سیستم‌های مختلف منتشر شده است و محققین در جستجوی برقراری ارتباط بین آن‌ها هستند [۱-۹]. در این مقاله برای اولین بار یک رابطه‌ی ساده جهت برقراری ارتباط بین ناهمخوانی کوانتومی و عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی برای حالت پایه‌ی زنجیره اسپینی دو کیوبیتی به دست می‌آید.

در این مقاله به کمک معیار ناهمخوانی کوانتومی و رابطه‌ی آنتروپی عدم قطعیت، یک زنجیره اسپینی دو کیوبیتی با هامیلتونی مدل XXX در حالت پایه مطالعه می‌شود. تاکنون، مقالات متعددی در زمینه‌ی مطالعه‌ی همبستگی‌های کوانتومی و آنتروپی عدم

ناهمخوانی کوانتومی (QD)

یکی از معیارهای تشخیص هم‌بستگی کوانتومی، ناهمخوانی کوانتومی است. این معیار برای یک سیستم دویخشی با ماتریس چگالی 4×4 به فرم X

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (1)$$

به صورت زیر معرفی شده است [۱۰]:

$$QD(\rho_{AB}) = \min(Q_1, Q_2), \quad Q_j = \mathcal{H}(\rho_{11} + \rho_{33}) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \log_2 \lambda_i + D_j, \quad (2)$$

$$D_1 = \mathcal{H}(\tau), \quad D_2 = -\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} \log_2 \rho_{ii} - \mathcal{H}(\rho_{11} + \rho_{33}),$$

که در آن λ_i ها ویژه مقادیرهای ماتریس چگالی رابطه‌ی (۱) هستند. هم‌چنین τ و $\mathcal{H}(\tau)$ عبارتند از:

$$\tau = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{[1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44})]^2 + 4[|\rho_{14}| + |\rho_{23}|]^2} \right), \quad (3)$$

$$\mathcal{H}(\tau) = -\tau \log_2 \tau - (1 - \tau) \log_2 (1 - \tau).$$

آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی

اصل عدم قطعیت یک ویژگی بنیادی مکانیک کوانتومی است که ابتدا در سال ۱۹۲۷ توسط هایزنبرگ معرفی شد [۱۱]. این اصل بیانگر آن است که دو مشاهده‌پذیر دلخواه ناسازگار مانند X و Y را نمی‌توان همزمان به طور دقیق اندازه‌گیری نمود. رابطه‌ی عدم قطعیت بر حسب رابطه‌ی جابجایی $[X, Y] = XY - YX$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{1}{2} |\langle [X, Y] \rangle|, \quad (4)$$

که در آن $\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$ مقدار متوسط عملگر X نسبت به ماتریس چگالی ρ_{AB} است. رابطه‌ی عدم قطعیت توسط برخی محققین بر حسب آنتروپی شانون $F(X) = -\sum_i x_i \log x_i$ به صورت زیر تعریف شده است [۱۲ و ۱۳]:

$$F(X) + F(Y) \geq \log_2 \frac{1}{c}, \quad (5)$$

که در آن $c = \max_{ij} \{ |\langle \psi_i | \phi_j \rangle|^2 \}$ ، $|\psi_i\rangle$ و $|\phi_j\rangle$ به ترتیب ویژه بردارهای عملگرهای X و Y هستند.

در سال‌های اخیر عبارت دیگری نیز برای رابطه‌ی عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی بر حسب آنتروپی شرطی فون نیومن $S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ به صورت زیر معرفی شده است [۱۴]:

$$S(X|B) + S(Y|B) \geq S(A|B) + \log_2 \frac{1}{c}, \quad (6)$$

که در آن $S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i$ (λ_i ها ویژه مقادیر ρ هستند) آنتروپی فون نیومن و $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ ماتریس چگالی کاهش یافته زیر سیستم B (به عنوان حافظه کوانتومی) است.

در این مقاله، مشاهده‌پذیرهای ناسازگار X و Y را به ترتیب ماتریس‌های پائولی σ_x و σ_z در نظر گرفته و طرف چپ نامساوی را LHS و طرف راست آن را RHS می‌نامیم. هم‌چنین $c = 1/2$ به دست می‌آید.

مدل XXX زنجیره اسپینی دو کیوبیتی

مدل XXX زنجیره اسپینی برای یک سیستم دو کیوبیتی در حضور میدان مغناطیسی ناهمگن B در راستای محور z با هامیلتونی زیر تعریف می‌شود ($\hbar = 1$) [۳]:

$$H_{AB} = \frac{J}{2} (\sigma_A^x \sigma_B^x + \sigma_A^y \sigma_B^y + \sigma_A^z \sigma_B^z) + \frac{B+b}{2} \sigma_A^z + \frac{B-b}{2} \sigma_B^z, \quad (7)$$

که در آن J بیانگر ضریب جفت‌شدگی و b مقدار ناهمگنی میدان مغناطیسی را تعیین می‌کند. هم‌چنین σ_x ، σ_y ، σ_z ماتریس‌های پائولی هستند. نمایش ماتریسی هامیلتونی رابطه‌ی (۷) بر حسب پایه‌های استاندارد $|00\rangle_1$ ، $|01\rangle_2$ ، $|10\rangle_3$ و $|11\rangle_4$ عبارت است از:

$$H_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{J}{2} + B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{J}{2} + b & J & 0 \\ 0 & J & -\frac{J}{2} - b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{2} - B \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathcal{H}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4J^2((b-\kappa)^2 + J^2 - A_-^2)}{A_-^4}} \right) \times \log_2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{1 - \frac{2J^2}{A_-^2}} + \frac{4(b-\kappa)^2 J^2}{A_-^4} \right) \right) - \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4J^2((b-\kappa)^2 + J^2 - A_-^2)}{A_-^4}} \right) \times \log_2 \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2J^2}{A_-^2}} + \frac{4(b-\kappa)^2 J^2}{A_-^4} \right) \right) \right) \quad (12)$$

$$S(\rho_{\sigma_B}) = 1, \quad S(\rho_{AB}) = 0, \quad (13)$$

$$S(\rho_{\sigma_B}) = S(\rho_B) = -\frac{1}{A_-^2} \left(J^2 \log_2 \frac{J^2}{A_-^2} + (b-\kappa)^2 \log_2 \frac{(b-\kappa)^2}{A_-^2} \right), \quad (14)$$

با بازنویسی رابطه‌ی (۶) توسط رابطه‌ی آنتروپی شرطی فون نیومن به صورت زیر:

$$S(\rho_{\sigma_B}) + S(\rho_{\sigma_B}) - 2S(\rho_B) \geq S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) + 1, \quad (15)$$

ناهمخوانی کوانتومی و طرفین رابطه‌ی آنتروپی عدم قطعیت برای سیستم مذکور به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$QD = -\frac{1}{A_-^2} \left(J^2 \log_2 \frac{J^2}{A_-^2} + (b-\kappa)^2 \log_2 \frac{(b-\kappa)^2}{A_-^2} \right), \quad (16)$$

$$LHS = RHS = \frac{1}{A_-^2} \left(J^2 \log_2 \frac{J^2}{A_-^2} + (b-\kappa)^2 \log_2 \frac{(b-\kappa)^2}{A_-^2} \right) + 1, \quad (17)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱۶) و (۱۷)، رابطه‌ی مهم زیر به دست می‌آید:

$$LHS = RHS = 1 - QD, \quad (18)$$

اینک ویژه مقدارهای انرژی E_n و ویژه حالت‌های $|\psi_n\rangle$ متناظر با هامیلتونی H_{AB} به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{J}{2} - \kappa, & |\psi_1\rangle &= \frac{1}{A_-} ((b-\kappa)|01\rangle + J|10\rangle), \\ E_2 &= \frac{J}{2} - B, & |\psi_2\rangle &= |11\rangle, \\ E_3 &= \frac{J}{2} + B, & |\psi_3\rangle &= |00\rangle, \\ E_4 &= -\frac{J}{2} + \kappa, & |\psi_4\rangle &= \frac{1}{A_+} ((b+\kappa)|01\rangle + J|10\rangle), \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن $\kappa = \sqrt{b^2 + J^2}$ بوده و $A_{\pm} = \sqrt{J^2 + (b \pm \kappa)^2}$ است. همچنین ویژه حالت‌ها مستقل از B هستند.

زنجیره اسپینی مدل XXX در حالت پایه

مطالعه‌ی هم‌بستگی‌های کوانتومی و رابطه‌ی عدم قطعیت هنگامیکه سیستم مورد مطالعه در حالت پایه قرار دارد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای این منظور، ابتدا معیارهای معرفی شده در بخش‌های قبل را برای حالت پایه‌ی زنجیره اسپینی به دست می‌آوریم. در حد $T \rightarrow 0$ ، انرژی حالت پایه با توجه به رابطه‌ی (۹) برابر با $E_1 = -\frac{J}{2} - \kappa$ و ویژه حالت متناظر با آن برابر با $|\psi_1\rangle = \frac{1}{A_-} ((b-\kappa)|01\rangle + J|10\rangle)$ است. بنابراین درایه‌های غیر صفر ماتریس چگالی متناظر با حالت مذکور به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\rho_{22} = \frac{(b-\kappa)^2}{A_-^2}, \quad \rho_{23} = \rho_{32} = \frac{(b-\kappa)J}{A_-^2}, \quad \rho_{33} = \frac{J^2}{A_-^2}, \quad (10)$$

با استفاده از روابط (۲)، (۳)، (۶) و کمی ساده سازی، عبارت‌های زیر را برای حالت پایه‌ی مدل XXX زنجیره اسپینی دو کیوبیتی به دست می‌آوریم:

$$\tau = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4J^2((b-\kappa)^2 + J^2 - A_-^2)}{A_-^4}} \right), \quad (11)$$

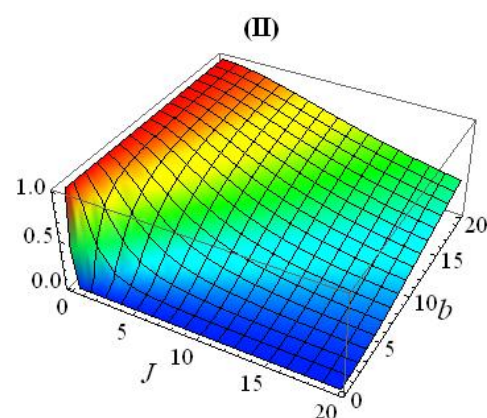
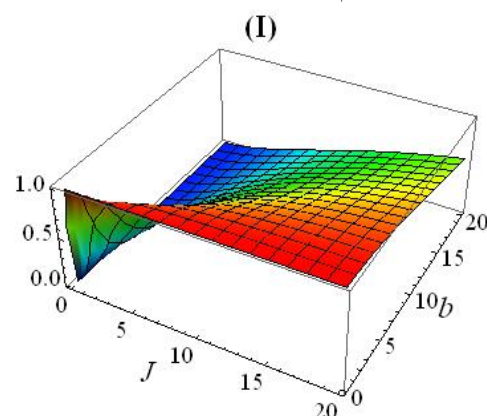
نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا برای یک زنجیره اسپینی دو کیوبیتی با هامیلتونی مدل XXX در حضور میدان مغناطیسی ناهمگن، ویژه مقادیر و ویژه حالت‌های هامیلتونی را محاسبه نمودیم. سپس معادله‌های پارامتری مربوط به ناهمخوانی کوانتومی و آنتروپی عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی را برای حالت پایه این سیستم به دست آورده و نشان دادیم که یک رابطه‌ی معکوس بین آنتروپی عدم قطعیت و ناهمخوانی کوانتومی وجود دارد. محاسبات این مقاله نشان می‌دهند که با افزایش پارامتر J ، مقدار ناهمخوانی کوانتومی افزایش و آنتروپی عدم قطعیت کاهش می‌یابد، که این نتایج می‌تواند در اهداف عملی که در آن‌ها حداکثر هم‌بستگی و حداقل عدم قطعیت مورد نیاز است، دارای اهمیت باشند. علاوه بر این، پارامتر ناهمگنی میدان مغناطیسی اثر مخرب بر هم‌بستگی کوانتومی دارد و عدم قطعیت را افزایش می‌دهد، به‌طوری‌که با ناهمگن شدن میدان مغناطیسی، عدم قطعیت در اندازه‌گیری مشاهده‌پذیرهای ناسازگار افزایش می‌یابد. هنگامیکه $b = 0$ است، $LHS = RHS = 0$ و $QD = 1$ به دست می‌آیند که مستقل از پارامتر J هستند. همچنین هنگامیکه $J = 0$ است، ناهمخوانی کوانتومی از بین می‌رود و $LHS = RHS = 1$ است. با این وجود، برای مقادیر بزرگ J و b ، ناهمخوانی کوانتومی و طرفین رابطه‌ی آنتروپی عدم قطعیت به یک مقدار ثابت می‌رسند.

مرجع‌ها

- [1] D. Wang et al., *Laser Phys. Lett.* **14**, (2017) 055205.
- [2] D. Wang et al., *Laser Phys. Lett.* **14**, (2017) 065203.
- [3] D. Wang et al., *Laser Phys. Lett.* **14**, (2017) 095204.
- [4] A.J. Huang et al., *Quantum Inf. Process.* **16**, (2017) 204.
- [5] P.F. Chen et al., *Laser Phys. Lett.* **15**, (2018) 015206.
- [6] M.N. Chen et al., *Laser Phys. Lett.* **15**, (2018) 015207.
- [7] M.R. Pourkarimi, *Int. J. Quantum Inform.* **16**, (2018) 1850057.
- [8] M.R. Pourkarimi, *Int. J. Quantum Inform.* **17**, (2019) 1950008.
- [9] H. Dolatkhan et al., *Quantum Inf. Process.* **18**, (2019) 13.
- [10] C.Z. Wang et al., *J. Phys. B* **44**, (2011) 015503.
- [11] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, (1927) 172.
- [12] K. Kraus, *Phys. Rev. D* **35**, (1987) 3070.
- [13] H. Maassen et al., *Phys. Rev. Lett.* **60**, (1988) 1103.
- [14] M. Berta et al., *Nat. Phys.* **6**, (2010) 659.

رابطه‌ی (۱۸) بیانگر آن است که در حالت پایه، یک رابطه‌ی معکوس بین ناهمخوانی کوانتومی و عدم قطعیت وجود دارد. هنگامیکه $b = 0$ ، عبارات $\kappa = J$ و $A_-^2 = 2J^2$ را به دست می‌آوریم. سپس با جایگذاری آن‌ها در روابط (۱۶) و (۱۷) مقادیر $QD = 1$ و $LHS = RHS = 0$ نتیجه می‌شود. همچنین هنگامیکه $J = 0$ ، مقدار عدم قطعیت برابر با ۱ بوده درحالی‌که مقدار ناهمخوانی کوانتومی برابر با صفر است. با این وجود، با افزایش J تا وقتی‌که $J \gg b$ ، ناهمخوانی کوانتومی تا بیشترین مقدار یعنی $QD = 1$ افزایش می‌یابد. در نمودارهای شکل ۱ ناهمخوانی کوانتومی و عدم قطعیت در حضور حافظه کوانتومی برای سیستم مذکور بر حسب تابعی از J و b رسم شده‌اند. همان‌طور که انتظار داریم، با افزایش مقدار J تا زمانی‌که $J \gg b$ ، ناهمخوانی کوانتومی افزایش می‌یابد، درحالی‌که مقدار عدم قطعیت کاهش یافته و به سمت صفر میل می‌کند. از سویی دیگر، وقتی‌که $b \gg J$ ، ناهمخوانی کوانتومی کاهش یافته و مقدار عدم قطعیت افزایش می‌یابد.



شکل ۱. ناهمخوانی کوانتومی (I) و آنتروپی عدم قطعیت $LHS=RHS$ (II) بر حسب تابعی از J و b در حالت پایه زنجیره‌ی اسپینی دو کیوبیتی.

دوربری حالت‌های چلانده در غیاب و در حضور اتلاف

نیره، صحتی؛ توسلی، محمد کاظم؛ قاسمی، مهناز

گروه اتمی-مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

چکیده

در این مقاله، ابتدا برهم‌نهی‌ای از حالت‌های خلاء چلانده و تک‌فوتون چلانده با ضرایب نامعین را به وسیله شکافنده پرتو در غیاب میرایی با موفقیت دوربری می‌کنیم. در ادامه، به منظور در نظر گرفتن میرایی، برای رسیدن به دوربری کامل، از کانال درهم‌تنیده مناسبی استفاده می‌کنیم. در آخر، برهم‌نهی دیگری از حالت‌های چلانده را در نظر می‌گیریم و این حالت را با کانال درهم‌تنیده دیگری دوربری می‌کنیم. ملاحظه خواهیم کرد که برهم‌نهی‌های مورد نظر از حالت‌های چلانده را می‌توان با انتخاب کانال‌های درهم‌تنیده مناسب، همراه با میرایی و یا بدون آن، با اعمال شرایط مناسب به طور رضایت‌بخشی دوربری کرد.

واژه‌های کلیدی: دوربری کوانتومی، شکافنده پرتو، حالت چلانده، میرایی.

Teleportation of squeezed states in the absence and presence of dissipation

Sehati, Nayere; Tavassoly, Mohammad Kazem; Ghasemi, Mahnaz

Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

Abstract

In this paper at first we successfully teleport the unknown quantum state which is a superposition of squeezed vacuum and squeezed one-photon state using the beam splitter in the absence of dissipation. In the continuation, we use proper entangled channel for reaching to perfect teleportation in the presence of decoherence effect. Finally, we consider another superposition of squeezed states and teleport it with another entangled channel. As is seen, we could successfully teleport the considered superposition of squeezed states via choosing proper entangled channels in the presence or absence of dissipation by applying appropriate conditions.

Keywords: Quantum teleportation, Beam splitter, Squeezed state, Dissipation.

حالت خلاء چلانده با اختلاف فاز 180° درجه هم در نظر گرفته شده است. حالت‌های چلانده درهم‌تنیده که در این مقاله به کار رفته‌اند پیش از این به وسیله طرح‌واره‌های مختلفی نظیر چگالش بوز-اینشتین اتمی [۵] روش QED [۶] و شکافنده پرتو [۷] تولید شده‌اند.

دوربری برهم‌نهی حالت‌های چلانده: در ابتدا می‌خواهیم

حالت نامعلوم

$$|\psi\rangle_a = \varepsilon_+ |\xi\rangle_a + \varepsilon_- |\xi'\rangle_a, \quad (1)$$

را دوربری کنیم، که $\varepsilon_{\pm}$ ضرایب نامعین حالت مورد نظر است و رابطه $|\varepsilon_+|^2 + |\varepsilon_-|^2 = 1$ را ارضا می‌کند. حالت (۱) شامل همه حالت‌های عددی است (اعم از پایه‌های زوج و فرد)، زیرا $|\xi\rangle$ و

مقدمه: با دوربری کوانتومی می‌توانیم یک حالت کوانتومی با ضرایب نامعین را از موضعی به موضع دیگر منتقل کنیم، بدون اینکه آن را روی مسیری جابجا کنیم [۱]. درهم‌تنیدگی کوانتومی نقش مهمی در این فرایند بازی می‌کند. برای دوربری از روش‌های مختلفی مانند بهره‌گیری از سازوکارهای الکتروپوینامیک کوانتومی (QED) کاواک [۲] و یا شکافنده پرتو [۳] استفاده می‌شود. در بخش اول این مقاله، پروتکل ما برای دوربری بر اساس استفاده از شکافنده پرتو است و حالتی را که برهم‌نهی دو حالت خلاء چلانده و تک‌فوتون چلانده است را با موفقیت دوربری می‌کنیم. در ادامه، به منظور در نظر گرفتن میرایی در دوربری، واهمدوسی را با مخلوط کردن مد نوری با حالت خلاء در شکافنده پرتو مدل-سازی می‌کنیم [۴]. به علاوه در انتها دوربری برهم‌نهی‌ای از دو

$$|A\rangle_{out} = u_{BS}(\theta)|\xi\rangle_a |-\xi\rangle_b = u_{BS}(\theta)S_a(\xi)S_b(-\xi)u_{BS}^\dagger(\theta)|0,0\rangle_{a,b}. \quad (8)$$

به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، حالت (۸) به حالت چلانده دومدی به صورت زیر منتهی می شود:

$$|A\rangle_{out} \rightarrow |\xi\rangle_2 = S_{ab}(\xi)|0,0\rangle_{a,b} = \exp(\xi^* \hat{a} \hat{b} - \xi \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger)|0,0\rangle_{a,b} = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\varphi} (\tanh r)^n |n,n\rangle_{a,b}. \quad (9)$$

بقیه ضرایب در کت حالت (۸) نیز به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ برابرند با:

$$|B\rangle_{out} = u_{BS}(\frac{\pi}{4})|\xi\rangle_a |-\xi'\rangle_b \quad (10)$$

$$= S_{ab}(\xi)(\hat{b}^\dagger \cos(\frac{\pi}{4}) - \hat{a}^\dagger \sin(\frac{\pi}{4}))|0,0\rangle_{a,b},$$

$$|C\rangle_{out} = u_{BS}(\frac{\pi}{4})|\xi'\rangle_a |-\xi\rangle_b \quad (11)$$

$$= S_{ab}(\xi)(\hat{a}^\dagger \cos(\frac{\pi}{4}) + \hat{b}^\dagger \sin(\frac{\pi}{4}))|0,0\rangle_{a,b},$$

$$|D\rangle_{out} = u_{BS}(\frac{\pi}{4})|\xi'\rangle_a |-\xi'\rangle_b = S_{ab}(\xi)(\hat{a}^\dagger \cos(\frac{\pi}{4}) + \hat{b}^\dagger \sin(\frac{\pi}{4}))|0,0\rangle_{a,b}. \quad (12)$$

$$(\hat{b}^\dagger \cos(\frac{\pi}{4}) - \hat{a}^\dagger \sin(\frac{\pi}{4}))|0,0\rangle_{a,b}.$$

با در نظر گرفتن همه نتایج بالا، حالت خروجی در معادله (۸) به صورت زیر ساده می شود:

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_+|\xi\rangle_2|\xi'\rangle_c + \frac{\varepsilon_+}{\sqrt{2}}S_{ab}(\xi)(\hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger)|0,0\rangle_{a,b}|\xi\rangle_c + \frac{\varepsilon_-}{\sqrt{2}}S_{ab}(\xi)(\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger)|0,0\rangle_{a,b}|\xi'\rangle_c + \frac{\varepsilon_-}{2}S_{ab}(\xi)(\hat{b}^{\dagger 2} - \hat{a}^{\dagger 2})|0,0\rangle_{a,b}|\xi\rangle_c). \quad (13)$$

در ادامه، آلیس روی مدهای a و b دو اندازه گیری روی تعداد فوتون ها انجام می دهد. احتمال پیدا کردن m و n فوتون به ترتیب در مدهای a و b با $P(n,m)$ مشخص می کنیم،

$$P(n,m) = |{}_a\langle n|{}_b\langle m|\psi\rangle_{out}|^2. \quad (14)$$

اگر در این اندازه گیری، اختلاف n و m به اندازه یک واحد باشد ($m=n+1$)، حالت نزد باب، یعنی مد C میدان، در حالت زیر قرار می گیرد:

$$|\psi\rangle_{Bob} = \varepsilon_+|\xi\rangle_c + \varepsilon_-|\xi'\rangle_c. \quad (15)$$

واضح است که اگر اختلاف بین m و n یک باشد، دوربری به طور کامل اتفاق می افتد. با این شرط رابطه (۱۴) برابر می شود با:

$|\xi\rangle$ به ترتیب معرف حالت های خلاء و حالت تک فوتون چلانده به صورت زیر هستند:

$$|\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}|2n\rangle, \quad (2)$$

$$|\xi'\rangle = S(\xi)|1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1}|2n+1\rangle,$$

$$\text{که } \xi = re^{i\varphi} \text{ و } S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})\right] \text{ عملگر چلانده است. ضرایب بسط در رابطه (۲) برابر است با:}$$

$$C_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} e^{in\varphi} \tanh^n r, \quad (3)$$

$$D_{2n+1} = \frac{1}{\cosh^2 r} \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!} e^{in\varphi} \tanh^n r.$$

پروتکل دوربری به قرار زیر است: وضعیتی را تصور کنید که مد b میدان در آزمایشگاه آلیس ذخیره شده است، درحالی که مد C میدان، پرتو نوری را که به سمت باب منتشر می شود را توصیف می کند. در ابتدا آلیس و باب کانال درهم تنیده زیر را به اشتراک می گذارند:

$$|H_\xi\rangle_{b,c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\xi\rangle_b|\xi'\rangle_c + |-\xi'\rangle_b|\xi\rangle_c), \quad (4)$$

بنابراین، حالت کل سامانه برابر است با:

$$|\psi\rangle_a \otimes |H_\xi\rangle_{b,c} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_+|\xi\rangle_a |-\xi\rangle_b|\xi'\rangle_c + \varepsilon_+|\xi\rangle_a |-\xi'\rangle_b|\xi\rangle_c + \varepsilon_-|\xi'\rangle_a |-\xi\rangle_b|\xi'\rangle_c + \varepsilon_-|\xi'\rangle_a |-\xi'\rangle_b|\xi\rangle_c).$$

اکنون برای دوربری، آلیس قسمتی از حالت درهم تنیده مربوط به خودش (یعنی مد b میدان) را با حالتی که قرار است دوربری شود (یعنی مد a میدان) به کمک شکافنده پرتو با هم مخلوط می کند. نتیجه عبارت است از:

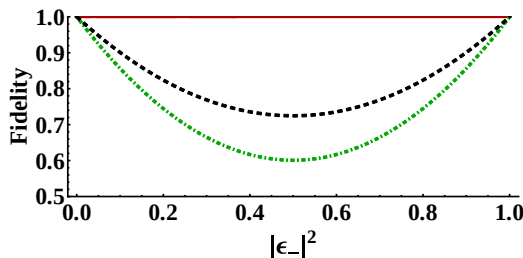
$$|\psi\rangle_{out} = u_{BS}(\theta)|\psi\rangle_a \otimes |H_\xi\rangle_{b,c}, \quad (6)$$

که $u_{BS}(\theta) = \exp[\theta(\hat{a}\hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{b})]$ عملگر شکافنده پرتو و θ پارامتر مربوط به بازتاب از شکافنده پرتو است. بنابراین، برای حالت خروجی از شکافنده پرتو داریم:

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_+|A\rangle_{out}|\xi'\rangle_c + \varepsilon_+|B\rangle_{out}|\xi\rangle_c + \varepsilon_-|C\rangle_{out}|\xi'\rangle_c + \varepsilon_-|D\rangle_{out}|\xi\rangle_c), \quad (7)$$

که در آن،

حاصل می‌شود. در ادامه میزان وفاداری، F ، به‌ازای α و η های مختلف برحسب $|\epsilon_-|^2$ (دامنه احتمال حالت $|\xi'\rangle$ در حالت (۱)) در شکل ۱ رسم شده است. در منحنی خط پیوسته قرمز رنگ، پارامتر η برابر واحد است (در غیاب اتلاف) و همان‌گونه که انتظار داریم میزان وفاداری برابر با واحد است و دوربری کامل داریم. در بقیه موارد α و η نیز کمینه وفاداری تقریبی $0/6$ و $0/7$ است که برای دوربری مقادیر قابل قبولی است. به علاوه، از نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی‌ها درمی‌یابیم هنگامی که فقط حالت خالص $|\xi\rangle$ یا $|\xi'\rangle$ را در رابطه (۱) داریم وفاداری در حضور اتلاف برابر با واحد است و دوربری کامل داریم.



شکل ۱: میزان وفاداری برحسب دامنه احتمال، به‌ازای $\eta = 1$ (خط پیوسته قرمز رنگ)، $\eta = 0.9$ (خط چین سیاه رنگ) و $\eta = 0.8$ (نقطه خط سبز رنگ) برای $\alpha = 2$.

مورد دوم: در این قسمت می‌خواهیم حالت نامعلوم

$$|\psi'\rangle_a = A(\xi)(a_+|\xi\rangle_a + a_-|-\xi\rangle_a), \quad (22)$$

که $|\xi\rangle$ حالت خلاء چلانده، $a_{\pm}$ ضرایب نامعلوم بسط و

$$A(\xi) = \left(|a_+|^2 + |a_-|^2 + (a_+^* a_- + a_-^* a_+) \sqrt{\frac{1 - \tanh^2 r}{1 + \tanh^2 r}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

را با استفاده از کانال همدوس-چلانده درهم‌تنیده‌ای به صورت زیر

$$|H_{\xi,\alpha}\rangle_{b,c}^2 = M(\xi, \alpha) \left(|\alpha\rangle_b |-\xi\rangle_c + |-\alpha\rangle_b |\xi\rangle_c \right), \quad (24)$$

در حضور میرایی دوربری کنیم. این حالت را می‌توان در برهم‌کنش یک اتم از نوع λ با یک میدان کوانتیده دومی در حضور دو میدان کلاسیکی قوی تولید کرد [۸]. در کانال درهم‌تنیده

$$|\pm\alpha\rangle, \quad (24)$$

$$M(\xi, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + e^{-2|\alpha|^2} \sqrt{\frac{1 - \tanh^2 r}{1 + \tanh^2 r}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

اگر مثل مورد قبل میرایی فوتون را برای مد b کانال (۲۴) در نظر

بگیریم، این حالت بعد از عبور مد b از کانال میرا به

$$|H_{\xi,\alpha}\rangle_{b,E,c}^2 = M(\xi, \alpha) \left(|\sqrt{\eta}\alpha\rangle_b |\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E |-\xi\rangle_c + |-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_b |-\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E |\xi\rangle_c \right), \quad (26)$$

$$P(n, n+1) = \frac{(n+1) \tanh^{2n} r}{4 \cosh^4 r}. \quad (16)$$

بنابراین، احتمال موفقیت پیدا کردن تعداد n فوتون در مد a و تعداد m فوتون در مد b به گونه‌ای که $m = n+1$ باشد برابر است با

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, n+1) = 0.25$$

اثر واهمدوسی:

مورد اول: در این قسمت می‌خواهیم حالت نامعلوم (۱) را با استفاده از کانال همدوس-چلانده درهم‌تنیده زیر،

$$|H_{\xi,\alpha}\rangle_{b,c}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\rangle_b |\xi'\rangle_c + |-\alpha\rangle_b |\xi\rangle_c \right), \quad (17)$$

متنها در حضور میرایی دوربری کنیم. فرض می‌کنیم تنها مد b از کانال (۱۷) تحت تأثیر میرایی باشد. این میرایی را با مخلوط کردن مد نوری مورد نظر با یک حالت خلاء (که آن را با مدهای محیط E نشان می‌دهیم) به وسیله یک شکافنده پرتو که ضریب عبور آن η است مدل‌سازی می‌کنیم [۴]. بنابراین، کانال (۱۷) بعد از عبور مد b ی میدان از شکافنده پرتو به کانال

$$|H_{\xi,\alpha}\rangle_{b,E,c}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\sqrt{\eta}\alpha\rangle_b |\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E |\xi'\rangle_c + |-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_b |-\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E |\xi\rangle_c \right), \quad (18)$$

تبدیل می‌شود.

در ادامه، حالت (۱) را با کانال (۱۸) دوربری می‌کنیم. بنابراین، حالت کل برابر است با:

$$|\psi\rangle_a \otimes |H_{\xi,\alpha}\rangle_{b,E,c}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon_+ |\xi, \sqrt{\eta}\alpha, \xi'\rangle_{a,b,c} |\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E + \epsilon_+ |\xi, -\sqrt{\eta}\alpha, \xi\rangle_{a,b,c} |-\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E + \epsilon_- |\xi', \sqrt{\eta}\alpha, \xi'\rangle_{a,b,c} |\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E + \epsilon_- |\xi', -\sqrt{\eta}\alpha, \xi\rangle_{a,b,c} |-\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E \right), \quad (19)$$

که با انجام یک اندازه‌گیری مناسب از حالت شبه‌بل زیر،

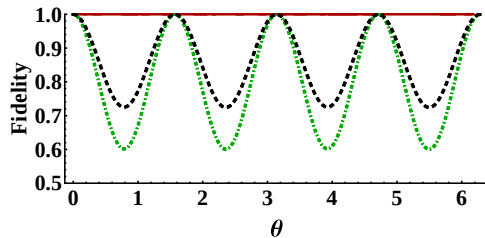
$$|QB\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\xi, -\sqrt{\eta}\alpha\rangle + |\xi', \sqrt{\eta}\alpha\rangle \right), \quad (20)$$

روی حالت (۱۹)، حالت باب با انتخاب α و η (به گونه‌ای که $2\eta|\alpha|^2$ بزرگ باشد و بتوان از جملات شامل عبارت $e^{-2\eta|\alpha|^2}$ در نتیجه اندازه‌گیری صرف‌نظر کرد)، به حالت (۱) نزدیک خواهد شد

و دوربری نزدیک به دوربری کامل با میزان وفاداری

$$F = |\epsilon_+|^4 + |\epsilon_-|^4 + 2|\epsilon_+|^2 |\epsilon_-|^2 e^{-2(1-\eta)|\alpha|^2}, \quad (21)$$

انتظار داریم میزان وفاداری برابر با واحد است و دوربری کامل داریم. در بقیه موارد α و η نیز کمینه وفاداری تقریبی 0.6 و 0.7 است که برای دوربری مقادیر قابل قبولی است.



شکل ۲: میزان وفاداری طبق رابطه (۳۱)، به ازای $\eta = 1$ (خط پیوسته قرمز رنگ)، $\eta = 0.9$ (خط چین سیاه رنگ) و $\eta = 0.8$ (نقطه خط سبز رنگ) برای $\alpha = 2$ ، $r = 7$.

نتیجه گیری: در این مقاله دوربری دو برهم نهی متفاوت از حالت های چلانده را در غیاب و در حضور میرایی بررسی کردیم. مطابق با نتایج تحلیلی، در غیاب میرایی حالت نامعلومی که برهم نهی ای از حالت های خلاء و تک فوتون چلانده است با میزان وفاداری یک دوربری شد. اما تحت تأثیر میرایی، همین حالت نامعلوم با در نظر گرفتن شرایطی به دوربری کامل نزدیک شد. به علاوه دوربری برهم نهی ای از حالت های چلانده که به اندازه 180° درجه با هم اختلاف فاز دارند نیز در نظر گرفته شد که این برهم نهی نیز با انتخاب شرایط مناسب به دوربری کامل نزدیک می شود (اخیرا به دوربری های تقریبی و نزدیک به کامل نیز پرداخته شده است [۳۰، ۳۱]). به طور کلی، توانستیم برهم نهی های متفاوتی از حالت های چلانده را با انتخاب مناسب کانال های درهم تنیده چلانده و چلانده-همدوس با انجام اندازه گیری های مناسب و اعمال شرایط لازم دوربری کنیم.

مرجع ها:

- [1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1895.
- [2] N. Sehati and M. K. Tavassoly, *Quantum Inf. Process.* **16** (2017) 193.
- [3] S. J. Van Enk and O. Hirota, *Phys. Rev. A* **64** (2001) 022313.
- [4] R. Wickert, N. K. Bernardes and P. Van. Loock, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 062344.
- [5] L. M. Kuang, A. H. Zeng and Z. H. Kuang, *Phys. Lett. A* **319** (2003) 24.
- [6] A. Karimi and M. K. Tavassoly, *Laser Phys.* **25** (2015) 115201.
- [7] L. Zhou and L. M. Kuang, *Phys. Lett. A* **302** (2002) 273.
- [8] A. Karimi and M. K. Tavassoly, *Quantum Inf. Process.* **15** (2016) 1513.
- [9] A. D. Dsouza, W. B. Cardoso, A. T. Avelar and B. Baseia, *Physica A* **388** (2009) 1331.

تبدیل می شود. اکنون حالت (۲۲) را با کانال میرایی (۲۶) دوربری می کنیم. حالت کل عبارت است از:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle_a \otimes |H_{\xi,\alpha}\rangle_{b,E,c}^2 = & A(\xi)M(\xi,\alpha)\left(a_+|\xi,\sqrt{\eta}\alpha,-\xi\rangle_{a,b,c}|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E\right. \\ & + a_+|\xi,-\sqrt{\eta}\alpha,\xi\rangle_{a,b,c}|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E \\ & + a_-|-\xi,\sqrt{\eta}\alpha,-\xi\rangle_{a,b,c}|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E \\ & \left.+ a_-|-\xi,-\sqrt{\eta}\alpha,\xi\rangle_{a,b,c}|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E\right), \end{aligned} \quad (27)$$

که با انجام یک اندازه گیری مناسب از حالت شبه بل $|QB\rangle_{ab} = C(\alpha,\xi)\left(|\xi,-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_{a,b} + |-\xi,\sqrt{\eta}\alpha\rangle_{a,b}\right)$ (۲۸) که $C(\alpha,\xi)$ یک ضریب بهنجارش است، روی حالت (۲۷) و با انتخاب α, η و r به گونه ای که بتوان از جملات شامل عبارات $e^{-2\eta|\alpha|^2}$ و $\frac{1}{\sqrt{2\cos^2 r - 1}}$ در نتیجه ای اندازه گیری صرف نظر کرد، لذا حالت باب برابر است با:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{Bob}^2 = & A(\xi,\alpha)\left(a_+|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E|\xi\rangle_c\right. \\ & \left.+ a_-|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E|-\xi\rangle_c\right) \end{aligned} \quad (29)$$

که

$$\begin{aligned} A(\xi,\alpha) = & \left(|a_+|^2 + |a_-|^2\right. \\ & \left.+ (a_+^*a_- + a_-^*a_+)e^{-2(1-\eta)|\alpha|^2}\sqrt{\frac{1-\tanh^2 r}{1+\tanh^2 r}}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

حالت (۲۹) نسبت به حالت اولیه (۲۲) وضعیتی نزدیک به دوربری کامل را داراست. میزان وفاداری حالت باب، (۲۹)، به حالت اولیه $|\psi'\rangle_a$ برابر است با:

$$\begin{aligned} F = & \left|{}_{Bob}\langle\psi|\psi'\rangle_a\right|^2 = |A(\xi,\alpha)|^2|A(\xi)|^2 \\ & \left[|a_+|^4 + |a_-|^4 + 2|a_+|^2\operatorname{Re}(a_+^*a_-)\langle\xi|-\xi\rangle e^{-2(1-\eta)|\alpha|^2}\right. \\ & + 2|a_+|^2|a_-|^2\langle\xi|-\xi\rangle^2 + 2|a_-|^2\operatorname{Re}(a_+^*a_-)\langle\xi|-\xi\rangle e^{-2(1-\eta)|\alpha|^2} \\ & + 2|a_+|^2\operatorname{Re}(a_+^*a_-)\langle\xi|-\xi\rangle + 2|a_+|^2|a_-|^2 e^{-2(1-\eta)|\alpha|^2} \\ & + \langle\xi|-\xi\rangle^2 e^{-2(1-\eta)|\alpha|^2}(a_+^*a_-^2 + a_-^*a_+^2) \\ & \left.+ 2|a_-|^2\operatorname{Re}(a_+^*a_-)\langle\xi|-\xi\rangle\right] \end{aligned} \quad (31)$$

در ادامه برای رسم میزان وفاداری (۳۱)، مقادیر a_+ و a_- را به ترتیب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ در نظر می گیریم. میزان وفاداری به ازای α, η و r های مختلف بر حسب θ رسم شده است. در نمودار پیوسته قرمز رنگ در غیاب میرایی ($\eta = 1$) همان گونه که

ایجاد درهم تنیدگی حالت های همدوس نامتعامل بین پیوند جوزفسون و کیوبیت های شار

کبری، زینب

دانشکده علوم، دانشگاه شاهد، تهران، ۱۵۹-۱۸۱۵۵، ایران

گروه فیزیک

چکیده

در این مقاله طرحی برای تولید درهم تنیدگی بین سه پیوند جوزفسون و دو کیوبیت شار پیشنهاد می دهیم. با اندازه گیری سیستم در پایه های حالت کیوبیت شار، حالت نهایی یک حالت همدوس سه کیوبیتی با پایه های نامتعامل است. برای سنجیدن میزان درهم تنیدگی این حالت از پارامتر تلاقی میترت استفاده می کنیم. نتیجه می گیریم که درهم تنیدگی در این سیستم به دو پارامتر θ و α بستگی دارد.

Generate Entanglement non-orthogonal coherence states between Josephson junction and flux qubit.

Kabiri, Zeinab

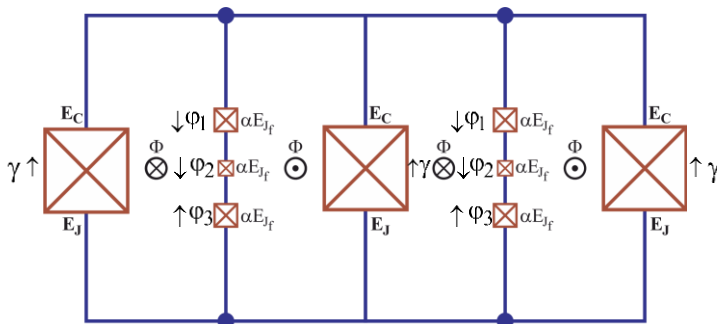
Department of Physics, Faculty of Basic Sciences,
Shahed University, Tehran, 18155-159, Iran

Abstract

In this paper, first we purpose a design for creating entanglement between three Josephson junctions and two flux qubit. With measurement of entanglement in basis of flux qubit, final state is a three qubit coherent state with non-orthogonal basis. Using Mintertconcurrence, we measurement value of entanglement of three qubit coherent state. Weresult that entanglement in this system is correlate to parameters θ & α .

مقدمه

بدین معنی که با اندازه گیری حالت کیوبیت شار، حالت همدوس درهم تنیده پیوند جوزفسون تنها با یک مرحله تحول تولید می گردد.



شکل ۱: ترکیب سه پیوند جوزفسون بزرگ و کیوبیت شار، مربع های بزرگ با علامت X پیوندهای جوزفسون و سه مربع کوچک با علامت X که در یک خط قرار دارند نیز کیوبیت شار می باشند.

بررسی حالت های همدوس در سیستم های مختلف ایتیکی بسیار رواج دارد. تولید حالت های همدوس درهم تنیده از جمله کاربردهای حالت های همدوس می باشد که در حوزه فناوری های کوانتومی مانند فرابرد کوانتومی، کامپیوترهای کوانتومی و مخابرات کوانتومی بسیار پرکاربرد است. ژانگ و همکاران در مقاله [۱] حالت های همدوس درهم تنیده را در سیستم های ابرسانایی تولید کردند. آن ها دو پیوند جوزفسون بزرگ را با یک کیوبیت شار ترکیب کردند و با تحول حالت های پیوند جوزفسون حالت همدوس درهم تنیده دو کیوبیتی همدوس تولید کردند. طرح ما ترکیب سه پیوند جوزفسون بزرگ و دو کیوبیت شار است که بعنوان جفت شونده عمل می کنند.

ϕ شار مغناطیسی خارجی اعمال شده بر کیوبیت ها است. در جمله دوم نیز Δ گاف انرژی بین دو حالت در نقطه تباهی و $\sigma_z = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|$ و $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ماتریس های پائولی هستند که در جملات جریان های کلاسیکی تعریف می شوند، این جملات برابر $|g\rangle = |\downarrow\rangle$ و $|e\rangle = |\uparrow\rangle$ و به جریان های ساعتگرد و پادساعتگرد در حلقه اشاره دارد.

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 H_{int,i,l} = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 g'_{i,l} (a_i^\dagger + a_i) \sigma_{z,k} \quad (6)$$

جمله آخر برهم کنش اسپین - بوزون را بین کیوبیت شار و دو پیوند جوزفسون بیان می کند. در اینجا $g'_{i,l}$ ضریب جفت شدگی است. با نوشتن پایه های کیوبیت شار به صورت $|\uparrow\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|e\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|g\rangle$ و $|\downarrow\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|e\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|g\rangle$ با پارامتر $\theta = 2 \arctan \frac{\Delta}{\varepsilon(\phi)}$ ، هامیلتونی به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$H = \sum_{i=1}^2 \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar \Omega}{2} S_{z,k} + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \hbar g'_{i,k} (a_i^\dagger + a_i) (\cos\theta S_{z,k} - \sin\theta S_{x,k}) \quad (7)$$

در اینجا $S_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ و $S_x = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ و $\hbar\Omega = \sqrt{\varepsilon^2(\phi) + \Delta^2}$ است. تحت شرط $\{\omega, g\} \gg \Omega$ ما می توانیم از جملات نوسانی تکراری چشم پوشی کنیم و در تصویر برهم کنش، هامیلتونی کل سیستم می تواند به صورت زیر کاهش یابد.

$$H = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \hbar g_{i,k} (a_i^\dagger e^{-i\omega_i t} + a_i e^{-i\omega_i t}) \quad (8)$$

در اینجا $g_{i,k}$ ضریب جفت شدگی مؤثر است و برابر $g_{i,k} = g'_{i,k} \varepsilon(\phi) / \sqrt{\varepsilon^2(\phi) + \Delta^2}$ در ادامه دوباره چگونگی تولید حالت همدوس نامتعامل بحث می کنیم. با داشتن عملگرهای بوزونی

مشخصه های کوانتومی پیوندهای جوزفسون دارای گستره مطالعاتی بسیار زیادی می باشند. در اینجا ما نخست هامیلتونی پیوند جوزفسون را بررسی می کنیم.

هامیلتونی پیوند جوزفسون بصورت زیر است:

$$H_J = E_C N^2 - E_J \cos \gamma \quad (1)$$

در اینجا E_C انرژی بارها، N تعداد جفت های کوپر، E_J انرژی پیوند و γ بعنوان فاز گذرنده از پیوند تعریف می شود.

وقتی پیوند جوزفسون در رژیم فاز کار می کنند، ما می توانیم از یک مدل نوسانگر هارمونیک تقریبی هم ارز با پیوندهای بزرگ استفاده کنیم چنانچه هامیلتونی به صورت زیر است:

$$H_J = \hbar \omega a^\dagger a \quad (2)$$

در اینجا عملگرهای بوزونی $a^\dagger = \frac{\xi}{2} \gamma - i \frac{1}{2\xi} N$ و $a = \frac{\xi}{2} \gamma + i \frac{1}{2\xi} N$ با پارامتر $\xi = \left(\frac{E_J}{E_C}\right)^{1/2}$ و فرکانس پلاسما $\omega = \sqrt{4E_C E_J}$ می باشد.

در ادامه، با توجه به شکل (۱) مشاهده می کنیم که ۳ پیوند جوزفسون با دو کیوبیت شار برهم کنش دارند. هامیلتونی کل این سیستم به صورت زیر است. [۱]

$$H = \sum_{i=1}^3 H_{Ji} + \sum_{k=1}^2 H_{f,k} + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 H_{int,i,k} \quad (3)$$

که در آن جمله اول انرژی ۳ پیوند جوزفسون است. در اینجا $a_i^\dagger$ و a_i عملگرهای خلق و فنا برای بوزون ها می باشد.

$$H_{J,i} = \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i \quad (4)$$

جمله دوم انرژی خود نیز شامل دو جمله به صورت زیر است:

$$H_{f,k} = \frac{1}{2} \varepsilon(\phi) \sigma_{z,k} - \frac{1}{2} \Delta \sigma_{x,k} \quad (5)$$

که $\varepsilon(\phi) = 2I_p(\phi - \phi)$ برابر انرژی فضایی دو جریان کلاسیکی، I_p جریان کیوبیت های شار، $\phi = \frac{h}{2e}$ کوانتای شار - مغناطیسی و

$$|S_{eg}\rangle = N|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_3 - O|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 \\ + M|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 - P|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3$$

$$|S_{ge}\rangle = O|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_3 - N|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 \\ - P|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 - M|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3$$

$$|S_{gg}\rangle = P|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_3 + M|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 \\ + O|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 + O|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3$$

(۱۱)

که در این جا $N = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$ ، $M = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ و $O = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ است. در این جا برای خلاصه نویسی از نوشتن وابستگی زمان در روابط صرف نظر کردیم. علاوه بر اینکه θ و φ برای هر یک از دو کیوبیت شار به کار برده ایم.

با محاسبه $\langle\alpha(t)|-\alpha(t)\rangle = e^{-2|\alpha(t)|^2}$ نشان می دهیم که این حالت ها نامتعامل هستند. برای بررسی میزان درهم تنیدگی این حالت ها باید پایه های حالت ها را به پایه هایی متعامد تبدیل کنیم. برای این منظور با استفاده از تبدیل های زیر حالت های نامتعامل را به پایه های متعامد تصویر می کنیم. [۳]

$$|0\rangle = |\alpha(t)\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}(|-\alpha(t)\rangle - p|\alpha(t)\rangle)$$

(۱۲)

با استفاده از پارامتر تلاقی میترت برای N کیوبیت. [۴]

$$C_N = 2^{1-\frac{N}{2}} \sqrt{(2^N - 2) - \sum_{\alpha} Tr(\rho_{\alpha})}$$

(۱۳)

می توانیم درهم تنیدگی سیستم را در حالت های مختلف محاسبه نماییم.

$\{a_i^\dagger, a_i, I\}$ به فرم یک عملگر جبری لی، تحول عملگر هامیلتونی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$U = \prod_i \exp(-if_i) \exp(-if_{i1}a_i) \exp(-if_{i2}a_i^\dagger), (9)$$

در این رابطه fi_0, fi_1, fi_2 ضرایب وابسته به زمان هستند. با حل معادله $ih\partial U/\partial t = HU$ با استفاده از شرایط اولیه $f_{i1}(\cdot) = f_{i1}(\cdot) = f_{i1}(\cdot) = 0$ و $f_{i1} = f_{i1}^* = ig_{i,k}(1 - e^{-i\omega t})S_z/\omega_{i,k}$ و $f_{i2} = g_{i,k}^* \left[\frac{1 - e^{-i\omega t}}{i\omega_{i,k} - t} \right]$ بدست می آید. فرض می کنیم که حالت اولیه کل سیستم به صورت زیر باشد:

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle_1 \otimes \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)_A \right\} \otimes |0\rangle_2 \\ \otimes \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)_B \right\} \otimes |0\rangle_3 \quad (10)$$

که یک حالت درهم تنیده پنج بخشی شامل دو کیوبیت شار و سه پیوند جوزفسون است و تحت تحول زمانی برابر می شود با:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_A|0\rangle_B|\alpha(t)\rangle_1|\alpha(t)\rangle_2|\alpha(t)\rangle_3 + \\ |0\rangle_A|1\rangle_B|\alpha(t)\rangle_1|-\alpha(t)\rangle_2|-\alpha(t)\rangle_3 + \\ |1\rangle_A|1\rangle_B|-\alpha(t)\rangle_1|-\alpha(t)\rangle_2|\alpha(t)\rangle_3 \\ + |1\rangle_A|1\rangle_B|-\alpha(t)\rangle_1|-\alpha(t)\rangle_2|-\alpha(t)\rangle_3) \quad (11)$$

که در اینجا $|\alpha_i(t)\rangle = e^{\alpha_i(t)a_i^\dagger - \alpha_i^*(t)a_i}|0\rangle$ یک حالت

همدوس بوزونی با مشخصه $\alpha_{i,k}(t) = \frac{g_{i,k}}{\omega_{i,k}}(1 - e^{i\omega_{i,k}t})$ است.

در ادامه با تغییر حالت های پایه شار کیوبیت از $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به حالت های پایه اصلی $|g\rangle, |e\rangle$ و اندازه گیری کیوبیت شار در پایه های $|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle$ ، حالت کوانتومی سه پیوند جوزفسون به حالت های زیر جهش می کند.

$$|S_{ee}\rangle = M|\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_3 + P|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 \\ - N|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3 - N|-\alpha\rangle_1|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_3$$

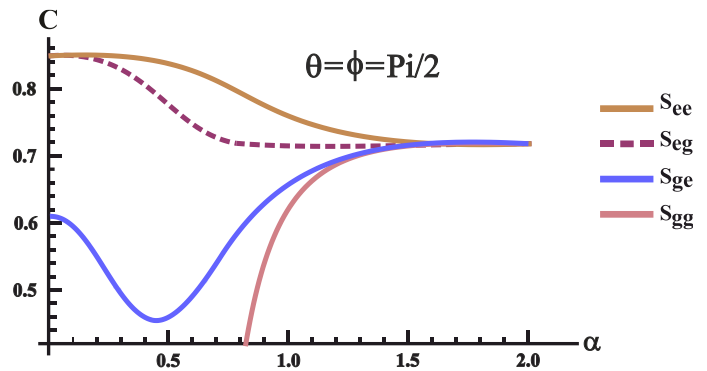
نتیجه گیری:

در این مقاله با گسترش دادن مقاله [۱] توانستیم بین ۳ پیوند جوزفسون و ۲ کیوبیت شار درهم تنیدگی تولید کنیم و نشان دادیم این حالت یک حالت همدوس با پایه های نامتعاد می باشد و با اندازه گیری در پایه های کیوبیت شار مشاهده کردیم حالت همدوس یک حالت سه کیوبیتی می باشد.

علاوه بر آن، همان طور که در دو نمودار به چشم می خورد درهم تنیدگی در این سیستم به θ و α بستگی دارد که $\theta = 2 \arctan \frac{\Delta}{\varepsilon(\phi)}$ و $\varepsilon(\phi) = 2I_p(\phi, -\phi)$ برابر انرژی فضایی دو جریان کلاسیکی است و $\alpha_{i,k}(t) = \frac{g_{i,k}}{\omega_{i,k}}(1 - e^{i\omega_{i,k}t})$ و $g_{i,k}$ ضریب جفت شدگی و $\omega = \sqrt{4E_C E_J}$ فرکانس پلاسما می باشد.

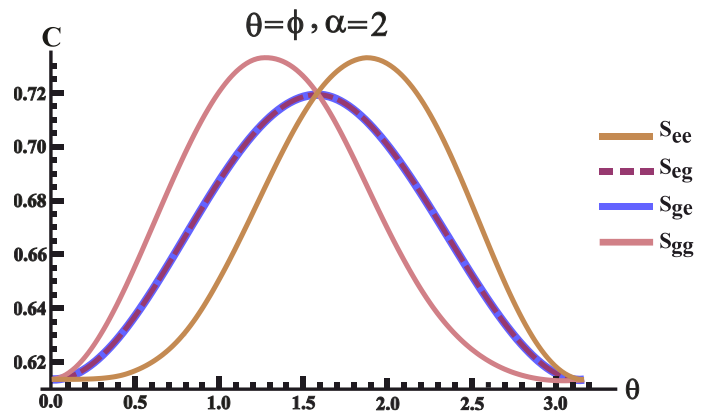
مرجع ها:

- [۱] F. Y. Zhanga, C. P. Yang, X. L. He, H. S. Song. *Physics Letters A* **378(2014)1536-1539**.
 [۲] J. Wei, E. Norman, J. Math. Phys. **۵۷**(۱۹۶۳)۵۷۵.
 [۳] G. Najarbashi, S. Mirzaei. arXiv: ۱۶۰۱.۰۰۱۴۲۷۲ [quant-ph] ۲۴-Feb-۲۰۱۶.
 [۴] A. R. Carvalho; F. Mintert; and A. Buchleitner, *Physics Letters L* **۹۳**, **230501** (2004).



نمودار ۱: پارامتر تلاقی حالت های همدوس در پایه های ee, gg, ge و eg

نسبت به تغییرات α در حالتی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ است.



نمودار ۲: پارامتر تلاقی حالت های همدوس در پایه های ee, gg, ge و eg

نسبت به تغییرات θ در حالتی که $\alpha = 2$ و $\phi = \theta$ است.

بحث:

از نمودار یک مشاهده می شود که حالت های اندازه گیری شده در هر چهار پایه با بزرگ شدن α و تقریباً در $\alpha = 2$ درهم تنیدگی یکسانی دارند. در نمودار ۲ نیز مشاهده می شود هر چهار حالت در $\alpha = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ درهم تنیدگی یکسانی دارند علاوه بر اینکه حالت های اندازه گیری شده در پایه های eg و ge دارای رفتار متقارن و حالت های اندازه گیری شده در پایه های gg و ee میزان درهم تنیدگی برابر است. همچنین مشاهده می کنیم که در $\theta = \pi$ درهم تنیدگی در هر چهار حالت به کمینه خود می رسد.

درجه غیرمارکوفی کانال حرکت براونی با استفاده از سنجشگر قدرت تداخل سنجی گاوسی

حسابی، سمانه^۱؛ افشار، داود^۲^۱گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز^۲مرکز تحقیقات لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

چکیده

در این مقاله، غیرمارکوفی کانال حرکت براونی کوانتومی گاوسی را با استفاده از سنجشگر قدرت تداخل سنجی گاوسی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به این منظور، محیطی اهمی با تابع برش لورنتز-درود و هم‌چنین دو دسته از حالت‌های اولیه، یعنی حالت‌های خلاء گرمایی درهم‌تنیده و گرمایی آمیخته جداپذیر، را در نظر می‌گیریم. نتایج نشان می‌دهد که درجه غیرمارکوفی به پارامترهای محیط، سیستم و حالت اولیه وابسته است. به علاوه، درجه غیرمارکوفی محاسبه شده برای حالت خلاء فشرده را می‌توان به عنوان درجه غیرمارکوفی کانال در نظر گرفت.

واژه های کلیدی: غیرمارکوفی، کانال حرکت براونی، قدرت تداخل سنجی گاوسی

Degree of non-Markovianity of quantum Brownian channel by Gaussian interferometric power measure

Hesabi, Samaneh¹, Afshar, Davood^{1,2}¹Department of Physics, Faculty of science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz²Center for Research on Laser and Plasma, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz

Abstract

In this paper, the non-Markovianity of Gaussian quantum Brownian channel is studied by Gaussian interferometric power measure. To this end, we consider an Ohmic environment with Lorentz-Drude cut off and two classes of initial states, i.e., the entangled thermal vacuum and the separable mixed thermal states. The results show that the degree of non-Markovianity depends on the parameters of the environment, system and the initial states. In addition, the degree of non-Markovianity calculated for thermal vacuum state can be considered as that of the channel.

Keywords: Non-Markovianity, Quantum Brownian channel, Gaussian interferometric power

PACS No:

مقدمه

آن ارائه شده است [۲]. از جمله مهمترین این معیارها، می‌توان به معیارهایی اشاره کرد که بر مبنای نقض ویژگی یکنوایی کمیت‌هایی مانند قدرت تداخل سنجی سیستم‌های متغیر گسسته و پیوسته پیشنهاد شده است [۳].

با توجه به نقش مهم سیستم‌های متغیر پیوسته به خصوص حالت‌های گاوسی در پروتکل‌های اطلاعات کوانتومی، مطالعات

یکی از جنبه‌های مهم سیستم‌های باز کوانتومی، مفهوم غیرمارکوفی است که در آن، حالت آینده سیستم وابسته به حالت گذشته آن است یا به عبارت دیگر سیستم دارای حافظه است [۱]. این ویژگی مشخصه فرآیندهای غیرمارکوفی است که در سال‌های اخیر به روش‌های مختلفی توصیف و چندین معیار برای اندازه‌گیری کمی

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\Delta(t) + \gamma(t)}{2} [a^\dagger a \rho - 2a \rho a^\dagger + \rho a^\dagger a] - \frac{\Delta(t) - \gamma(t)}{2} [a a^\dagger \rho - 2a^\dagger \rho a + \rho a a^\dagger] \quad (4)$$

که در آن $\Delta(t)$ و $\gamma(t)$ به ترتیب عبارت‌های پخش و میرایی به صورت زیر هستند:

$$\Delta(t) = \alpha^2 \int_0^t \int_0^\infty J(\omega) [2N(\omega) + 1] \cos(\omega\tau) \cos(\omega_0\tau) d\omega d\tau \quad (5)$$

$$\gamma(t) = \alpha^2 \int_0^t \int_0^\infty J(\omega) \sin(\omega\tau) \sin(\omega_0\tau) d\omega d\tau \quad (6)$$

α ثابت جفت‌شدگی بین محیط و سیستم و ω_0 فرکانس مشخصه سیستم است. $N(\omega)$ و $J(\omega)$ ، به ترتیب تعداد میانگین فوتون‌های با فرکانس ω و چگالی طیفی به صورت زیر هستند:

$$N(\omega) = [\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1]^{-1}, \quad J(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + \omega^2} \quad (7)$$

که در آن‌ها ω_c فرکانس قطع است. با فرض اینکه تنها مد A تحت تحول داده شده با معادله (۴) قرار گیرد، ماتریس هموردای تحول یافته به صورت زیر است:

$$\sigma_{AB}(t) = \left[e^{-\frac{x(t)}{2} \mathbb{I}_A \oplus \mathbb{I}_B} \right]^T \sigma_{AB}(0) \left[e^{-\frac{x(t)}{2} \mathbb{I}_A \oplus \mathbb{I}_B} \right] + \alpha^2 \int_0^t \Delta(s) ds (\mathbb{I}_A \oplus \mathbb{O}_B) \quad (8)$$

که در آن $\sigma_{AB}(0)$ ماتریس هموردای حالت اولیه، $x(t) = \int_0^t 2\gamma(s) ds$ و $\Delta(s)$ و $\gamma(s)$ با روابط (۵) و (۶) تعیین می‌شوند [۹].

سنجشگر قدرت تداخل سنجی گاوسی

قدرت تداخل سنجی، توانایی یک کاوشگر در تخمین یک فاز موضعی اعمال شده در یکی از ورودی‌های تداخل سنج را اندازه‌گیری می‌کند. در سیستم‌های متغیر پیوسته، قدرت تداخل سنجی حالت‌های گاوسی دو مدی بر حسب ماتریس هموردا، σ_{AB} ، با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود [۳]:

$$\mathcal{G}_{\sigma(AB)}^A = \frac{X + \sqrt{X^2 + XY}}{2Y} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} X &= (I_1 + I_3)(1 + I_2 + I_3 - I_4) - I_4^2 \\ Y &= (I_4 - 1)(1 + I_1 + I_2 + 2I_3 + I_4) \\ Z &= (I_1 + I_4)(I_1 I_2 - I_4) + I_3(2I_1 + I_3)(1 + I_2) \end{aligned} \quad (10)$$

مختلفی به بررسی ویژگی غیرمارکوفی این سیستم‌ها اختصاص یافته است [۳-۵].

در این مقاله، با در نظر گرفتن کانال حرکت براونی کوانتومی، درجه غیرمارکوفی را با استفاده از معیار قدرت تداخل سنجی گاوسی، برای دو دسته مهم از حالت‌های گاوسی، یعنی حالت‌های خلاء گرمایی فشرده (STSS) و حالت‌های گرمایی آمیخته (MTSS) مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حالت‌های گاوسی

حالت‌های گاوسی، توسط ماتریس هموردا که ماتریسی بلوکی، حقیقی و مثبت است توصیف می‌شوند که ماتریس هموردا با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\langle R_i, R_j \rangle \right) - \langle R_i \rangle \langle R_j \rangle \quad (1)$$

که در آن $\hat{R} = (\vec{x}, \vec{p})^T$ بردار هموردا است. ماتریس هموردای یک سیستم دو مدی به صورت زیر است:

$$\sigma_{AB} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad (2)$$

که در آن A، B و C به ترتیب ماتریس هموردای مربوط به مد اول، مد دوم و ماتریس همبستگی بین دو مد را نشان می‌دهند [۶]. ماتریس هموردای σ یک حالت فیزیکی، باید در رابطه عدم یقین زیر صدق کند:

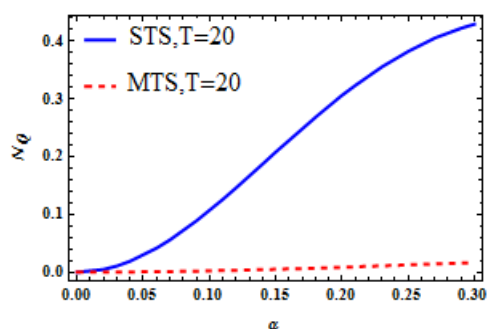
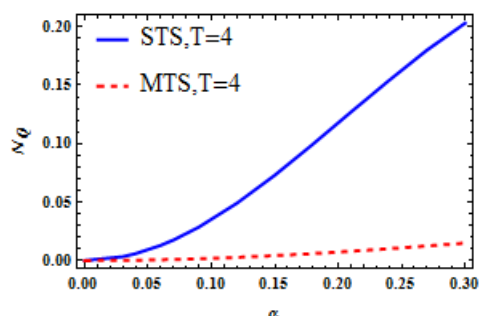
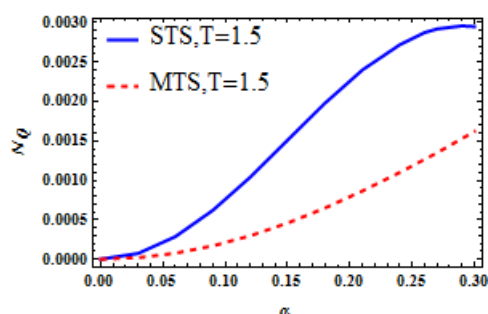
$$\sigma + i\Omega \geq 0, \quad \Omega = \bigoplus_{k=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

هم‌چنین، تعداد کل فوتون‌های میانگین یک حالت گاوسی دو مدی $\bar{n} = \frac{\bar{n}_A + \bar{n}_B}{2}$ است که در آن $\bar{n}_A = \frac{Tr[A] - 2}{4}$ و $\bar{n}_B = \frac{Tr[B] - 2}{4}$ به ترتیب تعداد فوتون‌های میانگین مد A و B هستند [۳].

حرکت براونی کوانتومی

حرکت براونی کوانتومی، برهم‌کنش یک نویسانگر هماهنگ با محیطی بوزونی را توصیف می‌کند که محیط نیز از تعداد زیادی نویسانگر هماهنگ تشکیل شده است. با در نظر گرفتن تقریب موج چرخشی و برهم‌کنش ضعیف بین سیستم و محیط، معادله اصلی حرکت براونی کوانتومی به صورت زیر است [۷]:

حالت‌ها یک تابع کاهشی از پارامترهای k_1 و k_2 است به‌طوری‌که به ازاء $k_1 = k_2 = 1$ این حالت‌ها بیشترین خلوص را دارند. با استفاده از معادلات (۱۱) و (۱۲)، $\mathcal{N}_Q^\sigma(\Lambda)$ را برای حالت‌های گرمایی فشرده و آمیخته محاسبه می‌کنیم. در شکل (۱)، $\mathcal{N}_Q^\sigma(\Lambda)$ به ازاء $k_1 = k_2 = 1$ ، $\omega_c = 1$ ، $\omega_0 = 5$ و برای مقادیر مختلف دما رسم شده است. مشاهده می‌کنیم که در همه موارد بررسی شده، STS دو مدی درهم‌تنیده خالص، مقدار بیشینه درجه غیرمارکوفی را در میان دو حالت اولیه بررسی شده دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در این شرایط، $\mathcal{N}_Q(\Lambda) = \mathcal{N}_Q^{STS}(\Lambda)$ است. همچنین، مشاهده می‌کنیم که با افزایش دما، درجه غیرمارکوفی افزایش می‌یابد.



شکل ۱: $\mathcal{N}_Q(\Lambda)$ برای دو حالت STS و MTS به ازاء $k_1 = k_2 = 1$ ، $\omega_c = 1$ ، $\omega_0 = 5$ ، $\bar{n} = 2.5$ و به ازاء دماهای $T = 1.5, 4, 20$.

که در آن $I_4 = \det \sigma_{AB}$ و $I_3 = \det C$ ، $I_2 = \det B$ ، $I_1 = \det A$ با استفاده از رابطه (۲) تعیین می‌شوند. تحت کانال‌های گاوسی مارکوفی، مشتق زمانی قدرت تداخل سنجی برای همه زمان‌ها منفی یا صفر است، یعنی $\mathcal{D}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{G}_{\sigma(AB)}^A(t) \leq 0$ [۳]. نقض این رفتار، نشان‌دهنده رفتار غیرمارکوفی کانال مورد بررسی است. با در نظر گرفتن این ویژگی، می‌توان یک سنجشگر غیرمارکوفی برای هر حالت اولیه به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathcal{N}_Q^\sigma(\Lambda) = \int_{\mathcal{D}(t)>0} \mathcal{D}(t) dt \quad (11)$$

یک مقدار عددی غیرمارکوفی برای هر حالت، با معادله زیر بدست می‌آید که انتگرال در بازه‌های زمانی‌ای گرفته می‌شود که $\mathcal{D}(t) > 0$ باشد:

$$\mathcal{N}_Q^\sigma(\Lambda) = \sum_{k, \mathcal{D}(t)>0} \int_{t_k^i}^{t_k^f} \mathcal{D}_k(t) dt \quad (12)$$

درجه غیرمارکوفی هر کانال، با ماکزیمم‌گیری روی معادله (۱۲) بر روی مجموعه‌ای از حالت‌های گاوسی به‌صورت زیر به‌دست گرفته می‌آید [۳]:

$$\mathcal{N}_Q = \max_{\sigma_{AB}(0)} \mathcal{N}_Q^\sigma(\Lambda) \quad (13)$$

برای بررسی غیرمارکوفی بودن کانال، دو دسته از حالت‌های گاوسی را به‌عنوان حالت اولیه انتخاب می‌کنیم، حالت‌های گرمایی فشرده (STSs) و حالت‌های گرمایی آمیخته (MTSs) که به‌ترتیب درهم‌تنیده و جداپذیر هستند. ماتریس هموردای مربوط به این دو حالت به‌ترتیب به‌صورت زیر است [۳]:

$$\sigma_{STS} = \begin{pmatrix} k_1 x_1 & 0 & k_1 y_1 & 0 \\ 0 & k_1 x_1 & 0 & -k_1 y_1 \\ k_1 y_1 & 0 & k_1 x_1 & 0 \\ 0 & -k_1 y_1 & 0 & k_1 x_1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\sigma_{MTS} = \begin{pmatrix} k_2 e^{2r_2} x_2 & 0 & k_2 e^{2r_2} y_2 & 0 \\ 0 & k_2 e^{2r_2} x_2 & 0 & k_2 e^{2r_2} y_2 \\ k_2 e^{2r_2} y_2 & 0 & k_2 e^{2r_2} x_2 & 0 \\ 0 & k_2 e^{2r_2} y_2 & 0 & k_2 e^{2r_2} x_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

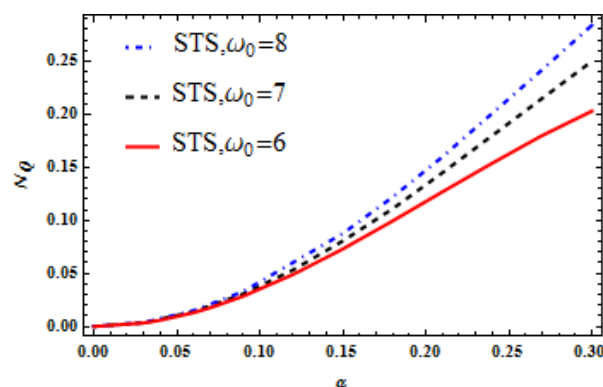
$$x_1 = \cosh(2r_1), y_1 = \sinh(2r_1) \quad (16)$$

$$x_2 = \cosh(2r_2), y_2 = \sinh(2r_2)$$

که r_1 و r_2 پارامترهای فشرده‌گی هستند. هر دو حالت، با شرط $k_1, k_2 \geq 1$ در رابطه عدم یقین (۳) صدق می‌کنند. خلوص این

- [۴] S. Lorenzo *et al*, “Geometrical characterization of non-Markovianity”, *Phys. Rev. A* **88**, (2013) 020102-1-5.
- [۵] S. Gröblacher *et al*, “Observation of non-Markovian micromechanical micromechanical Brownian motion”, *Nat Commun.* **6**, (2015) 1-6.
- [۶] G. Adesso *et al*, “Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives”, *J. Phys. A: Math. Theor* **40**, (2007) 7821-7880.
- [۷] F. Intravaia *et al*, “Density-matrix Operatorial solution of the non-Markovian master equation for quantum Brownian motion”, *Phys. Rev. A* **67**, (2003) 042108-1-12.
- [۹] R. Vasile *et al*, “Continuous-variable-entanglement dynamics in structured reservoirs”, *Phys. Rev A* **80**, (2009) 062324-1-11.

در ادامه اثر بسامد مشخصه سیستم ω_0 را بر روی درجه غیرمارکوفی بررسی می کنیم. در شکل (۲)، $\mathcal{N}(\Lambda)$ به ازاء ω_0 برای مقادیر مختلف $T = 4$ ، $\omega_c = 1$ ، $k_1 = k_2 = 1$ رسم شده است. مشاهده می کنیم که در این وضعیت نیز با افزایش بسامد مشخصه سیستم درجه غیرمارکوفی افزایش می یابد.



شکل ۲: $\mathcal{N}_Q(\Lambda)$ به ازاء $T = 4$ ، $\bar{n} = 2.5$ ، $k_1 = k_2 = 1$ و $\omega_c = 1$ و $\omega_0 = 6, 7, 8$.

نتیجه گیری

با استفاده از سنجشگر قدرت تداخل سنجی گاوسی، درجه غیرمارکوفی کانال حرکت براونی کوانتومی را بدست آوردیم. محیطی با یک چگالی طیفی اهمی و تابع قطع لورنتزی را در نظر گرفته و حالت های گرمایی فشرده و آمیخته را به عنوان حالت های اولیه انتخاب کردیم. با استفاده از سنجشگر قدرت تداخل سنجی گاوسی، درجه غیرمارکوفی را برای هر دو گروه از حالت های اولیه محاسبه کردیم. مشاهده می شود که برای حالت گرمایی فشرده، مقدار عددی غیرمارکوفی بزرگتر است، بنابراین $\mathcal{N}_Q(\Lambda) = \mathcal{N}_Q^{STS}(\Lambda)$. به علاوه، نتایج نشان داد که درجه غیرمارکوفی، یک تابع افزایشی از دما، ثابت برهم کنش و بسامد مشخصه سیستم است.

مرجع ها

- [۱] H. P. Breuer *et al*, “The theory of open quantum systems”; 1th edition, Oxford Univ. Press, (2007), 649.
- [۲] A. Rivas *et al*, “Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection”, *Rep. Prog. Phys* **77**, (2014) 094001-1-26.
- [۳] L. A. M. Souza *et al*, “Gaussian interferometric power as a measure of continuous-variable non-Markovianity”, *Phys. Rev. A* **92**, (2015) 052122-1-12.

غیر درهم تنیدگی در سیستم های کوانتومی بسته از طریق تله اندازی همدوس جمعیت

امیری، فیروز^{۱،۲}؛ کردی، زینب^۲^۱ گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خرم آباد، ایران^۲ باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد خرم آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، خرم آباد، ایران

چکیده

در این مقاله غیردرهم تنیدگی بین اتم پوشیده و گسیل خودبه خودی آن را در سیستم کوانتومی لامبدا دوگانه بررسی کردیم. در ابتدا بر اثر برهم کنش میان میدان های لیزری و اتم چهارترازی، در هم تنیدگی افزایش می یابد. سپس با اعمال میدان های لیزری، درهم تنیدگی بر اساس تله اندازی همدوس جمعیت کاهش می یابد. در واقع گسیل خودبه خودی با تغییر دادن جمعیت اتم ها در ترازها منبع خوبی برای درهم تنیده کردن سیستم است. **واژه های کلیدی:** درهم تنیدگی، سیستم کوانتومی بسته، گسیل خودبه خودی، آنتروپی کاهش یافته.

Disentanglement via coherent population trapping in closed-loop quantum system

Amiri, Firouz^{1,2}; Kordi, Zeinab²¹ Department of Physics, Khorramabad Branch, Islamic Azad University, Iran² Young Researchers and Elite Club, Khorramabad Branch, Islamic Azad University, Khorramabad, Iran

Abstract

In this paper we investigated disentanglement between the dressed atom and its spontaneous emission in double-lambda quantum system. At the beginning entanglement was increased due to the interaction between the optical laser field and four-level atom. By manipulating the optical laser field, entanglement was decreased via coherent population trapping. In fact spontaneous emission by changing the population of the atoms through the energy level was found to be a good source to create entangled system.

Keywords: Entanglement, Closed-loop quantum system, Spontaneous emission, Reduced entropy.

PACS No.

حالت های کوانتومی دو مولفه ای نباشد [۳]. در این حالت، از طریق اندازه گیری های انجام شده روی یکی از زیر سیستم ها، اطلاعات مربوط به زیرسیستم دیگر را می توان بدست آورد. درهم تنیدگی می تواند نقش مهمی در تمامی جنبه های کارکرد پردازش اطلاعات کوانتومی از جمله، شبکه های کوانتومی [۴] داشته باشد.

در مطالعه قبلی [۵]، ما بر روی ایجاد حالت درهم تنیدگی پایدار، بین اتم و گسیل خود به خودی متمرکز شدیم. در این مقاله، غیردرهم تنیدگی در سیستم های کوانتومی بسته از طریق تله اندازی همدوس جمعیت را نشان داده ایم.

. مقدمه

اینشتین، پودولسکی و روزن [۱]، درهم تنیدگی را به عنوان مثالی برای نشان دادن اینکه مکانیک کوانتومی نمی تواند کل طبیعت را بر اساس واقعیت توضیح دهد و بنابراین ناقص است، ارائه کردند. اصطلاح "درهم تنیدگی" در سال ۱۹۳۵ توسط شرودینگر در پاسخ او به نامه اینشتین [۲] برای اولین بار در مکانیک کوانتومی ارائه شد. در این جنبه شگفت انگیز از دنیای کوانتوم، بحث های فلسفی زیادی نیز وجود داشت. از لحاظ ریاضی، حالت درهم تنیده وقتی اتفاق می افتد که حالت کوانتومی یک سیستم متشکل از دو زیر سیستم، قابل تجزیه به ضرب ساده

$$E_{ij} = E_{ij} \hat{n}_{ij} e^{-i(\omega_{ij}t - \vec{k}_{ij} \cdot \vec{r} + \phi_{ij})} + c.c, \quad (1)$$

در رابطه (۱) $\hat{n}_{ij}$ بردار یک قطبش و ϕ_{ij} فاز مطلق می باشند.

هایملتونین نیمه کلاسیکی در چرخش موج و تقریب دوقطبی عبارت است از:

$$H = \sum_{j=1}^4 E_j |j\rangle\langle j| - \sum_{l=3}^4 \sum_{m=1}^2 \hbar g_{lm} e^{-i\alpha_{lm}} |l\rangle\langle m| + H.C, \quad (2)$$

در رابطه فوق $g_{lm} = E_{lm}(\hat{e}_{lm} \cdot d_{lm})/\hbar$ فرکانس رابی، $\vec{d}_{lm}$ متناظر با گشتاور دو قطبی و E_j ($j \in \{1, \dots, 4\}$) انرژی لازم جهت گذار بین حالت های سیستم می باشد. به علاوه، $\Delta_{lm} = \omega_{lm} - \bar{\omega}_{lm}$ و $\bar{\omega}_{lm} = (E_l - E_m)/\hbar$ نامیزانی میدان های لیزری هستند. همچنین توان تابع نمایی توسط $\alpha_{lm} = \omega_{lm}t - \vec{k}_{lm} \cdot \vec{r} + \phi_{lm}$ تعریف شده است. با تغییر چارچوب مرجع و استفاده از تصویر برهم کنش و تعریف $\rho_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ، تابع جدید هایملتونین عبارت است از:

$$H = \hbar(\Delta_{32} - \Delta_{31})\tilde{\rho}_{22} - \hbar\Delta_{31}\tilde{\rho}_{33} + \hbar(\Delta_{32} - \Delta_{31} - \Delta_{42})\tilde{\rho}_{44} - \hbar(g_{31}\tilde{\rho}_{31} + g_{32}\tilde{\rho}_{32} + g_{42}\tilde{\rho}_{42} + g_{41}\tilde{\rho}_{41}e^{-i\Phi} + H.C), \quad (3)$$

در اینجا، $\Phi = \Delta t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \phi_0$ فازنسبی،

$\Delta = (\Delta_{32} + \Delta_{41}) - (\Delta_{31} + \Delta_{42})$ نامیزانی تشدید چند فوتونی، $\vec{K} = (\vec{k}_{32} + \vec{k}_{41}) - (\vec{k}_{31} + \vec{k}_{42})$ بردار موج ترازهای متفاوت و $\phi_0 = (\phi_{32} + \phi_{41}) - (\phi_{31} + \phi_{42})$ اختلاف فاز اولیه تعریف می شود.

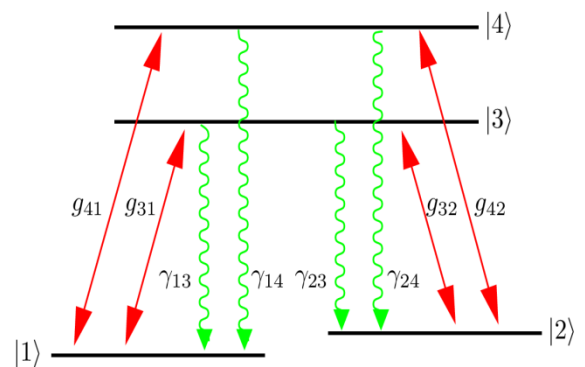
عناصر ماتریس چگالی در تقریب موج چرخان با استفاده از قضیه لیوویل به شکل زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = & ig_{31}^* \rho_{31} - ig_{31} \rho_{13} + ig_{41}^* \rho_{41} e^{i\Phi} - ig_{41} \rho_{14} e^{-i\Phi} \\ & + 2\gamma_{13} \rho_{33} + 2\gamma_{14} \rho_{44}, \end{aligned}$$

در ابتدا، جمعیت تمام حالت های پوشیده را محاسبه می کنیم. نشان داده شده است که وقتی اتم و گسیل خود به خودی، غیر در هم تنیده هستند، تمام اتم ها در یک حالت پوشیده که در حالت تاریک قرار دارند، تجمع می کنند. به عبارت دیگر تله اندازی همدوس جمعیت اتفاق افتاده است. همانطور که می دانیم حالت تاریک به یک اتم یا مولکول اشاره دارد که قادر به جذب و انتشار فوتونها نیست. در واقع اتمها مانند یک پنجره شفاف رفتار می کنند و شفافیت الکترومغناطیسی ایجاد می شود. در بخش بعدی این تحقیق، مدل اتمی و هایملتونین آن را معرفی می کنیم. در ادامه، تحول آنتروپی به همراه اندازه گیری درجه درهم تنیدگی مطالعه و بررسی شده است، و در نهایت، نتیجه گیری مورد بحث قرار گرفته است.

مدل

برهم کنش سیستم اتمی چهار-ترازی دوگانه Λ با چهار میدان لیزری همدوس مطابق شکل (۱) را در نظر می گیریم. این سیستم شامل دو حالت پایه $|1\rangle$ و $|2\rangle$ و دو حالت برانگیخته $|3\rangle$ و $|4\rangle$ می باشد. میزان گسیل خود به خودی تراز ($i \in \{3, 4\}$) $|i\rangle$ به تراز های ($j \in \{1, 2\}$) $|j\rangle$ با $2\gamma_{ij}$ نشان داده می شود.



شکل ۱

لیزر ناشی از گذار $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$ با فرکانس ω_{ij} و بردار موج k_{ij} مشخص می شود. میدان الکتریکی برهم کنش کننده بازوهای انرژی سیستم اتمی، به صورت زیر تعریف می شود:

سیستم A و B به صورت حاصل ضربی، $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ نوشته شود به طوریکه چگالی جزئی زیر سیستم A (B) با $\rho_{A(B)}$ مشخص شود سیستم را جدا پذیر می نامند در غیر این صورت در هم تنیده نامیده میشود. برای این سیستم آنتروپی فون نیومن عبارت است از:

$$S = -\text{Tr} \rho \text{Ln} \rho \quad (5)$$

فونیکس و نایت^۲ نشان دادند کاهش آنتروپی جزئی به معنای رفتن حالت سیستم به سمت حالت کوانتومی خالص است. برعکس، افزایش آنتروپی جزئی به معنای تمایل سیستم به همبسته شدن و درهم تنیدگی است. DEM برای اتم پوشیده و گسیل خود به خودی با استفاده از آنتروپی فون نیومن به صورت زیر تعریف می شود.

$$DEM(t) = S_A = S_B = -\sum_{i=1}^4 (\lambda_i \text{Ln} \lambda_i). \quad (6)$$

به طوریکه در رابطه فوق λ_i مؤثره مقادیر ماتریس چگالی جزئی می باشد.

نتایج و بحث ها

در این بخش نتایج DEM را در شرایط تشدید چند-فوتونی نشان می دهیم. به عنوان یک نمونه واقعی، ما اتمهای روبیدیوم را در یک سلول بخار بررسی می کنیم. در تجزیه و تحلیل ما، تمام پارامترها در کدهای رایانه از طریق مقیاس $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1$ به واحد های بدون بعد کاهش می یابند و تمام شکل ها در واحد γ نشان داده شده اند. تمام برچسب های محور بدون ابعاد هستند. همچنین برای راحتی $\hbar$ واحد فرض شده است.

می خواهیم تأکید کنیم که گسیل خود به خودی، یک منبع خوب برای ایجاد سیستم درهم تنیده، با پتانسیل لازم برای تغییر جمعیت ترازهای برانگیخته اتمی، است.

شکل ۲ رفتار دینامیکی DEM را برای مقادیر مختلف شدت میدان های نوری نشان می دهد. (a) $g_{41} = 0.03\gamma$, $g_{42} = 3\gamma$ و (b) $g_{41} = g_{42} = 3\gamma$. در شکل ۲ (a) سیستم جداپذیر است و هیچ درهم تنیدگی وجود ندارد. شایان ذکر است، که در این وضعیت یک میدان جفت شده برای اتم و یک میدان کاوشگر وجود

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} &= ig_{32}^* \rho_{32} - ig_{32} \rho_{23} + ig_{42}^* \rho_{42} - ig_{42} \rho_{24} \\ &+ 2\gamma_{23} \rho_{33} + 2\gamma_{24} \rho_{44}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{33} &= -ig_{31}^* \rho_{31} - ig_{32}^* \rho_{32} + ig_{31} \rho_{13} + ig_{32} \rho_{23} - 2\gamma_3 \rho_{33}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{12} &= i(\Delta_{32} - \Delta_{31}) \rho_{12} + ig_{31}^* \rho_{32} - ig_{32} \rho_{13} \\ &+ ig_{41}^* \rho_{42} e^{i\Phi} - ig_{42} \rho_{14} - \Gamma_{12} \rho_{12}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{13} &= -i\Delta_{31} \rho_{13} + ig_{31}^* (\rho_{33} - \rho_{11}) - ig_{32}^* \rho_{12} \\ &+ ig_{41}^* \rho_{43} e^{i\Phi} - \Gamma_{13} \rho_{13}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{14} &= i(\Delta_{32} - \Delta_{31} - \Delta_{42}) \rho_{14} + ig_{41}^* e^{i\Phi} (\rho_{44} - \rho_{11}) \\ &- ig_{42}^* \rho_{12} + ig_{31}^* \rho_{34} - \Gamma_{14} \rho_{14}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{23} &= -i\Delta_{32} \rho_{23} + ig_{32}^* (\rho_{33} - \rho_{22}) - ig_{31}^* \rho_{21} \\ &+ ig_{42}^* \rho_{43} - \Gamma_{23} \rho_{23}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{24} &= -i\Delta_{42} \rho_{24} + ig_{42}^* (\rho_{44} - \rho_{22}) - ig_{41}^* \rho_{21} e^{i\Phi} \\ &+ ig_{32}^* \rho_{34} - \Gamma_{24} \rho_{24}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{34} &= -i(\Delta_{42} - \Delta_{32}) \rho_{34} + ig_{31} \rho_{14} + ig_{32} \rho_{24} \\ &- ig_{41}^* \rho_{31} e^{i\Phi} - ig_{42}^* \rho_{32} - \Gamma_{34} \rho_{34}, \\ \rho_{44} &= 1 - \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33}, \end{aligned} \quad (4)$$

در معادلات فوق شرایط $\sum_i \tilde{\rho}_{ii} = 1$ و $\tilde{\rho}_{ij} = \tilde{\rho}_{ji}^*$ برقرار است. با تعریف $\gamma_j = \gamma_{1j} + \gamma_{2j}$ و استفاده از، $\Gamma_{ij} = (2\gamma_i + 2\gamma_j)/2$ و $(i \in \{1, 2\})$ و $(j \in \{3, 4\})$ میزان نا میرایی همدوس گذارها نشان داده می شود. برای سهولت میزان گسیل خود به خودی ترازهای برانگیخته شده یکسان فرض می شود. برای به دست آوردن معادلات (۴) شرایط تطابق فاز و تشدید چند فوتونی می بایست توسط میدان های اعمال شده برآورده شود.

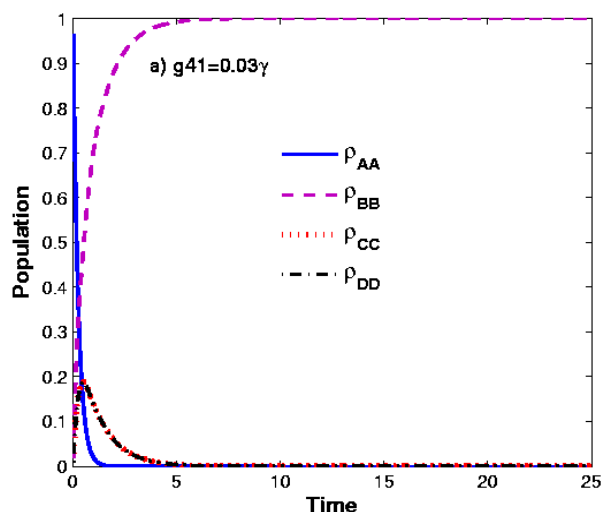
تحول آنتروپی و اندازه گیری درجه درهم تنیدگی (DEM)

در این تحقیق از آنتروپی کاهش یافته برای اندازه گیری درجه درهم تنیدگی استفاده می کنیم. چنانچه عملگر چگالی دو زیر

² Phoenix and Knight

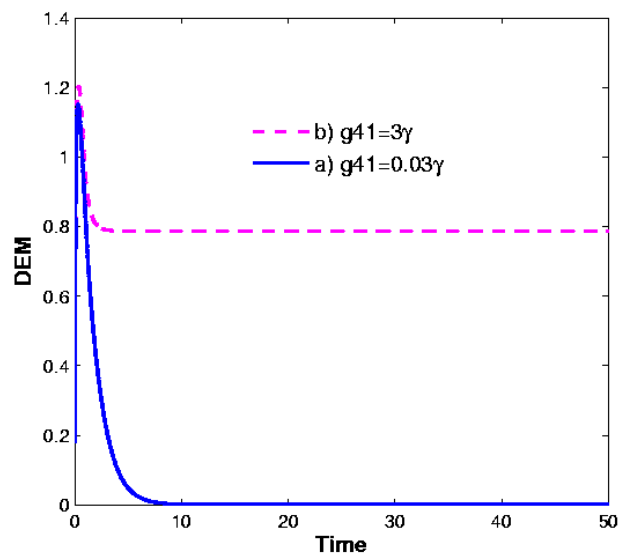
¹ Degree Entanglement Measure

از جمعیت هستند. اما زمانی که سیستم درهم تنیده است توزیع جمعیت در همه ترازهای پوشیده مشاهده می شود.



شکل ۳

دارد که برای ایجاد DEM کافی نیست، اما در شکل ۲ (b) با افزایش قدرت میدان کاوشگر، دو میدان جفت شده برای ایجاد سیستم درهم تنیده وجود دارد.



شکل ۲

نتیجه گیری

در این تحقیق نشان دادیم که درهم تنیدگی می تواند توسط میدان های لیزری کنترل شود و همچنین با اعمال میدان های مناسب، سیستم غیر درهم تنیده می شود. فیزیک مرتبط با غیردرهم تنیدگی با استفاده از تله اندازی همدوس جمعیت و شفافیت القایی الکترومغناطیسی قابل توجیه و تفسیر است.

مرجع ها

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen; "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?"; Phys. Rev. **47** (1935) 777
- [2] E. Schrodinger; "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. Die Naturwissenschaften"; **23**, (1935) 807-812
- [3] C.H. Bennett et al; "Mixed-state entanglement and quantum error correction"; Phys. Rev. A **54**, (1996) 3824-3851
- [4] A. Sergienko et al; "Quantum Communication and Quantum Networking"; Springer, Berlin, (2009)
- [5] Z. Kordi et al; "Atom-photon entanglement beyond the multi-photon resonance condition"; Quantum Inf. Process. **15.1** (2016) 199-213

برای درک فیزیک درهم تنیدگی بین اتم و گسیل خود به خودی، جمعیت اتم ها در حالت های پوشیده را بررسی می کنیم. در آغاز، تنها حالت $|3\rangle$ جمعیت دارد و سایر ترازهای انرژی خالی از جمعیت می باشد. در غیاب دو میدان نوری ($g_{31} = g_{32} = 0$)، حالت های پوشیده را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$|A\rangle = |3\rangle,$$

$$|B\rangle = -\frac{g_{42}}{\sqrt{g_{42}^2 + g_{41}^2}}|1\rangle + \frac{g_{41}}{\sqrt{g_{42}^2 + g_{41}^2}}|2\rangle,$$

$$|C\rangle = \frac{g_{41}}{\sqrt{2(g_{41}^2 + g_{42}^2)}}|1\rangle + \frac{g_{42}}{\sqrt{2(g_{41}^2 + g_{42}^2)}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|4\rangle,$$

$$|D\rangle = -\frac{g_{41}}{\sqrt{2(g_{41}^2 + g_{42}^2)}}|1\rangle - \frac{g_{42}}{\sqrt{2(g_{41}^2 + g_{42}^2)}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|4\rangle,$$

(۷)

همانطور که در شکل ۳ پیداست، زمانی که سیستم غیر درهم تنیده است، همه اتم ها در یک تراز تاریک جمع شده و سایر ترازها خالی

راهبند تک فوتون کنترل پذیر در سامانه های اپتومکانیکی کوانتومی

اله وردی، حسین^۱؛ دلفی، علی^۱^۱ پژوهشکده لیزر و پلاسما دانشگاه شهید بهشتی، ولنجک، بلوار دانشجو، تهران

چکیده

در این مقاله، آمار فوتون ها در یک سامانه اپتومکانیکی با لیزر دمش ضعیف و با اعمال جابجایی کنترل پذیر در مکان نوسانگر مکانیکی بررسی شده است. به منظور تایید پادگروهگی فوتون ها، تابع همدوسی تک زمانه مرتبه دوم $g^{(2)}(0)$ برای میدان تابشی کاواک هم به صورت تحلیلی و هم به صورت عددی محاسبه شده است. در بررسی تحلیلی، اثر اتلاف کاواک اپتیکی را با اضافه کردن یک جمله غیرهرمیتی به هامیلتونی سامانه مدل سازی کرده و با توجه به ضعیف بودن شدت لیزر دمش، بررسی خود را به ویژه حالت هایی از فضای هیلبرت با سه برانگیختگی فوتونی محدود کرده ایم. در بررسی عددی، معادله اصلی را با استفاده از بسته محاسباتی کیوتیپ شبیه سازی کرده و جواب های حالت پایا را به دست آورده ایم. همچنین، با به دست آوردن ویژه حالت های انرژی سامانه اپتومکانیکی به صورت تحلیلی، تفسیر شهودی از اثر راهبند تک فوتون بر حسب ناهماهنگی در ترازهای انرژی سامانه ارایه شده است.

واژه های کلیدی: اپتومکانیک کوانتومی درون کاواک، راهبند فوتونی، راهبند تک فوتون، تولید حالت های تک فوتون، پادگروهگی فوتون

Controllable One Photon Blockade in Quantum Optomechanical Systems

Allahverdi, Hossein¹; Dalafi, Ali¹¹ Laser and Plasma Research Institute, Shahid Beheshti University, Tehran,

Abstract

In this article, the photon statistics in a weakly driven Optomechanical system (OMS) has been studied by exerting a controllable displacement in the mechanical oscillator position. In order to confirm the occurrence of photon anti-bunching, the one-time second-order correlation function $g^{(2)}(0)$ of the cavity field has been investigated both analytically and numerically. In the analytical calculation, the decay in the cavity field has been modeled by adding a non-Hermitian term to the Hamiltonian and because of the weakness of the driving laser, we have limited the Hilbert space of the system to the eigen-states with a maximum of three photons. In the numerical calculations, the master equation of the system has been simulated by the QuTiP toolbox and the steady-state solutions have been determined. Furthermore, an intuitive interpretation of one-photon blockade in terms of unharmonicity of the energy levels of the system has been introduced by obtaining the eigen-energies of the OMS.

Keywords: Quantum Cavity Optomechanical Systems, Photon Blockade, One Photon Blockade, Generation of Single Photons, Photon Anti-Bunching

PACS No.

مقدمه

طرحواره های بسیار زیادی مانند سامانه های الکتروپدینامیک کوانتومی درون کاواک، فیبرهای اپتیکی و نقاط کوانتومی ادغام شده با کاواک های فوتونیک کریستالی برای تولید حالت های تک فوتون میدان تابشی پیشنهاد شده است [۶-۴]. یکی از سامانه هایی که اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته سامانه های اپتومکانیکی

تولید حالت های تک فوتون از اهمیت بسزایی در بسیاری از زمینه های علم و فن آوری مانند مخابرات نوری، پردازش اطلاعات کوانتومی و اندازه گیری های فوق دقیق برخوردار است [۳-۱]. در این زمینه تاکنون پیشرفت های قابل ملاحظه ای اتفاق افتاده و

حالت‌های انرژی سامانه در دستگاه پولارون را $|n\rangle_a |m\rangle_b$ در نظر بگیریم، ویژه حالت‌های انرژی سامانه به صورت

$$E_{nm} = n\Delta_c + m\omega_m - \varepsilon_n \quad (3)$$

بدست می‌آید که در آن $\varepsilon_n = n^2\chi_0 + n\delta$ است. همان‌طور که از رابطه (۳) مشخص است به علت برهم‌کنش اپتومکانیکی و جابجایی نوسانگر مکانیکی، ناهم‌هنگی به اندازه ε_n در ترازهای انرژی سامانه به وجود می‌آید که منشأ وقوع پدیده راهبند تک فوتون است. به عنوان مثال، اگر بسامد نور لیزر دمش به گونه‌ای تنظیم شود که $\Delta_c - \varepsilon_1 = 0$ باشد، آنگاه گذار $|1\rangle_a \rightarrow |0\rangle_a$ یک گذار تشدیدی خواهد بود و فوتون اول با احتمال بسیار زیادی در داخل کاواک برانگیخته خواهد شد. اما شرط گذار تشدیدی $|1\rangle_a \rightarrow |2\rangle_a$ به اندازه $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ نسبت به گذار اول جابجا می‌شود؛ از این رو در حالتی که $\Delta_c - \varepsilon_0 = 0$ باشد، گذار $|1\rangle_a \rightarrow |2\rangle_a$ غیر تشدید و مادامی که فوتون اول در کاواک حضور دارد، احتمال برانگیختگی فوتون دوم در کاواک به سمت صفر میل می‌کند. احتمال گذارهای مختلف در سامانه را می‌توان با در نظر گرفتن دمش لیزری به عنوان یک جمله اختلالی و با استفاده از قاعده طلایی فرمی بدست آورد. به این پدیده که در آن، حضور برانگیختگی اول در سامانه مانع برانگیخته شدن سایر فوتون‌ها در سامانه می‌شود، پدیده راهبند تک فوتون گفته می‌شود.

دینامیک بردار حالت سامانه

اگر ویژه حالت هامیلتونی قطری شده سامانه اپتومکانیکی $|n\rangle_a |m\rangle_b$ باشد، آنگاه می‌توان معادله ویژه مقدار برای هامیلتونی سامانه اپتومکانیکی را با اعمال وارون تبدیل پولارون روی معادله ویژه مقدار انرژی در دستگاه پولارون به صورت زیر نوشت

$$\hat{H}_{OMD}|n\rangle_a |\tilde{m}(n)\rangle_b = E_{nm}|n\rangle_a |\tilde{m}(n)\rangle_b \quad (4)$$

که در آن E_{nm} ویژه حالت انرژی سامانه اپتومکانیکی است که مطابق رابطه (۳) تعریف می‌شود و $|\tilde{m}(n)\rangle_b = \hat{D}^\dagger(n)|m\rangle_b$ است. به منظور محاسبه تحلیلی تابع همدوسی تک زمانه مرتبه دوم میدان اپتیکی، اثر اتلاف کاواک را به طور پدیده شناسی به صورت یک جمله غیر هرمیتی به هامیلتونی رابطه (۱) اضافه می‌کنیم [۸]. بنابراین، هامیلتونی مؤثر غیر هرمیتی سامانه اپتومکانیکی به صورت زیر نوشته می‌شود

کوانتومی است که در آن، اثر راهبند فوتونی به عنوان منبعی برای ایجاد حالت‌های تک فوتون بررسی می‌شود [۷-۱۰].

در این مقاله اثر راهبند تک فوتون در سامانه‌های اپتومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. نشان خواهیم داد پادگروهی فوتون‌ها به ازای بسامد خاصی از نور لیزر دمش به وقوع می‌پیوندد و اثر راهبند فوتونی با افزایش آهنگ اتلاف کاواک اپتیکی کاهش می‌یابد. همچنین نشان خواهیم داد با اعمال یک جابجایی کنترل پذیر در مکان نوسانگر مکانیکی که به نوعی هم ارز با تغییر طول کاواک اپتیکی است، می‌توان اثر راهبند فوتونی را در وادندگی‌های مختلف کاواک اپتیکی مشاهده کرد؛ به این ترتیب می‌توان به منبعی با بسامد کنترل پذیر برای حالت‌های تک فوتون میدان تابشی دست پیدا کرد.

هامیلتونی سامانه

هامیلتونی یک سامانه اپتومکانیکی با نوسانگر جابجا شده شامل دمش لیزری با آهنگ دمش η در دستگاه چرخان با بسامد لیزر دمش به صورت زیر نوشته می‌شود ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_{OMD} + \hat{H}_d \\ \hat{H}_{OMD} &= \Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ &+ D(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ \hat{H}_d &= \eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، $\Delta_c = \omega_c - \omega_l$ وادندگی کاواک، ω_m بسامد نوسانگر مکانیکی، g_0 ثابت جفت شدگی اپتومکانیکی و D پارامتر جابجایی نوسانگر است که با استفاده از آن می‌توان بسامد مؤثر کاواک را کنترل کرد. شرط لازم برای مشاهده راهبند فوتونی در سامانه اپتومکانیکی، دمش ضعیف لیزر پمپ کاواک است ($\eta \ll \gamma_c$) [۷].

ویژه مقادیر انرژی سامانه را می‌توان با قطری کردن هامیلتونی رابطه (۱) با استفاده از تبدیل پولارون، یعنی تبدیلی به شکل $\bar{D} = \exp[-(g_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + D)(\hat{b} - \hat{b}^\dagger)/\omega_m]$ در حد $\eta \rightarrow 0$ به صورت زیر بدست آورد [۱۱]

$$\tilde{H}_{OMD} = \Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} - \chi_0 (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 - \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2)$$

که در آن $\tilde{H}_{OMD} = \hat{D} \hat{H}_{OMD} \hat{D}^\dagger$ هامیلتونی در دستگاه پولارون، $\chi_0 = g_0^2/\omega_m$ و $\delta = 2g_0 D/\omega_m$ است. اگر ویژه

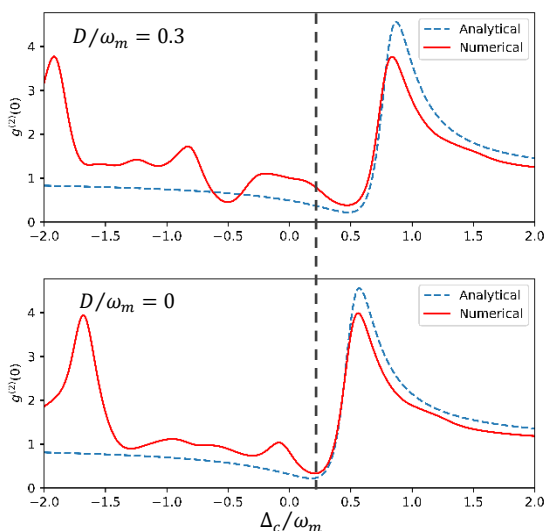
$$C_{3,m}(t) = -\sqrt{6}\eta^3 \sum_{m',n,l=0}^{\infty} \left[\frac{\langle \tilde{m}(3) | \tilde{m}'(2) \rangle \langle \tilde{m}'(2) | \tilde{n}(1) \rangle}{(E_{1,n} - E_{0,l} - i\gamma_c/2)} \right. \\ \left. \times \frac{\langle \tilde{n}(1) | \tilde{l}(0) \rangle C_{0,l}(0) e^{-iE_{0,l}t}}{(E_{2,m'} - E_{0,l} - i\gamma_c)(E_{3,m} - E_{0,l} - 3i\gamma_c/2)} \right] \quad (8)$$

محاسبه تحلیلی تابع همدوسی تک زمانه مرتبه دوم

برای یک تابش تک مد با عملگر نابودی $\hat{a}$ تابع همدوسی تک زمانه مرتبه دوم به صورت $g^{(2)}(0) = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle / \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2$ تعریف می‌شود که با استفاده از رابطه جابجایی آن را $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = I$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2} = \frac{2P_2 + 6P_3}{(P_1 + 2P_2 + 3P_3)^2} \quad (9)$$

که در آن، $P_3 = \sum_m |C_{2,m}|^2$ ، $P_2 = \sum_m |C_{1,m}|^2$ ، $P_1 = \sum_m |C_{0,m}|^2$ و $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ عملگر تعداد فوتون داخل کاواک است. در رژیم دمش ضعیف لیزر می‌توان فرض کرد $P_1 \gg P_2 \gg P_3$ ؛ در این صورت تابع همدوسی مرتبه دوم میدان اپتیکی داخل کاواک برابر $g^{(2)}(0) \sim 2P_2/P_1^2$ است. فرض می‌کنیم نوسانگر مکانیکی در لحظه $t = 0$ در حالت پایه قرار دارد یعنی $C_{0,l}(0) = \delta_{l,0}$ با جایگذاری شرایط اولیه نوسانگر مکانیکی در معادلات (۸) و



شکل ۱: تابع همدوسی تک زمانه مرتبه دوم میدان تابشی کاواک در یک سامانه اپتومکانیکی. پارامترهای در نظر گرفته شده در این شبیه سازی عبارتند از $\gamma_m/\omega_m = 10^{-3}$ ، $\gamma_c/\omega_m = 0.3$ ، $\eta/\omega_m = 0.01$ ، $g_0/\omega_m = 0.5$ ، $\bar{n}_m = \bar{n}_c = 0$

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H} - i(\gamma_c/2)\hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (5)$$

که در آن، γ_c آهنگ اتلاف کاواک اپتیکی است. در محاسبه تحلیلی تابع همدوسی مرتبه دوم از اتلاف نوسانگر مکانیکی صرف نظر می‌کنیم. در رژیم دمش ضعیف ($\eta \ll \gamma_c$)، تعداد برانگیختگی‌های داخل کاواک بسیار محدود است؛ از این رو می‌توان بررسی خود را به زیرفضای محدودی از فضای هیلبرت میدان کاواک با بردارهای پایه $|0\rangle_a, |1\rangle_a, |2\rangle_a, |3\rangle_a$ محدود کرد. در این صورت بردار حالت سامانه اپتومکانیکی به شکل کلی زیر

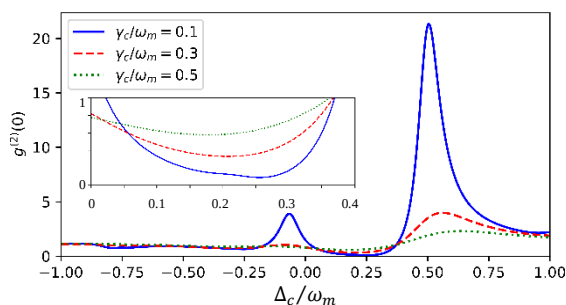
$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^{\infty} C_{n,m}(t) |n\rangle_a |\tilde{m}(n)\rangle_b \quad (6)$$

نوشته می‌شود که در آن $C_{n,m}$ دامنه احتمال برای حضور n برانگیختگی فوتونی و m برانگیختگی فونونی است. با در دست داشتن هامیلتونی و بردار حالت سامانه و با استفاده از معادله شرودینگر، معادله تحول ضرایب $C_{n,m}$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \dot{C}_{0,m} &= -iE_{0,m}C_{0,m} \\ \dot{C}_{1,m} &= -\Gamma_1 C_{1,m} - i\eta \sum_{n=0}^{+\infty} C_{0,n} \langle \tilde{m}(1) | \tilde{n}(0) \rangle \\ \dot{C}_{2,m} &= -\Gamma_2 C_{2,m} - i\sqrt{2}\eta \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1,n} \langle \tilde{m}(2) | \tilde{n}(1) \rangle \\ \dot{C}_{3,m} &= -\Gamma_3 C_{3,m} - i\sqrt{3}\eta \sum_{n=0}^{+\infty} C_{2,n} \langle \tilde{m}(3) | \tilde{n}(2) \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن، $\langle \tilde{l}(n) | \tilde{k}(n') \rangle = \langle l | \hat{D}(n - n') | k \rangle$ و همچنین $\Gamma_n = n\gamma_c/2 - iE_{n,m}$ است. با انتگرال گیری از معادلات (۷) ضرایب $C_{n,m}$ در حد زمان‌های طولانی ($t \rightarrow \infty$) به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} C_{0,m}(t) &= C_{0,m}(0) \exp(-iE_{0,m}t) \\ C_{1,m}(t) &= -\eta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\langle \tilde{m}(0) | \tilde{l}(0) \rangle C_{0,l}(0) \exp(-iE_{0,l}t)}{(E_{1,m} - E_{0,l} - i\gamma_c/2)} \\ C_{2,m}(t) &= \sqrt{2}\eta^2 \sum_{l,n=0}^{\infty} \left[\frac{\langle \tilde{m}(2) | \tilde{n}(1) \rangle}{(E_{1,n} - E_{0,l} - i\gamma_c/2)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\langle \tilde{n}(1) | \tilde{l}(0) \rangle C_{0,l}(0) \exp(-iE_{0,l}t)}{(E_{2,m} - E_{0,l} - i\gamma_c)} \right] \end{aligned}$$



شکل ۲: تابع همدوسی مرتبه دوم میدان تابشی کاواک اپتومکانیکی به ازای ضریب اتلاف‌های مختلف کاواک

سامانه‌های اپتومکانیکی، بروز ناهماهنگی در تزارهای انرژی سامانه به واسطه برهم‌کنش فشار تابشی است. در این مقاله نشان داده‌ایم که با اعمال یک جابجایی کنترل پذیر در مکان نوسانگر مکانیکی که هم ارز با تغییر کنترل پذیر طول کاواک است، می‌توان اثر راهبند فوتونی را در وادیدگی‌های مختلفی مشاهده کرد. همچنین نشان داده‌ایم که وقوع پدیده راهبند فوتونی توسط آهنگ اتلاف کاواک محدود می‌شود.

منابع

- [۱] Kimble, H. J. The quantum internet. *Nature* 453, 1023–1030 (2008).
- [۲] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information* (Springer, Berlin, 2000)
- [۳] O'Brien J L, Furusawa A and Vučković J 2009 Photonic quantum technologies *Nat. Photon.* 3 687–95
- [۴] Lounis, B. & Orrit, M. Single-photon sources. *Reports on Progress in Physics* 68, 1129–1179 (2005).
- [۵] Birnbaum, K. M. *et al.* Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom. *Nature* 436, 87–90 (2005).
- [۶] Kiraz, A., Atatüre, M. & Imamoglu, A. Quantum-dot single-photon sources: Prospects for applications in linear optics quantum-information processing. *Physical Review A* 69, (2004).
- [۷] Rabl, P. Photon Blockade Effect in Optomechanical Systems. *Physical Review Letters* 107, (2011).
- [۸] Liao, J.-Q. & Nori, F. Photon blockade in quadratically coupled optomechanical systems. *Physical Review A* 88, (2013).
- [۹] Sarma, B. & Sarma, A. K. Single-photon blockade in a hybrid cavity-optomechanical system via third-order nonlinearity. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 51, 075505 (2018).
- [۱۰] Zhai, C., Huang, R., Li, B., Jing, H. & Kuang, L.-M. Mechanical engineering of photon blockades in a cavity optomechanical system. *arXiv:1901.07654 [quant-ph]* (2019).
- [۱۱] Warwick P. Bowen, Gerard J. Milburn. *Quantum Optomechanics*. s.l.: Taylor & Francis, 2015. p. 381. 148225915X, 9781482259155.
- [۱۲] Carmichael, Howard. *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. s.l.: Springer, 1998. ISBN-10: 3540548823
- [۱۳] J. R. Johansson, P. D. Nation, and F. Nori: "QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems.", *Comp. Phys. Comm.* 184, 1234 (2013) [DOI: [10.1016/j.cpc.2012.11.019](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.019)].

محاسبه دامنه‌های احتمال $C_{n,m}(t)$ ، تابع همدوسی مرتبه دوم میدان اپتیکی داخل کاواک به صورت زیر بدست می‌آید

$$g^{(2)}(0) = \frac{4(\Delta_c - \chi_0 - \delta)^2 + \gamma_c^2}{4(\Delta_c - 2\chi_0 - \delta)^2 + \gamma_c^2} \quad (10)$$

محاسبه عددی تابع همدوسی تک زمانه مرتبه دوم

به منظور بدست آوردن ماتریس چگالی حالت پایای میدان اپتیکی داخل کاواک، معادله اصلی [۱۲] را به شکل

$$\dot{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]/i\hbar + \mathcal{L}_a(\hat{\rho}) + \mathcal{L}_b(\hat{\rho}) \quad (11)$$

در نظر می‌گیریم که در آن، $\mathcal{L}_a(\hat{\rho})$ و $\mathcal{L}_b(\hat{\rho})$ به ترتیب عملگرهای لیوویل مدهای اپتیکی و مکانیکی سامانه اپتومکانیکی هستند. این معادله را با استفاده از بسته محاسبات کوانتومی کیوتیپ [۱۳] حل کرده و با استفاده از رابطه (۹) تابع همدوسی مرتبه دوم میدان اپتیکی داخل کاواک را به صورت عددی محاسبه می‌کنیم. در شکل ۱ نتایج تحلیلی و عددی برای تابع همدوسی مرتبه دوم میدان اپتیکی داخل کاواک به صورت تابعی از Δ_c/ω_m برای دو حالت $D/\omega_m = 0, 0.3$ رسم شده است. در شکل ۲ نیز به منظور بررسی اثر آهنگ اتلاف کاواک اپتیکی (γ_c) روی وقوع پدیده راهبند فوتونی، تابع همدوسی تک زمانه مرتبه دوم به ازای مقادیر متخلف γ_c به صورت عددی محاسبه و رسم شده است. با توجه به نتایج بدست آمده (شکل ۱) نتیجه می‌شود که با جابجایی نوسانگر مکانیکی، شرط وقوع راهبند تک فوتون $g^{(2)}(0) < 1$ که متناظر با گذار $|1\rangle_a \rightarrow |0\rangle_a$ است، با تغییر میزان جابجایی نوسانگر (D) تغییر می‌کند و به این ترتیب می‌توان با تنظیم پارامتر D این اثر را در بسامدهای متفاوتی مشاهده کرد. از طرف دیگر، همان‌طور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود، با کاهش اتلاف کاواک، کمینه تابع همدوسی مرتبه دوم کمتر و در نتیجه پادگروهی فوتون‌ها با احتمال بیشتری به وقوع می‌پیوندد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله تابع همدوسی مرتبه دوم میدان اپتیکی یک کاواک اپتومکانیکی به منظور بررسی پادگروهی فوتون‌ها به طور تحلیلی و عددی محاسبه شده است. منشأ وقوع پدیده راهبند فوتونی در

مطالعه قطبش کوانتومی حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی توسط پارامترهای استوکس

کریمی، امیر^۱: طاهرخانی، مرتضی^۲

^۱ گروه فیزیک، واحد آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، فارس، ایران

^۲ پژوهشکده نیمه‌هادی‌ها، پژوهشگاه مواد و انرژی، کرج، البرز، ایران

چکیده

در این مقاله، ابتدا به معرفی نوع جدیدی از حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده به نام "حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی" می‌پردازیم. سپس، با استفاده از عملگر پاریته و عملگر جابجایی، عملگر نمایی جدیدی تعریف می‌کنیم که با کنش آن روی حالت خلاء یک میدان، حالت‌های درهم‌تنیده معرفی شده را تولید می‌کنیم. در ادامه، با استفاده از پارامترهای استوکس در اپتیک کلاسیک و تعمیم آنها به عملگرهای استوکس در اپتیک کوانتومی، قطبش کوانتومی حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی تولیدشده را برای حالت‌های عددی متفاوت مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

Study the Quantum Polarization of the Two-Mode Entangled Displaced Number States via the Stokes Parameters

Karimi, Amir¹, Taherkhani, Morteza²

¹ Department of Physics, Abadeh Branch, Islamic Azad University, Fars, Iran

² Department of Semiconductors, Institute of Materials and Energy, Karaj, Alborz, Iran

Abstract

In this paper, first we will introduce a new type of entangled quantum states named "two-mode entangled displaced number states". Next, using the parity and displacement operators, we will define a new exponential operator which by the action of it on the vacuum state of the field, we will construct the introduced entangled states. In the continuation, using the Stokes parameters in classical optics and generalizing them to the Stokes operators in quantum optics, we will study the quantum polarization of the constructed two-mode entangled displaced number states for various number states.

PACS No. 32

مقدمه

کوانتومی تبدیل شده است. بر همین اساس، حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده متنوع بسیاری معرفی، مطالعه و تولید شده‌اند که به عنوان نمونه می‌توان به حالت‌های همدوس درهم‌تنیده [۲، ۱] و حالت‌های چلانده درهم‌تنیده [۴، ۳] اشاره کرد. در سال‌های اخیر، همراه با پیشرفت چشم‌گیری که در دانش

در دو دهه اخیر، معرفی و تولید حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده و مطالعه ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها به واسطه کاربردهای نظری و تجربی فراوانی که در پردازش اطلاعات کوانتومی یافته‌اند، به یکی از مهم‌ترین موضوعات مکانیک

در این رابطه، حالت‌های $|\pm\alpha, n\rangle$ حالت‌های عددی جابجاشده‌ای هستند که با کنش عملگر جابجایی $\hat{D}(\pm\alpha) = \exp(\pm\alpha\hat{a}^\dagger \mp \alpha^*\hat{a})$ روی حالت‌های عددی $|n\rangle$ به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱۴]:

$$|\pm\alpha, n\rangle = \hat{D}(\pm\alpha)|n\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} D_{pn}(\pm\alpha)|p\rangle \quad (2)$$

که در آن ضرایب $D_{pn}(\pm\alpha) = \langle p|\hat{D}(\pm\alpha)|n\rangle$ از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$D_{pn}(\pm\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{p!}{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (\mp\alpha^*)^{n-p} L_n^{n-p}(|\alpha|^2), & p \leq n \\ \sqrt{\frac{n!}{p!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (\pm\alpha)^{p-n} L_n^{p-n}(|\alpha|^2), & p \geq n \end{cases} \quad (3)$$

در رابطه بالا $L_k^{(q)}(x)$ چندجمله‌ای‌های لاگر هستند که از رابطه زیر به دست می‌آیند [۱۵]:

$$L_k^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+q}{j+q} \frac{x^j}{j!} \quad (4)$$

در قسمت بعد، با ارائه یک طرح نظری "حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی" معرفی شده را تولید می‌کنیم.

تولید حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی

اکنون، به منظور تولید "حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی" از عملگری هرمتیتی و یکانی به نام عملگر پاریده استفاده می‌کنیم که به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

$$\hat{\Pi} = \cos(\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (5)$$

حالت‌های عددی زوج و فرد ویژه‌حالت‌های عملگر پاریده به ترتیب با ویژه‌مقادیر $+1$ و -1 هستند:

$$\hat{\Pi}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle \quad (6)$$

به راحتی می‌توان دریافت که عملگرهای $X = \hat{a}, \hat{a}^\dagger$ در رابطه عملگری زیر صدق می‌کنند:

$$\hat{\Pi}X\hat{\Pi} = -X \quad (7)$$

حال، برای تولید "حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی"، عملگر دومدی $U_{ab}(v, \alpha, \beta)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_{ab}(v, \alpha, \beta) = e^{i v D_a(\alpha) \Pi_a D_b(\beta) \Pi_b} \quad (8)$$

اطلاعات کوانتومی حاصل شده است، مفهوم قطبش میدان‌های کوانتومی پس از قطبش کلاسیکی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. قطبش میدان‌های کوانتومی در برخی از پدیده‌های اپتیک کوانتومی مانند رمزگذاری متراکم کوانتومی [۵]، انتقال کوانتومی [۶] و پرتونگاری کوانتومی [۷] نقش مهمی بر عهده دارد.

مفهوم قطبش امواج الکترومغناطیسی برای اولین بار توسط استوکس در سال ۱۸۵۲ مطرح شد [۸]. به طور تقریبی می‌توان میدان‌های الکترومغناطیسی را در فاصله‌های دور از منبع توسط امواج تخت نمایش داد. یک موج تخت تک‌فام را قطبیده می‌نامیم، چنانچه نوک بردار میدان الکتریکی آن در صفحه عمود بر راستای انتشار موج در مکان ثابت، با گذشت زمان مسیر مشخصی را طی کند. به عنوان برخی از کاربردهای مهم قطبش در پدیده‌های اپتیک کلاسیکی می‌توان به دریافت از راه دور [۹]، پراکندگی نور [۱۰] و میکروسکوپ میدان نزدیک [۱۱] اشاره کرد. علاوه بر این، به عنوان یک حامل مناسب اطلاعات نیز می‌توان از نور قطبیده استفاده کرد.

اخیراً، حالت‌های عددی جابجاشده توانسته‌اند خود را به عنوان یکی از حالت‌های کوانتومی کاربردی در اپتیک کوانتومی مطرح کنند که به عنوان نمونه می‌توان به اهمیت این حالت‌ها در محاسبه توزیع شبه احتمالی اشاره کرد [۱۲، ۱۳].

در ادامه، ابتدا به معرفی "حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی" پرداخته و سپس با ارائه یک روش نظری آنها را تولید می‌کنیم. در نهایت با مروری بر پارامترهای استوکس در اپتیک کلاسیک به عنوان ساده‌ترین مفهوم توصیفی از قطبش و معرفی عملگرهای استوکس در اپتیک کوانتومی به مطالعه قطبش کوانتومی "حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی" معرفی شده می‌پردازیم.

حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی

در ابتدا شکل خاصی از "حالت‌های عددی جابجاشده درهم‌تنیده دومدی" را معرفی می‌کنیم:

$$|\psi(\alpha, n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha, n\rangle_a |-\alpha, n\rangle_b + i|-\alpha, n\rangle_a |\alpha, n\rangle_b) \quad (1)$$

که در آن زیرنویس‌های a و b به ترتیب نشان دهنده مدهای اول و دوم میدان هستند.

قطبش کوانتومی

در ابتدا یک موج تخت تک فام را که میدان الکتریکی آن عمود بر جهت انتشار است، در نظر می گیریم. سپس، با در نظر گرفتن محور z به عنوان راستای انتشار موج تخت و تجزیه میدان الکتریکی به دو مؤلفه افقی و عمودی در راستای دو محور x و y ، میدان الکتریکی موج تخت را با دو دامنه افقی و عمودی مختلط E_H و E_V نمایش می دهیم. بدین ترتیب، پارامترهای استوکس به شکل زیر تعریف می شوند [۱۷]:

$$\begin{aligned} S_0 &= E_H^* E_H + E_V^* E_V, & S_x &= E_H E_V^* + E_H^* E_V \\ S_y &= i(E_H E_V^* - E_H^* E_V), & S_z &= E_H^* E_H - E_V^* E_V \end{aligned} \quad (15)$$

در مورد میدانهای غیرقطبیده، می توان از مقادیر چشم داشتی پارامترهای استوکس روی برهم نهی آماری از امواج استفاده کرد. به منظور یافتن کمیتی مناسب برای مطالعه قطبش میدانهای کوانتومی، دامنه های E_H و E_V به ترتیب با عملگرهای دامنه $\hat{a}_H$ و $\hat{a}_V$ جایگزین می شوند [۱۷]. این عملگرها در روابط جابجایی عملگرهای بوزونی صدق می کنند:

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk} \quad j, k = H, V \quad (16)$$

حال عملگرهای استوکس به طور متناظر با پارامترهای کلاسیکی آن در رابطه (۱۵) با استفاده از عملگرهای دامنه، به شکل زیر معرفی می شوند:

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_H + \hat{a}_V^\dagger \hat{a}_V, & \hat{S}_x &= \hat{a}_H \hat{a}_V^\dagger + \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_V \\ \hat{S}_y &= i(\hat{a}_H \hat{a}_V^\dagger - \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_V), & \hat{S}_z &= \hat{a}_H^\dagger \hat{a}_H - \hat{a}_V^\dagger \hat{a}_V \end{aligned} \quad (17)$$

که در روابط جابجایی جبرلی گروه $SU(2)$ صدق می کنند:

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = 2i \varepsilon_{jkl} \hat{S}_l, \quad j, k, l = x, y, z \quad (18)$$

با استفاده از عملگرهای استوکس، قطبیدگی کوانتومی میدانهای کوانتومی به شکل زیر تعریف می شود [۱۸]:

$$\mathbb{P} = \frac{|\langle \hat{S} \rangle|}{\langle \hat{S}_0 \rangle} = \frac{\sqrt{\langle \hat{S}_x \rangle^2 + \langle \hat{S}_y \rangle^2 + \langle \hat{S}_z \rangle^2}}{\langle \hat{S}_0 \rangle} \quad (19)$$

که مقدار $\mathbb{P}$ بین دو مقدار کمینه صفر و بیشینه یک به ترتیب برای حالت های کاملاً قطبیده و کاملاً غیرقطبیده متغیر است.

اکنون، به منظور محاسبه مقادیر چشم داشتی لازم در رابطه بالا، "حالت های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" تولید شده در رابطه (۱۴) را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$|\psi(\alpha, n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha, n\rangle_H |-\alpha, n\rangle_V + i|-\alpha, n\rangle_H |\alpha, n\rangle_V) \quad (20)$$

که اندیس های a, b به دو مد میدان اشاره دارد. اکنون می توان با استفاده از روابط

$$[D_a(\alpha)\Pi_a]^2 = I_a, \quad [D_b(\beta)\Pi_b]^2 = I_b \quad (9)$$

عملگر $U_{ab}(v, \alpha, \beta)$ را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$U_{ab}(v, \alpha, \beta) = \cos(v) I_a I_b + i \sin(v) D_a(\alpha) \Pi_a D_b(\beta) \Pi_b \quad (10)$$

با جایگزینی متغیرهای α و β در عملگر $U_{ab}(v, \alpha, \beta)$ به ترتیب با $\delta - \alpha$ و $\gamma - \beta$ و کنش دو عملگر جابجایی $\hat{D}_a(\alpha) \hat{D}_b(\beta)$ روی آن، عملگر $U_{ab}(v, \alpha, \beta, \delta, \gamma)$ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$V_{ab}(v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = D_a(\alpha) D_b(\beta) U_{ab}(v, \delta - \alpha, \gamma - \beta) = \cos(v) D_a(\alpha) D_b(\beta) \quad (11)$$

$$+ i e^{i \Im(\alpha \delta^*)} e^{i \Im(\beta \gamma^*)} \sin(v) D_a(\delta) \Pi_a D_b(\gamma) \Pi_b$$

با کنش عملگر $V_{ab}(v, \alpha, \beta, \delta, \gamma)$ روی یک حالت عددی دومی $|n\rangle_a |m\rangle_b$ ، "حالت های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" به شکل کلی زیر به دست می آیند:

$$V_{ab}(v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) |n\rangle_a |m\rangle_b = \cos(v) |\alpha, n\rangle_a |\beta, m\rangle_b + i (-1)^{n+m} e^{i \Im(\alpha \delta^*)} e^{i \Im(\beta \gamma^*)} \sin(v) |\gamma, n\rangle_a |\delta, m\rangle_b \quad (12)$$

که با قراردادن $\delta = \alpha$ و $\gamma = \beta$ و $v = \frac{\pi}{4}$ "حالت های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" زیر تولید می شوند:

$$|\psi(\alpha, \beta, n, m)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha, n\rangle_a |\beta, m\rangle_b + i (-1)^{n+m} |\beta, n\rangle_a |\alpha, m\rangle_b \right) \quad (13)$$

حال می توان با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ و همچنین حالت های عددی $|m\rangle, |n\rangle$ "حالت های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" متنوعی را تولید کرد.

به عنوان مثال، با قراردادن $\beta = -\alpha$ و برای $m = n$ "حالت های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" معرفی شده در رابطه (۱) تولید می شوند:

$$|\psi(\alpha, n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha, n\rangle_a |-\alpha, n\rangle_b + i |-\alpha, n\rangle_a |\alpha, n\rangle_b) \quad (14)$$

در ادامه، پس از معرفی پارامترها و عملگرهای استوکس، به مطالعه قطبش کوانتومی "حالت های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" تولید شده در رابطه بالا و تاثیر میزان جابجایی حالت های عددی بر قطبش کوانتومی این حالت ها می پردازیم.

درهم تنیده دومی" پرداختیم. سپس با ارائه یک روش نظری حالت‌های درهم تنیده معرفی شده را تولید کردیم و در نهایت قطبش کوانتومی آنها را با مطالعه عملگرهای استوکس مورد بررسی قرار دادیم. مشاهده کردیم که قطبش کوانتومی حالت‌های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی برای حالت‌های عددی بررسی شده از صفر شروع شده و با افزایش شدت میدان، با مقداری افت و خیز افزایش می‌یابد و با افزایش n افت و خیزها افزایش یافته و از افزایش قطبش کوانتومی حالت‌های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی کاسته می‌شود.

مراجع

- [1] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria "f-Oscillators and nonlinear coherent states" Phys. Scr. **55** (1997) 528.
- [2] A. Karimi and M. K. Tavassoly "Production of the Superposition of Nonlinear Coherent States and Entangled Nonlinear Coherent States" Commun. Theor. Phys. **64** (2015) 341.
- [3] A. Karimi and M. K. Tavassoly "Generation of entangled squeezed states: their entanglement and quantum polarization" Laser Phys. **25** (2015) 115201.
- [4] A. Karimi and M. K. Tavassoly "Generation of entangled coherent-squeezed states: their entanglement and nonclassical properties" Quantum Inf. Process. **15** (2016) 1513.
- [5] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, A. Zeilinger "Dense coding in experimental quantum communication" Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 4656.
- [6] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eible, H. Weinfurter, A. Zeilinger "Experimental quantum teleportation" Nature **390** (1997) 575.
- [7] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi, P. Mataloni, G. M. D'Ariano, C. Macchiavello "Detection of entanglement with polarized photons: Experimental realization of an entanglement witness" Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 227901.
- [8] G. G. Stokes "On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources" Trans. Cambridge Philos. Soc. **9** (1852) 399.
- [9] J. R. Schott, Fundamentals of Polarimetric Remote Sensing, SPIE, Bellingham (2009).
- [10] L. D. Barron, Molecular Light Scattering and Optical Activity, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2004).
- [11] S. Werner, O. Rudow, C. Mihalcea, E. Oesterschulze "Cantilever probes with aperture tips for polarization-sensitive scanning near-field optical microscopy" Appl. Phys. A **66** (1998) S367.
- [12] A. Wunsche "Displaced Fock states and their connection to quasi probabilities" Quantum Optics: Journal of the European Optical Society **3** (1991) 359.
- [13] H. Moya-Cessa and P. L. Knight "Series representation of quantum-field quasi probabilities" Phys. Rev. A **48** (1993) 2479.
- [14] G. S. Agarwal "Quantum Optics" (Cambridge, Cambridge University Press, 2013).
- [15] M. Abramowitz and I. A. Stegun "NIST Handbook of Mathematical Functions" (Cambridge: Cambridge University Press, 2010).
- [16] A. Messina, B. Militello and A. Napoli "Generation of Glauber Coherent state superpositions via unitary transformations" Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine **50** (2004) 881885.
- [17] E. Collett "Stokes parameters for quantum systems" Am. J. Phys. **38** (1970) 563.
- [18] C. Brosseau, Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach, Wiley, New York, (1998).

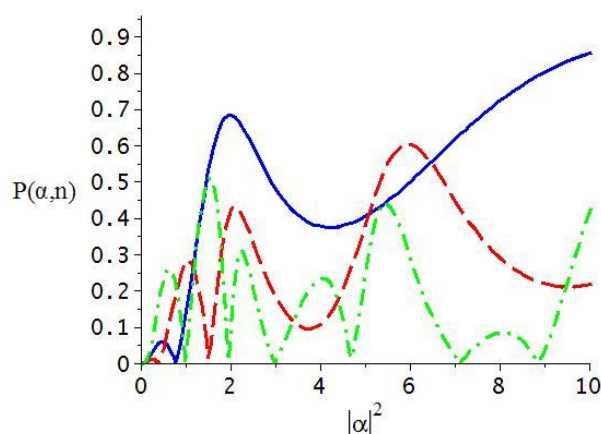
که در آن، زیرنویس‌های H و V به ترتیب به مؤلفه‌های افقی و عمودی میدان اشاره دارد.

با استفاده از حالت‌های عددی جابجاشده در رابطه (۲)، نمایش عددی حالت‌های درهم تنیده (۲۰) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$|\psi(\alpha, n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\begin{matrix} D_{pn}(\alpha) D_{qn}(-\alpha) \\ + i D_{pn}(-\alpha) D_{qn}(\alpha) \end{matrix} \right) |p\rangle |q\rangle \quad (21)$$

که در آن ضرایب $D_{jn}(\pm\alpha)$ ($j = p, q$) در رابطه (۳) به دست آمده‌اند.

با محاسبه مقادیر چشم‌داشتی لازم در رابطه (۱۹) نسبت به حالت عددی بالا و رسم قطبیدگی $\mathbb{P}$ بر حسب $|\alpha|^2$ به ازای حالت‌های عددی متفاوت در شکل ۱، قطبش کوانتومی "حالت‌های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" رابطه (۱) را مطالعه می‌کنیم.



شکل ۱- قطبش کوانتومی "حالت‌های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" $P(\alpha, n)$ بر حسب $|\alpha|^2$ به ازای مقادیر عددی متفاوت $n=1$ (پیوسته)، $n=2$ (خط چین)، $n=3$ (خط نقطه)، و $n=4$ (خط نقطه-خط).

همان‌طور که در شکل بالا مشاهده می‌کنیم قطبش کوانتومی "حالت‌های عددی جابجاشده درهم تنیده دومی" به ازای حالت‌های عددی بررسی شده از صفر شروع شده و با افزایش شدت میدان $|\alpha|^2$ با مقداری افت و خیز افزایش می‌یابد. با افزایش n افت و خیزها افزایش یافته و از افزایش قطبش کوانتومی کاسته می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا به معرفی رده جدیدی از حالت‌های کوانتومی درهم تنیده به نام "حالت‌های عددی جابجاشده

بررسی نامساوی کلاسیوس با استفاده از آنتروپی تسالیس

امیری، سامان^۱؛ میرزایی، مهدی^۲^۱دانشکده فیزیک دانشگاه اراک، سردشت، اراک^۲گروه فیزیک، دانشگاه اراک

چکیده

سیستم‌های جمع‌ناپذیر بر مبنای مکانیک آماری بولتزمن-گیس قرار دارد که از مهم‌ترین مفاهیم برای این سیستم‌ها، آنتروپی تسالیس است. یکی از نامساوی‌های مهم در مکانیک آماری استاندارد، نامساوی کلاسیوس است و در این مقاله با تعمیم سیستم‌های جمع‌پذیر روی قانون دوم ترمودینامیک، شکل تسالیزی این نامساوی بنام نامساوی q -کلاسیوس را محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی تسالیس، نامساوی کلاسیوس، سیستم‌های جمع‌ناپذیر

Study Of Clausius Inequality With Tsallis Entropy

Amiri, Saman¹; Mirzaee, Mahdi²¹ Department of Physics, University of Arak, Arak,² Department of Physics, Arak University, Arak

Abstract

Nonextensive systems are based on Boltzmann-Gibbs statistical mechanics witch Tsallis entropy is one of the important concept of this systems. One of the most important inequality in standard statistical mechanics is Clausius inequality and in this paper with generalization extensive systems on the second law of thermodynamics, we calculate Tsallis form of this inequality so named q -Clausius inequality.

Keywords: Tsallis entropy, Clausius inequality, Nonextensive systems

PACS No. 05.30.-d, 03.67.-a, 89.70.+c

مقدمه

آنتروپی تسالیس خواهد بود. آنتروپی تسالیس برای سیستم‌های برهم‌کنشی، یک ابزار خوب و کاربردی است [۱]. یکی دیگر از مفاهیم مهم در مکانیک آماری، قانون دوم ترمودینامیک است که در این مقاله این قانون را به صورت نامساوی q -کلاسیوس استخراج می‌کنیم.

مفهوم آنتروپی یکی از مفاهیم بنیادی در فیزیک آماری و تئوری اطلاعات است. مکانیک آماری بولتزمن-گیس بر پایه آنتروپی تسالیس کلاسیکی قرار دارد و می‌تواند یک رویکرد گرمایی مناسب برای سیستم‌ها و فرآیندهایی از قبیل برهم‌کنش ضعیف و مارکوف و... باشد.

نامساوی کلاسیوس

سیستم ترمودینامیکی S را که با حمام‌های گرمایی $B_1, B_2, \dots, B_n$ به ترتیب دمایی $T_1 = (k_B \beta_1)^{-1}, T_2 = (k_B \beta_2)^{-1}, \dots, T_n = (k_B \beta_n)^{-1}$

برای بررسی سیستم‌های جمع‌ناپذیر و شامل دینامیک میکروسکوپی، نیاز است تا مکانیک آماری بولتزمن-گیس روی مکانیک آماری استاندارد تعمیم داده شود و یکی از نتایج این تعمیم

انرژی آزاد نیز به صورت [۴]:

$$F_q = -k_B T \ln_q Z_q \quad (۸)$$

تعریف می شود که

$$\ln_q Z_q = \ln_q \bar{Z}_q - \beta U_q \quad (۹)$$

آنتروپی تساليس نیز به صورت زیر بیان می شود [۴]:

$$S_q = \langle \bar{S}_q \rangle_q \quad (۱۰)$$

بطوریکه:

$$\bar{S}_q = -\ln_q \rho \quad (۱۱)$$

$$\langle A \rangle_q = \text{tr}(\rho^q A) \quad (۱۲)$$

محاسبه نامساوی q-کلاسیوس

ما در این مقاله نامساوی کلاسیوس را به وسیله آنتروپی تساليس به صورت زیر محاسبه می کنیم:

اگر حالت اولیه کل سیستم به صورت

$$\rho_i = \rho_i^s \otimes \rho_q^{B_1} \otimes \dots \otimes \rho_q^{B_n} \quad (۱۳)$$

باشد و فرآیند با یک تحول یکانی از حالت اولیه به حالت نهایی برود، بنابراین آنتروپی تساليس حالت اولیه به صورت زیر

$$\begin{aligned} S_q(\rho_i) &= -\text{tr}(\rho_i^q \ln_q \rho_i) = S_q(\rho_i^s) \text{tr}(\rho_q^{qB_1}) \dots \text{tr}(\rho_q^{qB_n}) + \\ &\sum_m \frac{\beta'_m}{\bar{Z}_m^{1-q}} \left(\text{tr}[\rho_q^{qB_m} H^{B_m}] + \frac{1}{\beta'_m} \text{tr}(\rho_q^{qB_m} \ln_q Z_{mq}) + \frac{\beta_m}{\beta'_m} \text{tr}(\rho_q^{qB_m} U_{mq}) \right) \\ &\text{tr}(\rho_i^{sq}) - (1-q) \left[\text{tr}(\rho_i^{sq} \ln_q \rho_i \otimes \rho_q^{qB_1} \ln_q \rho_q^{B_1} \otimes \dots \otimes \rho_q^{qB_n} \ln_q \rho_q^{B_n}) \right] \end{aligned} \quad (۱۴)$$

بیان می شود و آنتروپی تساليس برای حالت نهایی سیستم طبق نامساوی کلین

$$\begin{aligned} S_q(\rho_f) &\leq -\text{tr}(\rho_f^q \ln_q (\rho_f^s \otimes \rho_q^{B_1} \otimes \dots \otimes \rho_q^{B_n})) = \\ &-\text{tr}(\rho_f^q \ln_q \rho_f) = S_q(\rho_f^s) \text{tr}(\rho_q^{qB_1}) \dots \text{tr}(\rho_q^{qB_n}) + \\ &\sum_m \frac{\beta'_m}{\bar{Z}_m^{1-q}} \left(\text{tr}[\rho_q^{qB_m} H^{B_m}] + \frac{1}{\beta'_m} \text{tr}(\rho_q^{qB_m} \ln_q Z_{mq}) + \frac{\beta_m}{\beta'_m} \text{tr}(\rho_q^{qB_m} U_{mq}) \right) \\ &\text{tr}(\rho_f^{sq}) - (1-q) \left[\text{tr}(\rho_i^{sq} \ln_q \rho_i \otimes \rho_q^{qB_1} \ln_q \rho_q^{B_1} \otimes \dots \otimes \rho_q^{qB_n} \ln_q \rho_q^{B_n}) \right] \end{aligned} \quad (۱۵)$$

می شود. در نتیجه داریم:

در ارتباط است را در نظر می گیریم. اگر حالت اولیه و نهایی سیستم S در تعادل گرمایی در دمای T باشد و فرآیند یک چرخه را طی کند، بنابراین قانون دوم ترمودینامیک به شکل نامساوی کلاسیوس بیان خواهد شد [۲]:

$$\sum_m \beta_m Q_m \leq 0 \quad (۱)$$

آنتروپی تساليس q-entropy

روش آماری غیرجمع پذیر کاربرد فراوانی در موضوعات مختلف فیزیک دارد. در فیزیک آماری غیرجمع پذیر، آنتروپی کلاسیکی تساليس توزیع احتمال p به صورت زیر تعریف می شود [۳]:

$$H_q(p) = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^m p_i^q - 1 \right) = - \sum_{i=1}^m p_i^q \ln_q p_i \quad (۲)$$

که:

$$\ln_q x = \left(x^{1-q} - 1 \right) / (1-q) \quad (۳)$$

آنتروپی کوانتومی تساليس عملگر چگالی نیز به صورت زیر تعریف می شود [۳]:

$$S_q(\rho) = \frac{1}{1-q} \text{tr}(\rho^q - \rho) \quad (۴)$$

در حد $q \rightarrow 1$ آنتروپی تساليس کلاسیکی به آنتروپی شانون و آنتروپی کوانتومی تساليس به آنتروپی وان-نیومن تبدیل می شود.

q-تابع ها در آنسامبل کانونیک

چگالی برای آنسامبل کانونیک به صورت [۴]:

$$\rho_q = \frac{e_q^{-\beta'H}}{\bar{Z}_q} \quad (۵)$$

می باشد که در رابطه فوق

$$\bar{Z}_q = \text{tr}(e_q^{-\beta'H}) \quad (۶)$$

$$\beta' = \frac{\beta}{\sum_{i=1}^w (p_i)^q + (1-q)\beta U_q} \quad (۷)$$

است.

$$\begin{aligned} & (S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s)) \text{tr}(\rho_q^{qB}) \geq \\ & \frac{\beta'}{\bar{Z}^{1-q}} Q_q + \frac{\beta}{\beta'} \left[\text{tr}(\rho_i^q) - \text{tr}(\rho_f^q) \right] (F_q - U_q) \\ & + (1-q) (S_q(\rho_B)) (S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s)) \end{aligned} \quad (21)$$

کاهش می‌یابد. حال اگر فرض کنیم حالت اولیه و نهایی سیستم به صورت کانونیک یعنی:

$$\rho_{iq}^s = \frac{e_q^{-\beta' H_i^s}}{\bar{Z}_q} \quad (22)$$

$$\bar{Z}_{iq}^s = \text{tr} \left(e_q^{-\beta' H_i^s} \right) \quad (23)$$

$$F_{iq}^s = -k_B T \ln_q Z_{iq}^s \quad (24)$$

و

$$\rho_{fq}^s = \frac{e_q^{-\beta' H_f^s}}{\bar{Z}_q} \quad (25)$$

$$\bar{Z}_{fq}^s = \text{tr} \left(e_q^{-\beta' H_f^s} \right) \quad (26)$$

$$F_{fq}^s = -k_B T \ln_q Z_{fq}^s \quad (27)$$

آنتروپی تساليس حالت اولیه و نهایی سیستم به صورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned} S_q(\rho_{iq}^s) &= -\text{tr}(\rho_{iq}^{sq} \ln_q \rho_{iq}^s) = \\ & \frac{\beta'}{\bar{Z}_{iq}^{1-q}} \left[\text{tr}(\rho_{iq}^{sq} H_i^s) + \frac{1}{\beta'} \text{tr}(\rho_{iq}^{sq} \ln_q Z_{iq}^s) + \frac{\beta}{\beta'} \text{tr}(\rho_{iq}^{sq} U_{iq}^s) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

و

$$S_q(\rho_{fq}^s) = \frac{\beta'}{\bar{Z}_{fq}^{1-q}} \left[\text{tr}(\rho_{fq}^{sq} H_f^s) + \frac{1}{\beta'} \text{tr}(\rho_{fq}^{sq} \ln_q Z_{fq}^s) + \frac{\beta}{\beta'} \text{tr}(\rho_{fq}^{sq} U_{fq}^s) \right] \quad (29)$$

و از نامساوی کلین برای حالت نهایی غیرکانونیک سیستم داریم:

$$\begin{aligned} S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s) &\leq \frac{\beta'}{\bar{Z}_{fq}^{1-q}} E_f^s - \frac{\beta'}{\bar{Z}_{iq}^{1-q}} E_i^s - \frac{\beta}{\bar{Z}_{fq}^{1-q}} F_{fq}^s \text{tr}(\rho_{fq}^{sq}) + \\ & \frac{\beta}{\bar{Z}_{iq}^{1-q}} F_{iq}^s \text{tr}(\rho_{iq}^{sq}) + \frac{\beta}{\bar{Z}_{fq}^{1-q}} U_{fq}^s \text{tr}(\rho_{fq}^{sq}) - \frac{\beta}{\bar{Z}_{iq}^{1-q}} U_{iq}^s \text{tr}(\rho_{iq}^{sq}) \end{aligned} \quad (30)$$

که در رابطه آخر

$$E_i^s = \text{tr}(\rho_{iq}^{sq} H_i^s) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & (S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s)) \text{tr}(\rho_q^{qB_1}) \dots \text{tr}(\rho_q^{qB_n}) \geq \\ & \sum_m \frac{\beta'_m}{\bar{Z}_m^{1-q}} \left[\text{tr}(\rho_i^q H^{B_m}) - \text{tr}(\rho_f^q H^{B_m}) \right] + \\ & \sum_m \frac{1}{\beta'_m} \left[\text{tr}(\rho_i^q \ln_q Z_{mq}) - \text{tr}(\rho_f^q \ln_q Z_{mq}) \right] + \\ & \sum_m \frac{\beta'_m}{\beta'_m} \left[\text{tr}(\rho_i^q U_{mq}) - \text{tr}(\rho_f^q U_{mq}) \right] + \\ & (1-q) \left[S_q(\rho_{B_1}) \dots S_q(\rho_{B_m}) \right] [S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s)] \end{aligned} \quad (16)$$

و به طور خلاصه:

$$\begin{aligned} & (S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s)) \text{tr}(\rho_q^{qB_1}) \dots \text{tr}(\rho_q^{qB_n}) \geq \\ & \sum_m \frac{\beta'_m}{\bar{Z}_m^{1-q}} Q_{qm} + \sum_m \frac{\beta'_m}{\beta'_m} \left[\text{tr}(\rho_i^q) - \text{tr}(\rho_f^q) \right] (F_{mq}^B - U_{mq}^B) \\ & + (1-q) [S_q(\rho_{B_1}) \dots S_q(\rho_{B_m})] (S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s)) \end{aligned} \quad (17)$$

که:

$$Q_{qm} = [\text{tr}(\rho_i^q H^{mB}) - \text{tr}(\rho_f^q H^{mB})] \quad (18)$$

گرمای جذب شده توسط سیستم از حمام‌ها است.

در رابطه (۱۷) جمله دوم شامل انرژی آزاد و انرژی درونی حمام‌ها، به صورت زیر

$$F_{mq} = -k_B T \ln_q Z_{mq} \quad (19)$$

$$U_{mq} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln_q Z_{mq} \quad (20)$$

است. جمله سوم نیز نشان‌دهنده برهم‌کنش بین سیستم و حمام‌ها است.

همانطور که مشاهده می‌شود در حد $q \rightarrow 1$ نامساوی $-q$ کلاسیوس به نامساوی کلاسیوس (۱) تبدیل می‌شود. در این فرآیند لازم نیست حتماً حالت نهایی کانونیک باشد.

فرآیند هم‌دما

فرآیند هم‌دمایی با یک حمام در دمای $T = (k_B \beta)^{-1}$ را در نظر می‌گیریم. در این مورد رابطه (۱۷) به شکل زیر

متقابل (اطلاعات مشترک) و استخراج کار با کنترل بازخوردی رسید.

مرجع ها

- [۱] C. Tsallis, E.J.C.M. Brigatti, *Thermodynamics, Nonextensive statistical mechanics: A brief introduction*, **16** (2004) 223-235.
- [۲] T.J.P.o.T.P. Sagawa, *Thermodynamics of information processing in small systems*, **127** (2012) 1-56.
- [۳] A.E.J.J.o.S.P. Rastegin, *Some general properties of unified entropies*, **143** (2011) 1120.
- [۴] S. Abe, Y. Okamoto, *Nonextensive statistical mechanics and its applications*, Springer Science & Business Media, 2001.

$$E_f^s = \text{tr}(\rho_{fq}^{sq} H_f^s) \quad (32)$$

انرژی ذخیره شده حالت اولیه و نهایی سیستم است. واضح است که در حد $q \rightarrow 1$ رابطه (۳۰) به حالت استاندارد زیر در می آید

$$S(\rho_f^s) - S(\rho_i^s) \leq \beta(\Delta E^s - \Delta F^s) \quad (33)$$

با استفاده از بسط رابطه های (۲۱) و (۳۰) برای حالت تک حمام داریم:

$$\left\{ \frac{\beta'}{\bar{Z}_B^{1-q}} Q_q + \frac{\beta}{\beta'} [\text{tr}(\rho_i^q) - \text{tr}(\rho_f^q)] [F_q^B - U_q^B] \right\} / \text{tr}(\rho_q^{qB}) + \left\{ (1-q)(S_q(\rho_B)) (S_q(\rho_f^s) - S_q(\rho_i^s)) \right\} / \text{tr}(\rho_q^{qB}) \leq \frac{\beta'}{\bar{Z}_{fq}^{1-q}} E_f^s - \frac{\beta'}{\bar{Z}_{iq}^{1-q}} E_i^s - \frac{\beta}{\bar{Z}_{fq}^{1-q}} F_{fq}^s \text{tr}(\rho_{fq}^{sq}) + \frac{\beta}{\bar{Z}_{iq}^{1-q}} F_{iq}^s \text{tr}(\rho_{iq}^{sq}) + \frac{\beta}{\bar{Z}_{fq}^{1-q}} U_{fq}^s \text{tr}(\rho_{fq}^{sq}) - \frac{\beta}{\bar{Z}_{iq}^{1-q}} U_{iq}^s \text{tr}(\rho_{iq}^{sq}) \quad (34)$$

که در آن

$$\rho_i^q = \rho_i^{sq} \otimes \rho^{Bq} \quad (35)$$

$$\rho_f^q = \rho_f^{sq} \otimes \rho^{Bq} \quad (36)$$

است.

نتیجه گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن سیستم جمع ناپذیر و در ارتباط با حمام های کانونیک و همچنین با استفاده از آنتروپی تسالیس، قانون دوم ترمودینامیک به صورت نامساوی q -کلاسیوس، رابطه (۱۷) محاسبه شد و همانطور که مشاهده می شود این نامساوی دارای جملاتی اضافی شامل انرژی آزاد و انرژی درونی و برهم کنش بین سیستم و حمام ها است.

باید توجه داشت که در حد $q \rightarrow 1$ رابطه (۱۷) به نامساوی کلاسیوس استاندارد تبدیل می شود و سیستم از جمع ناپذیری به سمت جمع پذیری می رود.

آنتروپی تسالیس را می توان به گونه ای کلی روی مفاهیم مهمی همچون شیطان ماکسول تعمیم داد و با استفاده از یک فرآیند هم دما، رابطه مهم (۳۴) به نتایج مهمی مثل ظاهر شدن جمله آنتروپی

بررسی خاصیت های ماکروسکوپی کوانتومی با همدوسی کوانتومی

ناصری، معین^۱؛ رایسی، صادق^۱^۱دانشگاه فیزیک دانشگاه صنعتی شریف، جنب خیابان آزادی، تهران

چکیده

نظریه مکانیک کوانتومی از زمان کشف آن تاکنون، همواره در توصیف جهان ریز مقیاس با دقت بسیار بالا موفق عمل کرده است. اما هر چه از مقیاس میکروسکوپی فاصله گرفته و به مقیاس های بالاتر نزدیک تر می شویم، نمود اثرات کوانتومی کمرنگ تر می گردد. تا جاییکه در جهان ماکروسکوپی اثرات کوانتومی به ندرت مشاهده می گردد. همواره این سوال مطرح بوده است که حالت یک سیستم ماکروسکوپی تا چه اندازه خواص کوانتومی از خود نشان می دهد و آیا حدی برای آن وجود دارد؟ از ملزومات پاسخ به این پرسش آن است که معیار و متری داشته باشیم که بتوان میزان کوانتوم-ماکروسکوپی بودن یک حالت دلخواه را محاسبه کرد. در این مقاله معیار جدیدی برای سنجش کوانتوم-ماکروسکوپی بودن، با استفاده از ابزار های ماتریسی و توابع توزیع معرفی شده است.

واژه های کلیدی: کوانتوم-ماکروسکوپی، همدوسی، معیار

Investigating Macroscopic Quantumness Features and Quantum Coherence

Naseri, Moein¹; Raeisi, Sadegh¹¹ Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

In This article we have introduced a new measure for quantum-macroscopicity using matrix tools and normal distribution functions.

مقدمه

برای این حالت ها یک ترتیب قایل می شویم، به طوریکه i امین حالت، حالتی است که عدد i در مبنای d به شکل $i_1 i_2 i_3 \dots i_n$ نوشته شود. بنابراین حالت $i_1 i_2 i_3 \dots i_n$ امین حالت در مجموعه فضای هیلبرت موردنظر خواهد بود. توجه: ذره اسپین 2 همان ذره اسپین $1/2$ می باشد و از این به بعد عبارت اسپین $1/2$ را به جای آن به کار خواهیم برد.

۲- حالت GHZ برای یک سیستم متشکل از N ذره اسپینی:

۳- حالت Ordinary State که آن را به اختصار با OS نمایش می دهیم، برای یک سیستم متشکل از N ذره اسپینی به شکل زیر تعریف می کنیم:

در این بخش به تعاریف مقدماتی می پردازیم:

۱- یک ذره اسپین d ، یک کیودیت است که می تواند در یک پایه محاسباتی d ویژه حالت داشته باشد. ویژه حالت j ام:

$$|j\rangle, \quad 0 \leq j < (d-1)$$

بنابراین پایه های فضای هیلبرت یک سیستم متشکل از N ذره اسپین d به شکل زیر است:

$$\{|i_1 i_2 i_3 \dots i_n\rangle\} \quad 0 \leq i_j < d-1, \quad 1 \leq j \leq n$$

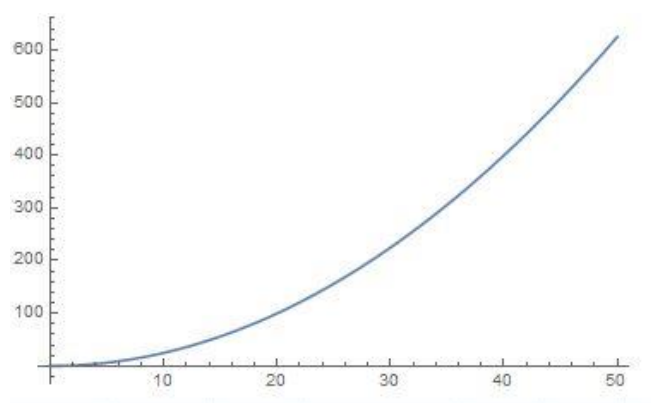
(d, i, j, n, N اعداد صحیح می باشند.)

معیار هایی که برای سنجش کوانتوم-ماکروسکوپیسیتی ارائه شده است به این حالت توجه ویژه شده است و در معیار هایی این حالت بالاترین درجه ماکروسکوپی بودن برای یک حالت کوانتومی متشکل از تعداد مشخص ذرات معرفی شده است. به هر نحو، چون در این حالت دو ویژه حالت با اثرات ماکروسکوپی قابل تمیز از هم بر هم نهی شده است پس کوانتوم-ماکروسکوپی بودن آن بالاست. لازم است معیاری که ارائه می دهیم مقدار بالایی برای آن بدست دهد.

مقدار $M(\rho)$ برای این حالت حساب شده است و مطابق ذیل می باشد:

$$M(\text{GHZ}) = N^2/4$$

نمودار معیار بر حسب تعداد کیوبیت ها مطابق زیر است:



شکل ۱: معیار $M(\rho)$ بر حسب تعداد کیوبیت ها برای حالت GHZ

بررسی معیار برای حالت OS

حالت OS از حالت هایی می باشد که نسبت به حالت GHZ، به ازای تعداد ذرات اسپینی معین، از درجه کوانتوم-ماکروسکوپیسیتی بسیار کمتری برخوردار است، زیرا مخلوط یکنواختی از همه ویژه حالت هاست. معیار $M(\rho)$ برای این حالت مطابق زیر است:

$$M(\text{OS}) = N/2$$

نمودار معیار بر حسب تعداد کیوبیت ها مطابق شکل زیر است:

$$|\text{OS}_N\rangle = ((1/2)^{0.5}(|0\rangle + |d-1\rangle))^{\otimes N}$$

ماتریس فاصله و تابع توزیع ماتریس چگالی

۱- فاصله ۲ ویژه حالت $|i\rangle$ و $|j\rangle$ یک سیستم متشکل از N

ذره مطابق زیر تعریف می شود:

فرض کنیم ویژه حالت $|i\rangle$ به شکل زیر باشد:

$$|i\rangle = |i_1 i_2 i_3 \dots i_n\rangle$$

و ویژه حالت $|j\rangle$ به شکل زیر باشد:

$$|j\rangle = |j_1 j_2 j_3 \dots j_n\rangle$$

فاصله ۲ حالت مورد نظر که آن را با d_{ij} نشان می دهیم، برابر خواهد بود با:

$$d_{ij} = \text{HammingDistance}[i, j, \text{Base}2]$$

در واقع مفهوم فاصله بین دو حالت اسپینی به این مفهوم است که هر چه فاصله دو حالت از یکدیگر بیشتر گردد، از نظر ماکروسکوپیکی این دو حالت بیشتر متمایز می گردند.

۲- ماتریس فاصله:

با استفاده از تعریف فاصله d_{ij} می توان ماتریس فاصله را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\text{Distance Matrix} = D = [d_{i-1, j-1}]$$

۳- تعریف مجموعه

$$C(d)$$

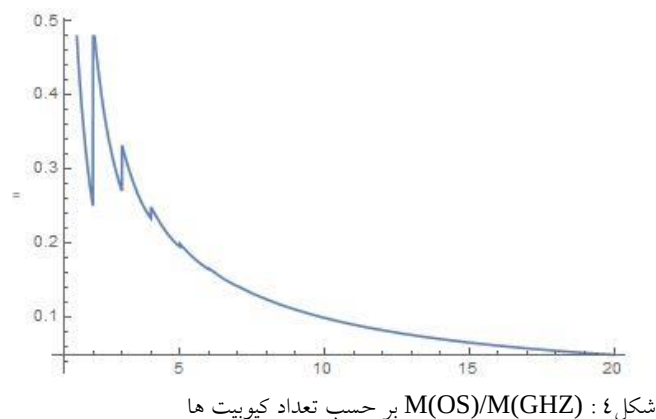
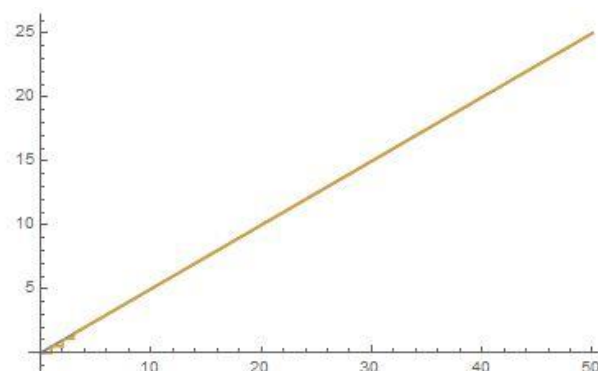
$$C(d) = \{i, j \mid d_{ij} = d\}$$

معیار کوانتوم-ماکروسکوپیکی

معیار کوانتوم-ماکروسکوپیکی بودن برای یک حالت دلخواه کوانتومی با ماتریس چگالی ρ و با استفاده از تابع توزیع ماتریس چگالی که از مجموعه $C(d)$ و ماتریس فاصله تعریف می گردد را با انحراف معیار مربوط به این پارامترها تعریف می کنیم و با $M(\rho)$ نشان می دهیم.

بررسی معیار برای حالت GHZ

حالت GHZ حالتی است که خاصیت کوانتوم-ماکروسکوپیکی دارد و با افزایش تعداد ذرات اسپینی درجه کوانتوم-ماکروسکوپیکی بودن آن افزایش می یابد. تقریباً در همه

شکل ۴: $M(OS)/M(GHZ)$ بر حسب تعداد کیوبیت هاشکل ۵: معیار $M(p)$ بر حسب تعداد کیوبیت ها برای حالت OS

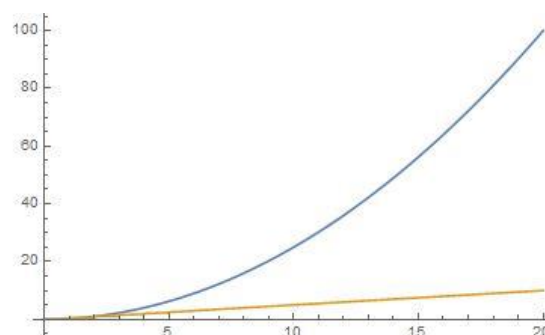
مرجع ها

- [1] B. Yadin and V. Vedral; "General framework for quantum macroscopicity in terms of coherence, PHYSICAL REVIEW A **93**, 022122 (2016)
- [2] T.Farrow and V.Vedral; "Classification of Macroscopic Quantum Effects", arxiv 3 June 2014
- [3] F.Fröwis¹ and P.Sekatski and W.Dür and N.Gisin and N.Sangouard; "Macroscopic quantum states: measures, fragility and implementations", arxiv 19 June 2018
- [4] A.Streltsov and G.Adesso and M.B.Plenio; "Colloquium: Quantum coherence as a resource", REVIEWS OF MODERN PHYSICS, VOLUME 89, OCTOBER –DECEMBER 2017

نتیجه گیری

همانطور که ملاحظه می شود، معیار معرفی شده در این مقاله مقدار کوانتوم ماکروسکوپی بودن حالت GHZ نسبت به حالت OS بیشتر بوده و با افزایش تعداد کیوبیت ها این اختلاف بسیار بیشتر میشود. در مقیاس های ماکروسکوپی و از مرتبه تعداد ذرات عدد آووگادرو نسبت $M(OS)/M(GHZ)$ به صفر میل می کند. این بدین معناست که حالت OS در مقیاس های ماکروسکوپی نسبت به حالت GHZ کوانتومی بودن خود را از دست می دهد، حال آنکه حالت GHZ از مقدار قابل توجهی کوانتومی بودن برخوردار است در نتیجه کوانتوم ماکروسکوپی بودن این حالت بالاست.

هم چنین این روش به دلیل استفاده از روش های ماتریسی از نظر محاسباتی مزیت دارد.

شکل ۶: مقایسه معیار $M(p)$ بر حسب تعداد کیوبیت ها برای حالت OS و GHZ

بررسی درهم تنیدگی بین دو اتم دو ترازی در دو کاواک اپتومکانیکی جداگانه متصل شده به وسیله

یک فیبر اپتیکی

فتحی، محمدعلی^۱؛ باغشاهی، حمیدرضا^۲؛ میرافضلی، سیدیحیی^۳؛ خانزاده، محمد^۴^۱گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده

در این مقاله، با توجه به اهمیت بحث درهم تنیدگی و مشاهده آن در سامانه های اپتومکانیکی، به بررسی درهم تنیدگی بین دو اتم در یک آرایش فیزیکی از سامانه های اپتومکانیکی با استفاده از سنجی تلاقی پرداخته خواهد شد. آرایش فیزیکی شامل دو کاواک به همراه آینه های متحرک در یکی از دو انتهای هر یک از کاواک ها است به طوری که داخل هر کاواک یک اتم دو ترازی قرار گرفته است. نتایج عددی نشان می دهند که درهم تنیدگی بین دو اتم را می توان با تغییر ثابت جفت شدگی بین مدهای کاواک و فیبر کنترل کرد.

واژه های کلیدی: درهم تنیدگی کوانتومی، کاواک اپتومکانیک، فیبر نوری، سنجی تلاقی.

Investigation of entanglement between two two-level atoms in two distinct optomechanical cavities connected by an optical fiber

Fathi, Mohammad Ali¹; Baghshahi, Hamid Reza²; Mirafzali, Sayyed Yahya³; Khanzadeh, Mohammad⁴¹ Department of Physics, Faculty of science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract

In this paper, due to the importance of the discussion of entanglement and its observation in optomechanical systems, we examine the entanglement between two atoms in a physical arrangement of optomechanical systems using concurrence measure. Physical arrangement consists of two cavities with moving mirrors at one of two ends of each cavity, so that there is a two-level atom inside each cavity. The numerical results show that the amount of entanglement between two atoms can be sensitively controlled by choosing the constant coupling between the cavity and fiber mode.

Keywords: Quantum entanglement, Optomechanical cavity, Optical fiber, Concurrence measure

مقدمه

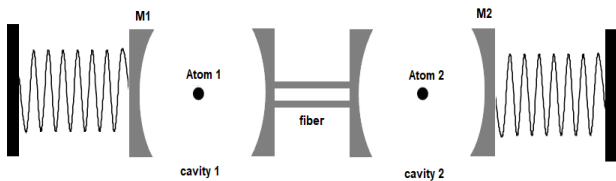
می توان پدیده درهم تنیدگی کوانتومی را در این سامانه ها، به عنوان یک سامانه ماکروسکوپی، مشاهده نمود. در سال های اخیر مطالعات زیادی در مورد ایجاد درهم تنیدگی در سامانه های مختلف اپتومکانیکی [۶-۲] انجام شده است.

در این مقاله با توجه به بحث ایجاد درهم تنیدگی در سامانه های اپتومکانیکی، سامانه ای شامل دو کاواک اپتومکانیکی که در انتهای هر کدام از آن ها یک آینه متحرک قرار گرفته است در نظر

کاواک های اپتومکانیک یکی از جالب ترین جنبه های فرمول بندی مکانیک کوانتومی هستند، در این سامانه ها، مد کاواک می تواند از طریق فشار تابشی با نوسانگر مکانیکی جفت شود [۱].

از جمله کاربردهای مهم این سامانه ها می توان به سردسازی، اندازه گیری های فوق دقیق و ایجاد حالت های غیر کلاسیکی اشاره نمود. یکی دیگر از مزیت های سامانه های اپتومکانیکی این است که

عملگرهای پائولی مربوط به اتم‌های داخل هر کاواک می‌باشد به طوری که $|e\rangle$ و $|g\rangle$ به ترتیب تراز برانگیخته و پایه مربوط به هر اتم و ω_j اختلاف فرکانس بین دو تراز است. λ_j ثابت برهم کنش بین اتم j ام و مد کاواک j ام و J ثابت جفت‌شدگی بین مد کاواک و مد فیبر است.



شکل ۱: آرایش فیزیکی شامل دو کاواک به همراه آینه‌های متحرک در یکی از دو انتهای هر یک از کاواک‌ها است به طوری که داخل هر کاواک یک اتم دو تراز قرار گرفته است.

هامیلتونی (۱) در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_{\text{int}} = \sum_{j=1}^2 \lambda_j (a_j \sigma_{j+} e^{-i(\Omega_j - \omega_j)t} + a_j^\dagger \sigma_{j-} e^{i(\Omega_j - \omega_j)t}) - \sum_{j=1}^2 G_j (a_j^\dagger a_j c_j^\dagger e^{i\omega_{jm}t} + a_j^\dagger a_j c_j e^{-i\omega_{jm}t}) + \sum_{j=1}^2 J (b a_j^\dagger e^{i\Omega_j t} + b^\dagger a_j e^{-i\Omega_j t}) \quad (2)$$

سپس با فرض $\omega_m \gg (G, \lambda)$ ، هامیلتونی مؤثر سامانه به صورت زیر بدست می‌آید [۷]:

$$H_{\text{eff}} = \sum_{j=1}^2 \frac{-\lambda_j^2}{\Omega_j - \omega_j} (a_j^\dagger a_j \sigma_{jz} + \sigma_{j+} \sigma_{j-}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j G_j}{2} \left(\frac{1}{\Omega_j - \omega_j} + \frac{1}{\omega_{jm}} \right) (a_j^\dagger c_j \sigma_{j-} e^{i(\Omega_j - \omega_j - \omega_{jm})t} + a_j c_j^\dagger \sigma_{j+} e^{-i(\Omega_j - \omega_j - \omega_{jm})t}) - \sum_{j=1}^2 \frac{G_j^2}{\omega_{jm}} (a_j^\dagger a_j)^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{-\lambda_j J}{2} \left(\frac{1}{\Omega_j - \omega_j} + \frac{1}{\Omega_j} \right) (b^\dagger \sigma_{j-} e^{-i\omega_j t} + b \sigma_{j+} e^{i\omega_j t}) + \sum_{j=1}^2 \frac{J G_j}{2} \left(\frac{1}{\omega_{jm}} + \frac{1}{\Omega_j} \right) (a_j b^\dagger c_j^\dagger e^{i(\omega_{jm} - \Omega_j)t} + a_j^\dagger b c_j e^{-i(\omega_{jm} - \Omega_j)t}) + \sum_{j=1}^2 \frac{J^2}{\Omega_j} (a_j a_j^\dagger - b b^\dagger) \quad (3)$$

با در نظر گرفتن یک حالت اولیه دلخواه برای کل سامانه که ترکیبی از حالت‌های اولیه دو اتم، دو مد اپتیکی کاواک‌ها، دو مد مکانیکی مربوط به حرکت آینه‌ها و مد فیبر است، حالت اولیه سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$|\psi(0)\rangle = \sin \theta |eg11000\rangle + \cos \theta |ge11000\rangle \quad (4)$$

می‌گیریم و فرض می‌کنیم دو آینه ثابت هر کدام از کاواک‌ها به وسیله یک فیبر اپتیکی به هم متصل شده‌اند. همچنین در داخل هر کدام از کاواک‌ها یک اتم دو تراز قرار گرفته است که با آن کاواک برهم‌کنش می‌کند. با حل معادله شرودینگر برای این سامانه به صورت عددی، به بررسی درهم‌تنیدگی بین دو اتم با استفاده از سنجی تلاقی می‌پردازیم و تأثیر ثابت جفت‌شدگی بین کاواک و فیبر را بر آن مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مدل‌بندی فیزیکی

آرایش فیزیکی سامانه شامل دو کاواک به همراه آینه‌های متحرک در یکی از دو انتهای هر یک از کاواک‌ها است به طوری که داخل هر کاواک یک اتم دو تراز قرار گرفته است. فرض بر این است که کاواک‌ها تک مد باشند و از طریق یک فیبر نوری به هم متصل شده باشند (شکل ۱). هامیلتونی سامانه مورد نظر به صورت زیر است ($\hbar=1$):

$$H = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{2} \omega_j \sigma_{jz} + \Omega_j a_j^\dagger a_j + \omega_{jm} c_j^\dagger c_j \right) + \sum_{j=1}^2 \lambda_j (a_j \sigma_{j+} + a_j^\dagger \sigma_{j-}) + \sum_{j=1}^2 J (b(a_j^\dagger + a_{j+1}^\dagger) + b^\dagger(a_j + a_{j+1})) - \sum_{j=1}^2 G_j a_j^\dagger a_j (c_j^\dagger + c_j) \quad (1)$$

در هامیلتونی بالا سه جمله اول به ترتیب مربوط به هامیلتونی‌های آزاد دو اتم، دو مد کاواک و دو آینه‌ی متحرک هستند. جمله چهارم برهم‌کنش مدهای هر کاواک با اتم دو تراز داخل آن کاواک را نشان می‌دهد، جمله پنجم مربوط به برهم‌کنش مدهای هر کاواک با مد فیبر نوری می‌باشد و در نهایت جمله آخر برهم‌کنش بین مد اپتیکی هر کاواک و مد مکانیکی آینه‌ی متحرک آن را نشان می‌دهد. $a_j^\dagger (a_j)$ ، $c_j^\dagger (c_j)$ و $b^\dagger (b)$ به ترتیب عملگرهای خلق (نابودی) برای مد کاواک j ام با فرکانس Ω_j ، آینه j ام با فرکانس

$$\omega_{jm} \text{ و مد فیبر هستند و } G = \left(\frac{\Omega}{L} \right) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}} \text{ ثابت}$$

جفت‌شدگی بین مد اپتیکی و مکانیکی هر کاواک است، به طوری که L طول کاواک و m جرم آینه متحرک می‌باشد.

$$\sigma_{j-} = |g\rangle_j \langle e| \text{ و } \sigma_{j+} = |e\rangle_j \langle g|, \sigma_{jz} = |e\rangle_j \langle e| - |g\rangle_j \langle g|$$

برای اندازه گیری درهم تنیدگی بین دو کیوبیت (در اینجا دو اتم دو ترازی) سنج‌های مختلفی وجود دارد که در اینجا از سنج‌های تلاقی برای بدست آوردن درهم تنیدگی استفاده می‌کنیم. سنج‌های تلاقی $C(t)$ به صورت زیر معرفی شده است [۸]:

$$C(t) = \max \left[0, 2 \max(\chi_k) - \sum_{k=1}^4 \chi_k \right] \quad (۸)$$

که در آن χ_k ویژه مقادیر عملگر $\rho_{A_1 A_2} \rho_{A_1 A_2}^*$ هستند، به طوری که $\rho_{A_1 A_2}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_{A_1 A_2} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{A_1 A_2}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (۹)$$

$\rho_{A_1 A_2}^*$ مزدوج مختلط $\rho_{A_1 A_2}$ است و σ_y ماتریس پائولی است. اما در اینجا به دلیل فرم ماتریس کاهش یافته چگالی $\rho_{A_1 A_2}$ (حالت X) می‌توانیم برای بدست آوردن سنج‌های تلاقی از رابطه زیر نیز استفاده کنیم:

$$C(t) = 2 \max \{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11} \rho_{44}} - \sqrt{\rho_{22} \rho_{33}}\} \quad (۱۰)$$

محدوده سنج‌های تلاقی بین صفر و یک است، که سنج‌های تلاقی بزرگتر به منظور درهم تنیدگی قوی‌تر است. برای حالت‌های غیر درهم تنیده $C(t) = 0$ و $C(t) = 1$ حداکثر حالت درهم تنیده است.

شکل‌های ۲ و ۳ نمودار تحول زمانی سنج‌های تلاقی $C(t)$ برای حالت $\theta = \frac{\pi}{4}$ و مقادیر مختلف ثابت جفت‌شدگی بین مد کاواک و فیبر (J) نشان می‌دهند. مقادیر پارامترهای مختلف برای رسم این نمودارها به صورت زیر می‌باشد:

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.1\omega_1, \omega_{1m} = \omega_{2m} = 100\omega_1 \\ \Omega_1 = \Omega_2 = 0.2\omega_1, G_1 = G_2 = \omega_1, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.1\omega_1$$

با در نظر گرفتن هامیلتونی مؤثر سامانه (۳) و حالت اولیه دلخواه در نظر گرفته شده (۴)، بردار حالت کل سامانه در هر لحظه‌ی دلخواه t به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = y_1(t)|eg11000\rangle + y_2(t)|ge11000\rangle + y_3(t)|ee01100\rangle \\ + y_4(t)|ee10010\rangle + y_5(t)|gg11001\rangle + y_6(t)|ge01101\rangle \\ + y_7(t)|ge10011\rangle + y_8(t)|eg01101\rangle + y_9(t)|eg10011\rangle \\ + y_{10}(t)|ee00111\rangle + y_{11}(t)|ge00112\rangle + y_{12}(t)|gg01102\rangle \\ + y_{13}(t)|eg00112\rangle + y_{14}(t)|gg10012\rangle + y_{15}(t)|gg00113\rangle \quad (۵)$$

با داشتن این بردار حالت و همچنین هامیلتونی (۳) و حل معادله شرودینگر وابسته به زمان، ۱۵ معادله جفت‌شده برای ضرایب معرف دامنه احتمال ($y(t)$) بدست می‌آید که با حل عددی آن‌ها می‌توان بردار حالت کل سامانه را در هر لحظه دلخواه بدست آورد.

درهم تنیدگی بین دو اتم

ماتریس چگالی کل سیستم، شامل دو اتم، دو کاواک، دو آینه متحرک و فیبر با استفاده از رابطه $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ بدست می‌آید. با توجه به این که هدف ما محاسبه درهم تنیدگی بین دو اتم است، ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی $\rho_{A_1 A_2}(t)$ با رد گرفتن روی مؤلفه‌های مربوط به دو کاواک، دو آینه‌ی متحرک و فیبر بدست می‌آید. ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی $\rho_{A_1 A_2}(t)$ در پایه‌های $|e_1, e_2\rangle$ ، $|e_1, g_2\rangle$ ، $|g_1, e_2\rangle$ و $|g_1, g_2\rangle$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho_{A_1 A_2}(t) = \text{Tr}_{g_1 g_2 m_1 m_2 f}(\rho(t)) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{32}(t) & \rho_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix} \quad (۶)$$

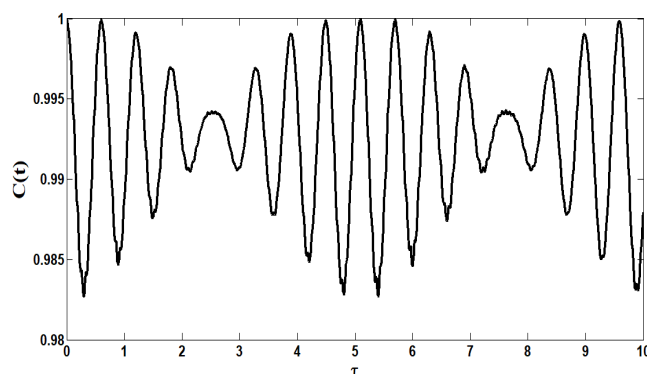
که عناصر غیر صفر این ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی به صورت زیر می‌باشند:

$$\rho_{11}(t) = y_3(t)y_3^*(t) + y_4(t)y_4^*(t) + y_{10}(t)y_{10}^*(t) \\ \rho_{22}(t) = y_1(t)y_1^*(t) + y_8(t)y_8^*(t) + y_9(t)y_9^*(t) + y_{13}(t)y_{13}^*(t) \\ \rho_{33}(t) = y_2(t)y_2^*(t) + y_6(t)y_6^*(t) + y_7(t)y_7^*(t) + y_{11}(t)y_{11}^*(t) \\ \rho_{44}(t) = y_5(t)y_5^*(t) + y_{12}(t)y_{12}^*(t) + y_{14}(t)y_{14}^*(t) + y_{15}(t)y_{15}^*(t) \\ \rho_{23}(t) = y_1(t)y_2^*(t) + y_8(t)y_6^*(t) + y_9(t)y_7^*(t) + y_{13}(t)y_{11}^*(t) \\ \rho_{32}(t) = \rho_{23}^*(t) \quad (۷)$$

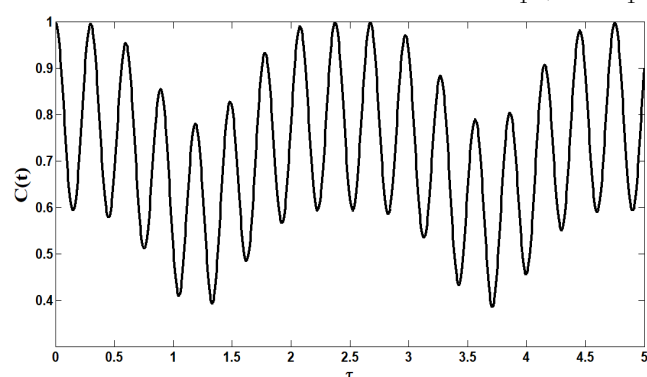
بررسی می‌تواند یک سامانه مناسب برای ایجاد درهم‌تنیدگی پایدار بین دو اتم باشد که این پایداری برای مقادیر کوچک‌تر ثابت جفت‌شدگی بین مد کاواک‌ها و مد فیبر بیشتر است.

مرجع‌ها

- [۱] M. N. Nielsen and I. L. Chuang; "Quantum Computation and Quantum Information"; Cambridge University Press. (2002) ۵۵۸
- [۲] L.. N. Junqi and J.. Q. Liang; "Entanglement in a Tripartite Cavity-Optomechanical System"; *International Journal of Theoretical Physics* **52**, No. 3 (2013) 706-715.
- [۳] M. Aspelmeyer and T.. J. Kippenberg and F.. Marquardt; "Cavity Optomechanics"; *Reviews of Modern Physics* **86**, No. 4 (2014) 1391.
- [۴] Q. H. Liao and W.. J. Nie and J.. Xu and Y.. Liu and N.. R. Zhou and Q.. R. Yan and A.. Chen and N.. H. Liu and M.. A. Ahmad; "Properties of Linear Entropy of the Atom in a Tripartite Cavity-Optomechanical System"; *Laser Physics* **26**, No. 5 (2016) 055201.
- [۵] M. N. Hassani and M.. K. Tavassoly; "Collapse-Revival in Entanglement and Photon Statistics: The Interaction of a Three-Level Atom with a Two-Mode Quantized Field in Cavity Optomechanics"; *Laser Physics* **26**, No. 12 (2016) 125204.
- [۶] J.. F. Dai and Y.. Q. Guo and X.. Y. Zhang and D.. F. Wang and H.. F. Huang; "Quantum State Transfer between Distant Cavity-Optomechanics Connected via Fiber"; *arXiv preprint arXiv 1712* (2017) 06510.
- [۷] J. Jerk and D.. F. James; "Effective Hamiltonian Theory and its Applications in Quantum Information"; *Canadian Journal of Physics* **85**, No. 6 (2007) 625-632.
- [۸] W.. K. Wootters; "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits"; *Physical Review Letters* **80**, No. 10 (1998) 2245.



شکل ۲: تحول زمانی سنجی تلاقی $C(t)$ بر حسب زمان مشخصه $J = \omega_1$ با $\tau = \omega_1 t$.



شکل ۳: تحول زمانی سنجی تلاقی $C(t)$ بر حسب زمان مشخصه $J = 10\omega_1$ با $\tau = \omega_1 t$.

همان‌طور که از این دو شکل مشخص است رفتار درهم‌تنیدگی بین دو اتم برای مقادیر مختلف J یک رفتار نوسانی است. همچنین با مقایسه شکل‌های ۲ و ۳ مشخص است که با افزایش ثابت جفت‌شدگی بین مدهای کاواک و فیبر میزان افت و خیز بین بیشینه و کمینه درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر هرچه میزان جفت‌شدگی بین مدهای کاواک و فیبر کوچک‌تر باشد درهم‌تنیدگی حالت پایداری دارد (شکل ۲). در پایان ذکر این نکته لازم است همان‌طور که انتظار داریم به‌ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ میزان درهم‌تنیدگی اولیه بین دو اتم بیشینه (مقدار یک) است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی درهم‌تنیدگی بین دو اتم دو ترازی به دام افتاده در دو کاواک اپتومکانیکی که توسط فیبر نوری به هم متصل هستند پرداخته شده است. تأثیر ثابت جفت‌شدگی بین مد کاواک و فیبر (J) بر روی درهم‌تنیدگی بین دو اتم دو ترازی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که سامانه مورد

همبستگی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل

دلاوری، سعیده^۱؛ عامری، وحید^۱؛ عسکری، علیداد^۱^۱ دانشکده علوم پایه دانشگاه هرمزگان، کیلومتر ۹ جاده میناب، بندرعباس

چکیده

در این تحقیق، همبستگی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل در سیستم کوانتومی با در نظر گرفتن تاثیر دما مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به اینکه اطلاعات متقابل معیاری برای سنجش همبستگی می باشند، با اندازه گیری اطلاعات متقابل بین نوسانگرها با کمک نرم افزار شبیه سازی کوانتومی کیوتیپ^۱، اثر جفت شدگی اتلافی بر همبستگی دو نوسانگر جفت شده و اندرپل را بررسی کرده و نشان داده که جفت شدگی اتلافی باعث بهبود همبستگی بین نوسانگرها جفت شده اتلافی می شود.

واژه های کلیدی: نوسانگرهای و اندرپل، همبستگی، جفت شدگی اتلافی، درهم تنیدگی، اطلاعات متقابل.

Correlation between two coupled dissipative Van der Pol oscillators

Delavari, Saeide¹; Ameri, Vahid¹; Askari, Alidad¹¹ Department of Physics, Faculty of Science, University of Hormozgan, Bandar Abbas,

Abstract

In this study, the correlation between two coupled dissipative van der pol oscillators in quantum system the effect of temperature has been studied. According to that the mutual information is one of the criteria for correlation measurement. Measuring the mutual information between oscillators by using quantum simulation software called Qutip, we can investigate the effect of dissipative coupling on correlation of two van der pol oscillators, and showed that quantum dissipative coupled improves the correlation between coupled dissipative van der pol oscillators.

Keywords: Van der Pol oscillators, Correlation, Coupling dissipative, Mutual information

مقدمه

سهم خود حرکت نوسانگر را به یک دامنه متناهی محدود می کند [۳]. با توجه به ماهیت منحصر به فرد نوسانگرهای و اندرپل و معادله و اندرپل، سنگ بنایی برای مطالعه سیستم هایی با نوسان چرخه حدی نه تنها در فیزیک که در مهندسی، زیست شناسی، جامعه شناسی و حتی اقتصاد نیز می باشد [۱].

یک مدل پیش نمونه بسیاری از سیستم های فیزیکی: یک جفت نوسانگر کوانتومی است که این مدل مفهوم ایده های فیزیکی، واهمدوسی، همبستگی، درهم تنیدگی، همگام سازی و غیره مربوط به سیستم های کوانتومی است [۵].

نوسانگرهای و اندرپل در سال ۱۹۲۰، نخستین بار توسط فیزیکدان و مهندس برق هلندی بالتازار و اندرپل^۲، زمانی که در شرکت فیلپس^۳ مشغول به کار بود پیشنهاد شد [۴-۱]. او در حالیکه مدارهای الکترونیکی قلب انسان را ساخته بود، نوسانات پایداری را پیدا کرد که آنرا نوسان ساز وقفه نامید و اکنون به عنوان یک نوع چرخه حدی^۴ در مدارهای الکترونیکی شناخته می شود [۱]. نوسانگر و اندرپل مدل ساده ای از یک سیستم دینامیک غیرخطی و ناپایستار با دو نوع از حالت های میرایی است: میرایی منفی که وضعیت بقیه را ناپایدار می کند و میرایی غیرخطی که به

کیوتیپ ، بدست آورده ایم مطالعه می کنیم و در پایان نتیجه این پژوهش را ارائه می کنیم.

دو نوسانگر جفت شده کوانتومی و اندرپل

دینامیک مکانیک کوانتومی دونوسانگر جفت شده و اندرپل را می توان با معادله اصلی زیر شرح داد [۱۰]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + k_1 \sum_{i=1}^2 (2a_i^\dagger \rho a_i - \{a_i a_i^\dagger, \rho\}) \quad (1)$$

$$+ k_2 \sum_{i=1}^2 (2a_i^2 \rho a_i^{t_2} - \{a_i^{t_2} a_i^2, \rho\})$$

$$H = \sum_{i=1}^2 \omega_i a_i^\dagger a_i \quad (2)$$

که $\hbar=1$ است. دوتا فرآیند اتلافی وجود دارد نوسانگر یک فونون در لحظه با میزان $2k_1(aa^\dagger)$ بدست می آورد و دو تا فونون در لحظه با میزان $2k_2(a^{t_2} a^2)$ از دست می دهد. اینها به ترتیب به میزان میرایی منفی و میرایی غیر خطی مربوط می شوند. حال اگر دو نوسانگر بصورت اتلافی جفت شده باشند ، آنوقت معادله اصلی بدین صورت می شود [۱۰]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + k_1 \sum_{i=1}^2 (2a_i^\dagger \rho a_i - \{a_i a_i^\dagger, \rho\})$$

$$+ k_2 \sum_{i=1}^2 (2a_i^2 \rho a_i^{t_2} - \{a_i^{t_2} a_i^2, \rho\})$$

$$+ V(2c\rho c^\dagger - \{c^\dagger c, \rho\}) \quad (3)$$

در اینجا $C = a_1 - a_2$ ، اپراتور پرش است که منجر به جفت شدگی اتلافی می شود. نوسانگرهای کوانتومی جفت شده اتلافی و اندرپل از نظر کوانتومی در منبع های [۴، ۱۰] با تمرکز بر فرکانس های ورودی و قفل شدگی فاز برای پدیده ی همگام سازی مورد مطالعه قرار گرفته است. در اینجا ما قصد داریم همبستگی کوانتومی میان آنها را مورد بررسی قرار دهیم.

اطلاعات متقابل و همبستگی

اطلاعات متقابل کمیتی است که رابطه بین دو متغیر تصادفی که بطور همزمان نمونه برداری شده اند را اندازه گیری می کند. برای یک حالت کوانتومی ρ که متشکل از دو زیر سیستم با ماتریس های چگالی کاهش یافته $\rho_A = Tr_B(\rho)$ و $\rho_B = Tr_A(\rho)$ می باشد ، اطلاعات متقابل کوانتومی بصورت زیر تعریف می شود:

$$I = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho) \quad (4)$$

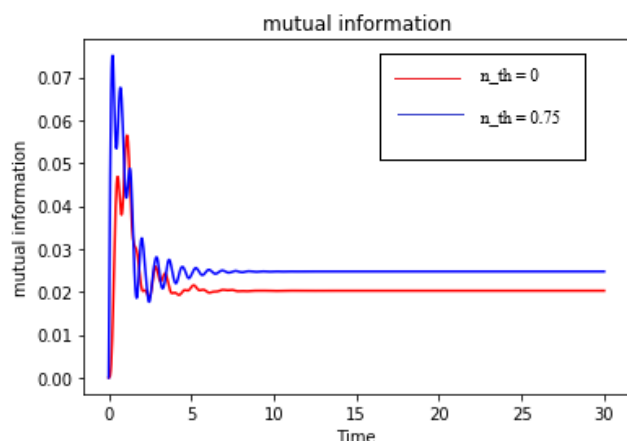
همگام سازی ، درهم تنیدگی ، اختلاف کوانتومی و بسیاری دیگر از مفاهیم فیزیکی در نوسانگرهای جفت شده و اندرپل توسط دانشمندان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است [۷-۳]. ما در این مقاله همبستگی بین دونوسانگر و اندرپل که به صورت اتلافی با یکدیگر جفت شده اند را بررسی می کنیم.

همبستگی، اطلاعات یک سیستم از دیگری است و نقش مهمی در فیزیک بسیاری از اجسام، فیزیک آماری و فناوری اطلاعات بازی می کند [۸]. در ابتدا همبستگی را معادل با در هم تنیدگی فرض می کردند و تصور می شد که در حالت های جداپذیر نقشی در انجام محاسبات کوانتومی ندارند ، اما حالت های کوانتومی وجود دارد که درهم تنیده نیستند ولی می توانند برای انجام محاسبات کوانتومی مفید باشند. تلاش های زیادی برای فهم همبستگی انجام گرفته و معیارهای مختلفی برای اندازه گیری آن تعریف شده است می توان به درهم تنیدگی ، دیسکورد و اطلاعات متقابل اشاره نمود.

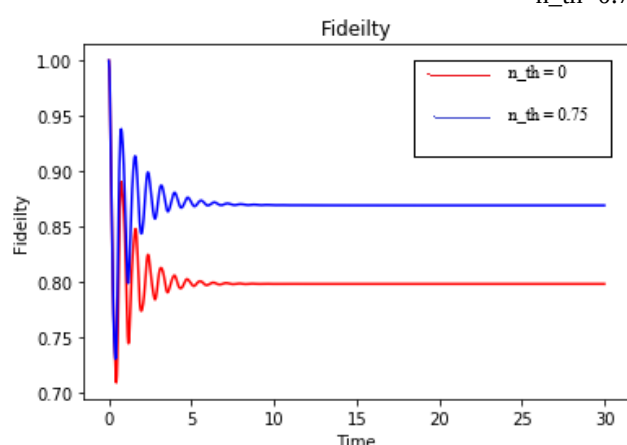
هماندهی^۵ یک مفهوم مرکزی برای اطلاعات کوانتومی است. این یک نسخه ریاضی برای اندازه گیری درجه شباهت یک جفت حالت کوانتومی می باشد. در عمل موقعیت های بسیاری وجود دارد که چنین مقایسه ای می تواند مفید باشد. برای مثال ، از آنجایی که از نظر تجربی یک حالت کوانتومی توسط نواقص و اختلال محدود شده است ، بطور کلی علاقمند هستند به پیدا کردن حالت واقعی تولید شده نزدیک به حالتی که تولید آن در نظر گرفته شده است [۹].

بدین منظور با استفاده از نرم افزار شبیه سازی کیوتیپ ، اطلاعات متقابل و هماندهی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل را با در نظر گرفتن اثر دما مطالعه می کنیم.

این مقاله بدین ترتیب مرتب شده است که نخست دو نوسانگر جفت شده کوانتومی و اندرپل را بررسی کرده و معادله اصلی^۶ سیستم را شناسایی می کنیم و سپس ارتباط بین اطلاعات متقابل و همبستگی را بررسی کرده و در بخش سوم همبستگی دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل را با مقایسه نمودار اطلاعات متقابل و هماندهی در حالت وجود دما و نبود آن که با کمک نرم افزار



شکل ۱: اطلاعات متقابل در اثر جفت شدگی اتلافی در حالت $n_{th}=0$ و $n_{th}=0.75$



شکل ۲: هماندهی در اثر جفت شدگی اتلافی در حالت $n_{th}=0$ و $n_{th}=0.75$

نتیجه گیری

در این کار ما وجود همبستگی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپیل را با استفاده از اندازه گیری اطلاعات متقابل و هماندهی آنها در دو حالت، در نظر گرفتن تاثیر دما و در نظر نگرفتن آن بررسی کردیم و مشاهده نمودیم که افزایش دما میزان اطلاعات متقابل و هماندهی را بهبود می بخشد که نشان دهنده اثر مثبت جفت شدگی اتلافی با وجود دما بر همبستگی می باشد. بنابراین می توان گفت جفت شدگی اتلافی در حالت وجود دما سبب بهبود همبستگی در نوسانگرهای جفت شده و اندرپیل می شود. با توجه به اهمیت نقش همبستگی در اجسام فیزیکی، فیزیک ماده چگال، محاسبات و اطلاعات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و همچنین وجود برهم کنش سیستم های کوانتومی با محیط اطراف

که $S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log(\rho)]$ ، آنتروپی ون نیومن است [۴].

در نظریه اطلاعات کلاسیک، اطلاعات متقابل، اندازه گیری بین دو متغیر تصادفی A و B است. بطور عملیاتی مقدار اطلاعات متغیر A را در مورد متغیر B نشان می دهد. معادله (۴) تعمیم مستقیم این مقدار به سیستم های توصیف شده توسط حالت های کوانتومی است. مزیت این روش مبتنی بر اطلاعات این است که به سادگی، می توان با جایگزینی آنتروپی شانون با آنتروپی ون نیومن، آن را بطور مستقیم به سیستم کوانتومی گسترش داد [۴].

اطلاعات متقابل کوانتومی مقدار کل همبستگی را در یک سیستم توصیف می کند و این مجموع را می توان به همبستگی های کلاسیک و کوانتوم تقسیم کرد.

همبستگی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپیل

اثر جفت شدگی اتلافی بر همبستگی بارها مورد مطالعه قرار گرفته است و در بعضی سیستم ها، جفت شدگی اتلافی اثر مثبتی بر همبستگی داشته و باعث بهبود همبستگی شده است [۵، ۱۱، ۱۲]. در این پژوهش ما همبستگی بین دو نوسانگر جفت شده و اندرپیل را مطالعه کرده ایم. مقدار کل همبستگی موجود در یک سیستم را می توان با سنجش اطلاعات متقابل اندازه گیری کرد و حفظ شدن حالت کوانتومی سیستم را نیز با اندازه گیری هماندهی مورد سنجش قرار داد. بنابراین ما با استفاده از نرم افزار کیوتیپ اطلاعات متقابل و هماندهی بین دو نوسانگر جفت شده اتلافی را با تغییر دما بررسی کرده و مشاهده کردیم که افزایش دما باعث افزایش میزان اطلاعات متقابل شکل ۱ و نرخ هماندهی شکل ۲ می شود، که نشان دهنده اثر مثبت بر میزان همبستگی میان دو نوسانگر جفت شده و اندرپیل دارد و نزدیکی حالت کوانتومی سیستم به حالت اولیه را بیشتر حفظ می کند، بنابراین می توان گفت جفت شدگی اتلافی با وجود دما سبب بهبود همبستگی در نوسانگرهای جفت شده و اندرپیل شده و سرعت انتقال اطلاعات را افزایش می دهد.

master^۶

این بررسی می تواند در سیستم های الکتریکی ، کامپیوترهای کوانتومی و حتی درمان بیماری ها بسیار کاربردی باشد. اخیرا ارتباط میان همبستگی کوانتومی و همگام سازی کوانتومی توسط دانشمندان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است [۷،۱۰،۱۳] ما قصد داریم همگام سازی و همبستگی کوانتومی میان دو نوسانگر جفت شده اتلافی و اندرپل را در آینده مورد بررسی قرار دهیم.

مرجع ها

- [۱] W. Cao; "Van der Pol Oscillator"; In Celestial mechanic, MAT983. Junior Seminar on Hamiltonian Mechanics 2013 (p. 9).
- [۲] M. Tsatsos; "Theoretical and Numerical study of the Van der Pol equation"; Doctoral desertation, Aristotle University of Thessaloniki. 2006 Jul;4(6).
- [۳] S.Walter, A.Nunnenkamp and C.Bruder; " Quantum synchronization of two Van der Pol oscillators"; *Annalen der Physik*. 2015 Jan;527(1-2):131-8.
- [۴] V.Ameri, M.Eghbali-Arani, A.Mari, A.Farace, F.Kheirandish, V.Giovannetti and R.Fazio; "Mutual information as an order parameter for quantum synchronization"; *Physical Review A*. 2015 Jan 5;91(1):012301.
- [۵] A.K.Rajagopal and R.W.Rendell; "Decoherence, correlation and entanglement in pair of coupled quantum dissipative oscillators" *Physical Review A* 63,no.,2(2001);022116.
- [۶] T.E.Lee, H.R.Sadeghpour; " Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions"; *Physical review letters* 111, no.23 (2013): 234101.
- [۷] F.Galve, G.Giorgi and R.Zambrini; "Quantum correlations and synchronization measures"; In *Lectures on General Quantum Correlations and their Applications*, pp.393-420. Springer, Cham, 2017.
- [۸] P.R.Dorner, V.Vedral; "Correlation in quantum physics"; *International Journal of Modern Physics B*. 2013 Jan 30; 27(01n03):1345017
- [۹] L.Yeong-Cherng, Y.H.Yeh, P.EMF.Mendonca, R.Y.Teh, M.D.Reid and P.D.Drummond; "Quantum fidelity measures for mixed states"; *arXiv preprint arXiv:1810.08034* (2018).
- [۱۰] P.T.E.Lee. Ck.chan, S.Wang; "Entanglement tongue and quantum synchronization of disordered oscillators "; *Physical Review E*. 2014 Feb 12; 89(2):022913.
- [۱۱] M.Gonzalo, F.Galve, G.L.Giorgi, E.Hernández and R.Zambrini; "Synchronization, quantum correlations and entanglement in oscillator network"; *Scientific reports* 3 (2013): 1439.
- [۱۲] S.P.Vyatchanin and M.B.Andrey; "Quantum speed meter based on dissipative coupling"; *Physical Review A* 93.6 (2016): 063817.
- [۱۳] M.Gonzalo and R.Zambrini; "Synchronization and quantum correlations between coupled dissipative oscillators"; " In *2011 Fifth Rio De La Plata Workshop on Laser Dynamics and Nonlinear Photonics*, pp. 1-3. IEEE, 2011.

Qutip^۱Balthazar Van der Pol^۲Philips^۳Limit cycle^۴Fidelity^۵

چکیده

در این مقاله با حل معادله شرودینگر و به دست آوردن ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع برای سیستم سه بعدی ذره داخل ناحیه استوانه ای و نیز بررسی قانون اول ترمودینامیک، کارو گرما را برای این سیستم به دست آوردیم و نیز با استفاده از روابط کارو گرما بازده ماشین گرمای اتوی کوانتومی را در قالب سیستم ذره در جعبه استوانه ای در پوش دار برحسب ریشه های چند جمله ای بسل محاسبه کردیم.

واژه های کلیدی : ماشین گرمایی کوانتومی، فرآیند ترمودینامیک کوانتومی، قانون اول ترمودینامیک

Quantum heat engine in the cylindrical box

Azimi, Hadiseh; Hasanpour, Sara; Faizi, Esfandiyar

Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Abstract

In this paper by solving Schrodinger equation and obtaining its eigenvalues and eigenfunctions of a particle in the cylinder with cover and by investigating of first law of thermodynamic, we evaluated work and heat. Then by using these quantities we calculated the efficiency of quantum Otto heat engine within the cylinder, in terms of roots of Bessel functions..

Keywords: Quantum heat engine, Quantum thermodynamic process, First law of thermodynamics

مقدمه

های حرارتی کوانتومی، درمورد ماشین کلاسیک کارنو است. ماشین کارنو کوانتومی از یک ذره کوانتومی در جعبه سه بعدی استوانه ای به عنوان ماده کار استفاده می کند. چرخه کارنو این سیستم از فرایندهای بی درو و هم حجم تشکیل می شود که به فرایندهای کلاسیکی آنها شبیه است. یکی از ماشینهای حرارتی که توصیف عملکرد آن حائز اهمیت است، ماشین اتو است. در این مقاله تلاش شده است تا مطالعه کلی سیستم سه بعدی استوانه ای ماشین حرارتی اتو که در مطالعات قبلی از یک گاز ایده ال به عنوان ماده کار استفاده می کرد ارائه گردد. تلاش بعدی در این مقاله بررسی وضعیت ماشین حرارتی اتو با استفاده از قانون اول ترمودینامیک است که برای سیستم کوانتومی که دیدگاه مکانیک اماری از اندازه گیری انرژی در مکانیک کوانتوم دارد، است. سپس نیرو را برای سیستم کوانتومی به دست می آوریم. قانون اول ترمودینامیک را در قالب نسخه کوانتومی برای فرایندهای بی درو و هم حجم بررسی می کنیم.

هم چنین بازده ماشین گرمایی اتو را محاسبه کرده در بخش آخر نتیجه گیری می کنیم.

ارتباط بین فیزیک کوانتوم و ترمودینامیک موضوع پژوهش جالبی از سال ۱۹۵۰ به بعد بوده است. بررسی ترمودینامیک کوانتوم علاوه بر اینکه در پردازش اطلاعات کوانتوم کاربرد دارد، دیدگاه تازه تری به مسائل ترمودینامیک، مثل شیطانی ماکسول و کلیت قانون دوم دارد. در این میان یکی از مسائل توسعه مکانیک کوانتوم فرایندهای کلاسیک ترمودینامیک و چرخه موتورهای کوانتوم است. این موتورها ماده کار کوانتومی دارند. تفاوت اصلی بین موتورهای حرارتی کوانتومی و موتورهای حرارتی مرسوم این است که در موتورهای حرارتی کوانتومی، سطح انرژی جدای ذره است. با فهم جنبه های اساسی ترمودینامیک به پرسش های جدید پاسخ داده شده : چه محدودیت هایی برای ماشین های گرمایی به دلیل اندازه آنها وجود دارد؟ و از ماده ی کار کوانتومی به دلیل خواصی که دارد انتظار می رود که با گرمای دریافتی از چرخه، بیشترین کار را انجام داده و باعث بهبود عملکرد سیستم گردد. بیشترین مقدار کار را از چرخه ترمودینامیکی دریافت کند و باعث بهبود عملکرد سیستم گردد [۱،۲]. تعدادی از مطالعات در زمینه ماشین

جعبه استوانه ای با درپوش

با استفاده از روابط شماره (۳) و (۶) مقدار انرژی را محاسبه می کنیم

$$E = \sum_n |a_n|^2 \frac{\hbar}{2m} \frac{n^2 \pi^2 R^2 + \alpha_{0,n}^2 L^2}{L^2 R^2} \quad (۷)$$

با اعمال نیرو به استوانه، در پوش استوانه به سمت خارج رانده شده و طول استوانه افزایش می یابد و این عمل باعث کاهش انرژی می شود. بنابراین تغییرات انرژی سیستم وابسته به تغییرات طول سیستم است که در ادامه برای محاسبه نیرو از این موضوع استفاده می کنیم.

قانون اول ترمودینامیک، نیرو و انرژی برای سیستم کوانتومی

در این بخش ما نیرو و انرژی سیستم را بر پایه تغییرات مقدار چشم داشتی هامیلتونی حساب می کنیم. مقدار چشم داشتی هامیلتونی مجموع انرژی تک تک اجزای سیستمی باشد که انرژی کل سیستم را تعریف می کند. تغییرات انرژی با استفاده از رابطه شماره (۶) به شکل زیر در می آید

$$dE = \sum_n \varepsilon_n dp_n + \sum_n p_n d\varepsilon_n \quad (۸)$$

این عبارت قانون اول ترمودینامیک در بیان کوانتومی است. قسمت اول معادله تغییرات شرایط ویژه سیستم یا احتمال dp_n و قسمت دوم تغییرات انرژی ترازها $d\varepsilon_n$ را می دهد. ما فرآیند را تحت فرآیند بی دررو شروع می کنیم که تئوری بی دررو طلب می کند تا ترازهای انرژی را بدون تغییر در احتمال حضورشان به دست آورد، در این حالت p_n ثابت است. در نتیجه قانون اول در رابطه شماره (۷) به این شکل حاصل

می شود

$$dE = \sum_n p_n d\varepsilon_n \quad (۹)$$

در حالت کلاسیکی تحت فرآیند بی دررو هیچ گرمایی منتقل نمی شود تا انرژی درونی تغییراتی داشته باشد و فقط کار δW انجام می شود. برای انجام کار تغییرات حجم استوانه ای از طریق افزایش طول استوانه از L به $L + dL$ شکل می گیرد

$$dE = -F dL \quad (۱۰)$$

با استفاده از روابط شماره (۹) و (۱۰) برای نیرو داریم

ما از یک ماشین حرارتی کوانتومی سه بعدی به جای گاز در سیلندر استفاده می کنیم. این سیستم، استوانه ای به طول L و شعاع r دارد که پتانسیل روی محور استوانه بی نهایت است. استوانه دارای درپوش بوده و معادله ی شرودینگر سیستم به شکل زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi(r,z)}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi(r,z)}{\partial z^2} \right) = E \psi(r,z) \quad (۱)$$

انرژی پتانسیل در دیواره های استوانه و نیز محورهاستوانه بی نهایت است و تابع موج در دیواره ها و محور استوانه صفر است. شرایط مرزی تابع موج را به شکل زیر می دهد [۳]

$$\psi_n(r,z) = \frac{\sqrt{2} J_0 \left(\frac{\alpha_{n,0}}{R} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right)}{R J_1(\alpha_{n,0}) \sqrt{L\pi}} \quad (۲)$$

ریشه های معادله بسل مرتبه صفر هستند که $\alpha_{n,0}$ $n=0,1,2,\dots$ است و به ازای هر n ، برای $\alpha_{n,0}$ مقدار معینی حاصل می شود و این مقادیر در اندازه گیری ویژه مقادیر تابع موج مورد استفاده قرار می گیرند.

ویژه مقدار انرژی نیز به این شکل خواهد بود [۳]

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar}{2m} \frac{n^2 \pi^2 R^2 + \alpha_{0,n}^2 L^2}{L^2 R^2} \quad (۳)$$

$\psi(r,z)$ حالت کلی سیستم است که از مجموع تک تک ویژه توابع حاصل می شود

$$\psi(r,z) = \sum_n a_n \psi_n(r,z) \quad (۴)$$

a_n ضریب بسط نام دارد. با به هنجار کردن حالت های سیستم ضریب بسط به ضریب به هنجارش تبدیل شده و احتمال حضور ذره را محاسبه می کنیم که در مجموع یک می شود.

$$\sum_n |a_n|^2 = \sum_n p_n = 1 \quad (۵)$$

با تکیه بر مکانیک کوانتوم که برای به دست آوردن میانگین هر کمیت، از مقدار چشم داشتی عملگر مشاهده پذیر کمیت استفاده می کند، مقدار چشم داشتی هامیلتونی را محاسبه می کنیم تا انرژی کلی سیستم ای بزرگ را به دست آوریم.

$$E = \langle \hat{H} \rangle = \sum_n |a_n|^2 \varepsilon_n = \sum_n p_n \varepsilon_n \quad (۶)$$

کوانتومی سه بعدی استوانه‌ای کارنو استفاده شده است و این بیان از نیرو $F = \frac{dE}{dL}$ ، یک بیان کلی برای سیستم کوانتومی نیست و فقط برای موارد ویژه ای مورد استفاده قرار میگیرد. همانطور که قبلا هم اشاره کردیم، هرچقدر که انرژی کاهش می یابد درپوش استوانه به طرف بیرون می‌رود و طول L افزایش می‌یابد. بنابراین با استفاده از رابطه شماره (۷) و (۱۱) نیرو را محاسبه می‌کنیم

$$F = \sum_n p_n \frac{\hbar \pi^2 n^2}{m} \frac{1}{L^3} \quad (۱۶)$$

—فرآیند هم حجم

فرآیند هم‌حجم به گونه‌ای است که با یک منبع گرما در ارتباط است و کار در این فرآیند انجام نمی‌گیرد. چرا که حجم ثابت است و $dL = 0$ می‌شود و تغییرات فشار (p) و دما (T) وابسته به همدیگر هست. شکل کوانتومی فرآیند هم‌حجم شبیه شکل کلاسیکی آن است. احتمال حضور ذره در فرآیند بی درو به جذب یا آزاد کردن گرما بستگی دارد. در نتیجه گرمای داده شده به سیستم صرف افزایش انرژی سیستم می‌شود

$$\delta Q = dE \quad (۱۷)$$

ماشین گرمایی کوانتومی

برای اینکه بتوانیم گرما را به کار تبدیل کنیم زنجیری از فرآیند ها را نیاز داریم تا به وسیله آن این تبدیل را بدون تغییر در وضعیت سیستم انجام دهیم. حال این زنجیره وقتی حالت نهایی سیستم را به حالت ابتدایی وصل می‌کند، تشکیل یک چرخه می دهد. چرخه ها از مسیرهای مختلف تشکیل می‌شوند و هر مسیر فرآیند ویژه‌ای را توصیف می‌کند. در ادامه به چرخه ماشین اتو و نیز کار و بازده آن می‌پردازیم. حال با استفاده از رابطه شماره (۲) حالت پایه تابع موج را محاسبه می‌کنیم

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{2} J_0 \left(\frac{\alpha_{n,0} r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi z}{L} \right)}{R J_1(\alpha_{n,1}) \sqrt{L \pi}} \quad (۱۸)$$

و نیز با به کار گیری رابطه شماره (۳) برای انرژی پایه سیستم داریم،

$$F = - \sum_n p_n \frac{d\epsilon_n}{dL} \quad (۱۱)$$

برای به دست آوردن میانگین نیرو F ، باید میانگین مجموع F_n هارا محاسبه کنیم. دراین میان مقداری گرمای δQ به سیستم تزریق می‌کنیم تا سیستم مقدار کار δW را انجام دهد. گرمای تزریق شده به سیستم علاوه بر انجام اندکی کار، انرژی درونی را نیز تغییر می‌دهد و قانون اول ترمودینامیک را به شکل مقابل به ما می‌دهد [۴]

$$dE = dQ - \delta W \quad (۱۲)$$

تغییرات داده شده در رابطه شماره (۸) نشانگر تغییرات جزئی در طول استوانه از طریق تغییر انرژی به اندازه $\partial \epsilon_n$ است که همان عبارت انجام کار در قانون اول ترمودینامیک را شامل می‌شود و در قسمت اول رابطه نیز ترازهای انرژی را بحث می‌کند که تغییرات گرما را شامل می‌شود

$$\sum_n \epsilon_n dp_n = \delta Q \quad (۱۳)$$

مدل کوانتومی فرآیند های ترمو دینامیکی

—فرآیند بی درو

فرآیند بی درو کلاسیکی را می‌تواند در قالب فرآیند بی‌درو کوانتومی مطالعه کرد. در این نوع فرآیند هیچ انتقال گرمایی رخ نمی‌دهد اما کار می‌تواند انجام گیرد. در فرآیندهای بی‌درو کلاسیکی لزوماً احتمال حضور ثابت نیست بنابراین می‌توان فرآیند بی‌درو کلاسیکی را زیر مجموعه‌ای از فرآیند بی‌درو کوانتومی در نظر گرفت اما عکس این موضوع صحیح نیست. دراین حالت قانون اول به این شکل در می‌آید

$$dE = -F dL \quad (۱۴)$$

چون تغییرات انرژی با تغییر در طول استوانه ایجاد می‌شود، با استفاده از فرآیند بی‌درو می‌توانیم نیرو را به این شکل بیان کنیم

$$F = - \sum_n p_n \frac{dE_n(L)}{dL} = - \frac{dE}{dL} \quad (۱۵)$$

این معادله قبلا در ماشین کوانتومی یک بعدی کارنو مورد استفاده قرار گرفته است که ما با استفاده از این معادله برای سیستم کوانتومی استوانه ای نیرو را به دست آوردیم. در ماشین

شکل می گیرد. بنابراین با ورود گرما به سیستم، حجم استوانه از طریق طول افزایش می یابد. در نتیجه گرما در فرآیند انبساط هم حجم وارد سیستم می شود. گرمای ورودی را به شکل زیر محاسبه می کنیم،

$$Q_{HO} = E_3 - E_2 = \frac{\hbar \pi^2}{2m} \left(\frac{\langle n^2 \rangle}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{\hbar}{2mR^2} (\langle \alpha_{0,n}^2 \rangle - \alpha_{0,1}^2) \quad (22)$$

با داشتن کار و گرمای وارد شده به سیستم می توان بازده چرخه را محاسبه کرد. بنابراین

$$\eta_o = \frac{2\pi^2 \left[\frac{(L_2 - L_1)}{L_1^3} + \langle n^2 \rangle \left(\frac{1}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2} \right) \right]}{\pi^2 \left(\frac{\langle n^2 \rangle}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2} \right) + \frac{1}{R^2} (\langle \alpha_{0,n}^2 \rangle - \alpha_{0,1}^2)} \quad (23)$$

که منظور از نماد براکت در صورت و مخرج میانگین کمیت داخل آن روی تمام حالات انرژی در نقطه ۳ می باشد. با داشتن مقادیر ریشه های معادله بسل و همچنین طول ابتدا و انتهای سیستم می توان مقدار بازده را به دست آورد.

نتیجه گیری

در این بررسی نشان دادیم که ماشین گرمایی کوانتومی سه بعدی شبیه مدل کلاسیکی این ماشین با گاز ایده آل است که در محاسبه انرژی برای هر دو مدل از مقدار چشم داشتی هامیلتونی استفاده می کنند. همچنین فرآیندهای استفاده شده در چرخه ماشین گرمایی کوانتومی اتو با مدل کلاسیکی چرخه یکی بوده و شامل فرآیندهای حجم و بی دررو هستند که انتقال گرما به سیستم و انجام کار به وسیله ماشین با این دو فرآیند توصیف می شود. همچنین با استفاده از ریشه های معادله بسل که برای سیستم استوانه ای در پوش دار وجود دارد، می توان ویژه بردار و ویژه مقدار تابع موج را حساب کرد. در نهایت بازده ماشین گرمایی اتو استوانه ای کوانتومی که هدف اصلی این مقاله بود، پس از طی مراحل یاد شده به دست آمد.

منابع

- [1] T. D. Kieu, "Quantum Heat Engine, the Second Law and Maxwell's Daemon," arXiv:quant-ph/0311157v5
- [2] E. Latifah and A. Purwanto Journal of Modern Physics 4, (2013).
- [3] EY Villegas., arXiv preprint arXiv: 1205.3444 (2012).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Statistical Physics, Part I," 3rd Edition, Pergamon Press, 1980.

$$E_1 = \frac{\hbar}{2m} \frac{\pi^2 R^2 + \alpha_{0,1}^2 L^2}{L^2 R^2} \quad (19)$$

در ادامه نسخه کوانتومی قانون اول، نیرو، انرژی و فرآیندهای ترمودینامیکی را که در بخش های قبل مورد بررسی قرار گرفتند، برای سنجش بازده ماشین گرمایی اتو به کار می گیریم.

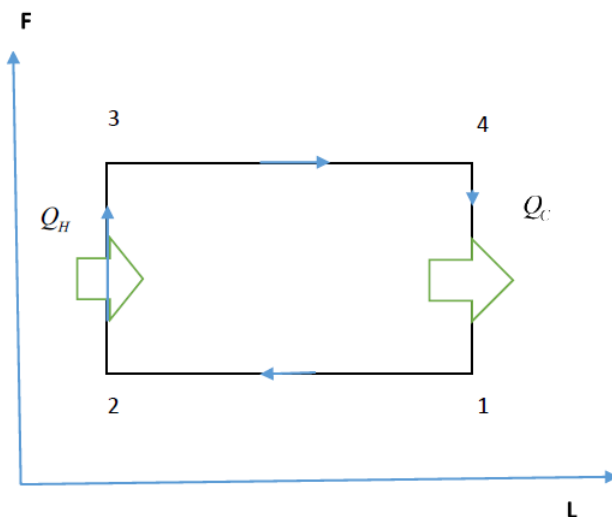
چرخه کوانتومی اتو

این چرخه شامل چهار فرآیند: تراکم بی دررو، انبساط بی دررو و دو فرآیند هم حجم است و چون کار در فرآیندهای هم حجم انجام نمی گیرد هنگام محاسبه کار از نوشتن جملات مربوط به این دو فرآیند خودداری کردیم. گرما در فرآیند انبساط هم حجم به سیستم وارد و در تراکم هم حجم از سیستم خارج می شود.

$$L_1 = L_4, L_2 = L_3 \text{ است}$$

$$W = \int_{L_1}^{L_2} F_{1 \rightarrow 2} dL + \int_{L_3}^{L_4} F_{3 \rightarrow 4} dL \quad (20)$$

$$W_o = \frac{\hbar \pi^2}{m} \left[\frac{(L_2 - L_1)}{L_1^3} + \langle n^2 \rangle \left(\frac{1}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2} \right) \right] \quad (21)$$



شکل ۱: چرخه ماشین گرمایی اتو

برای اینکه بخواهیم بازده ماشین اتو را ارزیابی کنیم، باید گرمای داده شده به سیستم را به دست آوریم. همانطور که میدانیم انتقال گرما در فرآیند بی دررو صورت نمی گیرد و در این چرخه فقط در فرآیندهای هم حجم انتقال گرما برای سیستم

توزیع کلید کوانتومی با استفاده از پروتکل دو بعدی قطبش - فاز

مهری تونابی^۱، علی^۲؛ داودی دراره، مهدی^۳؛ جانباز، شهروز^۳^۱دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، انتهای خیابان فردوسی، شاهین شهر، اصفهان^۲گروه نانو فیزیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر^۳گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

چکیده

ما در این مقاله یک پروتکل توزیع کلید کوانتومی جدید معرفی می‌کنیم که آن را پروتکل دو بعدی قطبش-فاز (TD-POP) می‌نامیم. در این پروتکل، که کاملاً قابلیت پیاده‌سازی تجربی دارد، از دو درجه‌ی آزادی قطبش و فاز فوتون‌ها برای کدگذاری اطلاعات استفاده می‌شود. افزایش پارامتر غربال‌گری، افزایش نرخ تولید کلید امن در مسافت‌های کوتاه و افزایش خطای ناشی از دستکاری مداخله‌گر در سامانه، که منجر به افزایش احتمال کشف حضور آن می‌شود، امتیازات این پروتکل نسبت به پروتکل BB84 استاندارد قطبشی یا فازی هستند.

واژه‌های کلیدی: توزیع کلید کوانتومی، پروتکل BB84، پروتکل TD-POP، پروتکل‌های ترکیبی QKD

Quantum key distribution with two-dimensional polarization-phase protocol

Mehri Toonabi, Ali^۱; Davoudi Darareh, Mahdi^۲; Janbaz, Shahrooz^۳^۱ Department of Physics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan^۲ Physics Group, Malek Ashtar University of Technology^۳ Mathematics Group, Malek Ashtar University of Technology

Abstract

In this paper we introduce a new QKD protocol, we call it two-dimensional polarization-phase protocol (TD-POP). In this protocol, which has fully empirical implementation capability, two degrees of freedom, polarization and phase of photons are used to encode the information. Increasing the sifting parameter, increasing the secure key generating rate in short distances, and increasing the error resulting from tampering by the eavesdropper in the system, which increases the likelihood of its detection, are the protocol's advantages compared to the polarization or phase standard BB84 protocol.

Keyword: Quantum Key Distribution, BB84 Protocol, TD-POP Protocol, Compound Protocols of QKD

مقدمه

فوتون‌ها به منظور مبادله‌ی بیت‌های کوانتومی استفاده می‌شود. پروتکل دو بعدی قطبش-فاز (TD-POP) که ما در این مقاله آن-را معرفی می‌کنیم و به جنبه‌های مختلف آن می‌پردازیم، یک پروتکل ترکیبی [۳] برای QKD است که در آن مبادله‌ی بیت‌های کوانتومی با استفاده از ترکیب پروتکل‌های BB84 استاندارد قطبشی

پروتکل BB84 اولین و مهم‌ترین پروتکل توزیع کلید کوانتومی (QKD) است که در ۱۹۸۴ توسط بنیت و براسارد پیشنهاد شد [۱]. در پروتکل BB84 استاندارد، معمولاً از قطبش [۱] یا فاز [۲]

آماده شده دارای فاز و قطبش تصادفی خواهند بود. آلیس پایه‌های انتخاب شده را به صورت زوج‌های متناظر (پایه‌ی فاز، پایه‌ی قطبش) ذخیره و سپس فوتون‌ها را از طریق کانال کوانتومی برای باب ارسال می‌کند.

جدول ۱: قراردادهای پروتکل TD-POP. (الف) قراردادهای مربوط به آلیس؛ (ب) قراردادهای مربوط به باب.

(الف)

احتمال فاز آلیس

احتمال قطبش آلیس

$\oplus$

0°

$\Phi_A = 0$

1°

$\Phi_A = \pi$

$\ominus$

0°

$\Phi_A = \pi/2$

1°

$\Phi_A = 3\pi/2$

$\oplus$

0°

$P_A = 0^\circ$

1°

$P_A = 90^\circ$

$\ominus$

0°

$P_A = 45^\circ$

1°

$P_A = 135^\circ$

(ب)

وحد آشکارسازی

اندازه‌گیری فاز باب

اندازه‌گیری قطبش باب

$\oplus : \theta' \text{ (off)}$

 $\ominus : -45^\circ \text{ (on)}$

$\Theta : \phi_2 = 0$

 $\oslash : \phi_2 = \pi/2$

$s_p : \frac{\Delta\theta = 0}{0^\circ_{ph}}$

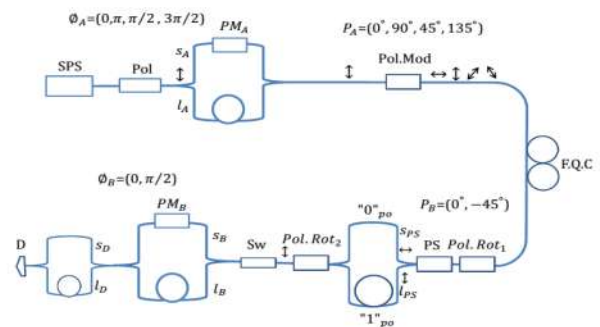
 $l_p : \frac{\Delta\theta = \pi}{1^\circ_{ph}}$

ج) باب ابتدا در بخش اندازه‌گیری قطبش، یکی از پایه‌های $\oplus$ یا $\ominus$ را به تصادف انتخاب و مطابق جدول ۱-ب، چرخش قطبش متناظر را اعمال می‌کند. اگر پایه‌های آماده‌سازی و اندازه‌گیری قطبش یکسان انتخاب شوند، فوتون از یک بازوی مشخص PS عبور خواهد کرد. در غیر این صورت، احتمال این‌که فوتون وارد هر یک از دو بازوی کوتاه یا بلند PS شود برابر $1/2$ است. با استفاده از زمان رسیدن فوتون‌ها به آشکارساز، می‌توان تعیین کرد که هر فوتون از کدام بازوی PS عبور کرده است. به عبور فوتون از بازوی SPS بیت قطبش ۱ و از بازوی I_{PS} بیت قطبش ۰ نسبت می‌دهیم. فوتون‌ها پس از PS، با توجه به این‌که از بازوی S_A رسیده‌اند یا از I_A ، با استفاده از یک کلید قابل کنترل، به ترتیب وارد بازوی بلند (I_B) و کوتاه (S_B) تداخل سنج ماخ - زرنر باب می‌شوند. سپس مطابق جدول ۱-ب، فاز هر فوتون با انتخاب تصادفی پایه‌های $\oplus$ یا $\ominus$ اندازه‌گیری و نتایج حاصل از آن ثبت می‌شود. اگر پایه‌های

و فازی به منظور اعمال و اندازه‌گیری همزمان قطبش و فاز بر روی یک فوتون، و استخراج دو کیوبیت از هر تک فوتون انجام می‌گیرد.

گام به گام اجرای پروتکل ترکیبی TD-POP

می‌توان یک سامانه‌ی QKD مبتنی بر پروتکل ترکیبی TD-POP را مطابق شکل ۱ برپا کرد.



شکل ۱: چیدمان شماتیک پروتکل TD-POP. SPS: چشمه‌ی حالت‌های تک فوتون؛ Pol: قطبندی خطی؛ PM_A و PM_B به ترتیب مدوله‌کننده‌های فاز فرستنده (آلیس) و گیرنده (باب)؛ Pol.Mod: مدوله‌کننده‌ی قطبش؛ F.Q.C: کانال کوانتومی فیبری؛ Pol.Rot: چرخاننده‌ی قطبش؛ PS: پرتوشکاف قطبشی؛ SW: سوئیچ؛ D: آشکارساز.

اجرای پروتکل TD-POP به صورت زیر است:

الف) تولید کننده‌ی اعداد تصادفی (RNG) یک رشته‌ی n بیتی تصادفی در اختیار آلیس قرار می‌دهد (بیت‌های کد شده).

ب) آلیس به ازای هر یک از این n بیت، یک پالس تک فوتون تولید می‌کند. فوتون از یک قطبندگی خطی عبور می‌کند و سپس توسط یک پرتو شکاف $50/50$ وارد تداخل سنج ماخ - زرنر آلیس می‌شود. اگر فوتون از بازوی کوتاه تداخل سنج (S_A) بگذرد، مدولاتور فاز آلیس مطابق جدول ۱-الف، به تصادف یکی از پایه‌های $\oplus$ یا $\ominus$ را انتخاب و با توجه به بیتی که از RNG گرفته است فاز متناظر با آن پایه و بیت را به فوتون اعمال می‌کند (Φ_A). ولی اگر فوتون وارد بازوی بلند تداخل سنج (I_A) شود، فازی روی آن اعمال نخواهد شد. سپس به تصادف یکی از پایه‌های $\oplus$ یا $\ominus$ انتخاب و با استفاده از همان بیت RNG که در بخش فاز به کار رفته، قطبش متناظر به فوتون اعمال می‌شود. از آن‌جا که فوتون‌های عبوری از بازوهای S_A و I_A در دو زمان مختلف به مدولاتور قطبش می‌رسند، این اعمال قطبش باید در هر دوی این زمان‌ها و با بیت‌ها و پایه‌های یکسان انجام شود. بنابراین هر یک از فوتون‌های

عکس حالت دوم است. نهایتاً در حالت چهارم هر دو پایه ی قطبش و فاز باب با دو پایه ی آلیس یکسان هستند. بنابراین بیت های مربوط به هر زوج بیت باب لزوماً با هم برابر و مشابه با بیت آلیس هستند. از این زوج بیت ها علاوه بر ایجاد کلید، در محاسبه ی خطای ایجاد شده در انتقال کوانتومی بیت ها نیز استفاده می شود.

(و) باب تمام زوج بیت های گروه چهارم را با هم مقایسه و متفاوت بودن هر یک از آن ها را به عنوان یک خطا ثبت می کند. می توان نشان داد که در این پروتکل، حداقل مقدار خطایی که ایو به طور طبیعی در مبادله ی کوانتومی بیت های حالت چهارم (که مبنای محاسبه ی خطا هستند) ایجاد می کند، $37/5\%$ است؛ که این خطا $12/5\%$ از خطای ناشی از مداخله در پروتکل BB84 استاندارد بیش تر است. این اعمال خطای بیش تر، به معنای آن است که ایو هنگام مداخله رد پای بیش تری از خود بر روی پالس ها به جا می گذارد و در نتیجه امکان شناسایی حضور او افزایش می یابد.

پس از شمارش تمام خطاهای موجود در زوج بیت های گروه چهارم، اگر مقدار خطا از $37/5\%$ کم تر باشد، ارتباط کوانتومی امن بوده و گام بعدی پروتکل اجرا خواهد شد. در غیر این صورت، مداخله ی ایو در سامانه شناسایی و شکست عملیات توزیع کلید به آلیس اطلاع داده می شود. توجه شود که ارزیابی خطا در پروتکل TD-POP قبل از توافق پایه ها و بدون نیاز به افشا و قربانی کردن هیچ بیتی از کلید اولیه صورت می گیرد، که این امر موجب تسریع فرآیند توزیع کلید و افزایش طول کلید نهایی می شود.

(ز) برخلاف پروتکل BB84 استاندارد، در این جا لازم نیست باب در تمامی حالت ها به آلیس بگوید کدام پایه ها را کنار بگذارد، بلکه فقط جایگاه زوج های حالت اول را به آلیس اطلاع می دهد. در سایر حالت ها، بدون نیاز به هرگونه توافق پایه، آلیس با توجه به بیتی که از RNG گرفته و باب با رجوع به پایه ایی که درست انتخاب کرده (با ترجیح نتایج مربوط به فاز در سامانه های با کانال فیبر نوری)، می توانند بیت کد شده را استخراج و کلید اولیه ی غربال شده را بین خود توزیع کنند. در این مرحله تنها 25% از کل فوتون های ارسالی، کنار گذاشته می شوند ($S_{TD-POP} = 2/4$)؛ برخلاف پروتکل BB84 استاندارد فازی بهینه، که تنها نیمی از بیت های اولیه ی آن پس از غربالگری باقی می ماند ($S_{DDA} = 1/2$).

آماده سازی ϕ_A و اندازه گیری ϕ_B مشابه باشند، آن گاه $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = 0 \text{ or } \pi$ (تداخل تک فوتون)، و در غیر این صورت: $\Delta\phi = \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 (-\pi/2)$ (عدم تداخل). در حالت اول، اگر $\Delta\phi = 0$ آن گاه فوتون پس از تداخل قطعاً وارد بازوی کوتاه آشکارساز می شود، و اگر $\Delta\phi = \pi$ فوتون به طور قطع از بازوی بلند آشکارساز عبور می کند. ولی در حالت دوم نمی توان به طور قطع مسیر حرکت فوتون به سمت آشکارساز را تعیین کرد.

هر فوتون یکی از مسیرهای $s_A-s_{PS}-l_B$, $l_A-s_{PS}-s_B$, $s_A-s_{PS}-l_B$ و $l_A-l_{PS}-s_B$ را می پیماید و به ابتدای بازوهای آشکارساز می رسد. چون $s_B = s_A$ و $l_B = l_A$ ، بنابراین فوتون های مسیر ۱ و ۲ همانند فوتون های مسیر ۳ و ۴ به طور همزمان به ابتدای بازوهای آشکارساز می رسند.

اگر $l_{PS} - s_{PS} > \max\{l_A - s_A, l_B - s_B\}$ آن گاه در یکی از زمان های

$$t_1 \equiv s_A(l_A) - s_{PS} - l_B(s_B) - s_D$$

$$t_2 \equiv s_A(l_A) - s_{PS} - l_B(s_B) - l_D$$

$$t_3 \equiv s_A(l_A) - l_{PS} - l_B(s_B) - s_D$$

$$t_4 \equiv s_A(l_A) - l_{PS} - l_B(s_B) - l_D$$

ممکن است برخورد یک فوتون توسط آشکارساز ثبت شود. این آشکارسازی ها به ترتیب معادل زوج بیت های (۰ فاز، ۰ قطبش)، (۱ فاز، ۰ قطبش)، (۰ فاز، ۱ قطبش)، و (۱ فاز، ۱ قطبش) هستند.

(د) پس از مبادله ی کوانتومی همه ی بیت های کد شده، آلیس از طریق کانال عمومی زوج پایه های خود برای فاز و قطبش هر فوتون را طبق ترتیب ارسال فوتون ها به باب اطلاع می دهد.

(ه) باب زوج پایه های آلیس را با زوج پایه های خود مقایسه، پایه های مشابه را حفظ و نامشابه ها را حذف می کند. واضح است که باب با احتمال یکسان با یکی از چهار حالت زیر مواجه می شود: در حالت اول هر دو پایه ی قطبش و فاز باب با دو پایه ی آلیس متفاوت هستند. بنابراین هر یک از دو بیت به دست آمده برای باب، از روند تولید کلید حذف شوند. در حالت دوم پایه های قطبش یکسان و پایه های فاز متفاوت هستند. بنابراین نتایج به دست آمده از قطبش حفظ و نتایج فاز کنار گذاشته می شوند. حالت سوم

نمونه‌ای از اجرای پروتکل TD-POP در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲: توزیع کلید کوانتومی با استفاده از پروتکل TD-POP.

آلیس	بیت کد شده	۱	۰	۱	۰
	پایه ۱ (فار)				
	پایه ۲ (قطبش)				
باب	پایه ۱ (قطبش)				
	پایه ۲ (فار)				
نتایج	زمان آشکارسازی	۱ یا ۲	یکی از ۴ زمان	۱ یا ۲	۱ یا ۲
	بیت ۱ (از قطبش)	۱ یا ۰	۱ یا ۰	۱	۰
	بیت ۲ (از فار)	۱	۱ یا ۰	۱	۱ یا ۰
	مقایسه ی پایه	N Y	N N	Y Y	Y N
	(حالت زوج بیت)	(۳)	(۱)	(۴)	(۲)
	توافق پایه	—	N	—	—
	کلید خصوصی	۱	—	۱	۰

۱- نسبت نرخ تولید کلید غریبال شده‌ی پروتکل TD-POP (که آن را معرفی کردیم) به پروتکل BB84 استاندارد بهینه، $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

۲- حداقل مقدار خطایی که اخلاص گر در سامانه‌ی TD-POP ایجاد می‌کند، $\frac{12}{5}\%$ از خطای ناشی از مداخله در پروتکل BB84 استاندارد بیش‌تر است. بنابراین امکان شناسایی حضور اخلاص گر در پروتکل TD-POP بالاتر خواهد بود.

۳- مطابق شکل ۳، تا مسافت انتقال حدود ۱۲۰ کیلومتر، نرخ تولید کلید امن پروتکل TD-POP حدود 0.7% بیش از پروتکل BB84 استاندارد است. بنابراین اگر هدف ما دستیابی به نرخ بیت بالا در مسافت‌های کوتاه‌تر باشد، پروتکل TD-POP گزینه‌ی مناسب‌تری خواهد بود.

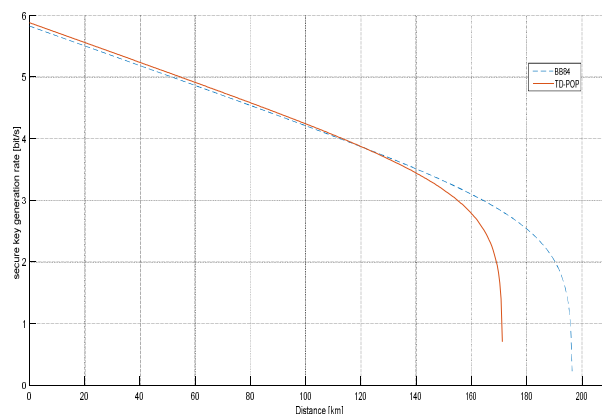
۴- از آن‌جا که در اجرای پروتکل‌های TD-POP و BB84 استاندارد به ترتیب از ۴ و ۲ پنجره‌ی زمانی استفاده می‌شود، با فرض مشابه بودن قطعات مشترک دو سامانه، با استفاده از نتیجه‌ی ۱ و با کمک روابط موجود در [۴]، می‌توان نشان داد که نرخ شمارش تاریک در پروتکل TD-POP، ۳ برابر مقدار آن برای پروتکل BB84 استاندارد است. این عامل نقش محدود کننده در پیشینه مسافت قابل دستیابی توسط پروتکل TD-POP نسبت به پروتکل BB84 استاندارد را ایفا می‌کند. با توجه به سهم غالبی شمارش‌های تاریک آشکارساز در میزان QBER کل سامانه (بوژه در مسافت‌های طولانی)، این امر موجب افزایش تقریباً دو برابری نرخ خطای کلی سامانه‌ی TD-POP نسبت به پروتکل فازی استاندارد می‌شود.

۵- پیچیدگی بیش‌تر و هزینه‌ی تمام شده‌ی بالاتر، از معایب پروتکل TD-POP در مقایسه با یک سامانه‌ی BB84 استاندارد می‌باشند.

مرجع‌ها

- [۱] C. H. Bennett and G. Brassard; "Quantum Cryptography: public key distribution and coin tossing"; In *Proc. IEEE Int. Conf. on Computers, Systems & Signal Processing* (۱۹۸۴) ۱۷۵-۱۷۹.
- [۲] P.D. Townsend, J.G. Rarity and P.R. Tapster; "Single Photon Interference in ۱۰ km Long Optical Fibre Interferometer"; *Electron. Lett.* ۲۹ (۱۹۹۳) ۶۳۴-۶۳۵.
- [۳] D. Bacco, et al. "Two-dimensional distributed-phase-reference protocol for quantum key distribution"; *Sci. Rep.* ۶, (۲۰۱۶) ۳۶۷۵۶.
- [۴] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel and H. Zbinden; "Quantum cryptography"; *Rev. Mod. Phys.* ۷۴ (۲۰۰۲) ۱۶۶.

به منظور مقایسه‌ی پروتکل‌های TD-POP و BB84 استاندارد فازی، نرخ تولید کلید امن به صورت تابعی از مسافت انتقال، برای هر یک از این دو پروتکل در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳: نرخ تولید کلید امن در مقابل مسافت انتقال، برای پروتکل‌های BB84 استاندارد فازی و TD-POP، در حالت استفاده از چشمه‌ی تک فوتون ایده‌آل.

نتیجه‌گیری

حفظ حالت یک کیوبیت دلخواه از واهمدوسی ناشی از کانال پائولی توسط اندازه گیری ضعیف

هیبتی، عذرا

دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

چکیده

در این مقاله با استفاده از اندازه گیری ضعیف روشی برای حفظ حالت یک کیوبیت ناشناخته از واهمدوسی ناشی از هر کانال دلخواه ارائه شده است. نشان داده می شود طرح پیشنهادی مقاله برای برهمکنش یک کیوبیت با کانال پائولی به درستی عمل می کند.

واژه های کلیدی: کیوبیت، اندازه گیری ضعیف، واهمدوسی، کانال پائولی .

Protection of an Unknown Quantum State against Decoherence of Pauli Channel by Weak Measurement

Ozra, Heibati

Department of Fundamental Sciences, Aazarbaijan Shahid Madani University, Tabriz,

Abstract

In this paper, we present a scheme to protect quantum state of an unknown qubit which interacts with a dissipative reservoir, using weak measurement. We show the scheme is effective for the Pauli channel.

Keywords: qubit, weak measurement, decoherence, Pauli channel.

PACS No.

مقدمه

محیط روی سیستم استفاده از اندازه گیری ضعیف می باشد که اثرات منفی واهمدوسی را بطور چشمگیری کاهش می دهد [۱]. با اندازه گیری ضعیف حالت سیستم به یکی از ویژه کت های عملگر اندازه گیری جهش نمی کند و بنابراین امکان بازیابی حالت اولیه وجود دارد. در مطالعات انجام شده، از اندازه گیری ضعیف برای غلبه بر کاهش درهمتنیدگی [۲]، ناهمخوانی کوانتومی [۳]، همدوسی [۴] و فیشر کوانتومی [۵] سیستم های کیوبیتی و کیوتریتی در حضور کانال میراکننده دامنه استفاده شده است.

برهم نهی کوانتومی که منشاء همدوسی کوانتومی و درهمتنیدگی است یکی از مهمترین ویژگی های مکانیک کوانتومی می باشد که نقش مهمی در پردازش اطلاعات کوانتومی دارد. از آنجاییکه برهمکنش سیستم های کوانتومی با محیط اجتناب ناپذیر بوده و منجر به واهمدوسی و از بین رفتن برهم نهی کوانتومی می شود، روشهای بسیاری برای غلبه بر واهمدوسی و حفظ برهم نهی پیشنهاد شده است. یک شیوه مؤثر برای کاهش تاثیر

برهم نهی را از بین نمی برد ولی احتمال حضور در هریک از ویژه حالت ها را تغییر می دهد. از این مفهوم برای حفظ برهم نهی در یک حالت کوانتومی استفاده می شود.

افزایش فیدلیتی با استفاده از اندازه گیری ضعیف

یک کیوبیت در حالت خالص را در نظر می گیریم که نمایش بلاخ آن بصورت زیر داده می شود:

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(I + r \cdot \sigma). \quad (3)$$

$\varepsilon(\rho_0)$ حالت کیوبیت بعد از برهمکنش با محیط است:

$$\varepsilon(\rho_0) = \frac{1}{2}(I + (M\vec{r} + \vec{t}) \cdot \sigma), \quad (4)$$

بطوریکه M یک ماتریس $3 \otimes 3$ حقیقی و r یک بردار ثابت است. انتظار می رود فیدلیتی بین حالت اولیه و حالت سیستم بعد از عبور از کانال که با

$$F(\rho_0, \varepsilon(\rho_0)) = \frac{1}{2}(1 + r \cdot (M\vec{r} + \vec{t})), \quad (5)$$

نشان داده می شود، کوچکتر از یک باشد. با قرار دادن یک یا دو عملگر اندازه گیری ضعیف در مسیر کیوبیت می توان مقدار فیدلیتی بین حالت اولیه و حالت بعد از برهمکنش با محیط را افزایش داد.

در مطالعاتی که اندازه گیری ضعیف را برای غلبه بر واهمدوسی در کانال میراکننده دامنه و میراکننده فاز بکار برده اند، این عملگر برای یک سیستم دوبعدی بصورت زیر تعریف شده است:

$$W_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-q_0}|1\rangle\langle 1|, \quad (6)$$

$|0\rangle$ ویژه حالتی است که در کانال ناوردا می ماند. همچنین عملگر W_0 قبل از عبور کیوبیت از کانال روی آن اعمال می شود. در بسیاری از موارد استفاده از یک عملگر اندازه گیری ضعیف بازگشتی بعد از برهمکنش سیستم با محیط می تواند در حفظ همدموسی یا همبستگی موجود در سیستم مفید باشد. عملگر اندازه گیری ضعیف بازگشتی را به شکل زیر بیان می کنند:

$$R_1 = \sqrt{1-q_1}|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \quad (7)$$

واضح است که این تعاریف برای اندازه گیری ضعیف برای هر کانال دلخواه مناسب نیست.

همچنین نشان داده اند که با اندازه گیری ضعیف و اندازه گیری ضعیف بازگشتی امکان حفظ حالت یک سیستم کوانتومی دو یا سه بعدی در عبور از کانال میراکننده دامنه وجود دارد. در این مقاله ادعا می کنیم که با انتخاب مناسب عملگر اندازه گیری ضعیف می توان اثر هر کانال دلخواهی را روی یک کیوبیت در حالت کلی کاهش داد.

اندازه گیری ضعیف

اندازه گیری نقش مهمی در مکانیک کوانتومی ایفا می کند. برای انجام یک اندازه گیری کوانتومی باید مجموعه ای از عملگرهای تصویری متعامد را که متناظر با فضای حالت یک عملگر هرمیتی است، در نظر گرفت. در این نوع از اندازه گیری که اندازه گیری فون نویمن نامیده می شود، سیستم بطور غیر قابل بازگشتی به یکی از ویژه حالت های خود می رود [۶]. بنابراین، اندازه گیری فون نویمن حالت سیستم کوانتومی را تغییر می دهد. برای اینکه اثر اندازه گیری روی سیستم کوانتومی به حداقل برسد، اندازه گیری دیگری به نام اندازه گیری ضعیف که اولین بار توسط آهارانوف، آلبرت و وایدمن در ۱۹۸۸ معرفی شده است، بکار برده می شود [۷]. در اندازه گیری ضعیف اطلاعات استخراج شده از سیستم کوانتومی محدود می گردد بطوریکه، اندازه گیری منجر به جهش حالت سیستم به یک از ویژه کت ها نمی شود؛ بنابراین امکان بازگشت به حالت اولیه وجود دارد.

در حالت کلی عملگرهای اندازه گیری ضعیف با روابط زیر داده می شوند [۸]:

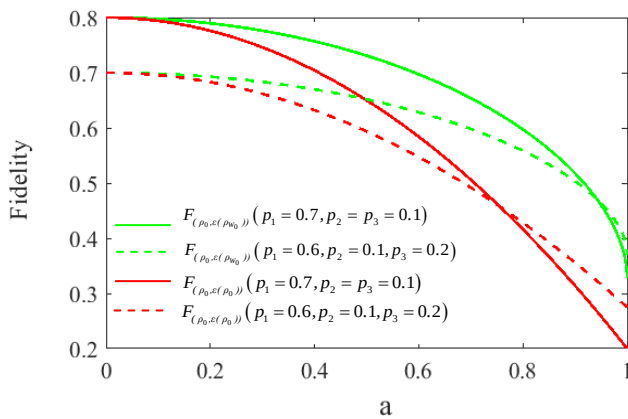
$$P(x) = a(x)\Pi_0 + a(-x)\Pi_1, \quad (1)$$

$$P(-x) = a(-x)\Pi_0 + a(x)\Pi_1, \quad (2)$$

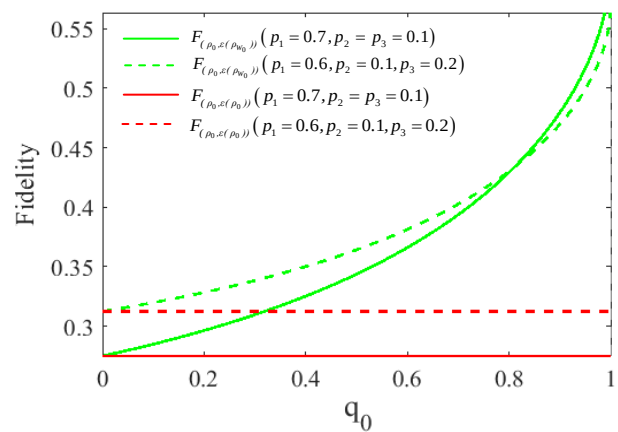
x پارامتر شدت اندازه گیری ضعیف و Π_0 و Π_1 دو تصویرگر متعامد با $\Pi_0 + \Pi_1 = I$ هستند. این عملگرها در رابطه کامل بودن به صورت $P^\dagger(x)P(x) + P^\dagger(-x)P(-x) = I$ صدق می کنند

همچنین، ویژگی های $P(0) = \frac{I}{\sqrt{2}}$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \Pi_1$ برای آنها برقرار است. با توجه به تعریف

$P(x)$ و $P(-x)$ مشاهده می گردد که اندازه گیری ضعیف حالت



شکل (۲): تغییرات فیدلیتی برحسب a با $\delta = \frac{\pi}{3}$ و $q_0 = 0.9$.



شکل (۱): تغییرات فیدلیتی برحسب q_0 برای حالت اولیه با بردار بلاخ

$$r = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\rho_{w_0} = \frac{W_0 \rho W_0^\dagger}{\text{Tr}(W_0 \rho W_0^\dagger)} = \frac{1}{2} (I + r' \cdot \sigma). \quad (10)$$

سیس حالت کیوبیت در برهمکنش با کانال به این شکل تغییر می کند:

$$\varepsilon(\rho_{w_0}) = \frac{1}{2} (I + (Mr' + t) \cdot \sigma). \quad (11)$$

در صورتیکه هدف حفظ همبستگی یا همدوسی در سیستمی از کیوبیت ها باشد استفاده از یک عملگر اندازه گیری ضعیف بازگشتی بصورت

$$R_1 = \sqrt{1-q_1} |\lambda_{\max}\rangle \langle \lambda_{\max}| + |\lambda_{\max}^\perp\rangle \langle \lambda_{\max}^\perp|, \quad (12)$$

ممکن است نتیجه بهتری داشته باشد. اما نتایج نشان می دهند برای حفظ فیدلیتی کیوبیت در برهمکنش با یک کانال دلخواه اعمال اندازه گیری R_1 نه تنها همواره در افزایش فیدلیتی موثر نیست بلکه در مواردی می تواند موجب افت فیدلیتی به کمتر از فیدلیتی بدون استفاده از اندازه گیری ضعیف شود. اگر

$$F(\rho_0, \varepsilon(\rho_{w_0})) = \frac{1}{2} (1 + r \cdot (Mr' + \bar{t})), \quad (13)$$

فیدلیتی بین حالت اولیه کیوبیت و حالت کیوبیت بعد از اعمال اندازه گیری W_0 و کانال باشد انتظار داریم رابطه $F(\rho_0, \varepsilon(\rho_{w_0})) \geq F(\rho_0, \varepsilon(\rho_0))$ بین فیدلیتی ها برقرار باشد. در ادامه

برای فضای هیلبرت محیط دلخواه یک پایه متعامد بهنجار بصورت $\{|\lambda_{\max}\rangle, |\lambda_{\max}^\perp\rangle\}$ در نظر می گیریم بطوریکه $|\lambda_{\max}\rangle$ حالتی باشد که در کانال ناوردا می ماند و $|\lambda_{\max}^\perp\rangle$ حالت عمود بر $|\lambda_{\max}\rangle$ است که امکان دارد در کانال تخریب شود. از طرفی براحتی می توان نشان داد $\lambda_{\max}$ ویژه مقدار متناظر با ویژه برداری از M است که فیدلیتی را در رابطه (۵) ماکزیمم می کند. با استفاده از این پایه مجموعه ای از عملگرهای اندازه گیری شامل W_0 و W_1 تعریف می کنیم:

$$W_0 = |\lambda_{\max}\rangle \langle \lambda_{\max}| + \sqrt{1-q_0} |\lambda_{\max}^\perp\rangle \langle \lambda_{\max}^\perp|, \quad (8)$$

$$W_1 = \sqrt{q_0} |\lambda_{\max}^\perp\rangle \langle \lambda_{\max}^\perp|. \quad (9)$$

البته ما فقط به نتایج ناشی از اندازه گیری توسط عملگر W_0 علاقمندیم و حضور W_1 تنها برای برقرار بودن رابطه کامل بودن، $\sum_{i=0}^1 W_i^\dagger W_i = I$ است. اعمال W_0 روی تک کیوبیت احتمال حضور کیوبیت در حالت ناوردای کانال را ثابت نگه داشته و احتمال بودن در حالت عمود بر آن را کاهش می دهد.

بنابراین اگر ماتریس چگالی سیستم تک کیوبیت ρ_0 باشد، قبل از برهمکنش این کیوبیت با کانال عملگرهای تعریف شده در (۸) و (۹) روی آن اندازه گیری انجام می دهند. نتیجه اندازه گیری با W_0 با عبارت زیر نشان داده می شود:

مرجع ها

- [۱] Bennett, C.H., Wiesner, S.J; *Phys. Rev. Lett.* ۶۹, ۲۸۸۱-۲۸۸۴ (۱۹۹۲).
 [۲] X. Xiao, Y. L. Li, *Eur. Phys. J. D*, ۶۷, ۲۰۴ (۲۰۱۳).
 [۳] Behzadi, N., Faizi, E., Heibati, O. *Quantum Inf. Process.* ۱۶, ۲۵۷ (۲۰۱۷).
 [۴] Huang, Z., Rong, Z., Z. X. *Int J Theor Phys.* ۵۶, ۲۵۴۰-۲۵۵۰, (۲۰۱۷).
 [۵] Chen, Y., Zou, J., Long, Z.-W. & Shao, B. *Sci. Ret.* ۷, ۶۱۶۰ (۲۰۱۷).
 [۶] Nielsen, M. A. & Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, ۲۰۰۰).
 [۷] Aharonov, Y., Albert, D. Z., Vaidman, L. *Phys. Rev. Lett.* ۶۰, ۱۳۵ (۱۹۸۸).
 [۸] Singh, U. & Pati, A. K. *Ann. Phys.* ۳۴۳, ۱۴۱ (۲۰۱۴).

نتایج این روش برای کانال پائولی به عنوان یک مثال بررسی شده است.

حالت یک کیوبیت بعد از برهمکنش با کانال پائولی بصورت زیر بیان می شود:

$$\varepsilon(\rho) = (1 - p_1 - p_2 - p_3)\rho + p_1 X \rho X + p_2 Y \rho Y + p_3 Z \rho Z, \quad (۱۴)$$

که شرط $0 \leq p_1 + p_2 + p_3 \leq 1$ بین ضرایب برقرار است. اگر فرض $p_1 \geq p_2, p_3$ را در این کانال داشته باشیم می توان حالت

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

کانال در نظر گرفته و عملگر W_0 را با جاگذاری $|+\rangle$ و $|-\rangle$ به ترتیب به جای $|\lambda_{\max}\rangle$ و $|\lambda_{\max}^\perp\rangle$ تعریف کرد. شکل (۱) نمودار تغییرات فیدلیتی بر حسب q_0 با و بدون استفاده از W_0 را نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود با افزایش مقدار q_0 رابطه $F_{(\rho_0, \varepsilon(\rho_{W_0}))} \geq F_{(\rho_0, \varepsilon(\rho_0))}$ همواره برقرار می ماند. در شکل (۲) تغییرات فیدلیتی بر حسب فاصله از حالت ناوردای کانال پائولی رسم شده است. برای رسم این نمودار مولفه های بردار بلاخ بصورت $r = (\sqrt{1-a^2}, a \cos(\delta), a \sin(\delta))$ در نظر گرفته می شود که a فاصله بردار r از حالت $|+\rangle$ و δ زاویه این بردار با حالت ناوردای کانال می باشد. با توجه به این نمودار همانطور که انتظار می رود با دور شدن از حالت ناوردا فیدلیتی کاهش می یابد.

نتیجه گیری

در این مقاله نشان داده می شود که با ارائه یک تعریف مناسب برای عملگر اندازه گیری ضعیف می توان از این عملگر برای کاهش اثر کانال دلخواه روی یک کیوبیت استفاده کرد. همچنین نتایج روش پیشنهاد شده برای کانال پائولی بررسی شده است. با توجه به این نتایج استفاده از یک عملگر اندازه گیری ضعیف قبل از برهمکنش کیوبیت با کانال می تواند فیدلیتی بین حالت اولیه و حالت کیوبیت بعد از عبور از کانال را افزایش دهد.

خطاهای تصحیح پذیر کد CSS نه کیوبیتی در کانال واقطبش

مجد ، نیره ؛ احمدی، مریم

^۱ گروه علوم و فناوری های کوانتومی، دانشکده علوم مهندسی، پردیس فنی دانشگاه تهران، خیابان ۱۶ آذر، تهران ۴۵۶۳-۱۱۳۶۵، ایران

چکیده

انتقال اطلاعات کوانتومی از طریق کانالهای کوانتومی همیشه در معرض خطا می باشد و محافظت از آنها یک امری ضروری است. در این مقاله با به دست آوردن بردارهای پایه دو کد کلاسیک خطی، یک کد CSS نه کیوبیتی تعریف و از آن برای محافظت اطلاعات در کانال واقطبش استفاده کنیم. با استفاده از استابیلایزهای این کد و مفهوم پادجایایی آن با خطا، توانستیم نشانه خطا را به دست بیاوریم. برای به دست آوردن نشانه خطا از کتابخانه نرم افزاری Feynman استفاده کردیم. بعد از بررسی نشانه خطای همه خطاها متوجه شدیم گروهی از خطاها دارای نشانه خطای منحصر به فرد هستند. یعنی از روی نشانه خطا می توان تشخیص داد چه خطایی در کانال رخ داده است. لذا این گروه از خطاها قابل تصحیح نیز هستند. خطاهای تصحیح پذیر کد CSS نه کیوبیتی را در جدولی به همراه نشانه خطا نشان داده ایم.

واژه های کلیدی: کد CSS، کانال واقطبش، نشانه خطا، کتابخانه نرم افزاری Feynman

Correctable Errors for Nine qubit CSS code in depolarizing channel

Majd, Nayereh; Ahmadi, Maryam

Quantum Science and Technology Group, Department of Engineering Science, College of Engineering, University of Tehran, Tehran1136-4563, Iran.

Abstract

Quantum information transferring through quantum channels always has been interfered by the errors and its protection against the noise is essential. In this paper we have introduced a nine qubit CSS code from basis vectors of two linear classical codes for protecting information in depolarizing channel. From the stabilizers of this code and its anti-commutations with the errors we can obtain its error syndromes by using Feynman Library. We find that there are errors with unique syndromes in which we can detect and correct the errors exactly. Finally we have reported our correctable errors with their detecting syndromes in a table.

Keywords: CSS code, depolarizing channel, error syndrome, Feynman Library.

PACS No. (03.67.-a, 05.40.Ca).

مقدمه

کد خطی C که k بیت از اطلاعات را در فضای کد n بیتی کد می کند با ماتریس مولد $G_{n \times k}$ مشخص می شود. کدی که از n بیت برای کد کردن k بیت اطلاعات استفاده می کند به صورت $[n, k]$ نشان داده می شود. فضای برداری که توسط ستون های ماتریس G جاروب می شود همان کد-کلمه های ممکن برای کد است. پس

کدهای CSS، کلاس بزرگی از کدهای کوانتومی هستند. برای ساخت کدهای CSS از کدهای خطی کلاسیک استفاده می شود. در این جا توضیح می دهیم که چگونه از ایده کدهای خطی کلاسیک برای ساخت کلاس بزرگی از کدهای کوانتومی به نام CSS استفاده می شود [۱].

جدول ۱: پایه‌های $C_1(9, 5)$

برای به دست آوردن نشانه خطای E ، آن را روی حالت
 $|\psi\rangle = \alpha|0_L\rangle + \beta|1_L\rangle$ اعمال می کنیم و $E|\psi\rangle$ را به دست می آوریم.
 نشانه خطا کد CSS نه کیوبیتی، ۸ بیت دارد. برای به دست آوردن
 بیت اول جابه جاپذیر بودن $E|\psi\rangle$ با مولد g_1 را بررسی می کنیم.
 اگر جابه جاپذیر بود بیت اول نشانه خطا مقدار صفر خواهد داشت.
 اگر پادجابه جاپذیر بود بیت اول نشانه خطا مقدار یک خواهد
 داشت. با بررسی جابه جاپذیر بودن $E|\psi\rangle$ با بقیه مولدهای
 $g_2, \dots, g_8$ نشانه خطا کامل می شود.

برای محاسبه نشانه خطا همه خطاها، لازم است برای تمام
 خطاهای یک کیوبیتی و دو کیوبیتی محاسبات گفته شده انجام
 شود. برای انجام محاسبات بالا از برنامه کامپیوتری که محاسبات
 کوانتومی را شبیه سازی می کند استفاده می کنیم. این برنامه با استفاده
 از کتابخانه نرافزاری Feynman در نرم افزار Maple نوشته شده
 است.

خطا با نشانه خطا یکتا

بعد از به دست آوردن نشانه خطای همه خطاها، خطاها را با
 توجه به نشانه خطای به دست آمده دسته بندی می کنیم. در این میان،
 بعضی از خطاها هستند که دارای نشانه خطای یکتا هستند. یعنی با
 هیچ خطای دیگری در نشانه خطا مشترک نیستند. این بدین معنی
 است که با دیدن آن نشانه خطا و با توجه به جدول به سادگی
 متوجه می شویم چه خطایی در کانال واقطبش حالت $|\psi\rangle$ را
 دست خوش تغییر کرده است. با داشتن خطای رخ داده آن خطا
 تصحیح پذیر خواهد بود. در جدول (۴) خطاهای تصحیح پذیر کد
 CSS نه کیوبیتی آورده شده است. در این جدول برای نمونه
 خطای X_5Z_6 یعنی در کانال واقطبش روی کیوبیت پنجم خطای
 X یا بیت برگردان و روی کیوبیت ششم خطای Z یا فازبرگردان
 اتفاق افتاده است.

$$|1_L\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} |00111100\rangle + |100001100\rangle + |010101110\rangle \\ + |111011000\rangle + |001001010\rangle + |010011110\rangle \\ + |111101011\rangle + |111101011\rangle + |001110110\rangle \\ + |100000011\rangle + |010100010\rangle + |111010111\rangle \\ + |001000101\rangle + |100110000\rangle + |010010001\rangle \\ + |111100100\rangle \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن استابیلایزهای کد $CSS(C_1, C_2)$ ، اگر
 در ماتریس مولد C_2 هر سطر را یک بردار بگیریم و در آن به جای
 یک، X و به جای صفر، I بگذاریم مولدهای $g_1, \dots, g_4$ به دست
 می آیند. اگر در ماتریس پارته C_1 هر سطر را یک بردار بگیریم و
 در آن به جای یک، Z و به جای صفر، I بگذاریم مولدهای
 $g_5, \dots, g_8$ به دست می آیند. در جدول (۳) مولدهای کد CSS
 نه کیوبیتی آورده شده است.

$XIXXXIXIX$	g_1
$IXXXIXIX11$	g_2
$IIIXXIIIXX$	g_3
$IIIIIXXXX$	g_4
$IZIZZIIII$	g_5
$IZZIIIIIZZ$	g_6
$ZZIZIIZIZ$	g_7
$ZIIZIZIZI$	g_8

جدول ۳: مولدهای $CSS(C_1, C_2)$

کانال واقطبش

در کانال واقطبش امکان وقوع خطا وجود دارد. این خطاها با
 عملگرهای پاؤلی نشان داده می شوند:

$$Y = -iXZ = i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

اگر فرض کنیم هر کیوبیت به تنهایی و بدون استفاده از هیچ کد
 تصحیح خطا و کیوبیت خدمتکار وارد کانال واقطبش شود تا به
 گیرنده برسد، امکان وقوع خطاهای پاؤلی با احتمال P روی آن
 وجود دارد. برای محافظت از کیوبیت ها در کانال واقطبش از کد
 CSS نه کیوبیتی استفاده می کنیم.

نشانه خطا

مرجع ها

- [۱] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [۲] Aziz Mouzali, Fatiha Merazka, Damian Markham, Quantum Secret Sharing with Error Correction, arXiv:14093620 . v1 [quant-ph], 12 Sep. (2014).
- [۳] T. Radtke and S. Fritzsche, *Compt. Phys. Commun.* 173 (2005) . 91
- [۴] T. Radtke and S. Fritzsche, *Compt. Phys. Commun.* 175 (2006) . 145
- [۵] T. Radtke and S. Fritzsche, *Compt. Phys. Commun.* 176 (2007) . 617
- [۶] T. Radtke and S. Fritzsche, *Compt. Phys. Commun.* 179 (2008) . 647

خطا	نشانه خطا	خطا	نشانه خطا	خطا	نشانه خطا
X_5Z_6	00011000	X_2Z_6	00011110	Y_6	00010001
Y_4Y_9	00011101	X_4Y_6	00011010	X_2Y_6	00011111
Y_3Y_5	00101100	X_9Y_6	00010111	X_5Y_6	00011001
Y_8Z_6	00100101	Y_4Z_1	00101011	Y_1Z_4	00100011
X_7Y_8	00110111	Y_5Y_7	00111010	Y_6Z_8	00100001
X_7Z_2	01000010	X_6Z_2	01000001	X_5Y_8	00111101
X_6Y_2	01001111	X_3Y_2	01001010	X_1Y_2	01001101
Y_2	01001110	Y_1Y_3	01000111	X_7Y_2	01001100
Y_9Z_1	01010110	Y_7Z_1	01010010	Y_5Z_9	01011000
Y_1Z_5	01100011	Y_2Y_6	01011111	Y_1Z_7	01010011
Y_9Z_7	01100110	Y_7Z_9	01100010	Y_5Z_1	01101000
Y_3Z_9	01110100	Y_2Z_8	01111110	Y_4Y_7	01111001
X_2Y_1	10001101	Y_9Z_3	01110110	Y_8Z_2	01110101
Y_6Z_1	10010001	Y_2Y_3	10001010	X_3Y_1	10000111
Y_1Z_6	10010011	Y_4Z_8	10011011	Y_8Z_4	10010101
X_7Z_4	10100010	X_3Z_4	10100100	Y_2Y_7	10011100
X_9Y_4	10101101	X_7Y_4	10101001	X_6Y_4	10101010
X_3Y_4	10101111	Y_4	10101011	Y_6Y_9	10100111
X_6Y_9	10111011	Y_4Y_6	10111010	X_4Y_9	10111101
X_9Z_3	11000110	X_5Z_3	11001000	X_4Z_3	11001011
X_4Y_3	11001111	X_2Y_3	11001010	X_1Y_3	11000111
Y_3	11000100	Y_1Y_2	11001101	X_5Y_3	11001100
X_2Y_7	11011100	X_4Z_7	11011011	X_2Z_7	11011110
X_8Y_7	11010111	X_5Y_7	11011010	X_4Y_7	11011001
X_6Y_5	11101001	Y_7	11010010	Y_5Y_8	11011101
X_7Y_5	11101010	X_6Y_5	11101001	X_7Y_5	11101010
X_6Z_5	11100001	X_3Z_5	11100100	Y_5	11101000
Y_7Y_8	11100111	X_8Y_5	11101101	X_3Y_5	11101100
Y_8Z_3	11110101	Y_3Z_8	11110100	Y_2Z_9	11111110
		Y_3Y_6	11111001	Y_9Z_2	11110110

جدول ۴: خطاهای رخ داده در کانال واقطبش و نشانه خطا وقتی که کیوبیت

با کد CSS نه کیوبیتی محافظت شده باشد

نتیجه گیری

اطلاعات کوانتومی در کانال واقطبش در عرض تغییر و خطا هستند. با استفاده از نشانه خطا می توان فهمید چه خطا یا خطاهایی در کانال واقطبش رخ داده است. اگر نشانه خطا منحصر به یک خطا باشد در نتیجه خطای رخ داده قابل تشخیص و تصحیح پذیر است. تعداد خطاهای تصحیح پذیر می تواند به عنوان یک معیار برای مقایسه کدها مطرح شود.

تعیین تولید آنتروپی برای یک سیستم کوانتومی با بکار بردن خواص تک زوجیتی

سلطانی، اقبال^۱؛ فیضی، اسفندیار^۱؛ بهزادی، نقی^۲؛ آهن ساز، بهرام^۱^۱گروه فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز^۲مرکز تحقیقات علوم پایه دانشگاه تبریز، تبریز

چکیده

در این مقاله سیستم A ای را در نظر می گیریم که از طریق یک سیستم کمکی بنام B با محیط E بر هم کنش دارد. در حضور سیستم کمکی B مقدار همبستگی کلاسیکی و کوانتومی ایجاد شده بین سیستم A و محیط را می توان با استفاده از خواص تک زوجیتی بدست آورده و در نتیجه تولید آنتروپی مرتبط با آن را تعیین کرد. به عنوان مثال، این رهیافت را با در نظر گرفتن سیستم های A و B بعنوان سیستم هایی دو تراز که تحت تاثیر کانالهای میرایی دامنه و میرایی دامنه ی تعمیم یافته قرار گرفته اند مورد بررسی قرار داده ایم.

واژه های کلیدی: تولید آنتروپی، همبستگی کلاسیکی، همبستگی کوانتومی، خواص تک زوجیتی

Determination of Entropy Production for a Quantum System by Using the Monogamy Properties

Soltani, Eghbal¹; Faizi, Esfandiyar¹; Behzadi, Naghi²; Ahansaz, Bahram¹¹ Department of Physics, Shahid Madani University of Azarbaijan, Tabriz² Research Institute for Fundamental Sciences, University of Tabriz, Tabriz

Abstract

In this paper, we consider a system A that is correlated with an auxiliary system B , which in turn interacts with the environment E . In the presence of the auxiliary system B , the amount of created classical and quantum correlations between the system A and the environment can be obtained by using existed monogamy properties and consequently the associated entropy production is determined. As an example, this scenario is illustrated by considering the systems A and B as two-level systems undergoing an amplitude damping process and generalized amplitude damping process.

Keywords: Entropy production, Classical correlation, Quantum correlation, Monogamy properties

مقدمه

ترمودینامیک کوانتومی کمک می کند [۶۵]. بنابراین تعیین آن در مشخصات ترمودینامیکی یک فرآیند داده شده از اهمیت بسزایی برخوردار است. در این راستا اسپوزیتو و همکارانش [۳] عبارت دقیقی برای تولید آنتروپی از لحاظ همبستگی بین سیستم و مخزن بدست آورده اند که با محاسبه ی کامل این همبستگی می توانیم تولید آنتروپی را تعیین کنیم. در این مقاله، سیستم کوانتومی A را

فرایند های برگشت ناپذیر که توسط یک سیستم کوانتومی باز مورد استفاده قرار می گیرد با تولید آنتروپی همراه است که اساسا با جریان آنتروپی حاصل از ارتباط متقابل سیستم با محیط متفاوت است. چنین سهم برگشت ناپذیری از تغییر آنتروپی سیستم، تولید آنتروپی نامیده شده [۱۰ و ۳ و ۴] و به ما در طراحی فن آوریهای

که $D[\rho||\rho']$ آنتروپی نسبی کوانتومی بین دو ماتریس چگالی ρ و ρ' می باشد

$$D[\rho||\rho'] = \text{Tr}[\rho \ln \rho] - \text{Tr}[\rho \ln \rho'] \quad (5)$$

با توجه به معادله ی (۴) و (۵) می توان نوشت

$$\sum = -S(\rho(t)) + S(\rho_s(t)) + S(\rho_r^{eq}) = I(\rho_s(t), \rho_r^{eq}) \quad (6)$$

که $I(\rho_s(t), \rho_r^{eq})$ اطلاعات متقابل بین $\rho_s(t)$ و ρ_r^{eq} است اطلاعات متقابل کوانتومی دارای اهمیت فیزیکی اساسی است و معمولاً به عنوان یک سنجه برای همبستگی کل استفاده می شود [۹ و ۸]. با توجه به جداسازی همبستگی های کل به قسمت های کوانتومی و کلاسیکی، می توانیم اطلاعات متقابل کوانتومی را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$I(\rho_s(t), \rho_r^{eq}) = J_{s,r}(t) + D_{s,r}(t) \quad (7)$$

که در آن $J_{s,r}(t)$ همبستگی کلاسیکی و $D_{s,r}(t)$ همبستگی کوانتومی بین سیستم و مخزن است.

خواص تک زوجیتی همبستگی های کوانتومی و کلاسیکی

در این کار سیستم A را در نظر می گیریم که مقداری اطلاعات با سیستم B به اشتراک می گذارد که تنها یکی از آنها با مخزن برهم کنش دارد (شکل ۱).



شکل ۱: یک حالت خالص در هم تنیده ی اولیه $|\varphi\rangle$ را در نظر می گیریم که بین دو سیستم A و B به اشتراک گذاشته شده است.

حداکثر مقدار همبستگی کلاسیکی ایجاد شده درباره ی سیستم A و محیط E از رابطه ی زیر بدست می آید

$$J_{A,E} = \max_{\{\Pi_i\}} \left[S(\rho_A) - \sum_i p_i S(\rho_{A|i}) \right] \quad (8)$$

با توجه به رابطه ی کوشی-ورنر [۱۰]

$$J_{A,E} = S(\rho_A) - E_{A,B} \quad (9)$$

که در آن E_{AB} درهم تنیدگی شکل یابی بین سیستم و محیط است [۱۱]. علاوه براین با استفاده از فرمول کوشی-ورنر ثابت شده

در نظر می گیریم که با سیستم B همبستگی دارد و سیستم A از هر گونه تعامل مستقیم آزاد است و تنها سیستم B با محیط E بر هم کنش دارد. مقدار همبستگی کلاسیکی و کوانتومی ایجاد شده بین سیستم A و محیط E را می توانیم با بکار بردن خواص تک زوجیتی بدست آوریم و پس از تعیین همبستگی کلاسیکی و کوانتومی، بیان دقیقی برای تولید آنتروپی مرتبط با این همبستگی ها را بدست آوریم. به عنوان مثال، در این مقاله سیستم های A و B را بعنوان سیستم های دو ترازه در نظر می گیریم که تحت تاثیر کانالهای میرایی دامنه و میرایی دامنه ی تعمیم یافته قرار گرفته اند و یک مقایسه جامع بین همبستگی های کلاسیکی و کوانتومی ایجاد شده در طول فرایند تولید آنتروپی غیر تعادلی را انجام می دهیم.

تولید آنتروپی به عنوان همبستگی سیستم - مخزن

یک سیستم کوانتومی r را به عنوان مخزن گرمایی محدود در نظر می گیریم و ماتریس چگالی آن را در زمان اولیه ی $t=0$ به فرم تعادل کانونیکی زیر می نویسیم

$$\rho_r(0) = \rho_r^{eq} = \frac{e^{-\beta_r H_r}}{Z_r} \quad (1)$$

علاوه بر این یک سیستم کوانتومی محدود s با ماتریس چگالی $\rho_s(t)$ در نظر می گیریم که به مخزن متصل شده است. بنابراین حالت اولیه ی سیستم مرکب به صورت زیر است که در زمان اولیه هیچ گونه همبستگی ای بین آنها وجود ندارد

$$\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_r^{eq} \quad (2)$$

آنتروپی وان نیومن $S(t)$ را برای سیستم به صورت زیر در نظر می گیریم

$$S(t) = -\text{Tr}_s(\rho_s(t) \ln \rho_s(t)) \quad (3)$$

تغییر ناپذیری زمانی آنتروپی وان نیومن کلی باعث جدایی طبیعی تغییر آنتروپی سیستم به سهم جداگانه از جریان آنتروپی و تولید آنتروپی می گردد. جریان آنتروپی نشان دهنده ی سهم برگشت پذیر تغییر آنتروپی سیستم به علت مبادلات حرارتی است و تولید آنتروپی نشان دهنده ی سهم برگشت ناپذیر تغییر آنتروپی سیستم است که به صورت زیر تعریف می شود [۳]

$$\sum \equiv D[\rho(t) || (\rho_s(t) \otimes \rho_r^{eq})] \quad (4)$$

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-q(t)} \end{pmatrix}, M_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۷)$$

و پارامتر $q(t)$ به صورت زیر است

$$q(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left[\cosh\left(\frac{dt}{2}\right) + \frac{\lambda}{d} \sinh\left(\frac{dt}{2}\right) \right]^2 \quad (۱۸)$$

در ادامه کانال میرایی دامنه تعمیم یافته را بررسی می کنیم و با در نظر گرفتن محیط در یک دمای محدود، معادله اصلی برای دینامیک سیستم دو ترازه می تواند به صورت زیر باشد [۱۳]

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{\gamma(t)(n+1)}{2} \left(\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho(t) \} \right) + \frac{\gamma(t)n}{2} \left(\sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, \rho(t) \} \right) \quad (۱۸)$$

که عملگرهای کراس توصیف کننده آن را می توان به صورت زیر بدست آورد

$$E_1(t) = \sqrt{p} \begin{pmatrix} \sqrt{1-q(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2(t) = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{q(t)} & 0 \end{pmatrix} \\ E_3(t) = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-q(t)} \end{pmatrix}, E_4(t) = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{که } p = \frac{n}{(2n+1)} \text{ و } n = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}$$

$$q(t) = 1 - e^{-(2n+1)\lambda t} \left[\cosh\left(\frac{dt}{2}\right) + \frac{\lambda}{d} \sinh\left(\frac{dt}{2}\right) \right]^{2(2n+1)} \quad (۲۰)$$

روشن است که در حالت حدی که دما به سمت صفر میل می کند مقدار p نیز به سمت صفر میل می کند و عملگرهای کراس معادله (۱۷) را می توان از عملگرهای کراس معادله (۱۹) بدست آورد.

اکنون با در نظر گرفتن حالت اولیه زیر

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \quad (۲۱)$$

که بین سیستم A و سیستم B به اشتراک گذاشته شده است حالت سیستم دوتایی $\rho_{AB}(t)$ ، متناظر با حالت شکل (۱) به صورت زیر بدست می آید

$$\rho_{AB}(t) = \Lambda(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \sum_{i=1}^4 (I \otimes E_i(t)) |\varphi\rangle\langle\varphi| (I \otimes E_i(t)^\dagger) \quad (۲۲)$$

که ماتریس چگالی $\rho_{AB}(t)$ در پایه های محاسباتی استاندارد $\{|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$ به صورت زیر نوشته می شود

است که برای حالت های خالص یک رابطه تک زوجیتی مشابهی بین ناهم خوانی کوانتومی و درهم تنیدگی شکل یابی می توان برقرار کرد. برای این منظور با توجه به اینکه در مرجع [۱۲] ناهم خوانی کوانتومی را به عنوان اختلاف بین اطلاعات متقابل کلاسیکی و مشابه کوانتومی آن تعریف کرده اند رابطه ی زیر را خواهیم داشت

$$D_{A,E} = S(\rho_E) - J_{B,E} \quad (۱۰)$$

با توجه به معادله ی (۹) و (۱۰) داریم

$$D_{A,E} = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) + E_{A,B} \quad (۱۱)$$

مثال

یک سیستم کوانتومی دو ترازه را در نظر می گیریم که با مخزن در دمای صفر برهم کنش دارد و مخزن یک کانال میرایی دامنه را فقط روی سیستم دو ترازه اعمال می کند که هامیلتونی متناظر با این برهم کنش به صورت زیر است

$$H = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + (\sigma_+ B + \sigma_- B^\dagger) \quad (۱۲)$$

چگالی طیفی چنین محیطی به صورت تابع توزیع لورنتسی می باشد که به صورت زیر نوشته می شود

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \lambda^2} \quad (۱۳)$$

برای چنین چگالی طیفی، دینامیک سیستم دو ترازه را می توان با معادله اصلی دقیق به صورت زیر بیان کرد [۱۳]

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \gamma(t) \left(\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho(t) \} \right) \quad (۱۴)$$

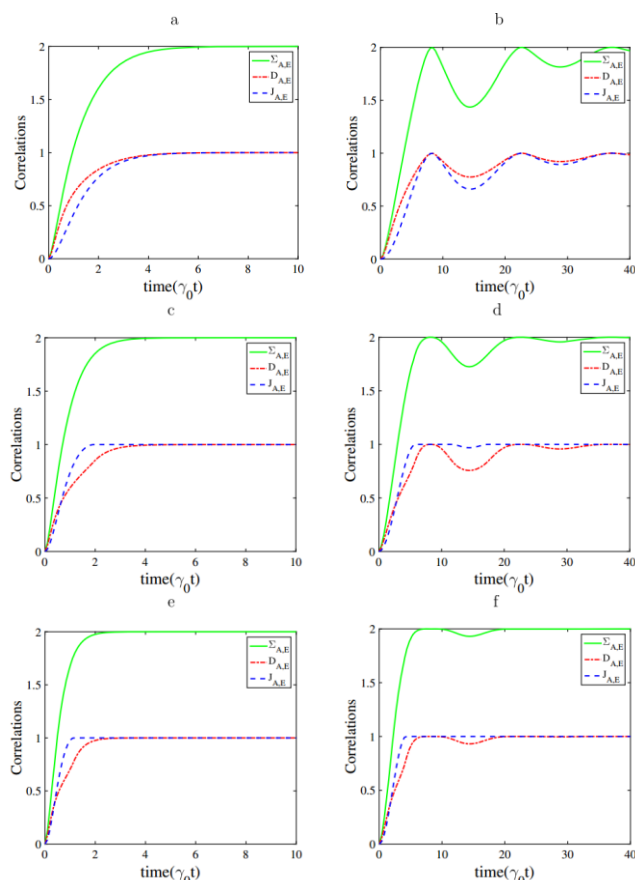
که $\gamma(t)$ نقش آهنگ واپاشی وابسته به زمان را ایفا می کند و به صورت زیر است

$$\gamma(t) = \frac{2\gamma_0 \lambda \sinh\left(\frac{dt}{2}\right)}{d \cosh\left(\frac{dt}{2}\right) + \lambda \sinh\left(\frac{dt}{2}\right)} \quad (۱۵)$$

می توانیم دینامیک سیستم دو ترازه را در نمایش عملگرهای کراوس به صورت زیر بنویسیم

$$\rho(t) = \Lambda(\rho(0)) = \sum_{i=1}^2 M_i(t) \rho(0) M_i^\dagger(t) \quad (۱۶)$$

که عملگرهای کراس $M_i(t)$ متناظر با آن را می توان به صورت زیر بدست آورد [۱۵]



شکل ۲: تولید آنتروپی برابر مجموع نا هم خوانی کوانتومی و همبستگی کلاسیکی متناظر با حالت نشان داده شده در شکل (۱) است با پارامترهای ثابت $\omega=1$ و برای a و c و e با $\lambda=3$ و برای b و d با $\lambda=0.1$ و برای $T=0$ و برای c و d و $T=0.5$ و برای e و f و $T=1$.

مرجع ها

- [۱] H. Spohn, J. Math. Phys. ۱۹, ۱۲۲۷ (۱۹۷۸).
- [۲] R. Alicki, J. Phys. A: Math. Gen. ۱۲, L۱۰۲ (۱۹۷۹).
- [۳] M. Esposito, K. Lindenberg, C. Van den Broeck, New J. Phys. ۱۲, ۰۱۲۰۱۲ (۲۰۱۰).
- [۴] S. De_ner and E. Lutz, Phys. Rev. Lett. ۱۰۷, ۱۴۰۴۰۴ (۲۰۱۱).
- [۵] B. M. Escher, R. L. de Matos Filho, and L. Davidovich, Nature Physics ۷, ۴۰۶ (۲۰۱۱).
- [۶] F. Verstraete, M. M. Wolf, and J. I. Cirac, Nature Physics ۵, ۶۳۳ (۲۰۰۹).
- [۷] V. Vedral, Rev. Mod. Phys. ۷۴, ۱۹۷ (۲۰۰۲).
- [۸] B. Schumacher and M. D. Westmoreland, Phys. Rev. A ۷۴, ۰۴۲۳۰۵ (۲۰۰۶).
- [۹] N. Li and S. Luo, Phys. Rev. A ۷۶, ۰۳۲۳۲۷ (۲۰۰۷).
- [۱۰] M. Koashi and A. Winter, Phys. Rev. A ۶۹, ۰۲۲۳۰۹ (۲۰۰۴).
- [۱۱] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and W. K. Wootters, Phys. Rev. A ۵۴, ۳۸۲۴۳۸۵۱ (۱۹۹۶).
- [۱۲] G. L. Giorgi, Phys. Rev. A ۸۴, ۰۵۴۳۰۱ (۲۰۱۱).
- [۱۳] H. P. Breuer and F. Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems, Oxford University Press, Oxford (۲۰۰۲).
- [۱۴] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. ۸۰, ۲۲۴۵۲۲۴۸ (۱۹۹۸).
- [۱۵] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, Cambridge (۲۰۰۰).

(۲۳)

$$\rho_{AB}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q(t)(1-p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p+(1-p)(1-q(t)) & \sqrt{1-q(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-q(t)} & p(1-q(t))+(1-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pq(t) \end{pmatrix}$$

با توجه به این که در هم تنیدگی شکل یابی برای همه ی حالت

های مخلوط دو تایی به صورت زیر است

$$E(\rho) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho)}}{2}\right) \quad (24)$$

که در آن $h(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(1-x)$ می باشد.

همچنین $C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}$ و $\{\lambda_i\}$ ویژه مقادیر به ترتیب کاهش ماتریس $\rho \tilde{\rho}$ بوده و $\tilde{\rho}$ به صورت زیر می باشد

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (25)$$

همبستگی کوانتومی $D_{A,E}$ و همبستگی کلاسیکی $J_{A,E}$ با توجه به خواص تک زوجیتی و رابطه های (۹) و (۱۱) محاسبه شده اند. مقدار تولید آنتروپی برای چنین ساختاری به صورت جمع همبستگی های $D_{A,E}$ و $J_{A,E}$ است که در (شکل ۲) رسم شده است. تولید آنتروپی با دمای مخزن صفر ($T=0$) در شکل ۲ (a) و (b) نشان داده شده است. با توجه به شکل معلوم است که همیشه $D_{A,E}$ بزرگتر از $J_{A,E}$ است. با این حال با در نظر گرفتن مخزن در دمای محدود $T=0.5$ و $T=1$ مشاهده می کنیم که هر چند در اوایل $D_{A,E}$ بزرگتر از $J_{A,E}$ است اما پس از تقاطع دو منحنی با یکدیگر $J_{A,E}$ بزرگتر از $D_{A,E}$ می شود تا اینکه به یک مقدار ثابت می رسند که در شکل های ۲ (c) و (d) و (e) و (f) نشان داده شده است.

نتیجه گیری

ما در این مقاله تولید آنتروپی را برای یک سیستم A در حضور سیستم کمکی B و با محاسبه مقدار همبستگی ایجاد شده بین سیستم A و مخزن مربوطه بدست آورده ایم. حضور سیستم کمکی ما را قادر به استفاده از خواص تک زوجیتی کرده و با توجه به ارتباط بین تولید آنتروپی و همبستگی های ایجاد شده توانستیم تولید آنتروپی مربوطه را محاسبه کنیم.

مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی حالت‌های گراف سیستم سه کیوتریتی

آخوند، احمد^۱؛ چمن مطلق، محمد علی^۱؛ حدادی، سعید^۲^۱گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۱۹۳۹۵-۳۶۹۷، تهران، ایران.^۲دانشکده فیزیک، دانشگاه سمنان، ص. پ. ۳۵۱۹۵-۳۶۳، سمنان، ایران

چکیده

در این مقاله ابتدا با استفاده از مفهوم تقارن، گراف‌های چندگانه‌ی غیر یکرخت یک سیستم سه کیوتریتی را به دست می‌آوریم. سپس مقدار درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی متناظر با گراف‌های چندگانه را محاسبه نموده و نتیجه می‌گیریم که تمامی حالت‌های گراف چندگانه‌ی سیستم سه کیوتریتی در سه دسته قرار می‌گیرند. علاوه بر این نشان می‌دهیم که می‌توان از حالت‌های گراف و عناصر پایدار ساز آن برای شناسایی و تصحیح خطای کوانتومی استفاده نمود. کلید واژه‌ها: درهم‌تنیدگی، حالت‌های گراف چندگانه، سنجی تلاقی تعمیم‌یافته، کیوتریت.

Entanglement in Three-qutrit Graph States

Akhound, Ahmad¹; Chaman Motlagh, Mohammad Ali¹; Haddadi, Saeed^{1,2}¹ Department of Physics, Payame Noor University, P.O.Box 19395-3697, Tehran, Iran.² Faculty of Physics, Semnan University, P.O.Box 35195-363, Semnan, Iran.

Abstract

In this paper first by using the symmetry, we obtain non-isomorphic multi-graphs of a three-qutrit system. In the next step, we calculate the entanglement of the quantum states corresponding to the multi-graphs, and we conclude that all multi-graph states of the three-qutrit system are in three categories. In addition, we show that graph states and its stabilizing elements can be used to identify and correct quantum errors.

Keywords: Entanglement, Multigraph states, Generalized concurrence, Qutrit.

PACS numbers: 03.67. Mn, 03.65. Ud, 03.67. Hk

مقدمه

که دو رأس را در بر می‌گیرد نمایش می‌دهند). در گراف‌های معمولی هر زوج رأس فقط توسط یک خط به یکدیگر وصل می‌شوند اما در گراف‌های چندگانه هر دو رأس توسط چند یال موازی به یکدیگر متصل می‌شوند. بنابراین در مجموعه‌ی E ممکن است عضوهای تکراری نیز وجود داشته باشند. در این مقاله، گراف‌های چندگانه‌ی ساده مورد نظر هستند. یعنی یال‌ها جهت و وزن ندارند.

در بخش دوم این مقاله، حالت‌های گراف‌های معمولی و دوگانه‌ی سیستم سه کیوتریتی را به دست می‌آوریم. در بخش سوم مقدار درهم‌تنیدگی حالت‌های گراف متناظر با گراف‌های مذکور را توسط سنجی تلاقی تعمیم‌یافته محاسبه نموده و طبقه‌بندی جدیدی برای این حالت‌ها ارائه می‌دهیم. در بخش آخر در مورد شناخت ساختار گروه‌های پایدار ساز که منجر به ایجاد تنوع کدهای تصحیح خطای کوانتومی می‌شود، یک بحث کمی و کیفی ارائه خواهد شد.

حالت‌های گراف چندگانه و زیر مجموعه‌های کوچک آن‌ها، یعنی حالت‌های گراف معمولی، نوع خاصی از حالت‌های کوانتومی چند ذره‌ای خالص هستند که در نظریه‌ی اطلاعات و محاسبات کوانتومی نقش اساسی دارند. نظریه‌ی گراف ریاضی و قضایای مکانیک کوانتومی در مورد حالت‌های گراف، به ساده‌تر شدن محاسبات کمک می‌کنند [۱]. هم‌چنین می‌توان از حالت‌های گراف و عناصر پایدار ساز آن برای شناسایی و تصحیح خطای کوانتومی بهره برد.

بر اساس تعریف، گراف معمولی ریاضی $G = (V, E)$ ، یک دوتایی (V, E) است که در آن V مجموعه‌ای از نقاط (رئوس) یعنی $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ و E مجموعه‌ای است که عناصر آن $E = \{e_1, \dots, e_l\}$ یال‌ها یا خطوطی هستند که دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنند (در برخی از مقالات، یال را توسط یک منحنی بسته

مفاهیم پایه

حداکثر می‌توان دو یال در نظر گرفت. تعداد کل گراف‌های دوگانه و معمولی یک سیستم سه کیوبیتی ۶۴ است. ولی با توجه به تقارن سیستم (یکسان بودن ذرات)، تعداد کل گراف‌های غیر یکرخت سیستم مذکور ۱۰ عدد است که در شکل ۱ تمامی این گراف‌ها نمایش داده شده‌اند. حالت‌های کوانتومی نظیر این گراف‌های معمولی (گراف‌های شماره ۴-۱) و دوگانه (گراف‌های شماره ۵-۱۰) را توسط رابطه‌ی (۴) به دست می‌آوریم. به عنوان مثال سه نمونه از حالت‌های کوانتومی متناظر با گراف‌های شماره‌ی ۲، ۶ و ۱۰ شکل ۱ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |G_2\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} (&|0,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + |0,0,2\rangle + |0,1,0\rangle \\ &+ \alpha|0,1,1\rangle + \beta|0,1,2\rangle + |0,2,0\rangle + \beta|0,2,1\rangle \\ &+ \alpha|0,2,2\rangle + |1,0,0\rangle + |1,0,1\rangle + |1,0,2\rangle \\ &+ |1,1,0\rangle + \alpha|1,1,1\rangle + \beta|1,1,2\rangle + |1,2,0\rangle \\ &+ \beta|1,2,1\rangle + \alpha|1,2,2\rangle + |2,0,0\rangle + |2,0,1\rangle \\ &+ |2,0,2\rangle + |2,1,0\rangle + \alpha|2,1,1\rangle + \beta|2,1,2\rangle \\ &+ |2,2,0\rangle + \beta|2,2,1\rangle + \alpha|2,2,2\rangle). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |G_6\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} (&|0,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + |0,0,2\rangle + |0,1,0\rangle \\ &+ \alpha|0,1,1\rangle + \beta|0,1,2\rangle + |0,2,0\rangle + \beta|0,2,1\rangle \\ &+ \alpha|0,2,2\rangle + |1,0,0\rangle + |1,0,1\rangle + |1,0,2\rangle \\ &+ \beta|1,1,0\rangle + |1,1,1\rangle + \alpha|1,1,2\rangle + \alpha|1,2,0\rangle \\ &+ |1,2,1\rangle + \beta|1,2,2\rangle + |2,0,0\rangle + |2,0,1\rangle \\ &+ |2,0,2\rangle + \alpha|2,1,0\rangle + \beta|2,1,1\rangle + |2,1,2\rangle \\ &+ \beta|2,2,0\rangle + \alpha|2,2,1\rangle + |2,2,2\rangle). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |G_{10}\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} (&|0,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + |0,0,2\rangle + |0,1,0\rangle \\ &+ \beta|0,1,1\rangle + \alpha|0,1,2\rangle + |0,2,0\rangle + \alpha|0,2,1\rangle \\ &+ \beta|0,2,2\rangle + |1,0,0\rangle + \beta|1,0,1\rangle + \alpha|1,0,2\rangle \\ &+ \beta|1,1,0\rangle + |1,1,1\rangle + \alpha|1,1,2\rangle + \alpha|1,2,0\rangle \\ &+ \alpha|1,2,1\rangle + \alpha|1,2,2\rangle + |2,0,0\rangle + \alpha|2,0,1\rangle \\ &+ \beta|2,0,2\rangle + \alpha|2,1,0\rangle + \alpha|2,1,1\rangle + \alpha|2,1,2\rangle \\ &+ \beta|2,2,0\rangle + \alpha|2,2,1\rangle + |2,2,2\rangle). \end{aligned}$$

که در آن‌ها $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ و $\beta = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ است.

حالت کوانتومی نظیر هر گراف، حالت آن گراف نامیده می‌شود. برای این منظور در این مقاله هر رأس گراف را یک سیستم سه ترازه (یک کیوبیت که در حالت کوانتومی $|+\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$ قرار دارد) در نظر گرفته و هر یال گراف بیانگر یک نوع برهم‌کنش (گیت کنترلی) بین دو کیوبیت است [۲-۴]. بنابراین برای تعیین حالت‌های گراف چندگانه، ابتدا یک کیوبیت با حالت زیر در هر رأس گراف قرار می‌دهیم:

$$|+\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^2 |k\rangle \quad (1)$$

که در آن حالت‌های پایه‌ی سه بردار راست‌هنگار کیوبیت به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

سپس هر یال به عنوان یک برهم‌کنش میان دو کیوبیت در نظر گرفته می‌شود. این برهم‌کنش با اعمال یک گیت کنترلی بر حالت‌های کوانتومی کیوبیت‌هایی که به وسیله‌ی یال به یکدیگر متصل شده‌اند حاصل می‌گردد. رابطه‌ی گیت کنترلی عبارت است از [۴]:

$$CZ_{ij} = \sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle \langle k|_i \otimes Z_j^k = \sum_{k,l=0}^{d-1} \omega^{kl} |k\rangle \langle k|_i \otimes |l\rangle \langle l|_j \quad (3)$$

که در آن $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$ است.

در خاتمه، حالت کوانتومی نظیر هر گراف چندگانه توسط رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$|G\rangle = \prod_{i>j} CZ_{ij} |+\rangle_3^{\otimes N} \quad (4)$$

در حالت کلی، گراف‌های d -ترازه حداکثر می‌توانند تعداد $d-1$ یال موازی داشته باشند. بنابراین برای گراف‌های کیوبیتی (سه ترازه)

محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی

در این مقاله برای محاسبه‌ی مقدار کل درهم‌تنیدگی حالت‌های گراف متناظر با گراف‌های شکل ۱، از سنجه‌ی تلاقی تعمیم‌یافته استفاده می‌کنیم. این سنجه برای سیستم‌های N ذره‌ای که در حالت خالص قرار دارند به صورت زیر تعریف شده است [۴-۷]:

$$C_N(|\psi\rangle\langle\psi|) = 2^{1-\frac{N}{2}} \sqrt{(2^N - 2) - \sum_{\alpha} \text{Tr} \rho_{\alpha}^2} \quad (5)$$

که در آن ρ_{α} ماتریس چگالی کاهش‌یافته است که با گرفتن ردّ جزئی از ماتریس چگالی کل $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ نسبت به هر یک از زیر سیستم‌ها تعیین می‌شود و $\sum_{\alpha}$ نشان دهنده‌ی مجموع تمام زیر سیستم‌ها است ($0 \leq C_N \leq 2$).

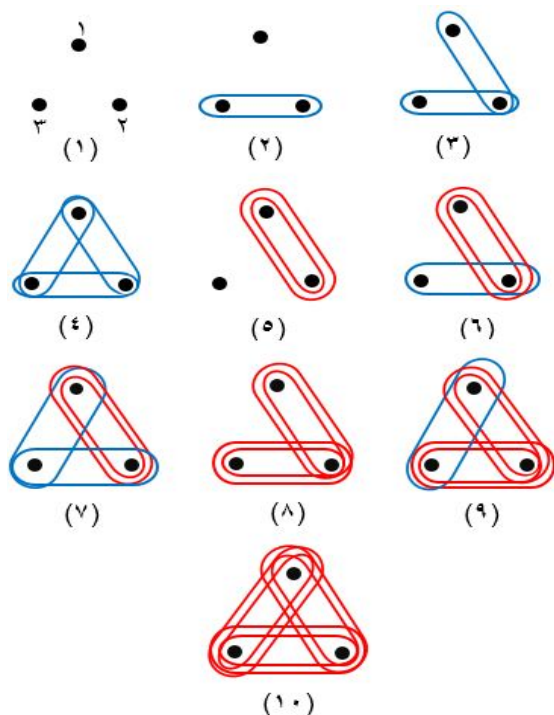
اگر ماتریس چگالی کل $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ در حالت خالص قرار داشته باشد، ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کنند:

$$\text{Tr} \rho_1^2 = \text{Tr} \rho_{23}^2, \quad \text{Tr} \rho_2^2 = \text{Tr} \rho_{13}^2, \quad \text{Tr} \rho_3^2 = \text{Tr} \rho_{12}^2 \quad (6)$$

با محاسبات جبری طولانی، تابع موج حالت‌های گراف سیستم سه کیوتریتی (ده حالت گراف دوگانه و معمولی) را به دست آورده و تمامی ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته‌ی مورد نیاز برای محاسبه‌ی سنجه‌ی تلاقی تعمیم‌یافته (رابطه‌ی ۵) محاسبه شدند. نتایج عددی این محاسبات در جدول ۱ درج شده‌اند.

جدول ۱: مقدار درهم‌تنیدگی ده حالت غیریکریخت گراف دوگانه و معمولی سیستم سه کیوتریتی بر اساس سنجه‌ی تلاقی تعمیم‌یافته.

مقدار درهم‌تنیدگی	حالت گراف	شماره گراف
۰	$ G_1\rangle$	۱
۱٫۱۵۴۷	$ G_2\rangle, G_5\rangle$	۲ و ۵
۱٫۴۱۴۲	$ G_3\rangle, G_4\rangle$	۳ و ۴
	$ G_6\rangle, G_7\rangle$	۶ و ۷
	$ G_8\rangle, G_9\rangle, G_{10}\rangle$	۸ و ۹ و ۱۰



شکل ۱: تمامی گراف‌های غیریکریخت دوگانه و معمولی سیستم سه کیوتریتی.

ساختار گروه‌های پائولی و پایدار ساز در کیوتریت‌ها

یکی از کاربردهای منحصر بفرد حالت‌های گراف به ویژه گراف‌های دوگانه و معمولی سیستم کیوتریتی، تصحیح خطای کوانتومی است. انتخاب کدهای پایدار ساز علاوه بر اینکه خطای ایجاد شده بر روی ذره‌ی کوانتومی را آشکار می‌سازد، در صورت امکان می‌تواند آن خطا را نیز تصحیح کند. شناسایی و انتخاب مناسب یک کد کوانتومی تصحیح خطا، مبتنی بر ساختار گروه‌های پایدار ساز است. حالت‌های گراف زیر مجموعه‌ی حالت‌های پایدار هستند؛ بنابراین برای به دست آوردن مولدها و نیز عناصر گروه پایدار ساز مربوط به هر حالت گراف سیستم کیوتریتی، ابتدا ماتریس‌های پائولی تعمیم‌یافته را معرفی می‌کنیم. سپس گروه پائولی مربوط به هر سیستم کیوتریتی را به دست آورده و در مرحله‌ی بعدی مولدها و تمامی عناصر گروه پایدار ساز مربوط به یک گراف سیستم سه کیوتریتی را به دست می‌آوریم. در خاتمه با توجه به ساختار هر گروه پایدار ساز گراف، کد کوانتومی مناسب

نمودیم، عناصر گروه پایدار ساز هر گراف محاسبه می‌شود و می‌توان از آن‌ها برای شناسایی و تصحیح خطای کوانتومی استفاده کرد.

نتیجه‌گیری

نتایج محاسبات این مقاله عبارتند از: (۱) با استفاده از مفهوم تقارن و گراف‌های غیریکریخت، تمامی حالت‌های کوانتومی گراف‌های دوگانه و معمولی سیستم سه کیوتریتی را در ده دسته طبقه‌بندی نمودیم که از میان آن‌ها تعداد شش حالت گراف، متناظر با گراف‌های دوگانه بودند. (۲) درهم‌تنیدگی در گراف معمولی با افزایش تعداد یال‌ها، افزایش می‌یابد (حالت‌های گراف متناظر با گراف‌های شماره‌ی ۳ و ۴ هم‌ارز LC هستند، یعنی توسط یک عملگر یکانی موضعی به یکدیگر تبدیل می‌شوند، بنابراین مقدار درهم‌تنیدگی یکسانی دارند). (۳) تمامی حالت‌های گراف دوگانه و معمولی از نظر مقدار درهم‌تنیدگی به سه طبقه تقسیم می‌شوند. (۴) با بررسی حالت‌های گراف غیر یکریخت سیستم سه کیوتریتی، ده گروه پایدار متناظر با حالت‌های گراف شکل ۱ تعیین می‌شوند که در انتخاب کدهای کوانتومی برای شناسایی و تصحیح خطا مفیدند.

مرجع‌ها

- [1] A. Cabello *et al.*, "Entanglement in eight-qubit graph states", *Phys. Lett. A* **373** (2009) 2219.
- [2] O. Guhne *et al.*, "Entanglement and nonclassical properties of hypergraph states", *J. Phys. A: Math. Theor* **47** (2014) 335303.
- [3] X. Chen, L. Wang, "Locally inequivalent four qubit hypergraph states", *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 415304.
- [4] A. Akhound, S. Haddadi, and M.A. Chaman Motlagh, "Analyzing the entanglement properties of graph states with generalized concurrence", *Mod. Phys. Lett. B* **33** (2019) 1950118.
- [5] F. Mintert *et al.*, "Concurrence of mixed multi-partite quantum states", *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 260502.
- [6] A. R. R. Carvalho *et al.*, "Decoherence and multipartite entanglement", *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 230501.
- [7] X. N. Zhu and Sh. M. Fei, "Lower bound of concurrence for qubit systems", *Quantum Inf. Process.* **13** (2014) 815.

برای آشکار شدن و تصحیح خطایی که مورد نظر است انتخاب می‌شود. بهینه‌سازی کدها با مطالعه‌ی انواع گراف‌ها میسر می‌شود. برای این منظور عملگرهای X و Z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۴]:

$$Z|k\rangle = \omega^k |k\rangle \quad (۷)$$

$$X|k\rangle = |k+1\rangle \quad (۸)$$

شکل ماتریسی این عملگرها عبارت است از:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (۹)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۰)$$

این عملگرها مولدهای عملگر پائولی برای یک سیستم کیوتریتی (سه ترازه) هستند. عملگرهای پائولی برای سیستم‌های کیوتریتی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$U_{\mu,\nu} = X^\mu Z^\nu, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2) \quad (۱۱)$$

هم‌چنین گروه پائولی سیستم کیوتریتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = \{U_{\mu,\nu} | \mu, \nu = 0, 1, 2\} \quad (۱۲)$$

بنابراین گروه پائولی سیستم سه کیوتریتی، ترکیبی از حاصل ضرب تانسوری (همراه با یک ضرب عددی) عناصر سه گروه پائولی یک کیوتریت است. هم‌چنین گروه پایدار ساز هر حالت گراف سه کیوتریتی زیر گروهی از گروه پائولی سیستم سه کیوتریتی است که این گروه خاصیت جابجایی دارد و مولدهای گروه پایدار ساز برای هر حالت گراف سیستم سه کیوتریتی همان عملگرهایی هستند که مقدار ویژه‌ی آن‌ها برابر با ۱+ است. بنابراین با استفاده از تابع حالت‌های گراف دوگانه و معمولی که در قسمت قبل محاسبه

بازده و کار ماشین اتو کوانتومی برای پتانسیل پوشر-تلر

هاشمی عباس آبادی، سجاده؛ مرکزی، محمدرضا؛ میرافضلی، سید یحیی؛ باغشاهی، حمیدرضا

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولی عصر (عج)، رفسنجان

چکیده

در این مقاله با استفاده از ذره‌ای در پتانسیل پوشر-تلر به عنوان ماده کار برای ماشین اتو کوانتومی، با تغییر پارامترهای مربوط به پتانسیل در فرآیند بی‌دررو، که تغییر هر کدام از پارامترهای موجود در این پتانسیل باعث ایجاد تغییر با نسبت غیر یکسان در ترازهای انرژی می‌شود، کار خالص و بازده این ماشین را بررسی می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از این ماده کار بازده و کار خالص را افزایش می‌دهد.

واژه های کلیدی: ماشین اتو کوانتومی، پتانسیل پوشر-تلر.

Efficiency and work quantum Otto engine for Pöschl-Teller potential

Hashemi Abbasabadi, sajjad; Markazi, Mohammad Reza; Mirafzali, Sayyed Yahya; Baghshahi, Hamid Reza

Department of Physics, Faculty of Science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan

Abstract

In this paper, by use of particle in the Pöschl-Teller potential as the working substance for quantum Otto engine, by changing parameters of potential in the adiabatic process, which make change with different ratio in energy levels, the efficiency and net work are investigated. The results show that the use of this working substance increases the efficiency and net work.

Keywords: Quantum Otto Engine, Pöschl-Teller Potential

PACS No. 30

مقدمه

در ترمودینامیک کوانتومی، ماشین‌های گرمایی کوانتومی با به کار بردن ماده کار کوانتومی و بازتعریف فرآیندهای ترمودینامیکی، در تشابه با همتای کلاسیکی خود تعریف می‌شوند. بطور مثال، ماشین اتو از دو فرآیند بی‌دررو و دو فرآیند هم‌حجم تشکیل شده است که با بازتعریف این فرآیندها به صورت کوانتومی می‌توان ماشین اتو کوانتومی ساخت. در ماشین اتو کوانتومی در دو فرآیند بی‌دررو، هامیلتونی ماده کار به طور آهسته تغییر می‌کند به نحوی که احتمال اشغال ترازهای انرژی بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر این تغییر در هامیلتونی ماده کار به گونه‌ای باشد که اختلاف بین ترازهای انرژی با نسبت یکسان تغییر کنند، بازده این ماشین مانند همتای کلاسیکی خود می‌باشد، اما اگر تغییر در هامیلتونی ماده کار به گونه‌ای باشد که اختلاف بین ترازهای انرژی در فرآیند بی‌دررو

در ترمودینامیک کلاسیک، ماشین (موتور) گرمایی به ماشینی گفته می‌شود که انرژی گرمایی را در یک چرخه ترمودینامیکی با استفاده از اختلاف دمای بین یک منبع گرم و یک منبع سرد به کار مکانیکی تبدیل کند. این چرخه‌ها از فرآیندهای ترمودینامیکی مختلفی تشکیل شده‌اند که با تغییر آن‌ها می‌توان ماشین‌های گرمایی گوناگونی ساخت. بطور مثال، با دو فرآیند بی‌دررو و هم‌حجم می‌توان یک ماشین اتو بوجود آورد. نکته مهم در ماشین‌های گرمایی این است که همه گرمای دریافتی را نمی‌توانند به کار تبدیل کنند و بنابراین بازده این ماشین‌های گرمایی هیچ‌گاه یک نمی‌شود [۱].

چگالی آن $\hat{\rho}_c = Z_c^{-1} \exp(-\hat{H}_c / K_B T_c)$ است که در

آن $Z_c = \text{Tr}(\exp(-\hat{H}_c / K_B T_c))$ تابع پارش می‌باشد.

- در مرحله بعد، سامانه از منبع سرد جدا شده و با فرآیند بی‌دررو کوانتومی به نقطه D می‌رسد. هامیلتونی سامانه در این نقطه به صورت بی‌دررو به $\hat{H}_h = (-\hbar^2 / 2m) d^2 / dx^2 + V_{\varepsilon_h, \nu_h}(x)$ تبدیل می‌شود به نحوی که احتمال اشغال ترازهای انرژی تغییر نکرده و با احتمال اشغال ترازهای انرژی در نقطه C برابر باشد.

- سپس سامانه در مجاورت منبع گرمایی با دمای T_h قرار می‌گیرد و طی یک فرآیند هم‌حجم کوانتومی به نقطه A می‌رسد. ماتریس چگالی سامانه در این نقطه به $\hat{\rho}_A = Z_h^{-1} \exp(-\hat{H}_h / K_B T_h)$ تبدیل می‌شود، که در آن $Z_h = \text{Tr}(\exp(-\hat{H}_h / K_B T_h))$ تابع پارش است.

- در این مرحله سامانه از منبع گرمایی با دمای T_h جدا می‌شود و طی فرآیند بی‌دررو بدون تغییر احتمال اشغال ترازهای انرژی هامیلتونی سامانه به $\hat{H}_c$ تبدیل می‌شود.

- در مرحله آخر سامانه در تماس با منبع گرمایی با دمای T_c قرار می‌گیرد و طی فرآیند هم‌حجم به نقطه ابتدایی این چرخه باز می‌گردد.

اکنون می‌توان گرمای جذب شده (Q_h)، گرمای داده شده به منبع سرد (Q_c)، کار خالص (W) و بازده ماشین اتو (η) را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$Q_h = \langle \hat{H}_h \rangle_A - \langle \hat{H}_h \rangle_D = \sum_n E_{n,h}^\nu \left(\frac{e^{-\frac{E_{n,h}^\nu}{K_B T_h}}}{Z_h} - \frac{e^{-\frac{E_{n,c}^\nu}{K_B T_c}}}{Z_c} \right) \quad (3)$$

$$Q_c = \langle \hat{H}_c \rangle_C - \langle \hat{H}_c \rangle_B = \sum_n E_{n,c}^\nu \left(\frac{e^{-\frac{E_{n,c}^\nu}{K_B T_c}}}{Z_c} - \frac{e^{-\frac{E_{n,h}^\nu}{K_B T_h}}}{Z_h} \right) \quad (4)$$

$$W = Q_h + Q_c, \quad \eta = \frac{W}{Q_h} \quad (5)$$

که در اینجا $E_{n,c}^\nu$ و $E_{n,h}^\nu$ به ترتیب ویژه مقادیر $\hat{H}_c$ و $\hat{H}_h$ می‌باشند.

به صورت ناهمسان تغییر کنند، بازده ماشین نسبت به همتهای کلاسیکی خود بیشتر می‌شود [۲،۳].

در این پژوهش با استفاده از ذره‌ای در پتانسیل پوشل-تِلر به عنوان ماده کار برای ماشین اتو کوانتومی، با تغییر پارامترهای مربوط به پتانسیل در فرآیند بی‌دررو، کار خالص و بازده این ماشین را محاسبه می‌کنیم. تغییر هر کدام از پارامترهای موجود در این پتانسیل می‌تواند باعث ایجاد تغییر با نسبت یکسان یا غیر یکسان در ترازهای انرژی شود. هدف ما بررسی اثر تغییر هر کدام از این پارامترها در کار و بازده ماشین گرمایی اتو است.

ماشین اتو کوانتومی با پتانسیل پوشل-تِلر

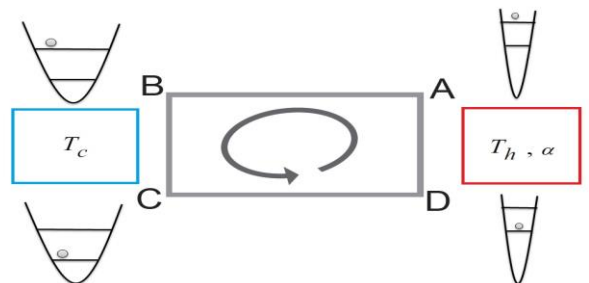
هامیلتونی زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\varepsilon, \nu}(x), \quad V_{\varepsilon, \nu}(x) = \frac{\varepsilon \nu (\nu + 1)}{\sin^2 \frac{\pi x}{L}} \quad (1)$$

که در آن $V_{\varepsilon, \nu}(x)$ پتانسیل پوشل-تِلر است. انرژی‌های مربوط به هامیلتونی بالا به صورت زیر هستند [۴]:

$$E_n^\nu = \varepsilon (n + \nu + 1)^2 \quad (2)$$

در اینجا پارامتر $\varepsilon = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ دارای بُعد انرژی و ν بدون بعد است.



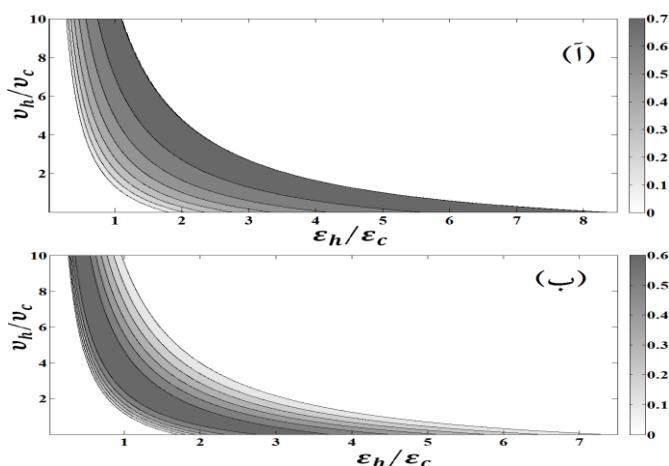
شکل ۱: چرخه ماشین اتو کوانتومی با بکار بردن ذره‌ای در پتانسیل پوشل-تِلر به عنوان ماده کار بین دو منبع، یک منبع گرمایی با دمای T_c و یک منبع گرمایی با دمای T_h قرار دارد را نشان می‌دهد.

حال نحوه عملکرد یک ماشین اتو کوانتومی را بین دو منبع، یک منبع گرمایی با دمای T_c و یک منبع گرمایی با دمای T_h را تشریح می‌کنیم:

- ابتدا سامانه مورد نظر در نقطه C در تعادل با منبع

گرمایی با دمای T_c قرار دارد. هامیلتونی سامانه

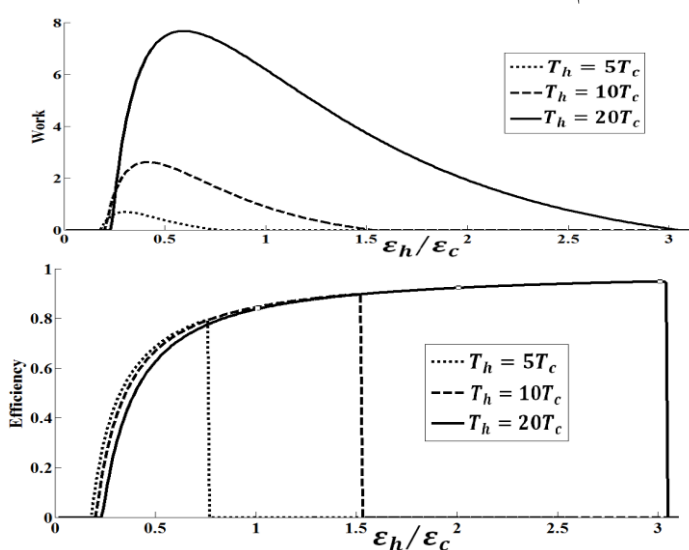
$$\hat{H}_c = (-\hbar^2 / 2m) d^2 / dx^2 + V_{\varepsilon_c, \nu_c}(x) \quad \text{و ماتریس}$$



شکل ۳: نمودار (آ) مربوط به بازده براساس تغییرات ϵ_h/ϵ_c و v_h/v_c ، در حالی که نمودار (ب) کار خالص را نشان می‌دهد.

برای درک بهتر میزان تاثیر تغییرات ϵ_h/ϵ_c و v_h/v_c در بازده و کار در شکل ۳ کار و بازده به صورت تابعی از تغییرات این پارامترها نمایش داده شده است. باید به این نکته توجه کرد که اگر در هامیلتونی سامانه، صرفاً v را از v_c به v_h تغییر دهیم و ϵ را بدون تغییر نگاه داریم، اختلاف ترازهای انرژی سامانه، با نسبت یکسان تغییر نمی‌کنند. با توجه به این نکته، دیده می‌شود که اگر اختلاف بین ترازهای انرژی سامانه به یک نسبت تغییر نکنند، آنگاه برای $\epsilon_h \approx \epsilon_c$ ، کار و بازده، افزایش می‌یابد.

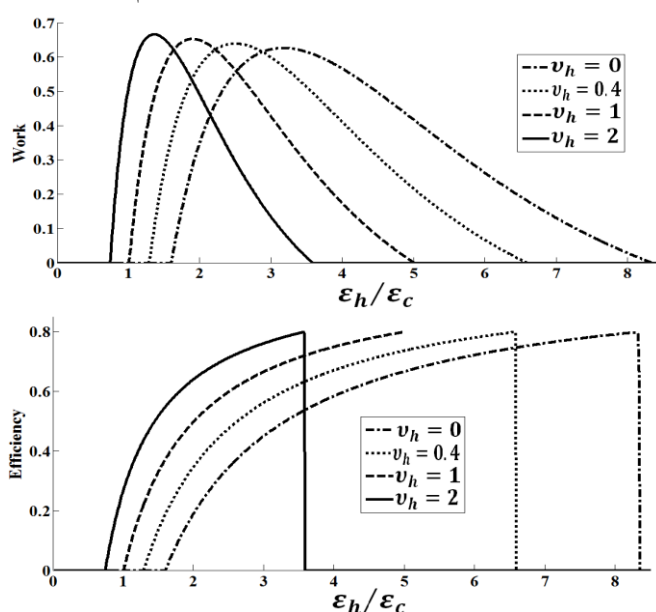
اکنون با انتخاب $v_h/v_c = 15$ کار و بازده به ازای دماهای مختلف ($T_h = 5T_c$, $T_h = 10T_c$, $T_h = 20T_c$) را به صورت تابعی از ϵ_h/ϵ_c رسم شده است.



شکل ۴: نمودار کار خالص و بازده برای پارامترهای $v_c = 1$, $v_h = 15$

$$T_h = 20T_c, T_h = 10T_c, T_h = 5T_c$$

اکنون با استفاده از رابطه ۲ کار و بازده ماشین اتو با پتانسیل پوشل-تالر را می‌توان محاسبه کرد. اگر فرض کنیم که در فرآیندهای بی‌دررو در هامیلتونی سامانه صرفاً از طریق تغییر مقدار ϵ از ϵ_c به ϵ_h و بالعکس انرژی ترازهای سامانه را تغییر دهیم، مقدار بازده برابر با $\eta = 1 - \epsilon_c/\epsilon_h$ می‌شود که مستقل از دماهای T_h و T_c است. یعنی با افزایش یا کاهش اختلاف T_h و T_c تغییری نمی‌کند هر چند که مقدار کار انجام شده با افزایش اختلاف بین T_h و T_c ، افزایش می‌یابد. توجه به این نکته مهم است که اگر در هامیلتونی سامانه، صرفاً ϵ را از ϵ_c به ϵ_h تغییر دهیم و v را بدون تغییر نگاه داریم، اختلاف ترازهای انرژی سامانه، با نسبت یکسان ϵ_c/ϵ_h تغییر می‌کنند. حال اگر فرض کنیم که در فرآیندهای بی‌دررو، علاوه بر تغییر ϵ از ϵ_c به ϵ_h ، مقدار v در هامیلتونی سامانه را از v_c به v_h و بالعکس تغییر دهیم.



شکل ۵: نمودار کار خالص و بازده برای پارامترهای $v_h = 0, 0.4, 1, 2$ ، $T_h = 5T_c$ و $v_c = 1$

نکته مهمی که با توجه به شکل ۲ می‌توان مشاهده کرد آن است که اگر $v_h \leq v_c$ و $\epsilon_h/\epsilon_c \leq 1$ باشد آنگاه کار خالص انجام شده و بازده صفر است. در حالی که به ازای $v_h > v_c$ برای $\epsilon_h/\epsilon_c \leq 1$ ، کار خالص انجام شده و بازده غیر صفر وجود خواهد داشت. بعلاوه، وقتی که $\epsilon_h \approx \epsilon_c$ باشد با افزایش v_h/v_c کار و بازده افزایش پیدا می‌کند.

همان طور که از شکل ۴ دیده می شود با افزایش اختلاف بین T_c و T_h کار و بازده افزایش پیدا می کند. همان طور که قبلاً ذکر شد، این افزایش در بازده و کار وقتی که $v_h = v_c$ باشد (یعنی صرفاً $\varepsilon_h/\varepsilon_c$ تغییر کند) دیده نمی شود.

نتیجه گیری

در ماشین اتو کوانتومی با به کار بردن ذره ای در پتانسیل پوشل-تالر به عنوان ماده کار، می توان با تغییر در پارامترهای موجود در این پتانسیل باعث ایجاد ناهمسانی در سطوح انرژی و در نتیجه باعث افزایش بازده شد. می توان مشاهده نمود که اگر $v_h \leq v_c$ و $\varepsilon_h/\varepsilon_c \leq 1$ باش آنگاه کار خالص و بازده صفر خواهد بود ولی به ازای $v_h > v_c$ و $\varepsilon_h/\varepsilon_c \leq 1$ کار خاص و بازده غیر صفر وجود دارد. هر چه اختلاف دمای بین دو منبع از هم بیشتر شود بازده و کار خالص این ماشین نیز افزایش می یابد.

مرجع ها

- [۱] Mark W. Zemansky; "Heat and Thermodynamics"; (5th.ed.) McGraw-Hill Book Company Inc.(1968).
- [۲] H. T. Quan, Yu-xi Liu, C. P. Sun, and Franco Nori; "Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines"; *Phys. Rev. E* **76**, 031105 (2007).
- [۳] D. Gelbwaser-Klimovsky, A. Bylinskii, D. Gangloff, R. Islam, A. Aspuru-Guzik, and V. Vuletic; "Single-Atom heat machines enabled by energy quantization"; *Phys. Rev. Lett.* **120**, 170601 (2018).
- [۴] H. Bergeron, P. Siegl and A. Youssef; "New SUSYQM coherent States for Pöschl-Teller potentials: a detailed mathematical analysis"; *Europhys. Lett.* **92**, 60003 (2012).

رمزنگاری کوانتومی مستقل از چرخش با استفاده از مولفه‌های شعاعی کوانتومی نور لاگرگوسی

محدثه مداحی، فرناز فرمان و علیرضا بهرامپور

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف، خیابان آزادی، تهران

چکیده

چکیده _ مولفه شعاعی (p) پرتو لاگرگوسی یکی از درجات آزادی نور در فضای هیلبرت نامتناهی البعد است که در ارتباطات کوانتومی و پروتکل های رمزنگاری کوانتومی توان از آن استفاده کرد. در این مقاله قصد داریم روشی جهت پیاده سازی پروتکل BB84 در ابعاد بالاتر با استفاده از مدهای مستقل از چرخش P ارائه دهیم که فرستنده و گیرنده احتیاج به همراستا کردن مراجع خود نداشته باشند. ظرفیت و امنیت کانال نیز افزایش یابد.

واژه های کلیدی: تکانه زاویه ای مداری نور، توزیع کلید کوانتومی، مولفه شعاعی، مستقل از مختصات

Rotation Invariant Quantum Cryptography Using Radial Quantum Number of the Laguerre-Gaussian Beam

Mohaddeseh Maddahi, Farnaz Farman, Alireza Bahrampour

Departement of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

Radial quantum number (p) of laguerre-gaussian beam is one of the light's degrees of freedom in infinite-dimensional Hilbert space, which is used in quantum communication and quantum cryptography protocols. In this paper, we propose a way for implementing BB84 protocol in higher dimensions by encoding information on rotation invariant states of p that transmitter and receiver do not need to align their frames. The Capacity of the channel and also its security are increased.

Keywords: Orbital angular momentum, Quantum key distribution, Radial quantum number, frame independent

پایه نامتوازن³ احتیاج داریم. اگر دو دسته پایه در فضای d بعدی

مقدمه

داشته باشیم که تمام حالت های آنها از رابطه زیر پیروی کنند.

$$| \langle a_i | b_j \rangle |^2 = \frac{1}{\sqrt{d}}, \forall i, j \in \{1, \dots, d\}$$
 به آنها پایه های نامتوازن گفته می شود. در پیاده سازی با قطبش حداقل یکی از این پایه ها دارای قطبش خطی است و در اثر چرخش تغییر می کند. بنابراین در این روش فرستنده و گیرنده که به آلیس و باب مشهور هستند، همواره باید در طول مدت انتقال اطلاعات، مرجع مختصات یکسانی داشته باشند در غیر این صورت باب نمی تواند اطلاعات را به درستی دریافت کند و نرخ خطا افزایش می یابد. به ویژه در ارتباطات ماهواره ای، مرجع آلیس و باب ثابت نیست و با زمان تغییر می کند. آلیس پیوسته باید علاوه بر اطلاعات، مشخصات مرجع مختصات خود را نیز بفرستد که منجر به گرفتن پهنای باند کانال می شود. یک

ارسال اطلاعات بر روی فوتون در توزیع کلید کوانتومی مرسوم است و معمولاً از قطبش فوتون استفاده می شود. بنت و براسارد¹ در سال 1984، پروتکل BB84، اولین و معروف ترین پروتکل رمزنگاری QKD² را پیشنهاد دادند که هم اکنون نیز بسیار کاربرد دارد [1]. یکی از روش های پیاده سازی این پروتکل در فضای آزاد استفاده از قطبش فوتون است. این روش مشکلاتی در پی دارد از جمله این که ارسال اطلاعات در پایه های قطبش تنها به فضای هیلبرت دوبعدی محدود می شود و بیشینه نرخ ارسال اطلاعات تا یک بیت در هر بار ارسال فوتون است. برای پیاده سازی به دو دسته

$$\times \exp\left(\frac{-ikr^2z}{2(z^2+z_R^2)}\right) e^{-i\ell\varphi} \times \exp(i(2p+|\ell|+1)\tan^{-1}\frac{z}{z_R}) \quad (1)$$

$L_p^{|\ell|}$ چند جمله‌ای‌های تعمیم یافته لاگر، $C_{p\ell}^{LG}$ ضریب نورمالیزاسیون و w_0 شعاع کمر پرتو است. اندازه اندیس فازی ℓ میزان و علامتش جهت پیش جبهه فاز را نشان می دهد. به ازای $\ell \neq 0$ سطح مقطع پرتو شامل $p+1$ حلقه هم مرکز است و برای $\ell = 0$ تعداد p حلقه حول نقطه مرکزی وجود دارد. به ازای هر ویژه مقدار تکانه زاویه‌ای مداری، بینهایت مد با مولفه p متفاوت تعریف می شود. پایه‌های نامتوازن مدهای ℓ مستقل از چرخش نیستند. ساختار فازی مدهای OAM در طی انتشار در فضای آزاد تحت تاثیر آشفتگی محیطی قرار می گیرند. از این رو مدهای شعاعی p و پایه‌های نامتوازن آن به علت تقارن دایروی و عدم بستگی فازی گزینه مناسب تری برای ارسال اطلاعات به صورت مستقل از چرخش به نظر می آیند. از این رو در اینجا از مدهای لاگر با $\ell = 0$ استفاده می کنیم. برای پیاده سازی پروتکل BB84 با استفاده از مدهای شعاعی P دو دسته پایه نامتوازن زیر را پیشنهاد می کنیم.

$$X = \{|0\rangle_{LG}, |1\rangle_{LG}, \dots, |p\rangle_{LG}\} \\ Z = \{\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{p=0}^{d-1} e^{\frac{i2\pi pk}{d}} |p\rangle_{LG}\}_{k=1}^d \quad (2)$$

پایه نامتوازن فوق با استفاده از تبدیل فوریه گسسته⁷ پایه اصلی به دست می آید. از نظر تئوری می توان این پروتکل را با بی نهایت مد شعاعی p اجرا کرد. اما به طور تجربی امکانات آزمایشگاهی ممکن است محدودیت ایجاد کنند. در طی پیاده سازی پروتکل باید با روش هایی مدهای شعاعی p و پایه های نامتوازن آنها را از هم تشخیص دهیم که در قسمت بعد به آن می پردازیم.

روش جداسازی مدهای p

باتوجه به رابطه (1) هر مد p در اثر انتشار فاز گوی⁸ متفاوت به خود می گیرد. با توجه به این اختلاف فازها می توان مولفه های مختلف p را تفکیک کرد. مدهای LG ویژه مدهای تبدیل فوریه

راه غلبه بر این مشکل استفاده از کیوبیت های چندگانه درهم تنیده است. تولید و آشکارسازی این فوتون ها به تکنولوژی پیچیده تری نیازمند است و اثر چرخش بر روی هر فوتون می تواند متفاوت از فوتون های دیگر باشد [2]. در سال 2012 گروهی از محققین با استفاده از حالت های ترکیبی قطبش-تکانه زاویه ای مداری فوتون روشی جهت ارسال اطلاعات ارائه دادند که فرستنده و گیرنده احتیاج به همراستا کردن مراجع خود حول محور انتشار نداشتند. در این روش آن ها موفق به ارسال یک بیت اطلاعات در هر بار ارسال فوتون شدند [3]. در این مقاله قصد داریم روشی جهت ارسال اطلاعات ارائه دهیم که مستقل از مختصات مرجع آلیس و باب حول محور انتشار باشد تا آنها احتیاج به همراستا کردن مراجع خود نداشته باشند و همچنین ظرفیت کانال نیز به بیش از یک بیت اطلاعات در هر بار ارسال فوتون افزایش یابد. از این رو به درجات آزادی دیگر نور روی می آوریم [4]. هر پرتوی نور با جبهه فاز پیچشی $e^{-i\ell\varphi}$ دارای تکانه زاویه ای مداری $(OAM)^4$ است [5]. از جمله مشهورترین پرتوهای حامل تکانه زاویه ای مداری مدهای لاگر گوسی⁵ (LG) هستند که پایه کاملی برای هر موج پاراکسیال تشکیل می دهند. این مدها با دو مولفه، اندیس شعاعی $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ و دیگری اندیس فازی $\ell \in \{0, \pm 1, \dots\}$ مشخص می شوند که اندیس ℓ به OAM نور و اندیس p به توزیع فضایی شعاعی شدت نور مربوط می شود. تاکنون به مولفه شعاعی p نسبت به ℓ کمتر پرداخته شده است. این دو مولفه نور فضای هیلبرت نامتناهی البعد برای ارسال اطلاعات فراهم می کنند. مدهای p و پایه های نامتوازن آنها توزیع متقارن دایروی دارند و تحت چرخش ناوردا می مانند، بنابراین جهت ارسال اطلاعات از آنها استفاده می کنیم.

مبانی نظری

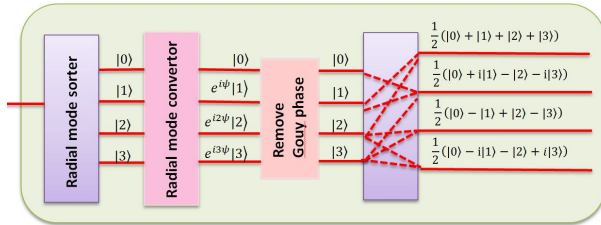
مدهای لاگر گوسی از حل معادله موج هلمهولتز در تقریب پاراکسیال در تقارن استوانه ای بدست می آیند:

$$LG_{p\ell}(r, \theta) = \frac{C_{p\ell}^{LG}}{w_0} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0}\right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$$

Discrete Fourier transform⁷
Gouy phase⁸

Orbital angular momentum⁴
Laguerre-Gaussian⁵
Beam waist⁶

این فرایند برای هر مد p فاز گوی مشخصی متناسب با آن ظاهر می‌شود با قرار دادن تغییردهنده فاز¹⁰ می توان فاز گوی را خشی کرد. در ادامه پیاده‌سازی پروتکل را برای چهار مد p در نظر گرفتیم که البته قابل تعمیم به بی نهایت مد p می باشد. (شکل 2)



شکل 2: نمایی شماتیک از آشکارسازی پایه های نامتوازن مد های شعاعی p

پیاده سازی پروتکل BB84

آلیس اطلاعات کلاسیکی $\{0,1,2,3\}$ را به طور تصادفی در دو پایه زیر می فرستد. پایه X پایه اصلی و پایه Z پایه نامتوازن و از تبدیل فوریه پایه اصلی به دست آمده است.

$$X = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$$

$$Z = \left\{ \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle), \right.$$

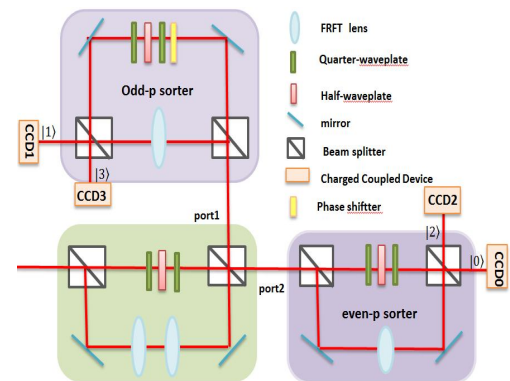
$$\left. \frac{1}{2}(|0\rangle + i|1\rangle - |2\rangle - i|3\rangle), \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle + |2\rangle - |3\rangle), \frac{1}{2}(|0\rangle - i|1\rangle - |2\rangle + i|3\rangle) \right\}$$

آلیس و باب از قبل طبق قرارداد با یکدیگر به هر حالت یک بیت کلاسیکی نسبت می‌دهند. پس از مبادله اطلاعات کوانتومی، از طریق کانال کلاسیکی با یکدیگر ارتباط برقرار کرده و پایه‌هایشان را اعلام می‌کنند. در صورتی که در پایه یکسان اندازه‌گیری کرده باشند اطلاعات را نگاه می‌دارند در غیر اینصورت آنها را دور میریزند. شکل (3) حال آنها یک رشته کلید هماهنگ دارند. اطلاعاتی که باب به دست می آورد به طور کلی از رابطه زیر به دست می آید.

$$I_{AB}^d = \log_2 d + F \log_2 F + (1 - F) \log_2 \left(\frac{1-F}{d-1} \right) \quad (3)$$

در اینجا F احتمال این است که باب حالتی که آلیس فرستاده را به صورت صحیح به دست آورد که در کانال بی نویز چنانچه ایو به کانال حمله نکند این احتمال 1 است. در صورت وجود نویز در کانال و یا حمله ایو از یک کمتر میشود ($F = 1 - QBER$) که

کسری⁹ (FRFT) (خانواده ای از تبدیل های خطی تبدیل فوریه تعمیم یافته) هستند. انواع تبدیل فوریه ها را می توان با لنزهایی در زاویه و فاصله کانونی مشخص پیاده سازی کرد. به عنوان مثال اگر پرتو لاگرگوسی در فاصله مشخصی از لنز FRFT با مرتبه a و فاصله کانونی مطلوب قرار گیرد شکل مد لاگرگوسی تغییر نمی کند ولی فاز گوی آن تغییر می کند [6]. بر همین اساس می توان مدهای شعاعی p را آشکارسازی کرد. به عنوان مثال روش آشکارسازی مدهای $p = \{0,1,2,3\}$ به صورت زیر است. پرتو ورودی پس از عبور از بیم اسپلیتر به دو شاخه تقسیم می شود. در یکی از شاخه ها دو لنز FRFT و در شاخه دیگر ادوات اپتیکی به گونه ای تعبیه شده اند که اختلاف فاز دو شاخه πp شود اگر p فرد باشد، اختلاف فاز دو شاخه π می شود و از خروجی 1 خارج شده به ازای p های فرد اختلاف فاز دوشاخه صفر و از خروجی 2 خارج می شود. برای جداسازی مدهای $p = \{0,2\}$ در این مرحله مشابه مرحله قبل در یکی از شاخه ادوات اپتیکی تنظیم فاز و در دیگری یک لنز به گونه ای تنظیم شده اند تا اختلاف فاز دوشاخه $\frac{\pi p}{2}$ شود اگر $p = 2$ باشد پرتو در CCD2 آشکار می شود و $p = 0$ در CCD0 آشکار می شود. برای جداسازی p های فرد لنز و سایر ادوات اپتیکی را طوری تنظیم کرده تا اختلاف فاز دو شاخه $\frac{\pi}{2}(p+1)$ شود. به ازای $p=1$ در CCD1 آشکارسازی شده و اگر $p=3$ باشد در آشکارساز CCD3 نمایان می شود. (شکل 1) برای جداسازی در



شکل 1: آشکارسازی مدهای شعاعی p

پایه های نامتوازن از سیستم مشابهی استفاده می شود. از نتیجه تداخل سنجی خروجی ها می توان به حالت ورودی پی برد. در مسیر

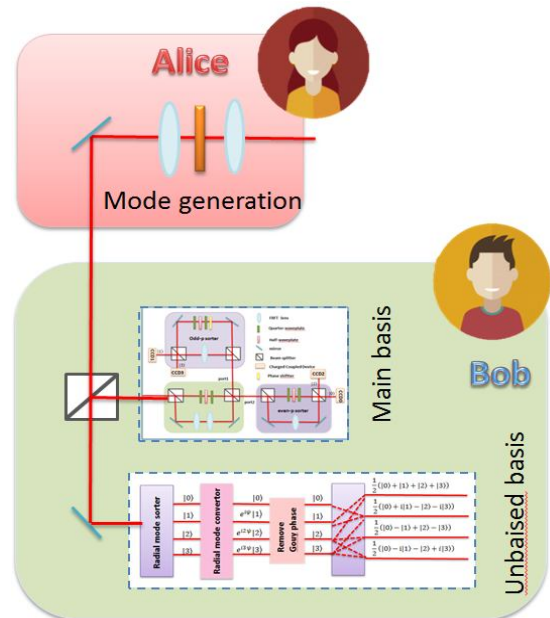
نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از مدهای شعاعی P پرتو لاگرگوسی روشی جهت پیاده سازی پروتکل BB84 در 4 بعد ارائه دادیم که منجر به افزایش ظرفیت کانال شده است. این پروتکل قابل تعمیم به ابعاد بالاتر نیز هست. همچنین به دلیل توزیع شدت متقارن مدهای شعاعی P و دسته پایه نامتوازن آنها، حالت های مبادله شده مستقل از چرخش بوده و آلیس و باب احتیاج به همراستا کردن مراجع خود حول محور انتشار ندارند. در صورت حمله ایو به کانال، احتمال آشکارسازی آن افزایش یافته است و کمتر می تواند به کانال حمله کند بنابراین امنیت کانال نیز افزایش پیدا می کند.

مرجع ها

- [1] Bennett, Charles H., and Gilles Brassard. "An update on quantum cryptography." Workshop on the Theory and Application of Cryptographic Techniques. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984
- [2] Bourennane, Mohamed, et al. "Decoherence-free quantum information processing with four-photon entangled states." Physical review letters 92.10 (2004): 107901
- [3] D'Ambrosio, Vincenzo, et al. "Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication." Nature communications 3 (2012): 961.
- [4] Farman, Farnaz, Sara Tofighi, and Alireza Bahrampour. "Ping-pong protocol based on the orbital angular momentum of light." JOSA B 35.10 (2018): 2348-2355
- [5] Vallone, Giuseppe, et al. "Free-space quantum key distribution by rotation-invariant twisted photons." Physical review letters 113.6 (2014): 060503
- [6] Zhou, Yiyu, et al. "Sorting photons by radial quantum number." Physical review letters 119.26 (2017): 263602.
- [7] Bourennane, Mohamed, et al. "Quantum key distribution using multilevel encoding: security analysis." Journal of Physics A: Mathematical and General 35.47 (2002): 10065.

QBER¹¹ احتمال خطای بین آلیس و باب است [6]. در صورت حمله ایو، او نیز مقداری اطلاعات به دست می آورد. یکی از



شکل 3: پیاده سازی پروتکل BB84 در 4 بعد با استفاده از مدهای شعاعی P حمله های ایو حمله استراق سمع و باز ارسال¹² است. در این حمله ایو مانند باب حالتی که آلیس فرستاده را به طور تصادفی با احتمال $\frac{1}{2}$ در پایه صحیح و با احتمال $\frac{1}{2}$ در پایه غلط اندازه گیری می کند، سپس برای باب می فرستد. اطلاعات متقابل¹³ آلیس و ایو در این حمله از رابطه $I_{AE}^d = \frac{\log_2 d}{2}$ به دست می آید که با در نظر گرفتن $d=4$ برابر $I_{AE} = 1$ است. از طرفی احتمال آشکارسازی ایو از رابطه $QBER = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{d})$ به دست می آید که در این مثال ایو به اندازه $\frac{3}{8}$ از خود ردپا به جا می گذارد که نسبت به BB84 استاندارد ($QBER = \frac{1}{4}$) افزایش یافته است. نرخ موثر ارسال اطلاعات از رابطه $R_{AB}^d = \frac{1}{2}(I_{AB}^d - I_{AE}^d)$ به دست می آید [7]. با افزایش بعد پروتکل QBER به سمت $\frac{1}{2}$ میل می کند. احتمال آشکارسازی ایو بیشتر شده و ردپای بیشتری به جا می گذارد. در نتیجه ایو کمتر می تواند حمله کند و امنیت کانال افزایش خواهد یافت.

افزایش همبستگی های کوانتومی با استفاده از چلانده

غلامی، افسانه؛ عامری، وحید؛ عسکری، علیداد

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه هرمزگان، کیلومتر نه جاده میناب، بندر عباس

چکیده

در این مقاله اثر چلانده را بر همبستگیهای یک سیستم کوانتومی بررسی می کنیم که از دو سیستم کاواک کیوبیت تشکیل شده است. اطلاعات متقابل، اطلاعات کلاسیکی و ناهمخوانی کوانتومی را برای دو پمپ هم‌دوس و چلانده بدست آورده ایم. نتایج نشان می‌دهند پمپ چلانده همبستگی ها را تقویت کرده است.

واژه های کلیدی: همبستگی کوانتومی، ناهمخوانی کوانتومی، اطلاعات متقابل، میدان چلانده، سیستم کاواک کیوبیت

Increasing the quantum correlations using squeezing

Gholami, Afsaneh; Ameri, Vahid; Askari, Alidad

Department of Physics, Faculty of Science, University of Hormozgan, Bandar Abbas

Abstract

In this paper, we study the effect of squeezing on the correlations in a quantum system, which consist of two cavity-qubit systems. The mutual information, classical information and quantum discord of system are derived for two coherent and squeezed pumps. The result shows the squeezed pump enhances the correlations in this system.

Keywords: Quantum correlation, Quantum discord, Mutual information, Squeezed field, Cavity qubit system

مقدمه

انجام محاسبات و پردازش اطلاعات نسبت به سیستم های کلاسیکی می شوند [۱]. برای مطالعه همبستگی کوانتومی معیارهای متفاوتی وجود دارد برای مثال می توان اطلاعات متقابل و ناهمخوانی کوانتومی را نام برد. اطلاعات متقابل مجموع اطلاعات کوانتومی و کلاسیکی است که از اختلاف اطلاعات متقابل و اطلاعات کلاسیکی می توان ناهمخوانی کوانتومی را بدست آورد. ناهمخوانی کوانتومی میزان همبستگی کوانتومی واقعی یک سیستم را نشان می دهد [۲،۳]. ناهمخوانی کوانتومی شامل همبستگی هایی است که از اثرات فیزیکی کوانتومی ناشی می شود اما لزوماً شامل در هم تنیدگی نیست. همبستگی کوانتومی در برخی از حالت های

همبستگی کوانتومی یکی از پدیده های عجیب کوانتومی است که می تواند میان دو ذره که با فاصله از هم قرار دارند ارتباط ایجاد کند به گونه ای که هر تغییر در ذره اول، موجب تغییر ذره دوم می شود. در ابتدا تنها سیستم های در هم تنیده به عنوان سیستم های همبسته کوانتومی در نظر گرفته می شدند اما مشخص شد سامانه های کوانتومی وجود دارند که می توانند بدون داشتن در هم تنیدگی، همبستگی کوانتومی را توصیف کنند. مطالعه همبستگی های کوانتومی از اهمیت زیادی برخوردار است به این دلیل که همبستگی های کوانتومی موجب برتری سیستم های کوانتومی در

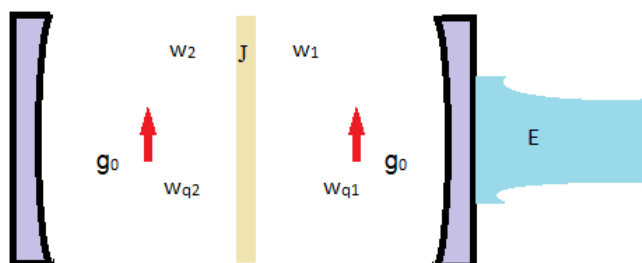
برای تولید نور چلانده به یک پمپ همدوس، سیگنال ورودی و یک محیط غیر خطی نیاز داریم. هامیلتونی در تصویر بر هم کنش به صورت زیر است:

$$H_I = i\hbar(T^*a^2 - Ta^{t2}) \quad (1)$$

که $T = \chi^{(2)}B$ پارامتر چلانگی است و a حالت سیگنال ورودی است، B حالت پمپ و $\chi^{(2)}$ یک تانسور غیر خطی مرتبه دو است [۵].

سیستم

مطابق شکل ۱ سیستمی را در نظر می گیریم که از دو کاواک همراه با یک کیوبیت در هر یک از آنها تشکیل شده است و همبستگی کوانتومی را در این سیستم مطالعه می کنیم.



شکل ۱: کیوبیت ها با فلش نشان داده شده اند که با کاواک ها جفت شده اند و شدت پرش بین مدهای دو کاواک است J دینامیک چنین سیستمی توسط معادله مستر بیان می شود که به صورت زیر است:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_{j=1,2} \gamma(2a_j \rho a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j \rho - \rho a_j^\dagger a_j) \quad (2)$$

هامیلتونی به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = w_1 a_1^\dagger a_1 + w_2 a_2^\dagger a_2 + \frac{w_{q1}}{2} \sigma_z^1 + \frac{w_{q2}}{2} \sigma_z^2 + g_0[(a_1 + a_1^\dagger)\sigma_{x1} + (a_2 + a_2^\dagger)\sigma_{x2}] + J(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2) + E(a_1^2 + a_1^{t2}) \quad (3)$$

که در آن $a(a^\dagger)$ عملگر نابودی (خلق) مدهای کاواک، w_1 و w_2 فرکانس مدهای کاواک و w_{q1} و w_{q2} فرکانس کیوبیت ها هستند. g_0 ثابت جفت شدگی هر کیوبیت با کاواک مربوط به خودش است. E دامنه میدان محرک است که با توجه به شکل ۱ فقط روی یکی از کاواک ها اثر می کند و میدان چلانده را در سیستم ایجاد

مخلوط جداپذیر وجود دارد؛ به عبارت دیگر، جداپذیر بودن تنها به معنای عدم وجود رابطه کوانتومی نیست. به این ترتیب مفهوم ناهمخوانی کوانتومی فراتر از تمایزی است که از قبل بین حالت های کوانتومی در هم تنیده در مقابل حالت های کوانتومی جداپذیر ساخته شده است. در رفرنس [۴]، نویسندگان، اطلاعات کلاسیکی و ناهمخوانی کوانتومی را با استفاده از اندازه گیری مقدار عملگر مثبت (POVM) برای یک سیستم دو کیوبیتی بدست آورنده اند. در اینجا اطلاعات متقابل، اطلاعات کلاسیکی و ناهمخوانی کوانتومی را به روش مشابه [۴] حساب می کنیم و به منظور افزایش همبستگی های کوانتومی، یک میدان چلانده را به سیستم اعمال می کنیم و نتایج بدست آمده را با حالتی که میدان محرک، همدوس است، مقایسه می کنیم. چلانگی حالتی است که در آن واریانس مربوط به یکی از عملگرهای تربیع میدان کمتر از $1/4$ باشد که به این معنی است که میزان نویز مربوط به یکی از عملگر های تربیع کمتر از نویز خلا است [۵].

حالت چلانده

در فیزیک، یک حالت چلانده توسط دو اپراتور غیر جا بجا شونده تعریف می شود. اگر دو اپراتور رابطه جا بجایی $[A, B] = iC$ را برآورده کنند از رابطه $|\langle C \rangle| \geq \frac{1}{4} \langle (A)^2 \rangle \langle (B)^2 \rangle$ پیروی می کنند. یک حالت سیستم چلانده است اگر $|\langle C \rangle| < \frac{1}{2} \langle (A)^2 \rangle$ یا $|\langle C \rangle| < \frac{1}{2} \langle (B)^2 \rangle$ برقرار باشد. در مورد چلانگی عملگر های تربیع $A = X_1$ و $B = X_2$ می گیریم که معادله $[X_1, X_2] = \frac{i}{2}$ را برآورده می کنند. هرگاه واریانس یکی از عملگر های تربیع کمتر از $1/4$ باشد چلانگی عملگر تربیع وجود دارد. برای یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ واریانس عملگرهای تربیع میدان با هم برابر است و برابر با حالت خلا است. حالت هایی که در آن چلانگی عملگر تربیع دارند نویز کمتری در یکی از عملگر های تربیع نسبت به حالت همدوس دارند یعنی افت وخیز ها در یکی از عملگر های تربیع چلانده میشود البته افت وخیز در عملگر تربیع دیگر افزایش می یابد.

باشد و همبستگی کلاسیک نباید تحت تاثیر تبدیلات یونیتیاری محلی قرار گیرد [۶]. سایر شرایط مهم در [۲] ذکر شده است.

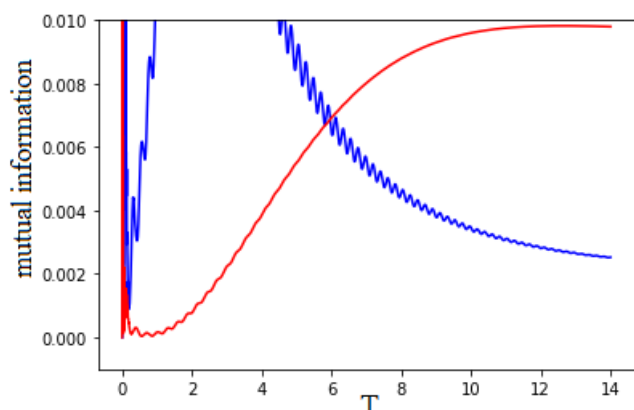
اختلاف بین اطلاعات متقابل و اطلاعات کلاسیکی، ناهمخوانی کوانتومی نامیده می شود و از رابطه زیر بدست می آید:

$$D_A = I - I_A^C = S(\rho_A) - S(\rho) + \min_{\{E_A\}} S(B|E_A) \quad (7)$$

با توجه به معادله ۵ و ۶ باید تمام POVM ها را بهینه سازی کنیم با این حال برای کیوبیت ها، همانطور که در [۶] نشان داده شده است POVM های بهینه باید حدی باشند یعنی آنها نمی توانند به عنوان یک ترکیب محدب از دیگر POVM ها نوشته شوند. علاوه بر این، POVM های حدی برای کیوبیت ها فقط ۲، ۳ یا ۴ پروژکتور به عنوان مولفه میتوانند داشته باشند [۷] و با توجه به نتایج عددی، بهینه سازی POVM ها با دو پروژکتور اعدادی می دهد که می توان با خیال راحت آنها را درست در نظر گرفت [۸]. در اینجا برای کاهش پیچیدگی محاسبات این تقریب ها را می پذیریم.

بررسی نتایج

به منظور بررسی اثر چلانگی در همبستگی کوانتومی، معیارهای همبستگی را در دو حالت: برای میدان محرک چلانده و همدوس حساب کرده ایم.



شکل ۲: نمودار اطلاعات متقابل بر حسب زمان برای میدان محرک چلانده (خط قرمز) و میدان محرک همدوس (خط آبی)

می کند. حال اگر میدان محرک را به صورت همدوس در نظر بگیریم هامیلتونی به صورت زیر می باشد:

$$H = w_1 a_1^t a_1 + w_2 a_2^t a_2 + \frac{w_{q1}}{2} \sigma_z^1 + \frac{w_{q2}}{2} \sigma_z^2 + g_0 [(a_1 + a_1^t) \sigma_{x1} + (a_2 + a_2^t) \sigma_{x2}] + J(a_2^t a_1 + a_1^t a_2) + E(a_1 + a_1^t) \quad (8)$$

اطلاعات متقابل، اطلاعات کلاسیکی و ناهمخوانی کوانتومی

در تئوری اطلاعات کوانتومی، اطلاعات متقابل کوانتومی یا اطلاعات متقابل فون نویمان، یک معیار از همبستگی بین زیر سیستم های یک حالت کوانتومی است که آنالوگ مکانیک کوانتومی از اطلاعات متقابل شانون است. اطلاعات متقابل یک ماتریس چگالی کل ρ_{AB} به صورت زیر تعریف می شود:

$$I(\rho) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (5)$$

که ρ_A و ρ_B ماتریس چگالی کاهش یافته هستند که با تریس گرفتن روی زیر سیستم B و A بدست می آیند و $S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log \rho]$ آنترپی فون نویمان است. $I(\rho)$ اندازه آن مقدار بیشتر اطلاعات است که در سیستم مرکب نسبت به زیرسیستم ها ذخیره شده است.

اطلاعات کلاسیکی به صورت زیر تعریف می شود:

$$I_A^C(\rho_{AB}) = \max_{\{E_A\}} (S(\rho_B) - S(B|E_A)) \quad (6)$$

که $\{E_A\}$ مولفه های اندازه گیری مقدار عملگر مثبت (POVM)

$$S(B|E_A) = \sum_{p_a} S\left(\frac{\text{Tr}[E_a \rho_{AB}]}{p_a}\right) \quad \text{روی } A, \text{ و}$$

میانگین آنترپی فون نویمان یک حالت شرطی B است و $p_a = \text{Tr}[E_a \rho_{AB}]$ احتمال گرفتن نتیجه a است. دو تا از ملزومات مربوطه که باید توسط هر همبستگی کلاسیک برآورده شود عبارت است از: همبستگی حالت حاصل $(\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B)$ باید صفر

حالت میدان محرک چلانده و همدوس حساب کرده ایم. نتایج نشان می دهد که چلانده گی، میزان همبستگی های کوانتومی را افزایش می دهد.

مراجع

[۱] آدابی، فرزین، مطالعه همبستگی های کوانتومی و معیار های مختلف آنها،

دانشگاه کردستان، ۱۳۹۵

[۲] L, Henderson., & V, Vedral., (2001). Classical, quantum and total correlations. *Journal of physics A: mathematical and general*, 34(35), 6899.

[۳] H, Ollivier. & W. H, Zurek. (2001). Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. *Physical review letters*, 88(1), 017901.

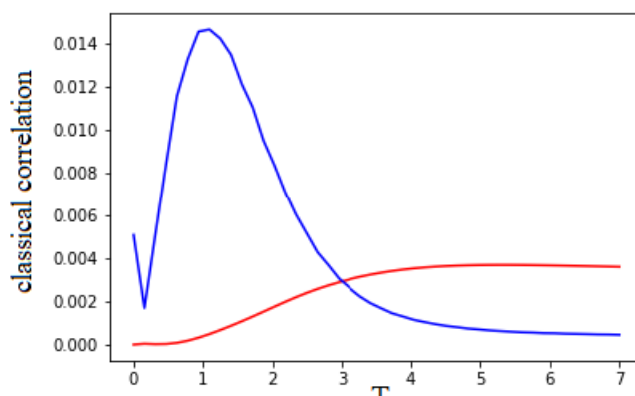
[۴] V, Ameri., M, Eghbali-Arani., A, Mari., A, Farace., F, Kheirandish., V, Giovannetti., & R, Fazio. (2015). Mutual information as an order parameter for quantum synchronization. *Physical Review A*, 91(1), 012301.

[۵] C, Gerry., P, Knight., & P. L, Knight., (2005). *Introductory quantum optics*. Cambridge university press.

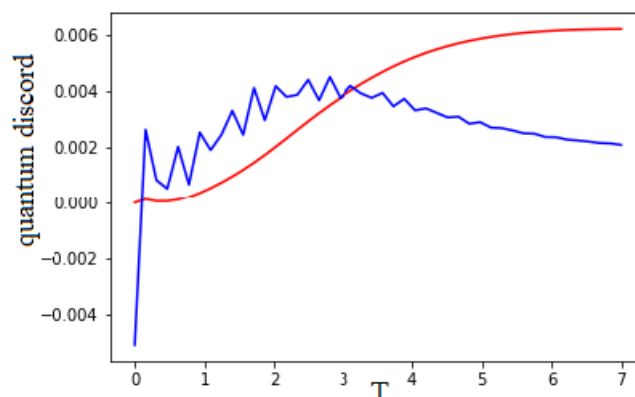
[۶] S, Hamieh., R, Kobes., & H, Zaraket. (2004). Positive-operator-valued measure optimization of classical correlations. *Physical Review A*, 70(5), 052325.

[۷] G. M, D'Ariano., P. L, Presti., & P, Perinotti. (2005). Classical randomness in quantum measurements. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(26), 5979.

[۸] F, Galve., G. L, Giorgi., & R, Zambrini. (2011). Orthogonal measurements are almost sufficient for quantum discord of two qubits. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(4), 40005.



شکل ۳: نمودار همبستگی های کلاسیکی برحسب زمان برای میدان محرک چلانده (خط قرمز) و میدان محرک همدوس (خط آبی)



شکل ۴: نمودار ناهمخوانی کوانتومی برحسب زمان برای میدان محرک چلانده (خط قرمز) و میدان محرک همدوس (خط آبی)

با توجه به نمودارهای اطلاعات متقابل، اطلاعات کلاسیکی و ناهمخوانی کوانتومی برای میدان محرک همدوس و چلانده، می توان نتیجه گرفت که میدان محرک چلانده میزان همبستگی های کوانتومی را افزایش می دهد

نتیجه گیری

در این مقاله یک سیستم شامل دو کاواک که در هر کدام یک کیوبیت قرار دارد را مورد مطالعه قرار داده ایم. سپس معادله مستر را با در نظر گرفتن اتلاف برای سیستم نوشته ایم و به منظور بررسی اثر چلانده گی در همبستگی های کوانتومی، معیارهای اطلاعات متقابل، همبستگی کلاسیکی و ناهمخوانی کوانتومی را برای دو

نقش تقارن حالت‌های کوانتومی در محاسبه سنجه درهم‌تنیدگی شکل یابی

اکبری، یحیی^۱؛ شاه‌حسینی، الهام^۲^{۱و۲} گروه فیزیک دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز

چکیده

نشان داده شده است که تقارن موجود در حالت‌های کوانتومی می‌تواند محاسبه سنجه درهم‌تنیدگی شکل یابی را بسیار ساده کند و در برخی موارد به یک عبارت تحلیلی برای این سنجه بیانجامد. در این مقاله، ابتدا برخی تبدیلات تقارنی حالت‌ها را مرور می‌کنیم و بحث می‌کنیم که این تقارن‌ها چرا و چگونه می‌توانند محاسبه سنجه درهم‌تنیدگی شکل یابی را ساده کنند. سپس به بازخوانی محاسبه سنجه درهم‌تنیدگی شکل یابی برای دو دسته معروف حالت‌های متقارن، یعنی حالت‌های ورنر و ایزوتروپی، می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: سنجه درهم‌تنیدگی شکل یابی، تقارن، حالت ورنر، حالت ایزوتروپی.

The role of the symmetry of quantum states in calculating the entanglement of formation

Akbari-Kourbolagh, Yahya¹; Shahhoseini, Elham²^{1,2} Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz,

Abstract

It was shown that the symmetry of quantum states can greatly simplify the calculation of the entanglement of formation and leads to an analytic form in some cases. In this paper, first we review some of the symmetry transformations of quantum states and describe why and how this symmetries can simplify the calculation of the entanglement of formation. Then we review the calculation for two well-known classes of symmetric states, Werner and Isotropic states.

Keywords: Entanglement of formation measure, Symmetry, Werner state, Isotropic state

PACS No.

بار ورنر [۱] با ساختن خانواده حالت‌های دو جزئی که در اثر

عملگرهای یکانی موضعی زیر ناوردا هستند، مطرح کرد:

$$\rho \rightarrow U \otimes U \rho (U \otimes U)^\dagger$$

که U ها عملگرهای یکانی عضو $U(d)$ ، یعنی گروه ماتریس‌های یکانی $d \times d$ ، هستند. نشان داده شده است که فضای حالت‌های

ورنر فقط با دو عملگر سوپ $F = \sum_{i,j} |ij\rangle\langle ji|$ و همانی I جارب می‌شود. بنا بر این، یک حالت ورنر دلخواه را می‌توان به صورت $\rho = aI + bF$ نوشت که در آن a و b اعداد حقیقی هستند. در نتیجه هر حالت ورنر فقط به دو پارامتر حقیقی وابسته است. از طرف دیگر، چون برای هر ماتریس چگالی رابطه

مقدمه

تقارن نقش والایی در فیزیک نوین ایفا می‌کند. معلوم شده است که اگر حالت کوانتومی مورد نظر دارای ویژگی‌های تقارنی خاصی باشد، می‌توان هم به اطلاعات ارزشمندی درباره ساختار درهم‌تنیدگی دست یافت و هم می‌توان از این ویژگی‌ها در ساده سازی محاسبه تحلیلی سنجه‌ها استفاده کرد که در اکثر موارد به فهم عمیق‌تر و فرمولبندی ریاضی زیباتری برای نظریه‌های فیزیکی متناظر می‌انجامد. در نظریه اطلاعات کوانتومی، ایده تقارن را اولین

ماتریس چگالی کاهش یافته زیر سیستم A است. تجزیه ای که اینفیموم فوق را می دهد، تجزیه بهینه نامیده می شود. بنا بر این، محاسبه این سنج به برای یک حالت آمیخته دلخواه، یک مسأله بهینه سازی است و این مطلب به دست آوردن یک رابطه تحلیلی برای این سنج را با مشکل مواجه می کند. عبارت تحلیلی برای این سنج اولین بار برای دو کیوبیت به دست آمد [۲]. یکی از راه های ساده سازی محاسبه این سنج، استفاده از تقارن های حالت های کوانتومی است.

هر تبدیلی که یک حالت کوانتومی را تغییر ندهد یک تقارن آن حالت نامیده می شود. در حالت کلی، این تبدیل می تواند هر شکلی داشته باشد و لزومی ندارد یکانی یا موضعی باشد. با وجود این، یک دسته مهم این تبدیلات، تبدیلات یکانی U است. مجموعه تمام تقارن های یکانی، گروه بسته عملگرهای یکانی روی $H_1 \otimes H_2$ را تشکیل می دهند. فرض کنید G گروه عملگرهای یکانی موضعی به شکل $U = U_1 \otimes U_2$ باشد. در این صورت، G یک زیرگروه بسته گروه تبدیلات یکانی است. ناوردایی عملگر دلخواه A روی $H_1 \otimes H_2$ تحت تمام تبدیلات یکانی موضعی، معادل با ناوردایی آن تحت عمل چرخش P است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(A) = \int dU UAU^\dagger$$

و در آن $\int dU$ انتگرال نسبت به سنج هار گروه G است که آن را به عنوان میانگین روی تمام اعضای گروه تعبیر می کنیم.

قبل از پرداختن به نحوه محاسبه سنج درهم تنیدگی شکل یابی به کمک تقارن حالت ها، لازم است در مورد مفهوم سقف محدب یک تابع دلخواه مطالب مورد نیاز را بیان کنیم [۳]. ابتدا نماد $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را معرفی می کنیم که در آن مجموعه اعداد حقیقی است. اگر K یک مجموعه محدب فشرده، M زیرمجموعه K و $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دلخواه باشد، آنگاه سقف محدب تابع f روی K ، یعنی تابع $\text{Cof}: K \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ، را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\text{Cof}(x) = \inf_{\{p_i, s_i\}} \left(\sum_i p_i f(s_i) \mid s_i \in M, x = \sum_i p_i s_i \right).$$

$\text{tr} \rho = 1$ برقرار است، یکی از این پارامترها به دیگری وابسته می شود و تنها یک پارامتر مستقل باقی می ماند که آن را هم می توان با مقدار چشم داشتی $f = \langle F \rangle = \text{tr}(\rho F)$ مشخص کرد که در بازه $-1 \leq f \leq 1$ قرار دارد. دقت کنید که در حالت کلی، توصیف یک حالت دلخواه در فضای هیلبرت $H_1 \otimes H_2$ بسیار پیچیده است. بنا بر این، مهمترین نقش تقارن این است که تعداد پارامترهای مورد نیاز برای توصیف یک حالت کوانتومی متقارن را به شدت کاهش می دهد. تاکنون سنج های درهم تنیدگی متعددی معرفی شده اند که محاسبه اکثر آن ها نیازمند بهینه سازی یک تابع ریاضی روی تمام تجزیه های ممکن حالت کوانتومی مورد نظر به آنسامبل حالت های خالص هستند که به لحاظ ریاضی مسأله بسیار دشواری است. به همین دلیل، خانواده های حالت هایی که این سنج ها برای آن ها به صورت تحلیلی محاسبه شده اند بسیار اندک است و در موارد بسیاری این سنج ها به روش های عددی محاسبه می شوند. تاکنون برای تعداد معدودی خانواده حالت های متقارن، برخی سنج ها به صورت تحلیلی محاسبه شده اند. در این مقاله، ابتدا برخی تبدیلات تقارنی حالت ها را مرور می کنیم و بحث می کنیم که این تقارن ها چرا و چگونه می توانند محاسبه سنج درهم تنیدگی شکل یابی را ساده کنند. سپس به بازخوانی محاسبه سنج درهم تنیدگی شکل یابی به زبانی ساده و گویا برای دو دسته معروف حالت های متقارن، یعنی حالت های ورنر و ایزوتروپی، می پردازیم.

درهم تنیدگی شکل یابی

همان طور که در مقدمه اشاره شد، هدف ما بازخوانی محاسبه درهم تنیدگی شکل یابی برای حالت های ورنر و ایزوتروپی به زبانی ساده و گویا است. برای حالت آمیخته ρ سیستمی متشکل از دو زیرسیستم A و B ، سنج درهم تنیدگی شکل یابی $E(\rho)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(\rho) = \inf_{\{p_i, \psi_i\}} \left(\sum_i p_i E(\psi_i) \mid \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \quad (1)$$

که در آن $E(|\psi\rangle) = S(\text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|)$ است. در اینجا، آنتروپی فون-نیومن حالت دلخواه δ به صورت $S(\delta) = -\text{Tr} \delta \log \delta$ تعریف می شود و $\text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$

تجزیه ρ بر حسب تمام حالت‌های خالص ممکن بگیریم، فقط آن را روی تجزیه جدید ρ می‌گیریم:

$$\text{CoE}(\rho) = \inf \left\{ \sum_{\mu} q_{\mu} \varepsilon(\rho_{\mu}) \mid \sum_{\mu} q_{\mu} \rho_{\mu} = \rho \right\}.$$

این کار موجب ساده‌سازی محاسبه می‌شود زیرا به این ترتیب تعداد جملات تجزیه به شدت کاهش می‌یابد و اینفیموم گیری روی مجموعه کوچکتری انجام می‌شود. از این رو مشاهده می‌کنیم که تقارن حالت‌ها موجب کاهش شدید حجم محاسبات می‌شود. دقت کنید که اگر تابع ε محدب باشد، آنگاه $\text{CoE}(\rho) = \varepsilon(\rho)$ خواهد شد.

درهم‌تنیدگی شکل یابی حالت‌های ورنر

حال به حالت‌های ورنر می‌پردازیم. همانطور که در مقدمه اشاره شد، برای توصیف یک حالت ورنر تنها به یک پارامتر $f = \langle F \rangle = \text{tr}(\rho F)$ نیاز داریم که $-1 \leq f \leq 1$ است و به ازای $f \geq 0$ ، حالت ρ_f یک حالت جدپذیر است. برای محاسبه درهم‌تنیدگی شکل‌یابی حالت‌های ورنر، همانطور که در بخش پیش شرح داده شد، ابتدا مجموعه حالت‌های خالص $\sigma = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ را مشخص می‌کنیم که در رده C_{μ} قرار دارند و بنا بر این در شرط $P(\sigma) = \rho_{f_{\mu}}$ صدق می‌کنند یعنی به حالت ورنری با پارامتر زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} f_{\mu} &= \text{tr}(\rho_{f_{\mu}} F) = \text{tr}(P(\sigma)F) \\ &= \text{tr}(\sigma P(F)) = \text{tr}(\sigma F) \\ &= \langle \Phi | F | \Phi \rangle = \sum_{i,j} \Phi_{ij} \Phi_{ji}^* \end{aligned} \quad (2)$$

از اینرو، حالت‌های خالص رده C_{μ} حالت‌هایی هستند که در شرط اخیر صدق می‌کنند. در عبارت فوق، فرض کرده‌ایم حالت خالص دارای بسط زیر در یک پایه متعامد بهنجار دلخواه است:

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j} \Phi_{ij} |ij\rangle.$$

مرحله بعدی، تعیین $\varepsilon(\rho_{f_{\mu}})$ است. می‌دانیم درهم‌تنیدگی یک حالت خالص σ برابر با آنتروپی فون-نیومن ماتریس چگالی کاهش یافته $\sigma^A = \text{tr}_B \sigma$ یکی از زیرسیستم‌ها، مثلاً زیرسیستم اول است، یعنی

$$E(\sigma) = -\sum_i \sigma_{ii}^A \log(\sigma_{ii}^A) = \sum_i \eta \left(\sum_k |\Phi_{ik}|^2 \right) \quad (3)$$

اگر تابع f را آنتروپی فون-نیومن، K را فضای تمام حالت‌ها یعنی فضای $H_1 \otimes H_2$ و M را مجموعه حالت‌های خالص این فضا در نظر بگیریم، در این صورت درهم‌تنیدگی شکل‌یابی حالت ρ را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\text{CoE}(\rho) = \inf_{\{p_i, s_i\}} \left\{ \sum_i p_i E(s_i) \mid s_i \in M, \rho = \sum_i p_i s_i \right\}.$$

مجموعه حالت‌های $P(K)$ که تحت عمل چرخش P به خودشان می‌چرخند، حالت‌های G -ناوردا نامیده می‌شوند. بعد زیرفضای $P(K)$ معمولاً بسیار کوچکتر از بعد فضای کل حالت‌های K است و سعی می‌کنیم محاسبه $\text{CoE}(\rho)$ را که شامل اینفیموم گیری روی تمام تجزیه‌های محدب ρ در فضای با بعد زیاد K است به یک محاسبه روی زیرفضای با بعد کمتر $P(K)$ تبدیل کنیم. برای این منظور، توجه می‌کنیم که اگر برای یک حالت G -ناوردای ρ تجزیه‌ای بر حسب حالت‌های خالص دو جزئی s_i بنویسیم، داریم:

$$\rho = \sum_i p_i s_i = P(\rho) = \sum_i p_i P(s_i).$$

از آنجا که بعد زیرفضای $P(K)$ معمولاً بسیار کوچکتر از بعد فضای کل حالت‌های K است، تعدادی از حالت‌های خالص s_i ناچارند تحت عمل چرخش P به یک حالت آمیخته معین مثل ρ_{μ} بچرخند. بنا بر این، عمل چرخش P می‌تواند مجموعه حالت‌های خالص را به رده‌های C_{μ} افراز کند که شامل همه حالت‌های خالصی است که تحت P به حالت آمیخته معین ρ_{μ} می‌چرخند. بنا بر این اگر n رده داشته باشیم، آنگاه $M = \bigcup_{\mu=1}^n C_{\mu}$ است. در این صورت، تجزیه جدیدی با تعداد جملات کمتر به صورت $\rho = \sum_{\mu=1}^n q_{\mu} \rho_{\mu}$ برای حالت مورد نظر به دست می‌آید.

حال برای محاسبه درهم‌تنیدگی شکل‌یابی می‌توانیم از هر رده یک نماینده را برداریم به طوری که کمترین مقدار آنتروپی را در بین اعضای آن رده داشته باشد و این کمترین مقدار را برابر $\varepsilon(\rho_{\mu}) := \inf \{E(s_i) \mid s_i \in C_{\mu}\}$ تعریف می‌کنیم. سپس سقف محدب تابع ε را به دست می‌آوریم که همان درهم‌تنیدگی شکل‌یابی است. در واقع به جای اینکه اینفیموم را روی میانگین نظیر

در نتیجه، درهم‌تنیدگی شکل یابی حالت ورنر ρ_f به ازای $f \geq 0$ برابر صفر و به ازای $f < 0$ برابر است با:

$$EoF(\rho_f) = H_2 \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - f^2}) \right].$$

درهم‌تنیدگی شکل یابی حالت‌های ایزوتروپی

خانواده دیگری از حالت‌های متقارن که به حالت‌های ایزوتروپی معروف‌اند [۴]، تحت تمام عملگرهای یکانی موضعی به شکل $U \otimes \bar{U}$ ناوردا هستند، ($\bar{U}$ مزدوج مختلط U در یک پایه معین است). نشان داده شده است که هر حالت ایزوتروپی دلخواه از ترکیب عملگر همانی و عملگر $F = |\phi\rangle\langle\phi|$ به دست می‌آید که در آن $|\phi\rangle = \sum_i |ii\rangle / \sqrt{d}$ است. بنا بر این، هر حالت ایزوتروپی تنها بوسیله یک پارامتر $f = \langle F \rangle = \text{tr}(\rho F)$ که در بازه $[0, 1]$ قرار دارد، توصیف می‌شود. نشان داده شده است که این حالت به ازای $f \leq 1/d$ برای $d \geq 2$ جداپذیر است.

با روشی مشابه با روش مربوط به حالت‌های ورنر نشان داده می‌شود که درهم‌تنیدگی شکل‌یابی حالت ایزوتروپی به ازای $f \leq 1/d$ برابر با صفر است و به ازای $1/d < f \leq 1$ داریم

$$EoF(\rho_f) = \text{Co}[H_2(\gamma(f)) + [1 - \gamma(f)] \log(d-1)],$$

که در آن داریم

$$\gamma(f) = \frac{1}{d^2} [\sqrt{f} + \sqrt{(d-1)(d-f)}]^2.$$

نتیجه‌گیری

ما در این مقاله، فرآیند محاسبه سنج درهم‌تنیدگی شکل یابی را با استفاده از تقارن حالت‌های کوانتومی و به طور خاص برای دو دسته از حالت‌های متقارن، به بیانی ساده و روان و با فرمولبندی ریاضی ساده‌تری مرور کردیم.

مرجع‌ها

- [۱] R. F. Werner, Phys. Rev. A ۴۰, ۴۲۷۷ (۱۹۸۹).
- [۲] S. Hill, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. ۷۸, ۵۰۲۲ (۱۹۹۷).
- [۳] B. Terhal and K.G.H. Vollbrecht, Phys. Rev. Lett. ۸۵, ۲۶۲۵ (۲۰۰۰).
- [۴] M. Horodecki and P. Horodecki, Phys. Rev. A ۵۹, ۴۲۰۶ (۱۹۹۹).
- [۵] K.G.H. Vollbrecht and R. F. Werner, Phys. Rev. A ۶۴, ۰۶۲۳۰۷ (۲۰۰۲).

که در آن $\eta(t) = -t \log t$ است. در محاسبه اخیر با توجه به تقارن $U \otimes U$ ، حالت‌های پایه را طوری برگزیدیم که ماتریس چگالی σ^A قطری باشد. تابع $\varepsilon(\rho_{f_\mu})$ برابر با اینفیموم تابع معادله (۳) تحت قید معادله (۲) است. اگر $f_\mu \geq 0$ باشد، با توجه به تقعر تابع $\eta(t)$ پی می‌بریم که این اینفیموم از حالت خالصی حاصل می‌شود که برای آن فقط یکی از Φ_{ii} ها و نیز تعدادی از Φ_{ij} های با اندیس ثابت i مخالف صفر است. در این صورت داریم

$$\varepsilon(\rho_{f_\mu}) = \eta(\sum_k |\Phi_{ik}|^2) = \eta(1) = 0.$$

در اینجا از شرط بهنجارش $\sum_k |\Phi_{ik}|^2 = 1$ استفاده کردیم. به ازای $f_\mu < 0$ ، پی می‌بریم که اینفیموم مربوط به حالت خالصی است که برای آن همه Φ_{ii} ها برابر صفر است و فقط دو مولفه Φ_{ij} و Φ_{ji} به ازای $i \neq j$ مخالف صفر است. در این صورت، داریم

$$f_\mu = 2 \text{Re}(xy^*), \quad E(\sigma) = \eta(|x|^2) + \eta(|y|^2)$$

$$x = \Phi_{ij}, y = \Phi_{ji}; \quad |x|^2 + |y|^2 = 1.$$

بنا بر این، مسئله یافتن $\varepsilon(\rho_{f_\mu})$ تبدیل به یافتن مینیموم تابع $\eta(|x|^2) + \eta(|y|^2)$ تحت دو قید $f_\mu = 2 \text{Re}(xy^*)$ و $|x|^2 + |y|^2 = 1$ می‌شود. با حل این مسئله با استفاده از روش ضرایب نامعین لاگرانژ، نتیجه می‌گیریم که در این مورد، داریم

$$\varepsilon(\rho_{f_\mu}) = H_2 \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - f_\mu^2}) \right], \quad (۴)$$

که در آن H_2 تابع آنتروپی دوتایی است که به صورت $H_2(t) = -t \log(t) - (1-t) \log(1-t)$ تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که تابع معادله (۴) نسبت به f_μ یک تابع محدب است. پیش از این پی‌بردیم که برای حالت ورنر ρ_f می‌توانیم تجزیه‌هایی به صورت زیر بنویسیم:

$$\rho_f = \sum_\mu q_\mu \rho_{f_\mu}.$$

حال، داریم

$$\sum_\mu q_\mu \varepsilon(\rho_{f_\mu}) \geq \varepsilon \left(\sum_\mu q_\mu \rho_{f_\mu} \right) = \varepsilon(\rho_f)$$

از اینرو

$$EoF(\rho_f) = \text{Co} \varepsilon(\rho_f) = \varepsilon(\rho_f).$$

همبستگی غیر کلاسیکی ابزار- هدف در اندازه گیری ضعیف پس گزینشی

نحوی فرد، الهه

گروه فیزیک دانشگاه بین المللی امام خمینی قزوین، انتهای بلوار امام خمینی، قزوین

چکیده

اگر فرض کنیم هر برهم کنش کلاسیک بین سامانه های ابزار و هدف به تولید نوعی همبستگی کلاسیک عام بین آنها منجر می شود می توانیم تعریفی برای غیر کلاسیکی حالت در اندازه گیری ضعیف پس گزینشی یک مشاهده پذیر بر مبنای تابع مولد دنباله همه گشتاورهای ضعیف آن معرفی کنیم. واژه های کلیدی: اندازه گیری ضعیف، پس گزینشگری، حالت های غیر کلاسیکی.

Non classical correlation of target-device in post-selected weak measurement

Nahvifard, Elahe

Physics group, Imam Khomeini International University, Qazvin

Abstract

If we suppose that any classical interaction between the target and the probe systems leads to the generation of some classical correlations we can introduce a definition for state non-classicality in post-selected weak measurement of an observable based on the generating function of the sequence of all its weak moments.

Keywords: weak measurement, post-selection, non-classical states.

PACS No. 03.65.Ta

مقدمه

کلاسیک همچنان می توان چشمداشتی مشروط یک کمیت سامانه هدف را به یک تابع توزیع مشروط نسبت داد ولی در حالت تحلیل کوانتومی گاه این تابع منفی پذیر خواهد بود. در [۵] به وسیله استفاده از قضیه بوخنر در آمار و احتمالات مجموعه شرایط لازم و کافی برای رفتار کلاسیکی یک حالت سامانه هدف در اندازه گیری ضعیف پس گزینشی ارائه شده است.

اندازه گیری ضعیف پس گزینشی کلاسیک

هر اندازه گیری شامل برهم کنش بین دو سامانه هدف و ابزار است. فرض می کنیم هردو سامانه، ذرات یک بعدی کلاسیک باشند و سامانه هدف بوسیله مختصات فضای فاز (q, p) و سامانه

در مرجع، [۱] مشابه مدلی که فون نیومن [۲] برای اندازه گیری قوی ارائه کرده است مدلی برای اندازه گیری کلاسیک ارائه شده است. همچنین این مدل به اندازه گیری ضعیف و اندازه گیری ضعیف پس گزینشی هم تعمیم داده شده است. منظور اصلی آن مقاله مقایسه نتایج اندازه گیری ضعیف پس گزینشی کلاسیک و نظیر کوانتومی آن بوده است. در اینجا مفاهیم اصلی این مدل را یادآوری می کنیم سپس نشان می دهیم برخی از نتایج این مدل از فرض همبستگی کلاسیک سامانه های هدف و ابزار هم بدست می آیند. اندازه گیری ضعیف پس گزینشی کوانتومی ویژگی های غیر کلاسیک دارد [۳-۵]. یکی از آنها این است که اگرچه مانند مدل

$$\langle a \rangle_{w,q} = \int dp \mu(p | q) a(q, p),$$

$$\mu(p | q) = \frac{W_s(q, p)}{\int dp W_s(q, p)}. \quad (3)$$

رابطه (۲) نشان می دهد مقادیر ضعیف پس گزینشی با اندازه گیری جابجایی در میانگین تابع توزیع $\Pr(Q)$ قابل اندازه گیری هستند و روابط (۳) نشان می دهند این مقادیر ضعیف چیزی بجز چشمداشت کمیت مورد اندازه گیری نسبت به تابع توزیع اولیه مشروط سامانه هدف نیست.

در اینجا کمی از روش مقاله [۱] دور می شویم و فرض می کنیم که برهم کنش بین سامانه هدف و سامانه ابزار کلی ترین همبستگی کلاسیکی را بین آنها ایجا کند و حالت نهایی سامانه مرکب به شکل زیر باشد

$$W(0_+) = p_0 W_s W_d + \sum_{j=1}^{\infty} p_j W_s^j(q, p) W_d^j(Q, P), \quad (4)$$

که در آن

$$0 \leq p_j \leq 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1,$$

و W_s^j, W_d^j مجموعه ای از حالت های متمایز از سامانه های ابزار و هدف هستند. با این فرض اگرچه ممکن است فرمول (۲) دیگر برقرار نباشد ولی به شکل دیگری فرمول های (۳) هنوز معتبر هستند. اگر $W'(Q, P | q)$ حالت کلاسیکی ابزار مشروط به خوانش q در سامانه هدف باشد آنگاه

$$W'(Q, P | q) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} p_j w_s^j(q) W_d^j(Q, P)}{\sum_{j=0}^{\infty} p_j w_s^j(q)},$$

که در آن

$$w_s^j(q) = \int dp W_s^j(q, p).$$

بنابراین حداقل مثلاً اندازه گیری توموگرافیک مشروط حالت ابزار بطور نظری مقادیر احتمالات p_j را معین می کند و ما می توانیم $W(q, p, Q, P, 0_+)$ را باز سازی کنیم. چشمداشتی مشروط به پس گزینشگری q با رابطه زیر محاسبه می شود

ابزار بوسیله مختصات فضای فاز (Q, P) توصیف شود. همینطور فرض کنید هیچ نوع همبستگی کلاسیک بین دو سامانه قبل از اندازه گیری وجود نداشته باشد و برای کلی بودن بحث مثلاً حالت سامانه هدف با توزیع کلاسیکی $W_s(q, p)$ و حالت ابزار با $W_d(q, p)$ معین شود. در مدل کلاسیکی ارائه شده در [۵] برای اندازه گیری کمیت $a(q, p)$ از سامانه هدف این سامانه با ابزار اندازه گیری، در یک همسایگی از زمان صفر، طبق هامیلتونی موثر زیر برهم کنش می کند

$$H = \varepsilon \delta(t) a(q, p) P,$$

و این برهم کنش به تولید یک همبستگی کلاسیک بین دو سامانه منجر می شود. اگر حالت سامانه مرکب را با $W(q, p, Q, P, t)$ نشان دهیم این تابع توزیع فضای فاز باید در معادله لیوویل صدق کند

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \{H, W\} = \varepsilon \delta(t) \left(P \{a, \dots\} - a \frac{\partial}{\partial Q} \right) W.$$

درست بعد از اندازه گیری $t > 0$ جواب این معادله به شکل صوری

$$W(0_+) = \exp \left(\varepsilon P \{a, \dots\} - \varepsilon a \frac{\partial}{\partial Q} \right) W_s W_d, \quad (1)$$

خواهد بود. از آنجا که کمیت تصادفی Q از سامانه ابزار بعد از اندازه گیری خوانده می شود باید تابع توزیع احتمال آن را به عنوان یک توزیع کناری $W(0_+)$ محاسبه کرد. در اندازه گیری ضعیف پس گزینشی مقادیر تصادفی Q از سامانه ابزار تنها به شرط مشاهده مقدار خاصی از یک کمیت مربوط به سامانه هدف، که ما آنرا در اینجا q از سامانه هدف در نظر می گیریم، خوانده می شود. از آنجا که برهم کنش هدف- ابزار پایان یافته پس هر توزیع احتمال کمیت های سامانه هدف یا ابزار قبلاً تحقق فیزیکی یافته است و این نوع خوانش مشروط ابزار به معنی جمع آوری بخشی از داده های اندازه گیری خواهد بود. استفاده از بسط تیلور (۱) تا مرتبه اول به نتیجه زیر برای تابع توزیع مختصه ابزار منجر می شود

$$\Pr'(Q) \approx \Pr(Q - \varepsilon \langle a \rangle_{w,q}), \quad (2)$$

که در آن $\Pr(Q)$ تابع توزیع کناری مختصه ابزار قبل از اندازه گیری است و مقدار ضعیف کلاسیکی $\langle a \rangle_{w,q}$ با رابطه زیر تعریف می شود

$$\text{Pr}'(X; |\psi_{in}\rangle, |\Psi_{in}\rangle, \hat{a} | |q\rangle) \approx \text{Pr}(X - \text{Re}\langle \hat{a} \rangle_{w,q}), \quad (6)$$

خواهد بود که در آن مقدار ضعیف کوانتومی مشروط به پس گزینش $|q\rangle$ به شکل زیر تعریف می شود

$$\langle \hat{a} \rangle_{w,q} = \frac{\langle q | \hat{a} | \psi_{in} \rangle}{\langle q | \psi_{in} \rangle}, \quad (7)$$

تعریف می شود. اگرچه رابطه (۶) راهی برای اندازه مقادیر ضعیف کوانتومی نشان می دهد ولی در [۵] نشان داده شده که چگونه توموگرافی مشروط حالت ابزار می تواند مقادیر ضعیف همه توانهای $\langle \hat{a}^n \rangle_{w,q}$, $n = 1, 2, \dots$ تولید کند.

بر اساس دنباله همه گشتاورهای ضعیف $\langle \hat{a}^n \rangle_{w,q}$ در مقاله [۵] تعریفی برای غیرکلاسیکی حالت سامانه هدف در اندازه گیری ضعیف پس گزینشی داده شده است. با تعریف تابع مشخصه

$$\begin{aligned} \Phi_{w,q}(k) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \text{Re}\langle \hat{a}^n \rangle_{w,q} \\ &\equiv \frac{1}{2} \{ \langle e^{ik\hat{a}} \rangle_{w,q} + \langle e^{-ik\hat{a}} \rangle_{w,q}^* \}, \end{aligned}$$

که بطور خودکار دو شرط بهنجارش و حقیقی بودن زیر را برآورده می کند

$$\Phi_{w,q}(0) = 1, \quad \Phi_{w,q}^*(k) = \Phi_{w,q}(-k),$$

می توان بطور صوری یک تابع توزیع شبه احتمال مطابق رابطه زیر تعریف کرد

$$\begin{aligned} \mu_{w,q}(\alpha) &= \int \frac{dk}{2\pi} \Phi_{w,q}(k) e^{-ik\alpha} \\ &= \text{Re}\langle \delta(\alpha - \hat{a}) \rangle_{w,q}. \end{aligned}$$

این تابع توزیع اگرچه همواره حقیقی و بهنجار است ولی برای برخی از حالت های سامانه هدف ممکن است منفی پذیر باشد. در هر حال همه گشتاورهای ضعیف $\langle \hat{a}^n \rangle_{w,q}$ را می توان با رابطه شبه کلاسیک زیر به این تابع توزیع شبه احتمال وابسته کرد

$$\langle \hat{a}^n \rangle_{w,q} = \int \alpha^n \mu_{w,q}(\alpha) d\alpha.$$

این رابطه مشابه روابط کلاسیکی (۳) و (۵) است بجز اینکه در آن $\mu_{w,q}(\alpha)$ احتمالا منفی پذیر است. اگر حالت $|\psi_{in}\rangle$ چنان باشد که $\mu_{w,q}(\alpha)$ مثبت شود آنگاه آن را یک حالت کلاسیک در اندازه گیری ضعیف پس گزینشی مورد بحث می نامیم و در غیر

$$\begin{aligned} \langle a \rangle_{w,q} &= \frac{\int dp dq dPW(q, p, Q, P, 0_+) a(q, p)}{\int dp dq dPW(q, p, Q, P, 0_+)} \\ &= \int dp \mu'(p | q) a(q, p) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن $\mu'(p | q)$ به شکل زیر تعریف می شود

$$\mu'(p | q) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_j w_s^j(q) \right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_j W_s^j(q, p).$$

بنابراین مانند رابطه (۳) همچنان می توان مقادیر ضعیف مشروط را چشمداشت کمیت مورد اندازه گیری نسبت به تابع توزیع مشروط $\mu'(p | q)$ سامانه هدف دانست.

اندازه گیری ضعیف پس گزینشی کوانتومی

تحلیل کوانتومی اندازه گیری ضعیف پس گزینشی [۶-۸] یک مشاهده پذیر سامانه هدف مانند $\hat{a}$ با شرط پس گزینش بر روی یکی از ویژه مقادیر $\hat{q}$ بطور بنیادی با نمونه کلاسیک آن فرق می کند. در تحلیل کوانتومی فرض می شود سامانه هدف در حالت ابتدایی $|\psi_{in}\rangle$ و سامانه ابزار در ابتدا در حالت ابتدایی $|\Psi_{in}\rangle$ که معمولا یک بسته موج ساکن گوسی فرض می شود از طریق هامیلتونی موثر

$$\hat{H} = \varepsilon \delta(t) \hat{a} \otimes \hat{P},$$

برهم کنش می کنند. در نتیجه برهم کنش سامانه مرکب دارای حالت، عموما در هم تنیده، زیر خواهد شد

$$|0_+\rangle = \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \hat{a} \otimes \hat{P}\right) |\psi_{in}\rangle |\Psi_{in}\rangle.$$

اگر درست بعد از اندازه گیری ضعیف بر روی سامانه هدف یک اندازه گیری قوی مشاهده پذیر $\hat{q}$ از سامانه هدف انجام شود و خواندن مختصه ابزار به پس گزینش ویژه حالت $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$ مشروط شود آنگاه حالت سامانه مرکب با

$$|0_+\rangle' \propto |q\rangle \langle q| \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \hat{a} \otimes \hat{P}\right) |\psi_{in}\rangle |\Psi_{in}\rangle,$$

معین می شود و در این حالت تابع توزیع مختصه ابزار

[۹] U. M. Tituler, R.J. Glauber; "Correlation Functions for Coherent Fields"; *Physics Review* **140**, (1965) B676-B682.

[۱۰] L. Mandel; "Non-Classical States of the Electromagnetic Field"; *Physics Scripta* **56**, T12 (1986) 34-42.

این صورت این حالت غیرکلاسیک تعریف می شود. البته باید توجه کرد این تقسیم بندی کلاسیک و غیر کلاسیک با تعریف متداول آن برحسب نمایش گلاوبر [۹-۱۰] متفاوت است. بحث انجام شده در انتهای بخش قبل و فرمول (۵) نشان می دهد این نوع تعریف غیرکلاسیکی به مدل دینامیکی کلاسیک انتخاب شده برای برهم کنش هدف- ابزار بستگی ندارد بلکه می توان آن را بر پایه فرض همبستگی کلاسیک عام رابطه (۴) بنا کرد. ضمناً غیر کلاسیک بودن در این مورد یعنی اینکه همه p_j ها مثبت نیستند و این به معنی همبستگی غیرکلاسیک هدف- ابزار است.

نتیجه گیری

تعریف حالت غیرکلاسیک در یک اندازه گیری ضعیف پس گزینشی حتی در غیاب یک مدل کلاسیکی برای برهم کنش سامانه هدف و سامانه ابزار هم چنان می تواند معتبر باشد به شرط اینکه اثر برهم کنش دو سامانه را با یک همبستگی کلاسیکی بیان شده در فرمول (۴) معادل بدانیم. در واقع حالت های غیرکلاسیک در اندازه گیری ضعیف آنهایی هستند که در صورت حضور آنها همبستگی بین هدف و ابزار غیرکلاسیک است.

مرجع ها

- [۱] L.M. Johansen; "Weak measurements with arbitrary probe states"; *Physical Review Letters* **93**, (2004)1-4.
- [۲] J. Von Neumann; "*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*"; (Princeton University Press, Princeton, 1955).
- [۳] L.M. Johansen; and A. Luis; "Nonclassicality in weak measurements"; *Physical Review A* **70**, (2004) (052115)1-12.
- [۴] L.M. Johansen; "Nonclassicality properties of coherent states"; *Physical Letters A* **329**, (2004) 184-187.
- [۵] E. Rafiepoor, S. Batebi, M.R. Bazrafkan; "Quantum state nonclassicality in weak measurements in view of Bochner's criteria"; *Physical Letters A* **382**, (2018) 2414.
- [۶] Y. Aharonov, D. Rohrlich; "*Quantum Paradoxes*" (Wiley-VCH, Weinheim, 2005).
- [۷] A. G. Kofman, S. Ashhab, F. Nori; "Non perturbative theory of weak pre- and post-selected measurements"; *Physics Reports* **520**, (2012) 43.
- [۸] J. Dressel, M. Malik M, F.M. Miatto, A.N. Jordan, R.W. Boyd; "Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications"; *Reviews of Modern Physics* **86**, (2014) 307.

احیای درهم تنیدگی ماکروسکوپی

محمد بهلول^۱، پروانه نجمدی^۲^۱ گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران^۲ گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

چکیده:

تداخل، یکی از روش های تولید درهم تنیدگی است. در این مقاله ابتدا بصورت تحلیلی، تداخل را بررسی می کنیم. سپس یک حالت ماکروسکوپی درهم تنیده با دو مود فشرده را تولید می کنیم. درهم تنیدگی این دو مود فشرده با افزایش پارامتر فشرده گی کاهش می یابد. با تداخل این دو مود، و با استفاده از روش تحلیلی، به دنبال این هدف هستیم که آیا با تداخل می توان درهم تنیدگی را احیا کرد یا نه؟

واژه های کلیدی: سنجه تلاقی

Revival Macroscopic Entanglement

Mohammad Bohloul¹, Parvaneh Najmadi²¹ Department of Physics, University of Payame Noor University, Tehran² Department of Mathematics, University of Payame Noor University, Tehran

Abstract

Interference is one of the methods of producing entanglement. In this article, we first analyze the interference. Then we produce a macroscopic entangled state with two squeezed modes. The entanglement of these two modes is reduced by increasing the squeezing parameter. By interfering, these two modes, and using the analytical method, we investigate to see if interference can restore the entanglement.

مقدمه:

ماکروسکوپی یک ارائه می گردد و سپس با استفاده باریکه شکن، مودهای درهم تنیده را تداخل می دهیم. با استفاده از حالت های فشرده و عملگر باریکه شکن درهم تنیدگی قبل و بعد از تداخل را تحلیل می کنیم. در بخش اول عملگر باریکه شکن را در فضای مکان بررسی می کنیم. با سه مثال صحت این روش را بررسی می کنیم. در بخش دوم طرح اصلی را بیان می کنیم. در این طرح ابتدا یک درهم تنیدگی تک فوتون تولید می کنیم، سپس هر دو مود را تقویت و حالت درهم تنیده ماکروسکوپی را ایجاد می کنیم. در

یکی از روش های ایجاد و یا احیای درهم تنیدگی در سیستم های فوتونی، تداخل باریکه ها از طریق باریکه شکن است. در این مقاله از باریکه شکن برای احیای درهم تنیدگی ماکروسکوپی استفاده می شود. درهم تنیدگی با افزایش سائز مودها با بعبارت دیگر افزایش تعداد فوتون های در هر مود، کاهش پیدا می کند. این کاهش میزان درهم تنیدگی بعلا ما هیت ماکروسکوپی سیستم ها و مودها است. در این مقاله ابتدا طرحی برای تولید درهم تنیدگی

$$B\psi_1(q_1)\psi_1(q_2) = B \left(\text{Exp} \left(\frac{q_1^2}{2} \right) \times q_2 \text{Exp} \left(\frac{q_2^2}{2} \right) \right) \quad (3)$$

با استفاده از رابطه ۲

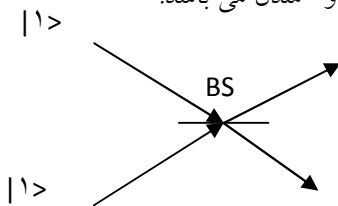
$$\begin{aligned} &= \text{Exp} \left(\frac{(q_1 + q_2)^2}{2} \right) \times \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right) \text{Exp} \left(\frac{(q_1 - q_2)^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_1 \text{Exp} \left(\frac{q_1^2}{2} \right) \text{Exp} \left(\frac{q_2^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - q_2 \text{Exp} \left(\frac{q_1^2}{2} \right) \text{Exp} \left(\frac{q_2^2}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(q_1)\psi_1(q_2) - \psi_1(q_2)\psi_1(q_1)) \end{aligned} \quad (4)$$

مطابق انتظار حالت نهایی حالت بل

$$(|1,0\rangle - |0,1\rangle) \text{ می باشد. } [3]$$

مثال دوم تداخل دو تک فوتون مطابق شکل ۲ است. این

همان تداخل هونگ-او-مندل می باشد.



شکل ۲: تداخل دو مود تک فوتون در یک باریکه شکن.

$$\begin{aligned} &B\psi_1(q_1)\psi_1(q_2) \\ &= B \left(q_1 \text{Exp} \left(\frac{q_1^2}{2} \right) \times q_2 \text{Exp} \left(\frac{q_2^2}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

با اعمال رابطه ۱

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right) \text{Exp} \left(\frac{\left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right) \text{Exp} \left(\frac{\left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

بخش پایانی طرح، با استفاده از باریکه شکن این موده‌های ماکروسکوپی را با یکدیگر تداخل می دهیم. در بخش سوم به بررسی و تحلیل حالت های درهم تنیده قبل و بعد از تداخل می پردازیم.

عملگر باریکه شکن:

برای بررسی رفتار باریکه شکن می توان با اعمال عملگر باریکه شکن بر حالت های فوک حالت نهایی را با رابطه زیر محاسبه نمود [۱]

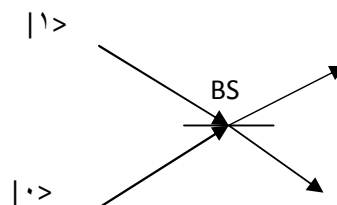
$$\begin{aligned} \hat{B}|n_1, n_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}} (B_{11}\hat{a}_1^\dagger + B_{21}\hat{a}_2^\dagger)^{n_1} (B_{12}\hat{a}_1^\dagger + B_{22}\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} |0, 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} (B_{11})^{k_1} (B_{21})^{n_1-k_1} \\ &\quad \times (B_{12})^{k_2} (B_{22})^{n_2-k_2} \sqrt{(k_1+k_2)!(n_1+n_2-k_1-k_2)!} \\ &\quad \times |k_1+k_2, n_1+n_2-k_1-k_2\rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

اما استفاده از این رابطه محدودیت هایی نیز دارد مثلا در تداخل دو باریکه فشرده ، استفاده از رابطه بالا چندان سودمند نیست. علاوه بر اینکه گاهی به دنبال حل تحلیلی هستیم. رابطه زیر می تواند با اعمال بر توابع موج مکانی (یا تکانه) به بررسی حالت خروجی پردازد [۲]

$$B\psi(q_1)\psi(q_2) = \psi \left(\frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}} \right) \psi \left(\frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2)$$

در ادامه سه مثال را بررسی می کنیم

اولین مثال تداخل یک تک فوتون و یک مود خلا است. مطابق شکل ۱ یک تک فوتون به سمت یک باریکه شکن ارسال می کنیم.



شکل ۱: تداخل یک مود تک فوتون و یک مود خلا در یک باریکه شکن.

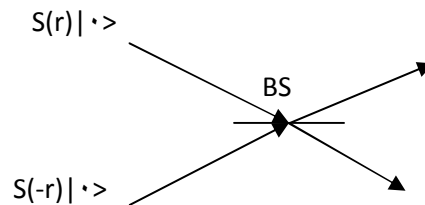
^۱ در این مقاله برای سادگی در محاسبات $\hbar$ و π برابر یک در نظر گرفته شده اند.

با ساده سازی داریم

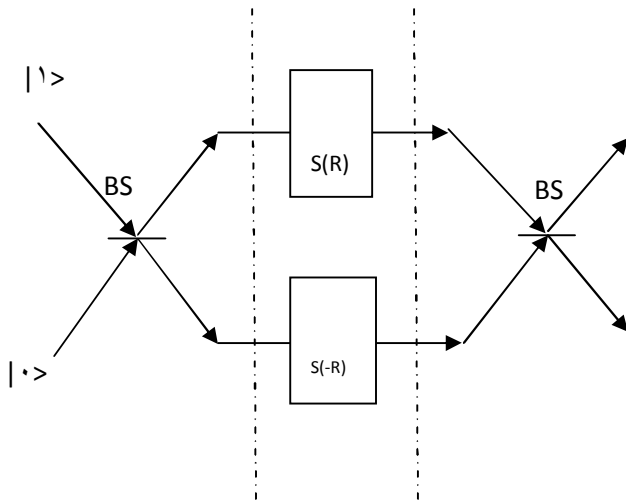
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1^2 - q_2^2) \text{Exp} \left(\frac{q_1^2}{2} \right) \text{Exp} \left(\frac{q_2^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1^2 + 1 - q_2^2 - 1) \text{Exp} \left(\frac{q_1^2}{2} \right) \text{Exp} \left(\frac{q_2^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2(q_1) \psi_1(q_2) - \psi_1(q_1) \psi_2(q_2))
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

حالت نهایی نیز مطابق انتظار $(|2,0\rangle - |0,2\rangle)/\sqrt{2}$ است. [۳]

مثال سوم تداخل دو مود فشرده تک مود است. اگر از رابطه ۱ استفاده کنیم برای این حالت به مشکل بر می خوریم زیرا با حالت هایی با بعد بالا برخورد می کنیم. اما با استفاده از رابطه ۲ به راحتی می توان تحلیل انجام داد.



شکل ۳: تداخل دو مود فشرده فوتونی در یک باریکه شکن.



شکل ۴: بخش اول تولید درهم تنیدگی تک فوتون با تداخل تک فوتون و مود خلا، بخش دوم فشرده کردن هر دو مود، بخش سوم تداخل دو مود فشرده

خروجی برابر حالت بل است

$$\psi_-(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_-(q_1) \psi_1(q_2) - \psi_1(q_1) \psi_-(q_2)) \tag{10}$$

در بخش دوم طرح، هر دو مود خروجی را با اعمال عملگر فشرده‌گی، تقویت می کنیم.

در فضای مکان عمل فشرده‌گی به صورت زیر اعمال می شود

$$\begin{aligned}
 \psi_{-,r}(q_1, q_2) = & \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_-(e^r q_1) \psi_1(e^{-r} q_2) \\
 & - \psi_1(e^r q_1) \psi_-(e^{-r} q_2))
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{B,R}(q_1, q_2) &= B \psi_-(R_+ q_1) \psi_-(R_- q_2) \\
 &= B \left(\text{Exp} \left(-\frac{(R_+ q_1)^2}{2} \right) \times \text{Exp} \left(-\frac{(R_- q_2)^2}{2} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

همانند دو مثال قبل با اعمال رابطه ۲ داریم

$$\begin{aligned}
 &= \text{Exp} \left(-\frac{R_+^2 \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} \right) \times \text{Exp} \left(-\frac{R_-^2 \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} \right) \\
 &= \text{Exp} \left(-\frac{R_+^2 (q_1 + q_2)^2}{2\xi} - \frac{R_-^2 (q_1 - q_2)^2}{2\xi} \right) \\
 R_{\pm} &= \text{Exp}[\pm r]
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n, n | \psi_b \rangle e^{-\alpha^r} \frac{\alpha^{rn}}{(n)!} \\ = \frac{\epsilon R^r}{(1+R^r)^r} \alpha e^{-\frac{\epsilon a^r R^r}{1+R^r}} \quad (15)$$

و با دو تبدیل

$$R = e^r, \quad \frac{rR}{1-R^r} = \frac{1}{\cosh r}, \quad \frac{1-R^r}{1+R^r} = -\tanh r \quad (16)$$

حالت نهایی در پایه فوک به صورت زیر در می آید

$$= \frac{1}{(\cosh r)^r} \sum (-\tanh r)^n \\ \times \left(\frac{|n, n+1\rangle - |n+1, n\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (17)$$

بحث و نتیجه گیری:

در این مقاله با بررسی روش ارائه شده در رفرنس به دنبال بدست آوردن حالت بعد از تداخل دو مود فشرده هستیم. این دو مود از فشرده کردن دو مود حالت درهم تنیده تک فوتون بدست می آید. حالت نهایی سیستم متشکل از برهم نهی دو شبه حالت فشرده فوتونی دو مده (TSVM) است. این حالت (معادله ۱۷)، درهم تنیدگی بیشتری از برهم نهی دو حالت فشرده تک مودی (معادله ۱۰) دارد. اینگونه می توان نتیجه گرفت که درهم تنیدگی پس از اینکه با افزایش پارامتر فشرده‌گی و متقابلاً افزایش تعداد فوتون، کاهش می یابد، پس از تداخل دو مود، افزایش می یابد.

مراجع:

[۱] U. Leonhardt; "Measuring the Quantum State of Light", Cambridge University Press, Cambridge, England, ۱۹۹۷.

[۲] T. Opatrny, G. Kurizki, and D.-G. Welsch; PHYSICAL REVIEW A, VOLUME ۶۱, ۰۳۲۳۰۲

[۳] A. Furusawa; "Quantum States of Light"; SpringerBriefs in Mathematical Physics; Volume ۱۰

[۴] A. I. Lvovsky; "Squeezed light"; arxiv: ۱۴۰۱.۴۱۱۱۸۷۲

در بخش سوم طرح دو مود فشرده درهم تنیده را به سمت یک باریکه شکن (BS۲) دیگر می فرستیم.

$$\psi_{\cdot, r, BS}(q_1, q_2) = \\ \frac{1}{\sqrt{2}} B(\psi_{\cdot}(e^r q_1) \psi_{\cdot}(e^{-r} q_2) \\ - \psi_{\cdot}(e^r q_1) \psi_{\cdot}(e^{-r} q_2)) \quad (12)$$

در اینجا نیز همانند مثال ۳ از رابطه ۲ استفاده می کنیم

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{\cdot} \left(e^r \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \psi_{\cdot} \left(e^{-r} \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \right. \\ \left. - \psi_{\cdot} \left(e^r \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \psi_{\cdot} \left(e^{-r} \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(e^r \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \text{Exp} \left(\frac{e^{rr} \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right)^r}{2} \right) \text{Exp} \left(\frac{e^{-rr} \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right)^r}{2} \right) \right. \\ \left. - \left(e^{-r} \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \text{Exp} \left(\frac{e^{rr} \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right)^r}{2} \right) \text{Exp} \left(\frac{e^{-rr} \left(\frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}} \right)^r}{2} \right) \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Exp} \left(-\frac{e^{rr} (q_1 + q_2)^r}{2} - \frac{e^{-rr} (q_1 - q_2)^r}{2} \right) \\ \times (e^r (q_1 + q_2) - e^{-r} (q_1 - q_2)) \quad (13)$$

که با استفاده از خلاصه نویسی های زیر

$$Q_+ = q_1 + q_2 \\ Q_- = q_1 - q_2 \quad (14)$$

داریم

$$\psi_{\cdot, r, BS}(q_1, q_2) = \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Exp} \left(-\frac{e^{rr} (Q_+)^r}{2} - \frac{e^{-rr} (Q_-)^r}{2} \right) (e^r (Q_-) - e^{-r} (Q_+)) \quad (15)$$

حالت نهایی شبیه حالت فشرده دو مده است.

$$\text{با استفاده از } |\alpha\rangle = e^{-\frac{\alpha^r}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \text{ می توانیم بنویسیم [۴]}$$

$$\langle \alpha, \alpha | \psi_b \rangle = \frac{\epsilon e^{-\frac{\epsilon a^r R^r}{1+R^r}} R^r \alpha \sqrt{2 + \frac{1}{R^r} + R^r}}{(1+R^r)^r}$$

شبیه سازی معادله شرودینگر یک بعدی بر روی شبیه ساز کامپیوتر کوانتومی IBM

شکری، سینا؛ پوشگان، رقیه؛ رفیع بخش، شهنوش؛ فائقی، ریتا

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، تهران، ایران

چکیده

ما در این مقاله، با استفاده از یک الگوریتم کوانتومی، معادله شرودینگر برای یک ذره در چاه پتانسیل یک بعدی مربعی محدود را بر روی شبیه ساز کامپیوتر کوانتومی IBM حل می کنیم. از آنجایی که انرژی سیستم در فاز عملگر تحول زمانی وجود دارد، این الگوریتم شامل تحول زمانی حالت های کوانتومی، گسسته سازی توابع موج و تخمین فاز گام به گام می باشد. ما با استفاده از کیت نرم افزاری پایتون به نام QISKit، این الگوریتم را اجرا نموده و مقادیر انرژی را در دو حالت پایه و برانگیخته برای ذره در چاه پتانسیل یک بعدی محاسبه کردیم.

واژه های کلیدی: شبیه سازی، کامپیوتر کوانتومی IBM، مدار کوانتومی، تحول زمانی، تخمین فاز کوانتومی

Simulation of the One Dimensional Schrodinger Equation on the IBM Quantum Computer Simulator

Shokri, Sina; Pooshgan, Roghayeh; Rafibakhsh, Shahnoosh; Faeghi, Rita

Department of Physics, Faculty of Science, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, using a quantum algorithm, we solve Schrodinger equation for a particle in the one dimensional finite square well on the IBM quantum computer simulator. As the energy of the system exists in the phase of the time evolution operator, this algorithm consists of the time evolution of the quantum states, discretization of the wave function and the iterative phase estimation. We execute this algorithm using a Python software kit (QISKit) and calculate the value of the energy for the ground state and the first excited state.

Keywords: Simulation, IBM Quantum Computer, Quantum Circuit, Time Evolution, Quantum Phase Estimation

PACS No. (3)

مقدمه

کامپیوتر می شود. با افزایش سیستم های کوانتومی، روش های مختلفی برای بررسی کیفیت اجرای الگوریتم های کوانتومی پیچیده، بررسی شده و روش های متعددی بر روی کامپیوتر های کوانتومی مورد آزمایش قرار گرفته است. در حال حاضر، چندین شرکت خصوصی در زمینه کامپیوتر های کوانتومی در حال فعالیت هستند. از سال ۲۰۱۶ شرکت IBM به کاربران اجازه می دهد که محاسبات کوانتومی خود را بر روی کامپیوتر کوانتومی این شرکت اجرا کنند. هر کاربر می تواند الگوریتم کوانتومی مورد نظر خود را بر روی دو دستگاه ۵ کیوبیتی و دو دستگاه ۱۶ کیوبیتی اجرا کند. این شرکت یک شبیه ساز ارائه می کند که برای چک کردن الگوریتم قبل از

کامپیوتر های کوانتومی یکی از مهم ترین زمینه های فیزیک محاسباتی هستند که در دو دهه گذشته بسیار رشد کرده اند. از زمانی که فاینمن پیش بینی کرد شبیه سازی سیستم های کوانتومی به وسیله کامپیوتر های کوانتومی بسیار کارآمد تر از شبیه سازی های کلاسیکی است، تحقیقات زیادی بر روی الگوریتم های کوانتومی و آزمایشات تجربی زیادی به این موضوع اختصاص داده شد. زیرا رجیستر های کوانتومی-کیوبیت ها- می توانند اطلاعات را در حالت های درهم نهی کوانتومی ذخیره کنند و عملیات آن ها می توان به صورت موازی اجرا کرد که این باعث کاهش در زمان اجرای محاسبات و حافظه

برای ساخت گیت تحول زمانی باید معادله (۲) را بر حسب جملات هامیلتونی بسط دهیم. در حالت کلی اگر جملات هامیلتونی با یکدیگر جابه جا شوند، به راحتی می توان این بسط را به صورت حاصل ضرب توابع نمایی با توان اپراتور های خاص هامیلتونی نوشت. ولی چون در معادله شرودینگر اپراتورهای P^2 و $V(x)$ لزوما با هم جابه جا نمی شوند، بنابراین باید از تقریب بسط trotter استفاده کنیم [۲]. با تقسیم بندی زمان به n قسمت ($t = n\Delta t$) می توان از یکسری جملات اضافی صرف نظر کرد و فقط تا مرتبه دوم بسط را در نظر گرفت. به این ترتیب داریم:

$$U(t) = \exp(-iH\Delta t) = \exp(-i[v(x) + k]\Delta t) = \exp(-iv(x)\frac{\Delta t}{2}) \exp(-ik\Delta t) \exp(-iv(x)\frac{\Delta t}{2}) \quad (3)$$

حال باید اثر این اپراتور تحول زمانی را بر روی تابع موج اولیه ذره بدست آوریم. همان طور که در رابطه (۳) مشخص است $\exp(-ik\Delta t)$ در فضای ممتوم نوشته شده است، پس برای محاسبه آن از تبدیل فوریه استفاده کرده و به فضای ممتوم می رویم و از تبدیل توابع موج که به صورت زیر است، استفاده می کنیم:

$$\psi(p) = \langle p|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2\pi i p x} \psi(x) = U_{FT}^{\dagger} \psi(x) \quad (4)$$

$$\psi(x) = \langle x|\psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{2\pi i p x} \psi(p) = U_{FT} \psi(p) \quad (5)$$

با استفاده از رابطه (۳) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \left\langle x \left| e^{-iv(x)\frac{\Delta t}{2}} e^{-ik\Delta t} e^{-iv(x)\frac{\Delta t}{2}} \right| \psi \right\rangle \\ &= e^{-iv(x)\frac{\Delta t}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{2\pi i p x} e^{-iK(p)\Delta t} \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-2\pi i p x'} e^{-iv(x')\frac{\Delta t}{2}} \psi(x') \\ &= e^{-iv(x)\frac{\Delta t}{2}} U_{FT} e^{-iK(p)\Delta t} U_{FT}^{\dagger} e^{-iv(x')\frac{\Delta t}{2}} \psi(x') \end{aligned} \quad (6)$$

این تابع موج را بر روی کامپیوتر کوانتومی سوار می کنیم، سپس به وسیله گیت تحول زمانی، تابع موج متحول شده $\psi(x, t)$ ایجاد می شود [۱]. از آن جا که این تابع موج باید گسسته شود، در بخش بعدی به این موضوع می پردازیم.

اجرای برنامه به کار می رود. شرکت Rigetti اجازه استفاده تا ۱۹ کیوبیت را بر روی کامپیوتر کوانتومی خود می دهد. برخی از تفاوت های کامپیوتر های کوانتومی در مجموعه گیت های اصلی و اتصال کیوبیت ها می باشد. از آنجایی که در این مقاله، محاسبات بر روی شبیه ساز IBM انجام می شود، به صورت مختصر در مورد آن توضیح می دهیم.

دو روش برای نوشتن و اجرا برنامه بر روی دستگاه های IBM وجود دارد: COMPOSER کوانتومی که یک GUI آنلاین است و به کاربران اجازه می دهد، الگوریتم های کوانتومی را با ساخت مدار های کوانتومی بسازند. این روش تنها بر روی دستگاه های ۵ کیوبیتی و برای مدار های کوچک مناسب است. در این روش می توان مدار را در مد نوشتاری با استفاده از زبان QASM طراحی کرد. این زبان برای طراحی مدار های کوانتومی توسط تیم IBM Q Experience طراحی شده است. روش دوم نوشتن کد پایتون و اجرای آن با استفاده از کیت نرم افزاری پایتون به نام QISKit است و برای همه الگوریتم ها مناسب می باشد. کار انجام شده در این مقاله با استفاده از این کیت نرم افزاری بوده است. در این مقاله برای شبیه سازی یک ذره در چاه پتانسیل مربعی محدود، ابتدا گیت تحول زمانی را ایجاد نموده، سپس با گسسته سازی تابع موج و اعمال آن بر روی کامپیوتر به وسیله الگوریتم تخمین فاز مقادیر انرژی محاسبه می شود.

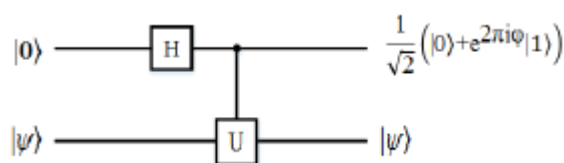
تحول زمانی حالت های کوانتومی

ایده اصلی شبیه سازی های کوانتومی بر این اساس است که شبیه سازی سیستم کوانتومی موردنظر را به وسیله یک سیستم کوانتومی دیگر انجام دهیم [۱]. در این مقاله شبیه سازی کوانتومی معادله شرودینگر به صورت دیجیتال انجام می شود. لذا باید گیت تحول زمانی را بر حسب هامیلتونی سیستم نوشت. به این منظور از پردازش اپراتور تحول زمانی تحت هامیلتونی مشخص H شروع می کنیم:

$$U(t) = \exp(-iHt/\hbar) \quad (1)$$

اگر K انرژی جنبشی باشد ($m = 1, \hbar = 1, K = \frac{p^2}{2m}$)، رابطه اپراتور تحول زمانی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$U(t) = \exp(-i[V(x) + K]t) \quad (2)$$



شکل ۱: مدار کوانتومی برای انتقال حالت های سیستم [۴]

همان طور که دیده می شود، انرژی در آرگومان تابع نمایشی ظاهر می شود، لذا برای محاسبه انرژی از الگوریتم تخمین فاز استفاده می شود.

تخمین فاز کوانتومی یک ماتریس یکانی به دو روش انجام می شود: (۱) استفاده از تبدیل فوریه معکوس (QFT) برای دستیابی به اطلاعات فاز مجهول. (۲) استفاده از تکنیک پردازش متوالی برای محاسبه فاز ناشناخته. تکنیک تخمین فاز برای تخمین ویژه مقادیر $|\lambda\rangle$ یک ماتریس یکانی U که دارای ویژه بردار $|\psi_\lambda\rangle$ استفاده می شود:

$$U|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle \quad (11)$$

ویژه مقادیر این ماتریس یکانی $\lambda = e^{2\pi i \phi_m}$ است. هدف استفاده از تخمین فاز، دستیابی به ویژه مقادیر ماتریس یکانی تحول زمانی برای تخمین انرژی هامیلتونی سیستم می باشد که در فاز قرار گرفته است. اگر فاز ماتریس یکانی به صورت $\phi_K = 0, x_1 x_2 \dots x_n$ باشد که n تعداد کیوبیت های استفاده شده برای تخمین فاز است، می توان نمایش باینری آن را به صورت زیر نوشت:

$$\phi = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots + \frac{x_n}{2^n} \quad (12)$$

شکل (۱) یک مدار کوانتومی را نشان می دهد که به یک کیوبیت و ویژه حالت اعمال شده است. خروجی این مدار شامل فاز مورد نظر می باشد. اما به دلیل برهم نهی حالت ها نمی توان مقدار دقیق فاز را به این ترتیب به دست آورد. لذا استفاده از تکنیک های مختلف QPE برای ارائه اطلاعات فاز سیستم مورد نیاز است. یکی از این تکنیک ها استفاده از تکنیک گام به گام [۵] است که دارای دقت زیادی می باشد. در این الگوریتم، ما فقط از یک کیوبیت به عنوان رجیستر استفاده می کنیم و گیت های U-Controlled در مراحل متوالی به سیستم اعمال می شود:

گسسته سازی تابع موج

ما به حالت های مقیدی علاقمند هستیم که در یک ناحیه محدودی از فضا جایگزیده باشند. ابتدا مکان x را در بازه $-d < x < d$ تعریف می کنیم. اگر x را به N قسمت تقسیم کنیم، می توان تابع موج $\psi(x)$ را بر حسب بردار های پایه $|x_k\rangle$ که نقاط تقسیم هستند، بسط دهیم:

$$|\psi(x)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \psi(x_k) |x_k\rangle \quad (7)$$

احتمال هر پایه با P_k نشان داده می شود، که برابر با احتمال یافتن ذره در ناحیه $\Delta x = \frac{1}{N}$ حول نقطه x_k می باشد. بنابراین P_k با انتگرال زیر محاسبه می شود:

$$P_k = \int_{x_k - \frac{\Delta x}{2}}^{x_k + \frac{\Delta x}{2}} |\psi(x)|^2 dx \quad (8)$$

توزیع نقاط شبکه حول نقطه $x = 0$ برای ساخت گیت کوانتومی تحول زمانی و برای پتانسیل متقارن موجود بسیار مهم است. لذا در این شبیه سازی از رابطه زیر برای توزیع نقاط شبکه در محدوده $-d < x < d$ استفاده می شود:

$$x_k = -d + (k/N + 1/2N) \quad (9)$$

برای یک رجیستر n کیوبیتی در این مختصات می توان $N = 2^n$ تا بردار پایه محاسباتی در نظر گرفت. تابع موج اولیه سیستم از حالت اولیه $|0 \dots 0\rangle$ با اعمال گیت های $CNOT$ و چرخش بدست می آید [۳]. در کامپیوتر IBM با استفاده از کیت نرم افزاری پایتون، تابع موج ساخته می شود. این کیت یک بردار به طول 2^n را به عنوان ورودی دریافت می کند که دامنه احتمال $\sqrt{P_k}$ پایه محاسباتی $|x_k\rangle$ را نشان می دهد.

الگوریتم تخمین فاز

شبیه سازی معادله شرودینگر به محاسبه انرژی نیازمند است. اگر تابع موج اولیه سیستم به صورت $|\psi_0\rangle$ مفروض باشد، این تابع موج را می توان به صورت یک ویژه بردار $|\mathcal{U}_{\mathcal{H}}\rangle$ اپراتور هامیلتونی در نظر گرفت. بدین ترتیب، می توان نوشت:

$$U(t) |\mathcal{U}_{\mathcal{H}}\rangle = e^{-iE_{\mathcal{H}}t} |\mathcal{U}_{\mathcal{H}}\rangle \quad (10)$$

مقاله بر روی شبیه ساز IBM در جدول (۱) نشان داده شده است. لازم به ذکر است که مقادیر V_0 و a برابر ۱۰۰ و ۰.۲۵ در نظر گرفته شده اند. هم چنین در محاسبات ما، $\omega = \gamma = 10$ است که پارامترهای بهینه شده هستند و طوری انتخاب می شوند که توابعی بدست آیند که نزدیک به توابع موج واقعی باشند.

حالت	تابع موج شبیه سازی	مقدار انرژی شبیه سازی	مقدار انرژی دقیق
حالت پایه	$e^{\pm \omega x^2}$	-72.56	-88.12
اولین حالت برانگیخته	$x e^{-\gamma x^2}$	-65.85	-52.05

جدول ۱: تابع موج و مقدار انرژی ذره در چاه پتانسیل شبیه سازی شده و مقایسه آن با مقادیر دقیق.

نتیجه گیری

در این مقاله با ایجاد مدار کوانتومی، معادله شرودینگر برای ذره در چاه پتانسیل محدود یک بعدی را با استفاده از کیت نرم افزاری پایتون QISKit در شبیه ساز IBM [۶] حل کرده و مقدار انرژی برای حالت پایه و اولین حالت برانگیخته را بدست آوردیم. مقدار درصد خطا برای حالت پایه ۱۷٪- و برای اولین حالت برانگیخته ۲۶٪ محاسبه شده است.

منابع

- [1] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and Franco Nori, Rev. Mod. Phys. **86**, 153 (2014).
- [2] K. Nakao, A. Matsuyama, arXiv:0907.3343v1 (2009).
- [3] Vivek V. Shende, Stephen S. Bullock, Igor L. Markov, IEEE Trans. on Computer-Aided Design **25**, no. 6, 1000 (2006)
- [4] Hamed Mohammadbagherpoor, Young-Hyun Oh, Anand Singh, Xianqing Yu, Andy J. Rindos, arXiv:1903.07605v1.
- [5] IBM Quantum Experience <https://quantumexperience.ng.bluemix.net/qx>
- [6] Nielsen, M. A., and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).

۱- گیت هادامارد به حالت اولیه سیستم $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ اعمال می شود:

$$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

۲- سپس یک گیت U-Controlled به خروجی هادامارد اعمال می شود. این گیت شبیه به گیت شیفت فاز به صورت $U_1(2\pi\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta} \end{pmatrix}$ می باشد و خروجی را به این شکل تغییر می دهد:

$$|\psi_1\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i\theta}|1\rangle)$$

۳- حال یک گیت هادامارد دیگر به خروجی بالا اعمال می کنیم:

$$|\psi_2\rangle \rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}[(1 + e^{2\pi i\theta})|0\rangle + (1 - e^{2\pi i\theta})|1\rangle]$$

بدین ترتیب، احتمال بدست آوردن $|0\rangle$ برابر $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi\theta)$ است. شبیه به این مراحل باید انجام شود تا بتوان تقریبی برای $\sin 2\pi\theta$ نیز بدست آورد. این کار را می توان با اعمال یک گیت $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ و اعمال متوالی HSU_1H انجام داد تا حالت نهایی زیر ایجاد شود:

$$|\psi_3'\rangle = \frac{1}{2}[(1 + ie^{2\pi i\theta})|0\rangle + (1 - ie^{2\pi i\theta})|1\rangle]$$

بدین ترتیب، احتمال بدست آوردن $|0\rangle$ برابر $\frac{1}{2}(1 - \sin 2\pi\theta)$ است. در نهایت با اندازه گیری کافی بر روی کیوبیت ها می توان $\sin 2\pi\theta$ و $\cos 2\pi\theta$ را بدست آورد که به تخمین خوبی از θ منجر می شود.

نتایج

در این مقاله، الگوریتمی که ارائه شده است، کاملاً به تابع موج اولیه سیستم وابسته است. اگر مقدار دهی اولیه به رجیستر کوانتومی با ویژه توابع اصلی هامیلتونی صورت گیرد، نتیجه تخمین فاز انرژی به مقادیر واقعی نزدیک خواهد بود. ولی هدف شبیه سازی کوانتومی این است که اطلاعات سیستم شبیه سازی شده را با استفاده از حالت اولیه ای که ممکن است دقیقاً همان حالت اولیه واقعی نباشد، به دست آوریم. از این رو با توجه به زوج بودن تابع موج حالت پایه و فرد بودن حالت برانگیخته ψ_0 و ψ_1 را به ترتیب تابع موج گاوسی و $x e^{-\gamma x^2}$ انتخاب می کنیم. نتایج بدست آمده از محاسبات این

دینامیک درهم تنیدگی و آمار کوانتومی در برهم کنش دو اتم سه ترازی نوع Λ با میدان همدوس $SU(1,1)$

سومندر، الهام؛ توسلی، محمد کاظم؛ حسنی ندیکی، مرضیه؛ یزدان پناه، نوید

گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله دینامیک درهم تنیدگی دو اتم سه ترازی نوع Λ که با یک میدان همدوس دودمی $SU(1,1)$ در یک کاواک اپتیکی برهم کنش می کنند را بررسی می کنیم. برای نیل به این هدف، پس از معرفی هامیلتونی سامانه و حل معادله وابسته به زمان شرودینگر که حاصل آن دست یابی به بردار حالت وابسته به زمان کل سامانه است، کمیت های دینامیکی سامانه مورد نظر را محاسبه و ارزیابی می کنیم. در ادامه، با محاسبه ی آنتروپی خطی به عنوان یکی از معیارهای تعیین درهم تنیدگی، میزان درهم تنیدگی بین زیر سامانه ی مورد مطالعه، ارزیابی می شود. در نهایت، آمار کوانتومی میدان، به عنوان یک ویژگی غیر کلاسیکی سامانه را با مطالعه پارامتر مندل مورد بررسی قرار می دهیم. ملاحظه خواهیم کرد که علاوه بر بروز درهم تنیدگی در زیر سامانه اتم اول با بقیه زیر سامانه، آمار فوتونی میدان نیز همیشه رفتار "زیر پواسونی" دارد. علاوه بر این، پدیده کاملاً کوانتومی "فروافت-احیا" که از ویژگی های مبرز غیر کلاسیکی است در هر دو کمیت بررسی شده وقتی پارامتر q حالت های همدوس $SU(1,1)$ بزرگتر از صفر و به قدر کافی بزرگ باشد دیده می شود.

واژه های کلیدی: درهم تنیدگی، آنتروپی خطی، اتم سه ترازی، میدان همدوس $SU(1,1)$

Dynamics of entanglement and quantum statistics in the interaction of two Λ -type three-level atoms with $SU(1,1)$ coherent field

Somandar, Elham; Tavassoly, Mohammad Kazem; Hassani Nadiki, Marziyeh; Yazdanpanah, Navid;

Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract

In this paper we study the entanglement between two Λ -type three level atoms interacting with the $SU(1,1)$ coherent state field in an optical cavity. To achieve the purpose, after presenting the suitable form of Hamiltonian for the under-considered system and solving the corresponding time-dependent Schrödinger equation with results in obtaining the form of the associated state vector, the dynamical quantities of the system can be studied. In the continuation, via calculating the linear entropy as a criterion for entanglement, the entanglement between one atom and the other evolved subsystems is calculated and analyzed. Finally, the quantum statistical properties of the field, as a non-classical property of the system, will be discussed via studying the Mandel parameter. We will observe that, the sub-Poissonian statistics as well as the entanglement have been observed. Also, within both considered quantities the collapse-revival phenomenon, which is a further nonclassicality criterion, can be clearly observed for q - $SU(1,1)$ coherent state parameter enough greater than zero.

Keywords: Entanglement, entropy, three level atom, $SU(1,1)$ coherent state field.

PACS No. [Quantum Optics](#)

درهم تنیده برهم کنش اتم و میدان است که متداول ترین آن ها با مدل معروف جینز-کامینگز بررسی و توصیف شده است [۳]. برای محاسبه ی میزان درهم تنیدگی در این سامانه ها از معیارهای متفاوتی مانند آنتروپی خطی، آنتروپی فون نویمان، تلاقی و منفیت استفاده می شود [۴].

مقدمه

یکی از ویژگی های کاملاً غیر کلاسیکی برخی از سامانه های کوانتومی که آن را از سامانه های کلاسیکی متمایز می سازد درهم تنیدگی است. این ویژگی کاملاً کوانتومی، نقش مهمی در نظریه اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... ایفا می کند [۱، ۲]. یکی از ساده ترین روش های ایجاد سامانه های

در این رابطه λ_1 و λ_2 ثابت‌های جفت‌شدگی اتم اول با میدان و γ_1 و γ_2 ثابت‌های جفت‌شدگی اتم دوم با میدان در کاواک هستند. همچنین، $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ و $\hat{b}(\hat{b}^\dagger)$ به ترتیب عملگرهای نابودی (آفرینش) فوتونی مربوط به مدهای $|n\rangle$ و $|n+q\rangle$ میدان کوانتیده هستند. $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ عملگر نردبانی مربوط به اتم‌ها است که می‌تواند بالابرنده یا پایین آورنده باشد. در لحظه $t=0$ و قبل از شروع برهم‌کنش با میدان، اتم اول را در حالت برانگیخته $|c\rangle$ و اتم دوم را در حالت برانگیخته $|g\rangle$ فرض می‌کنیم. بنابراین، بردار حالت اولیه کل سامانه به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) |n, n+q\rangle \otimes |c, g\rangle \quad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F(n) |c, g, n, n+q\rangle.$$

بر این اساس، بردار حالت کل سامانه در زمان t را به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \sum_n F(n) [c_1(n,t) |c, g, n, n+q\rangle \\ & + c_2(n,t) |a, e, n+2, n+q\rangle + c_3(n,t) |b, f, n, n+q+2\rangle \\ & + c_4(n,t) |a, g, n+1, n+q\rangle + c_5(n,t) |c, e, n+1, n+q\rangle \\ & + c_6(n,t) |a, f, n+1, n+q+1\rangle + c_7(n,t) |b, e, n+1, n+q+1\rangle \\ & + c_8(n,t) |c, f, n, n+q+1\rangle + c_9(n,t) |b, g, n, n+q+1\rangle]. \end{aligned} \quad (4)$$

با یافتن ضرایب بسط موجود در رابطه بالا به حالت سامانه دست پیدا خواهیم کرد که به کمک آن می‌توان همه اطلاعات لازم را به دست آورد.

دینامیک درهم‌تنیدگی و آمار کوانتومی میدان

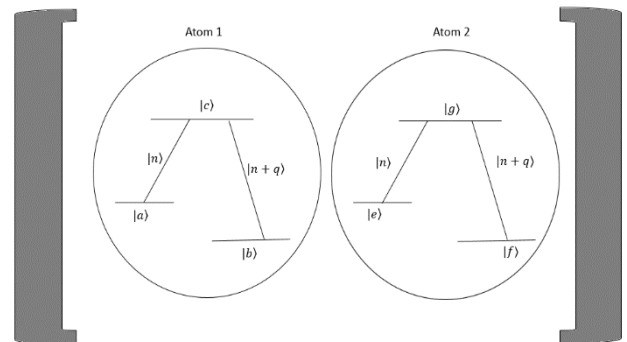
به کمک هامیلتونی و بردار حالت سامانه که به ترتیب در روابط (۲) و (۴) به آنها اشاره شد، با استفاده از روش دامنه احتمال که از حل معادله وابسته به زمان شرودینگر نشأت می‌گیرد، می‌توان به دامنه‌های احتمال بردار حالت سامانه دست یافت. این ضرائب وابسته به زمان به طور صریح محاسبه شدند ولی به سبب حجم زیاد آن‌ها امکان ارائه آنها در این مقاله نیست. در این مرحله، عملگر چگالی اتم-میدان را به کمک بردار حالت سامانه محاسبه کردیم و با رد گرفتن از عملگر چگالی اتم-میدان در پایه‌های میدان و یکی از اتم‌ها، عملگر کاهش‌یافته متناظر با اتم دیگر را به دست آوردیم. برای

در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع Λ را با یک میدان همدوس دومدی $SU(1,1)$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم و پس از یافتن بردار حالت کل سامانه، با تغییر پارامترهای مرتبط موجود در مدل در نظر گرفته شده، میزان تغییرات درهم‌تنیدگی سامانه را با به‌کارگیری سنج آنتروپی خطی، و آمار فوتونی میدان را به وسیله ارزیابی پارامتر مندل مورد بررسی و مطالعه قرار خواهیم داد.

مدل فیزیکی

سامانه مورد مطالعه شامل یک کاواک اپتیکی است که در آن دو اتم سه‌ترازی نوع Λ وجود دارد (گذارهای مجاز این نوع اتم در شکل ۱ نشان داده شده است). اتم‌ها با میدان همدوس $SU(1,1)$ زیر که یک میدان دومدی است برهم‌کنش می‌کنند [۵]:

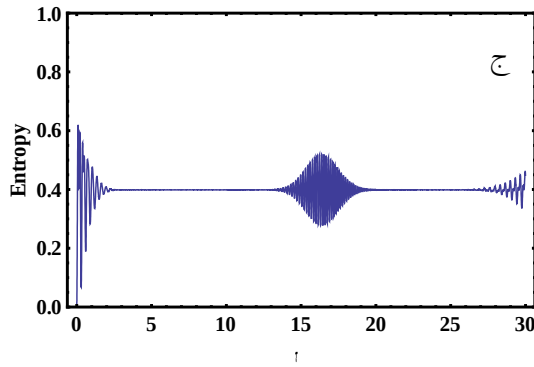
$$\begin{aligned} |\Psi_f(0)\rangle &= |\xi, q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) |n, n+q\rangle, \\ F(n) &= (1-|\xi|^2)^{(1+q)/2} \sqrt{(n+q)!/n!q!} \xi^n, \quad (1) \\ (0 < |\xi|^2 < 1, q = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$



شکل ۱: دو اتم سه‌ترازی نوع Λ در حال برهم‌کنش با یک میدان همدوس دومدی $SU(1,1)$ در یک کاواک اپتیکی.

در اتم اول گذار بین ترازهای $|c\rangle$ و $|a\rangle$ با مد اول میدان $|n\rangle$ و گذار بین ترازهای $|c\rangle$ و $|b\rangle$ با مد دوم میدان $|n+q\rangle$ برهم‌کنش انجام می‌گیرد. در اتم دوم نیز گذار بین ترازهای $|g\rangle$ و $|e\rangle$ با مد اول میدان $|n\rangle$ و گذار بین ترازهای $|g\rangle$ و $|f\rangle$ با مد دوم میدان $|n+q\rangle$ صورت می‌گیرد. بنابراین، هامیلتونی سامانه با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} H = & \hbar [\lambda_1 (a\sigma_{ca} + a^\dagger\sigma_{ac}) + \lambda_2 (b\sigma_{cb} + b^\dagger\sigma_{bc}) \\ & + \gamma_1 (a\sigma_{ge} + a^\dagger\sigma_{eg}) + \gamma_2 (b\sigma_{gf} + b^\dagger\sigma_{fg})]. \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۲: تحول زمانی آنتروپی خطی بر حسب زمان مقیاس بندی شده τ به ازای الف) $q=0$ ، ب) $q=10$ و ج) $q=50$. دیگر پارامترها $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1$ و $\xi = 0.6$ در نظر گرفته شده اند.

شکل های ۲ (الف-ج) تغییرات آنتروپی خطی بر حسب زمان را برای مقادیر مختلف q (پارامتر مربوط به جبر $SU(1,1)$ میدان) نشان می دهند. در شکل ۲ الف تحول زمانی آنتروپی خطی به ازای مقدار $q=0$ رسم شده است که در آن آنتروپی از مقدار اولیه صفر در زمان $t=0$ شروع شده است و با گذشت زمان نوسان می کند و در زمان هایی به کمی بیش از 0.6 نیز می رسد، در ضمن در طول زمان برهم کنش هیچگاه این کمیت به مقدار اولیه صفر نمی رسد که نشان دهنده در هم تنیدگی همیشگی سامانه است. به علاوه، با افزایش مقدار q همان طور که از نمودارها پیداست، شاهد ظهور پدیده کاملاً غیرکلاسیکی "فروافت-احیاء" در رفتار زمانی آنتروپی خطی هستیم.

آمار کوانتومی میدان

پارامتر مندل آمار فوتونی میدان های کوانتیده را ارزیابی می کند. این پارامتر به صورت زیر تعریف می شود [۶]:

$$Q = \frac{\langle \hat{n}_i^2 \rangle - \langle \hat{n}_i \rangle^2}{\langle \hat{n}_i \rangle} - 1, \quad (7)$$

که در رابطه ی بالا $\hat{n}_i$ عملگر تعداد کوانتای مد i ام میدان کاواک است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

منفی (مثبت) بودن پارامتر مندل نشانگر آمار زیرپواسونی (فراپواسونی) میدان است که نشان غیرکلاسیکی (کلاسیکی) بودن میدان است، و مقدار صفر آن آمار پواسونی (همدوس استاندارد) را نشان می دهد. با توجه به رابطه ی (۷) و انجام کمی محاسبات، پارامتر مندل محاسبه می شود. در نمودارهایی که در ادامه ارائه می شود تحول

بررسی میزان در هم تنیدگی، از آنتروپی خطی که با رابطه ی زیر مشخص می شود:

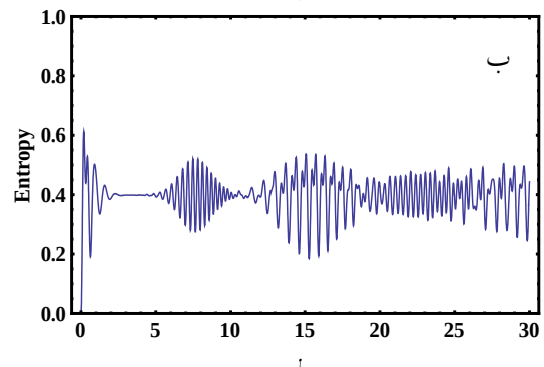
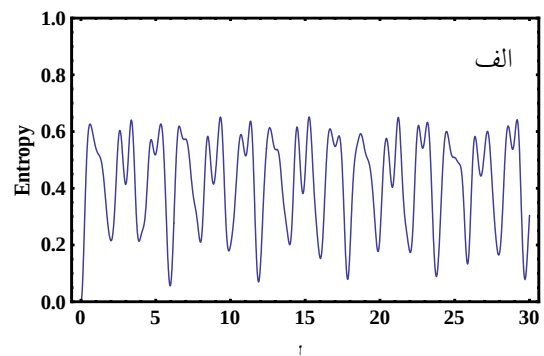
$$S_{At} = 1 - \text{Tr} \hat{\rho}_{At}^2. \quad (5)$$

استفاده کردیم که در آن ماتریس چگالی کاهش یافته اتم اول (یا دوم) می تواند باشد. با انجام کمی محاسبات، آنتروپی خطی برای اتم اول به صورت زیر حاصل می شود:

$$S = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |F(n)|^2 |F(m)|^2 (|c_1(n,t)|^2 + |c_5(n,t)|^2 + |c_8(n,t)|^2) (|c_1(m,t)|^2 + |c_5(m,t)|^2 + |c_8(m,t)|^2) + (|c_2(n,t)|^2 + |c_4(n,t)|^2 + |c_6(n,t)|^2) (|c_2(m,t)|^2 + |c_4(m,t)|^2 + |c_6(m,t)|^2) + (|c_3(n,t)|^2 + |c_7(n,t)|^2 + |c_9(n,t)|^2) (|c_3(m,t)|^2 + |c_7(m,t)|^2 + |c_9(m,t)|^2). \quad (6)$$

دینامیک در هم تنیدگی

برای مشاهده در هم تنیدگی در سامانه مورد مطالعه از آنتروپی خطی در رابطه (۶) استفاده شده است. در این بخش، ابتدا تحول زمانی آنتروپی خطی مربوط به اتم اول را با تغییر پارامتر q مربوط به جبر گروهی مربوط به میدان بررسی می کنیم.



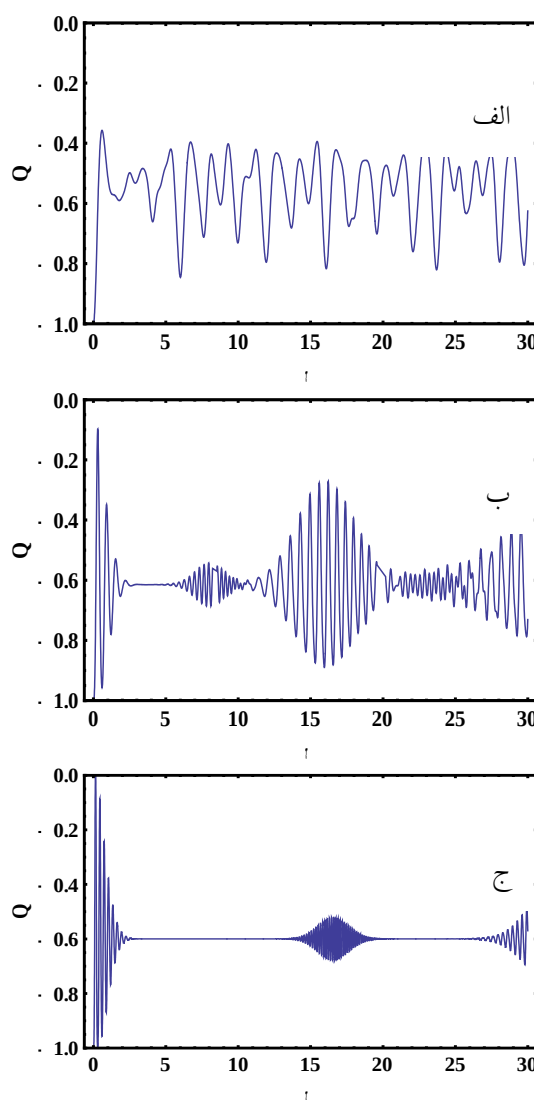
خلاصه و نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی برهم کنش میان دو اتم سه ترازی نوع A در یک کاواک با میدان همدوس دودی $SU(1,1)$ پرداختیم. با محاسبه بردار حالت سامانه مذکور و بررسی میزان درهم تنیدگی اتم-میدان این سامانه دریافتیم که با تغییر پارامتر مربوط به جبر گروه میدان می توان درهم تنیدگی بین اتم-میدان را ایجاد و کنترل نمود. با محاسبه پارامتر مندل برای یکی از مدهای میدان مشاهده کردیم آمار زیرپواسونی را در همه زمانها شاهد هستیم. نکته جالب این نتایج عددی این است که یک ویژگی غیر کلاسیکی (پدیده فروافت-احیاء) در دل یک ویژگی غیر کلاسیکی دیگر (زیرپواسونی بودن میدان) رخ داده است که این نشانه ای برای عمق غیر کلاسیکی بودن میدان $SU(1,1)$ هنگام برهم کنش است. لازم به ذکر است که هر چند ما فقط به محاسبه این دو کمیت پرداختیم ولی درهم تنیدگی اجزای دیگر سامانه، وارونی جمعیت اتمی، چلانگی مولفه های میدان و ... نیز قابل محاسبه است که به دلیل کمبود جا به آنها نپرداختیم.

مرجع ها

- [1] Bennett, C. H., and Brassard, G., "Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing", *Theor. Comput. Sci.* **560**, 7 (2014).
- [2] Ekert, A., and Jozsa, R., Quantum computation and Shor's factoring algorithm, *Phys. Rev. Mod. Phys.* **68**, 733 (1996).
- [3] Jaynes, E. T., and Cummings, F. W., "Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser", *Proc. IEEE*. **51**, 89 (1963).
- [4] Buscemi, F., Bordone, P., and Bertoni, A., "Linear entropy as an entanglement measure in two-fermion systems", *Phys. Rev. A* **75**, 032301 (2007).
- [5] Miry, S. R., and Tavassoly, M. K., "Generation of a class of $SU(1,1)$ coherent states of the Gilmore-Perelomov type and a class of $SU(2)$ coherent states and their superposition", *Phys. Scr.* **85**, 035404 (2012).
- [6] Mandel, L., "Sub-poissonian photon statistics in resonance fluorescence", *Opt. Lett.* **4**, 205 (1979).

زمانی پارامتر مندل برای مد اول میدان با تغییر پارامتر q ترسیم شده است.



شکل ۶: پارامتر مندل برای مد اول میدان ازای الف) $q=0$ ، ب) $q=10$ و

ج) $q=50$. دیگر پارامترها $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1$ و $\xi = 0.6$ در نظر گرفته شده اند.

همان گونه که در این نمودارها مشاهده می شود به ازای مقادیر مختلف q ، پارامتر مندل منفی است که نشان دهنده "آمار زیرپواسونی" و برخورداری از یک حالت غیر کلاسیکی است. هم چنین، افزایش q که نشان دهنده افزایش اختلاف فوتون های میان مدهای میدان است باعث ظهور "پدیده فروافت-احیاء"، که این نیز خود یک شاهد غیر کلاسیکی است، در رفتار زمانی پارامتر مندل می شود.

تعیین فرکانس های بهینه برای سیستم بیولوژیک: رهیافت فیدلیتی

سهراب بهنیا^۱، پریسا حسین نژاد^۱، سمیرا فتحی زاده^۱^۱دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

چکیده

سیستم های کوانتومی طبیعی نقش اساسی در مطالعات و فن آوری های جدید دارند، لذا مطالعه و بررسی چنین سیستم هایی بسیار جالب و حائز اهمیت است. چنین سیستم هایی سیستم های کوانتومی باز هستند که به طور پیوسته تحت تاثیر عوامل محیطی قرار میگیرند و مجبور به اندرکنش با پیرامون خود هستند. لذا مطالعه ی عملکرد آنها بدون در نظر گرفتن تاثیر محیط بی نتیجه است. سیستم کوانتومی طبیعی مورد مطالعه، یک سیستم فتوسنتزی است که تحت تاثیر تابش نور خورشید قرار گرفته است. با محاسبه ی فیدلیتی برای سیستم، فرکانس های نوری که به ازاء آنها حداکثر انتقال اکسایون را متصور هستیم را میتوان مشخص کرد. با چنین رهیافتی و با وجود فرکانس های مشخص قادر به طراحی و ساخت سیستم های فتوسنتز مصنوعی و دستگاه هایی با حداکثر کارکرد و بهره خواهیم بود.

واژه های کلیدی: سیستم فتوسنتزی، کلروزوم، فیدلیتی

Determining the optimal frequencies for the biological system: fidelity approach

Behnia, Sohrab¹; Hosseinneshad, Parisa¹; Fathizade, Samira¹¹ Department of Physics, Urmia University of Technology, Urmia

Abstract

Natural quantum systems play a significant role in new studies and technologies, so evaluating such systems is very interesting and important. These systems are open quantum systems that constantly affected by environmental factors and forced to interact with surroundings. Hence, studying their performance regardless of the environment is ineffective. The studied natural quantum system is a photosynthetic system that exposed to sunlight. By calculating the system fidelity, it is possible to determine the optical frequencies with maximum exciton transfer. By the approach and with certain frequencies, we are able to design and construct artificial photosynthesis systems and devices with maximum efficiency.

Keywords: photosynthesis system, chlorosome, fidelity

PACS No. 87

مقدمه

می شویم که بسیار پیچیده هستند و تعداد درجات آزاد کنترلی محدودی دارند. بنابراین تلاش در درک شرایط کلی برای یافتن اصول اساسی مکانیک کوانتوم برای بهبود انتقال در سیستم های پیچیده بسیار مهم است [۱]. به خاطر اهمیت مسلمی که مکانیزم

در زمینه های مختلف از اطلاعات کوانتومی گرفته تا فیزیک سلول های خورشیدی انتقال بهینه از مهم ترین پارامترها محسوب می شود. در مجموعه های واقعی با سیستم هایی در طبیعت مواجه

مدل و روش ها

برای کلروزوم ساختارهای متفاوت _ ساختار سیلندری با حلقه هایی به فاصله ی یکسان که روی هم چیده شده تا ساختار قطبیده ی هلیکال _ پیشنهاد شده است. ما ساده ترین مدل شامل ۱۰ حلقه که ۱۸ مولکول کروموفر روی هر حلقه جای گرفته را انتخاب می کنیم. هامیلتونین سیستم برای این مدل، هامیلتونین فرنکل است که به شکل زیر تعریف می شود [۶]:

$$H_s = \sum_n \epsilon_n a_n^\dagger a_n + \sum_{n \neq m} J_{nm} a_n^\dagger a_m \quad (1)$$

که ϵ_n ها انرژی برانگیختگی تک سایت و J_{nm} ثابت جفت شدگی بین سایت ها است. $(a_n) a_n^\dagger$ عملگر خلق (فنا) ی اکسایتون روی سایت n ام است. علاوه بر آن سیستم در محیطی قرار گرفته که ناگزیر از اندرکنش با محیط پیرامون خود است. مدل هایی که برای توصیف محیط (حمام گرمایی) به کار می روند معمولاً به صورت حمام بوزونی و فونونی تعریف می شود [۳]. حمام فونونی به صورت نوسانگرهایی که با کروموفرهای سیستم اندرکنش دارند مدل شده است. لذا هامیلتونین حمام و هامیلتونین اندرکنش به صورت زیر تعریف می شود [۶]:

$$H_{\text{bath}} = \sum_q \hbar \omega_q b_q^\dagger b_q \quad (2)$$

$$H_{s\text{-bath}} = -\frac{1}{N} \sum_n \sum_q g \omega_q a_n^\dagger a_n (b_q e^{iqn} + H.C.) \quad (3)$$

که ω فرکانس مدهای فونونی، g ثابت جفت شدگی سیستم_حمام و $(b_n) b_n^\dagger$ عملگر خلق (فنا) ی فونون است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، میتوان فرض کرد که در هر لحظه تنها یک اکسایتون در حالت برانگیخته قرار دارد. هامیلتونین اندرکنش نور با ماده نیز به صورت زیر بیان می شود [۳]:

$$H_{\text{int}} = -\hat{P} \cdot E(t) \quad (4)$$

انتقال انرژی در کامپلکس های فتوسنتزی برای تمام انواع زندگی در زمین دارد، برای چندین دهه است که این سیستم ها مورد توجه و مطالعه قرار گرفته اند. در سال های اخیر توجه مجددی در این زمینه شروع به شکل گرفتن کرده که عمدتاً به دلیل بهره وری بالایی که در فرآیند انتقال انرژی در این سیستم ها مشاهده شده است [۲]. اگر ما حتی این حقیقت را که مکانیک کوانتوم برای توضیح خصوصیات مولکولی و واکنششان ضروری است را در نظر بگیریم، باز همچنان برای مشخص کردن عملکرد پدیده های بیولوژیکی، برای توضیح دقیق فرآیند ها نیاز به مکانیک کوانتوم داریم که این امر مطالعه ای تحت عنوان کوانتوم بیولوژی را ضروری می سازد. در حقیقت کوانتوم بیولوژی به طور قابل توجهی در مشاهده ی دینامیک کوانتومی در سیستم های بیولوژی بسیار موفق بوده است. در سال های اخیر قابلیت تکنولوژی های جدید توانسته به بهبود کیفیت مطالعه ی کاملاً تئوری کوانتوم بیولوژی کمک کند [۳].

فیدلیتی نشانگر مختل شدن هامیلتونی برای یک سیستم کوانتومی است [۴]، توصیف کننده ی تغییرات یک حالت خالص در اثر اندرکنش با حالت های مجاورش است. معمولاً به عنوان یک تست شاخص برای حالت های مشخص مثل کیوبیت ها در اطلاعات کوانتومی و ... به شمار می رود. چیزی که مورد توجه است توصیف وابستگی فیدلیتی به کنترل پارامتر و اینکه چطور بسته به جفت شدگی با محیط میتواند تغییر کند است [۵].

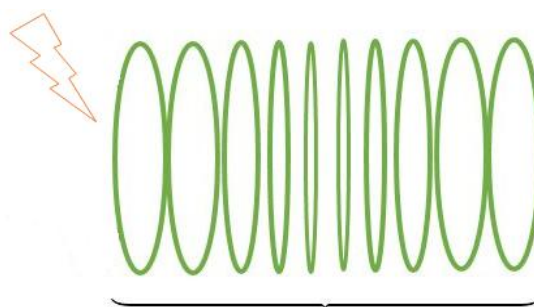
بدین منظور برای بدست آوردن فیدلیتی در یک سیستم فتوسنتزی از کلروزوم که در آنتن باکتری های سولفوری سبز یافت می شود، استفاده شده است. به علت باز بودن سیستم، محیط را به صورت نوسانگرهایی که به کروموفر های سیستم متصل شده اند، در نظر می گیریم. با برخورد فتون های خورشید به سیستم، جفت الکترون حفره تحت عنوان اکسایتون تولید می شود که شروع به حرکت داخل کامپلکس سیستم میکنند. با محاسبه ی فیدلیتی به ازاء فرکانس های نوری متفاوت می توانیم با مشخص کردن فرکانس هایی که بیشترین مقدار فیدلیتی و لذا بیشترین احتمال عبور را می توانند داشته باشند، بدست آوریم.

اندركنش سیستم با میدان اپتیکی از طریق عملگر پلاریزیشن و میدان الکتریکی به صورت زیر معرفی می شود:

$$\hat{P} = \mu(a_n^\dagger + a_n) \quad (5)$$

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} \quad (6)$$

که μ دو قطبی گذار است.



Chlorosome with 10 ring

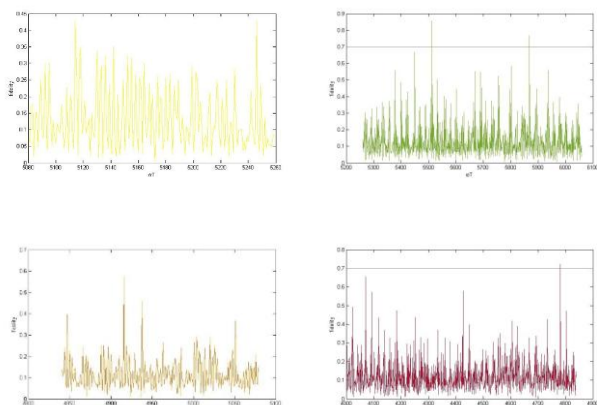
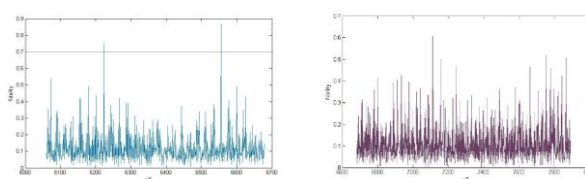
شکل ۱: سیستم کلروزومی ۱۰ حلقه

از طرفی در محاسبه ی فیدلیتی ما نوسانات فیدلیتی را برای سیستم کوانتوم بیولوژی محاسبه می کنیم، که در واقع هم پوشانی توابع موج محاسبه شده در طی زمان است و به صورت زیر معرفی می شود [۷]:

$$F = |\langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda + \delta\lambda) \rangle| \quad (6)$$

که منظور از λ کنترل پارامتر سیستم برابر ωt است. نمودار فیدلیتی برای طیف نور مرئی به ازاء طیف رنگ های مختلف رسم شده است.

فیدلیتی تحت عنوان احتمال گذار نیز معروف است. همانگونه که از شکل ۲ مشخص است، مقادیر فیدلیتی کمیته بین ۰ تا ۱ را نشان میدهند. هر اندازه که مقدار فیدلیتی به ۱ نزدیک تر باشد نشان از انتقال کامل شبه ذرات دارد و نزدیک به صفر بودن نشان از جایگزیده تر بودن اکسایتون دارد.



شکل ۲: نمودارهای فیدلیتی به ازاء طیف های متفاوت نور خورشید

بحث فیدلیتی را از منظر دیگری نیز میتوان بررسی کرد، به این صورت که همواره بین فیدلیتی و بحث آشوب ارتباط نزدیکی وجود داشته است [۴، ۵، ۸]. فیدلیتی نزدیک به صفر معرف آشوبناکی سیستم و فیدلیتی نزدیک به ۱ نشانگر انتگرال پذیر بودن سیستم است. لذا علاوه بر مشخص کردن اینکه در چه فرکانس هایی میتوانیم حداکثر انتقال را در سیستم داشته باشیم، حتی درباره ی پایداری سیستم نیز می توانیم بحث کنیم. برای تمایز مشخص تر، برای هر طیف رنگی از نورخورشید، فرکانس هایی که به ازاء آنها مقدار فیدلیتی به بیش از ۰,۷ میرسد را جدا و در جدول ۱ ثبت کردیم.

رنگ نور مرئی	فرکانس های با فیدلیتی بالای ۰,۷ (THz)	طول موج با فیدلیتی بالای ۰,۷ (nm)
بنفش	-	-
آبی	۶۵۵,۶-۶۲۲,۳	۴۵۷,۲۷۹-۴۸۱,۷۴۹
سبز	۵۸۶,۸-۵۵۱,۳	۵۱۰,۸۹۳-۵۴۳,۷۹۱
زرد	-	-
نارنجی	-	-
قرمز	۴۷۸,۱	۶۲۷,۰۴۹

جدول ۱: فرکانس و طول موج های نور مرئی با فیدلیتی بالای ۰,۷

فرکانس های بدست آمده با تقریب مناسبی با فرکانس های طیف تجربی که برای سیستم کلروزوم بدست آمده همخوانی دارد [۹].

نتیجه گیری

مرجع ها

- [۱] M. Walschaers, J. F. Diaz, R. Mulet and A. Buchleitner; "Optimally Designed Quantum Transport across Disordered Networks"; *PRL* **111**, (2013) 180601.
- [۲] R. de J. Leon-Montiel and J. P. Torres; "Highly Efficient Noise Assisted Energy Transport in Classical Oscillator Systems"; *PRL* **110**, (2013) 218101.
- [۳] M. Mohseni, Y. Omar, G. Engel, M. B. Plenio, *Quantum Effects In Biology*, Cambridge University (2014).
- [۴] F. Pellegrini and S. Montangero; "Fractal fidelity as a signature of quantum chaos"; *PRA* **76**, (2007) 052327.
- [۵] H. Kohler, H. Sommers, S. Åberg and T. Guhr; "Exact fidelity and full fidelity statistics in regular and chaotic surroundings"; *PRE* **81**, (2010) 050103.
- [۶] A. S. Marquez, L. Chen, K. Sunb, Y. Zhao, "Probing ultrafast excitation energy transfer of the chlorosome with exciton-phonon variational dynamics" *Phys. Chem. Chem. Phys.* **18**, (2016) 20298-20311.
- [۷] P. Plötz, M. Lubasch and S. Wimberger; "Detection of avoided crossings by fidelity"; *Physica A*. **390**, (2011) 1363-1369.
- [۸] J. Emerson, Y. S. Weinstein, S. Lloyd and D.G. Cory; "Fidelity Decay as an Efficient Indicator of Quantum Chaos"; *PRL*. **89**, (2002) 284102.
- [۹] G. S. Orf, R. E. Blankenship; "Chlorosome antenna complexes from green photosynthetic bacteria"; *Photosynth Res.* **116**, (2013), 315-31.
- [۱۰] H. Tamiaki, S. Tateishi, S. Nakabayashi, Y. Shibata, S. Itoh; "Linearly polarized light absorption spectra of chlorosomes, light-harvesting antennas of photosynthetic green sulfur bacteria"; *chem phys lett* **484**. (2009), 333-337.

سیستم های فتوستزی، سیستم های کوانتومی بیولوژیکی هستند که به دلیل بهره ی فوق العاده بالایی که دارند بسیار مورد توجه قرار گرفته اند. در این مطالعه نیز برای سیستم فتوستزی کلروزوم از طریق محاسبه ی فیدلیتی، فرکانس های شاخصی که به ازاء آنها حداکثر انتقال و بهره ی بالا می تواند رخ دهد را مشخص کردیم که بسار در طراحی سیستم های فتوستز مصنوعی یا سلول های خورشیدی میتواند موثر واقع گردد. از طرفی به دلیل رابطه ای که بین فیدلیتی و بحث آشوب وجود دارد می توانیم حتی از پایداری سیستم نیز صحبت کنیم. بر اساس معادل بودن انتگرال پذیری با حالت پایدار سیستم و آشوبناکی سیستم با حالت ناپایدار، می توانیم ادعا کنیم که به ازاء فرکانس های بدست آمده سیستم در پایدارترین حالت خود قرار دارد.

همبستگی دو کاواک اپتومکانیکی در یک حمام غیر مارکوفی مشترک

درای، مویده^۱؛ ضمیر انوری، جاوید^۲؛ عامری، وحید^۳؛ ندافان، مرضیه^۴^۱دانشکده علوم پایه دانشگاه شهید رجایی^۲گروه فیزیک، دانشگاه شهید رجایی^۳گروه فیزیک، دانشگاه هرمزگان^۴گروه فیزیک، دانشگاه شهید رجایی

چکیده

سیستم‌های کوانتومی باز با محیط اطراف خود در تعامل هستند. و این تعامل باعث اتلاف و از بین رفتن انسجام کوانتومی می‌شود. دینامیک این نوع سامانه‌ها غیر مارکوفی است و برای حل آن نیاز به راه‌حلی فراتر از رهیافت مارکوفی داریم. در این مقاله سعی داریم با استفاده از رهیافت عددی HEOM ماتریس چگالی کاهش یافته سیستم را در دینامیک غیر مارکوفی به دست آوریم. شبیه سازی سیستم با استفاده از نرم‌افزار کیوتیپ انجام شده است.

Quantum correlation of two optomechanical cavities in a non-markovian common bath

Daray, Moayedeh¹; Zamir Anvari, Javid²; Ameri, Vahid³; Nadafan, Marzieh⁴¹ Department of Basic Sciences, University of Shahid Rajaei, Tehran,² Department of Basic Sciences, University of Shahid Rajaei, Tehran,³ Department of Basic Sciences, University of Hormozgan, Bandar Abbas,⁴ Department of Basic Sciences, University of Shahid Rajaei, Tehran,

Abstract

Open quantum systems interact with their environment. this interaction induces dissipation and decoherence. In most cases, the dynamics of these systems are non-markovian. And to solve it, we need to go beyond the Markovian approach. In this paper, we try to obtain a reduced-density matrix of a system using a numerical HEOM approach in non-markovian dynamics. Simulation of the system using the software of the qutip.

PACS No.

مقدمه

به کارگیری دینامیک توصیف کننده سیستم های کوانتومی باز بسیار دشوار است، چرا که تمام پیشینه فرآیند را در بر دارد. در نظر گرفتن توصیف های موثر در تحلیل ویژگی های فیزیکی این سیستم ها، یک امر ضروری به شمار می رود چرا که از ساختار ساده تری برخوردارند و در نتیجه برای تحلیل دقیق، مناسب تر هستند. دینامیک سیستم های کوانتومی باز را می توان با دو رویکرد مارکوفی و غیر مارکوفی توصیف کرد [۱]. در رویکرد

هر سیستم کوانتومی ناگزیرا در تعامل با محیط اطراف خود می باشد. دینامیک سیستم های کوانتومی باز مورد توجه طیف وسیعی از زمینه ها شامل فیزیک ماده چگال، طیف سنج های فوق سریع، فناوری اطلاعات کوانتومی و ... می باشد. در این سیستم ها تعامل باعث اتلاف و از بین رفتن انسجام کوانتومی می شود. به طور کل

مارکوفی فرض می شود که محیط از تعامل خارج شده و اطلاعات از سیستم به محیط منتقل می شود بدون اینکه اتلاف در نظر گرفته شود. با این حال افزایش توانایی ما برای ساخت مواد جدید و مشاهده و کنترل سیستم های کوانتومی در مقیاس زمانی و طولی مختلف در حال نشان دادن سناریوهای جدیدی است که اتلاف و ناهم دوسی نقش اساسی بازی می کند. در بسیاری از این سناریوها جدایی بزرگ بین سیستم و مقیاس زمانی محیط نمی توان فرض کرد و این منجر به رفتار غیر مارکوفی و در نهایت بازگشت اطلاعات از محیط به سیستم می شود. توصیف دینامیکی سیستم های کوانتومی باز در بعضی از شرایط با به کار بردن تقریبهایی ساده تر می شود. مهمترین این تقریبات، تقریب بورن و تقریب مارکوف هستند. با در نظر گرفتن این دو تقریب می توان گفت که سیستم کوانتومی باز رفتار مارکوفی دارد [۲]. مارکوفینیتی از نام یک ریاضیدان روسی گرفته شده است و نوعی فرآیند کلاسیکی است که خاطره ای از گذشته ندارد. در یک تقسیم بندی می توان گفت تکامل دینامیکی سیستم های مارکوفی به وسیله نگاشت های خطی کاملاً مثبت و رد نگه دار توصیف می شود. و مولد تحول به صورت فرم لیندبلاد و ردفیلد است. در این فرآیندها زمان همبستگی سیستم و محیط خیلی کوچکتر از زمان تحول سیستم در نظر گرفته می شود به همین دلیل می توان اثر حافظه محیط را نادیده گرفت. به صورتی که شارش اطلاعات فقط از سیستم به محیط اتفاق می افتد [۳]. به طور کلی دینامیک مارکوفی بسیار پرکاربردند و ویژگی های ریاضی و فیزیکی آن ها به خوبی شناخته شده است. با این وجود بسیاری از سیستم های فیزیکی در شیمی و زیست شناسی چنین تفکیک های واضحی از مقیاس های زمانی را نشان نمی دهند و امکان توصیف آنها با دینامیک مارکوف وجود ندارد [۱]. بنابراین برای مطالعه چنین سیستم های غیر مارکوفی باید از انواع مختلف روشهای دیگر استفاده کرد. دینامیک عملی سیستم های کوانتومی باز اساساً غیر مارکوفی است. از لحاظ نظری رویکرد دینامیکی غیر مارکوفی در سالهای اخیر توسعه یافته است و دانشمندان مطالعات زیادی در این زمینه انجام داده اند. به طور کل حل دینامیک سیستم های غیر مارکوفی کار آسانی نیست، زیرا نمی توان از اتلاف و نویزهای محیطی چشم پوشی کرد. در فرآیندهای

غیر مارکوفی اثرات حافظه محیط را نمی توان نادیده گرفت. بنابراین یک جریان بازگشت اطلاعات از محیط به سیستم وجود دارد. برای توصیف چنین سیستم هایی به تکنیکهای نظری که منجر به معادلات غیر مارکوفی می شود نیاز داریم که به صورت تحلیلی یا عددی قابل حل است [۴].

در این مقاله می خواهیم سامانه ای را بررسی کنیم که با حمام غیر مارکوفی جفت شدگی دارد. سامانه مورد بررسی از دو کاواک تشکیل شده که در یک حمام غیر مارکوفی مشترک قرار دارند. کاواک ها نیز در حمام غیر مارکوفی اتلاف می کند. می خواهیم تاثیر حمام غیر مارکوفی را بر همبستگی دو کاواک مورد بررسی قرار دهیم.

در این مقاله از یک رهیافت عددی برای حل دینامیک غیر مارکوفی استفاده می شود. این رهیافت به رهیافت HEOM معروف است. مزیت این رهیافت این است که به ما اجازه می دهد از آنها برای دستیابی به ماتریس چگالی کاهش یافته سیستم کوانتومی باز با در نظر گرفتن تمام مراتب برهم کنش بین سیستم-محیط استفاده کنیم. این روش در مواردی که به جفت شدگی قوی بین سیستم و محیط نیاز است، بسیار مفید است [۲].

معرفی هامیلتونی سیستم

هامیلتونی سیستم مورد نظر ما به صورت زیر است:

$$\mathcal{H} = \omega_1 b_1^\dagger b_1 + \omega_2 b_2^\dagger b_2 + J(b_1 + b_1^\dagger)(b_2 + b_2^\dagger) + E_1(b_1 + b_1^\dagger) \quad (1)$$

ω_1 و ω_2 فرکانس مربوط به مدهای اپتیکی می باشد و b و $b^\dagger$ مربوط به عملگرهای نابودی و خلق مدهای میدان در کاواک هستند. جمله دوم $\mathcal{H}_{int}$ هامیلتونی تعاملی نامیده می شود و J نیز ثابت جفت شدگی نامیده می شود. جمله سوم نشان دهنده یک نوع تقویت میدان است که به صورت نور تابانده شده از لیزر به وجود می آید و روی میدان اعمال می شود. در صورتی که ما E را نداشته باشیم تعداد فوتون های موجود در کاواک کاهش می یابد. با شروع از این هامیلتونی، معادله ای را برای حرکت مربوط به ماتریس چگالی کاهش یافته به دست می آوریم. این معادله باید توصیف کننده نوسانات انرژی سیستم و اتلاف ناشی از برهم کنش با حمام باشد. توجه داشته باشید در این حالت به دلیل تعامل و اتلاف، دیگر ماتریس چگالی را نمی توان به صورت حاصل ضرب سهم

بسیار کوچکتر از زمان تکامل سیستم T_S باشد، در آن صورت باید از تقریب مارکوفی برای دستیابی به معادلات تکامل سیستم کوانتومی باز استفاده کرد [۲].

ما در این جا یک حمام مشترک داریم که مشخصه مکان (X) کاواک ها در این حمام اتلاف می کند. وجود اثرات کوانتومی القا شده در سیستم همواره با دمای پایین مرتبط هستند، و در این حالت تحول منبع شامل بازه های زمانی است که توسط فرکانس ماتسوبارا تثبیت شده است.

یکی از راه هایی که می توان همبستگی دو کاواک را مورد بررسی قرار داد، استفاده از اطلاعات متقابل است. اطلاعات متقابل به وسیله آنتروپی فون نویمان تعریف می شود و رابطه ی آن به صورت زیر است.

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) \quad (۸)$$

که در آن $S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho)$ آنتروپی فون نویمان است [۷]. معیار دیگری نیز که برای این سیستم مورد بررسی قرار می گیرد، معیار همگامی نام دارد. این معیار بیشتر برای سیستم های همگام شده استفاده می شود و به صورت

$$S_c(t) = \langle q_-(t)^2 + p_-(t)^2 \rangle^{-1} \quad (۹)$$

تعریف می شود که در آن $q_-(t)$ و $p_-(t)$ به خطاهای همگامی معروف هستند و رابطه ی آنها به صورت

$$q_-(t) = [q_1(t) - q_2(t)]/\sqrt{2} \quad (۱۰)$$

و

$$p_-(t) = [p_1(t) - p_2(t)]/\sqrt{2} \quad (۱۱)$$

است [۸]. در ادامه نتایجی که از نرم افزار کیوتیپ برای دو رهیافت معادله مستر و رهیافت HEOM به دست آورده ایم را مورد بررسی قرار می دهیم.

شکل زیر اطلاعات متقابل دو کاواک را در رهیافت HEOM نشان می دهد.

سیستم در سهم منبع نوشت. پس ماتریسی که ما به دست می آوریم باید بیان کننده حالت کلی باشد. در نمایش تقلیل یافته، تمامی اطلاعات لازم در مورد حمام و جفت شدگی سیستم-حمام در چگالی طیفی $I(\omega)$ قرار دارد. برای سیستم هایی با اتلاف اهمی و مشخصات قطع لورنتزی (اتلاف Drude)، چگالی طیفی به صورت

$$I(\omega) = \frac{\hbar \lambda \gamma^2}{2\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (۲)$$

که λ انرژی تجدید و متناسب با نیروی جفت شدگی بین سیستم و محیط است. تابع همبستگی

$$\alpha_T(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left[\coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \right] \quad (۳)$$

را می توان به صورت

$$\alpha(t) = \sum_{m=0}^\infty c_m \exp(-\mu_m t) \quad (۴)$$

بر حسب فرکانس های Matsubara نوشت. این فرکانس ها به صورت

$$\mu_m = 2\pi m / \hbar\beta \quad \mu_0 = \gamma$$

زمانی که $m \geq 1$ باشد، تعریف می شوند، در حالی که ضرایب به شکل زیر خواهند بود:

$$c_0 = \frac{\hbar \gamma^2 \lambda}{2} (\cot(\beta \hbar \gamma / 2) - i) \quad (۵)$$

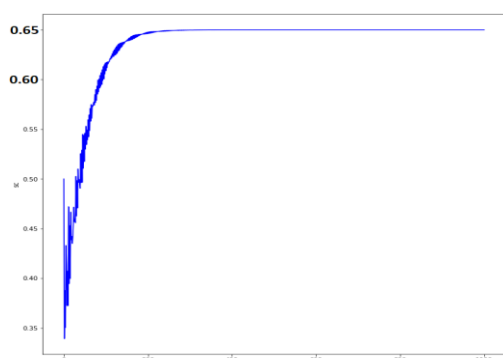
و

$$c_{m \geq 0} = \frac{\gamma^2 \lambda}{\beta} \frac{\mu_m}{\mu_m^2 - \gamma^2} \quad (۶)$$

برای محیطی با دمای بالا، $\beta \hbar \gamma \ll 1$ است، لذا رابطه $\alpha(t)$ به صورت زیر ساده می شود:

$$\alpha(t) \approx \frac{\lambda \gamma^2}{2} (\cot\left(\frac{\hbar \beta \gamma}{2}\right) - i) \exp(-\gamma t) \quad (۷)$$

لذا رفتار سیستم باز، به شدت وابسته به تابع همبستگی $\alpha(t)$ است که توسط شکل $I(\omega)$ تعیین می شود. تابع همبستگی یک جزء ضروری از هر معادله دینامیکی سیستمی است، و به عنوان هسته عبارات انتگرال طی زمان های گذشته عمل می کند. به بیان کلی، مقیاس زمانی میرایی، همبستگی محیطی یا زمان واهلش τ_c را تعیین می کند. این کمیت متناظر است با مدت زمانی که طول می کشد محیط به حالت اولیه خود (معمولاً حالت تعادل) بازگردد. اگر τ_c



شکل ۳: نمودار S_C در رهیافت معادله مستر با ابعاد فضای بزرگتر. $N=5, J=4$

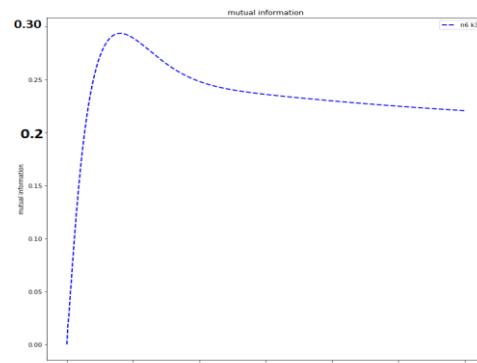
$$E=0.2, \gamma=0.01, \kappa = 0.01, n_{th} = 0.2$$

نتیجه گیری

در این مقاله ما یک راه حل بر پایه دینامیک غیر مارکوفی ارائه دادیم تا بتوانیم اطلاعات مناسبی را از مسیر سیستم‌های باز کوانتومی در رژیم غیر مارکوفی تهیه کنیم. رهیافت HEOM روشی غیراختلالی است که برای مطالعه تحول ماتریس چگالی سیستم‌های اتلافی کوانتومی توسعه پیدا کردند. این روش می‌تواند به تعامل غیر اختلالی منبع-سیستم و همین‌طور زمان‌های همبستگی غیر-مارکوفی را بدون در نظر گرفتن فرضیات نوعی-مانند تقریب‌های موج-چرخان، مارکوفی و بورن-که معادلات مرسوم ردفیلد دچار آن هستند، پردازد. رهیافت HEOM حتی در دماهای پایین هم که در آن اثرات کوانتومی قابل چشم‌پوشی نیستند نیز قابل استفاده است. و با استفاده از معیار اطلاعات متقابل و معیار شایستگی نشان دادیم که غیر مارکوفی بودن حمام همبستگی و همگامی بین کاواک‌ها را افزایش می‌دهد.

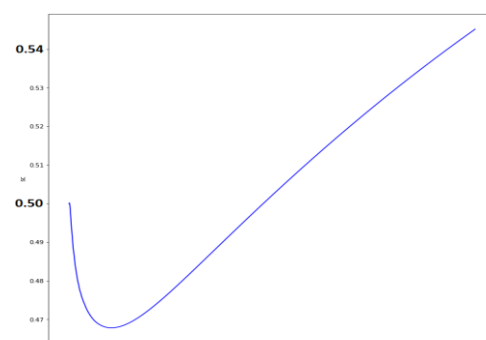
مرجع‌ها

- [۱] Ferialdi, L., & Dürr, D. (2016). Effective non-Markovian description of a system interacting with a bath. *Journal of Mathematical Physics*, 57(6), 062101. (8 normal)
- [۲] De Vega, I., & Alonso, D. (2017). Dynamics of non-Markovian open quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 89(1), 015001.
- [۳] Zuo, W., Qian, X. Q., & Liang, X. T. (2017). Comparisons of different witnesses of non-Markovianity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 465, 552-561.
- [4] Cerrillo, J., & Cao, J. (2014). Non-Markovian dynamical maps: numerical processing of open quantum trajectories. *Physical review letters*, 112(11), 110401.



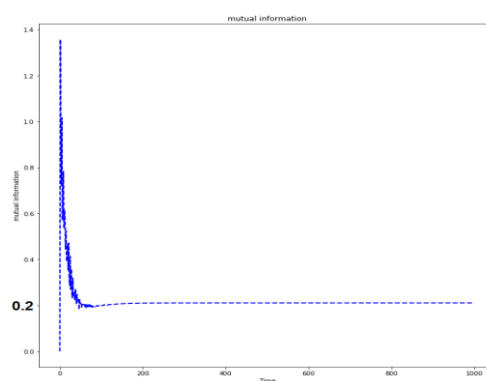
شکل ۱: اطلاعات متقابل کوانتومی بین دو کاواک در رهیافت HEOM.

$$E=0.2, N=5, J=0.01, T=1/2.5$$



شکل ۲: معیار همگامی بین دو کاواک در رهیافت HEOM. $E=0.2, N=5$

$$J=0.01, T=1/2.5$$



شکل ۳: اطلاعات متقابل کوانتومی در رهیافت معادله مستر. $N=5, J=4$

$$E=2, \gamma=0.01, \kappa = 0.01, n_{th} = 0.2$$

اثر جفت شدگی اتلافی بر همبستگی ها در کاواک اپتومکانیک

موسوی حکمی، سیده کبری^۱؛ عامری سیاهوئی، وحید؛ عسکری، علیداد^۱دانشکده علوم پایه دانشگاه هرمزگان، جاده بندر میناب- قبل از پلیس راه میناب، بندرعباس^۲گروه فیزیک، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس

چکیده

در این مقاله، سیستمی متشکل از دو کاواک که هر کدام از کاواک ها دارای یک کیوبیت و یک میدان می باشند، در نظر گرفته می شود که در آن مد اپتیکی دو کاواک جفت شدگی اتلافی دارند. می خواهیم اثر این جفت شدگی اتلافی را بر ایجاد همبستگی بین دو کیوبیت که در دو کاواک اپتومکانیک قرار دارند، بررسی کنیم. معیارهایی چون، اطلاعات متقابل، ناهم خوانی کوانتومی و میزان ارتباط بین دو کاواک مورد بررسی قرار گرفت. همچنین میزان همبستگی ها بین دو کاواک در دو حالت جفت شدگی اتلافی و جفت شدگی مستقیم مقایسه شده است.

واژه های کلیدی: جفت شدگی اتلافی، همبستگی، ناهم خوانی کوانتومی، اطلاعات متقابل، کاواک اپتیکی

Effect of dissipative coupling on correlation in optomechanical cavity

Mousavi hakami, Seyyede Kobra; Ameri, Vahid, Askari, Alidad

¹ Department of Physics, University of Hormozgan, Bandarabbas² Department of Physics, Hormozgan University, Bandarabbas

Abstract

In this paper, considering a system of two cavities, each consist of a qubit and a cavity field where the optical mode of cavities are dissipatively coupled, we investigate the effect of this coupling on the correlation between the atoms. Mutual information, quantum discord, and fidelity between the qubits are derived. In addition, the cases of dissipative coupling and direct coupling of the cavities have been compared.

Keywords: Dissipative coupling, Correlation, Quantum discord, Mutual information, Optical cavity

مقدمه

در بین فعل و انفعالات سیستم های اپتومکانیکی، جفت شدگی اتلافی جایگاه خاصی دارد. جفت شدگی اتلافی توسط وابستگی یک کاواک اپتیکی به یک مختصات مکانیکی مشخص شده است (در مورد یک کاواک فابری پروت مختصات مکانیکی شفافیت آینه ی ورودی را تغییر می دهد). سیستم دارای جفت شدگی اتلافی نمی توان آن را بدون اتلاف در نظر گرفت. کاواک دارای جفت شدگی اتلافی می تواند به عنوان یک مبدل بین موج اپتیکی پیوسته و درجه آزادی مکانیکی به کار رود که خنک سازی موثر نوسانگر مکانیکی، تبادل حالت های کوانتومی بین درجات آزادی اپتیکی و مکانیکی، فشرده سازی مکانیکی و ترکیب خنک سازی و فشرده سازی را میسر می کند [3,12,13,14,15,16]. در این مقاله، دو

همبستگی های کوانتومی عامل اصلی برتری سامانه های کوانتومی در انجام محاسبات و پردازش اطلاعات نسبت به سامانه های کلاسیکی هستند. به همین دلیل مطالعه این همبستگی ها و معیار های آنها مورد توجه قرار گرفته است. در ابتدا همبستگی کوانتومی را معادل درهم تنیدگی در نظر می گرفتند، اما معلوم شده است که سامانه های کوانتومی وجود دارند که بدون داشتن درهم تنیدگی محاسبات را سریعتر از بهترین الگوریتم های کلاسیکی انجام می دهند. لذا معیارهای مختلف برای میزان همبستگی کوانتومی فراتر از درهم تنیدگی تعریف شده است [1].

که در آن σ_{z_1} و σ_{z_2} به ترتیب عملگرهای مربوط به اتم دوترازه در کاواک اولی و کاواک دومی و ω_1 و ω_2 به ترتیب فرکانس زاویه ای مربوط به اتم دوترازه و مد اپتیکی در هر کاواک می باشد. $a_1^\dagger a_1$ و $a_2^\dagger a_2$ به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی مربوط به میدان حاصل از لیزر تابشی در کاواک اولی و کاواک دومی است. E_1 ، نرخ تحریک کاواک می باشد و H_{in} ، H_{int} به ترتیب هامیلتونی برهمکنش بین دو کاواک از طریق جفت شدگی بین مولفه های میدان و جفت شدگی بین مولفه های اتم دوترازه و مولفه های میدان مربوط به هر کاواک است که به شرح ذیل می باشد.

$$H_{in} = g_1(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \quad (2)$$

$$H_{int} = g((a_1^\dagger + a_1) S_{x_1} + (a_2^\dagger + a_2) S_{x_2}) \quad (3)$$

در اینجا g_1 ثابت جفت شدگی بین مولفه های میدان دو کاواک و g ثابت جفت شدگی بین مولفه های اتم دوترازه و مولفه های میدان در هر کاواک است. S_{x_1} و S_{x_2} به ترتیب مولفه های اتم دوترازه در راستای x می باشد.

از آنجا که در سیستم مورد نظر فرض شده است، دو کاواک به طور همزمان مدهای اپتیکی اتلاف می کنند، می توان واهلش سیستم را به صورت زیر تعریف کرد:

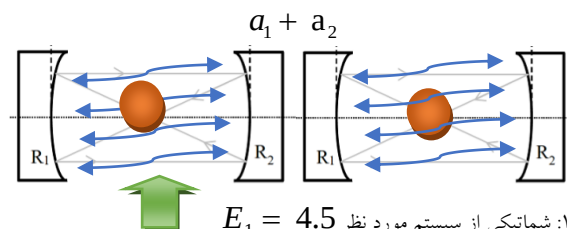
$$C_1 = \sqrt{2K_1} (a_1 + a_2) \quad (4)$$

که در آن K_1 ثابت اتلاف در ضریب واهلش است. همانطور که گفته شد، در این پژوهش به مقایسه اثر جفت شدگی اتلافی بر ایجاد همبستگی ها در دو کاواک و اثر جفت شدگی مستقیم بر آن، پرداخته می شود، پس:

$$\begin{aligned} C_2 &= \sqrt{2K_2} a_1 \\ C_3 &= \sqrt{2K_2} a_2 \\ cl &= [C_2, C_3] \end{aligned} \quad (5)$$

با قرار دادن ضرایب واهلش در معادله مستر و حل آن به طور جداگانه، ماتریس چگالی مربوط به هر کدام از حالت ها (جفت شدگی اتلافی و جفت شدگی مستقیم) را بدست آورده و از آنجا می توان با محاسبه و شبیه سازی معیار های اطلاعات متقابل و ناسازگاری کوانتومی به بررسی ایجاد همبستگی بین مولفه های اتم

کاواک، هرکدام متشکل از یک اتم دوترازه و میدان الکترومغناطیسی در نظر گرفته می شود که هریک از کاواک ها به طور همزمان مدهای اپتیکی را اتلاف می کنند. که در اینجا فرض می شود این دو مد باهم نوعی جفت شدگی اتلافی را به وجود می آورند. در ادامه با قرار دادن جفت شدگی مستقیم بین مولفه های میدان دو کاواک به مقایسه دو حالت جفت شدگی اتلافی و جفت شدگی مستقیم بین مولفه های میدان دو کاواک پرداخته و تاثیر جفت شدگی اتلافی و جفت شدگی مستقیم مولفه های میدان دو کاواک بر ایجاد میزان همبستگی ها در دو کاواک، بررسی خواهیم کرد. در این پژوهش با استفاده از نرم افزار کیوتیپ به شبیه سازی سیستم مورد نظر در نرم افزار می پردازیم. نخست هامیلتونی سیستم تعیین خواهد شد. پس از آن با استفاده از حل معادله مستر مناسب، ماتریس چگالی را بدست آورده و همه اطلاعات مربوط به سامانه از جمله معیارهای تشخیص همبستگی و سایر اطلاعات مورد نیاز سامانه را به دست می آوریم. سپس به مطالعه معیار های همبستگی های به وجود آمده بین دو کاواک خواهیم پرداخت. همچنین با استفاده از روش povm (اندازه گیری مثبت اپراتورها) ناهم خوانی کوانتومی را برای سیستم مورد نظر محاسبه خواهیم کرد [4,7,8,9,10,11].



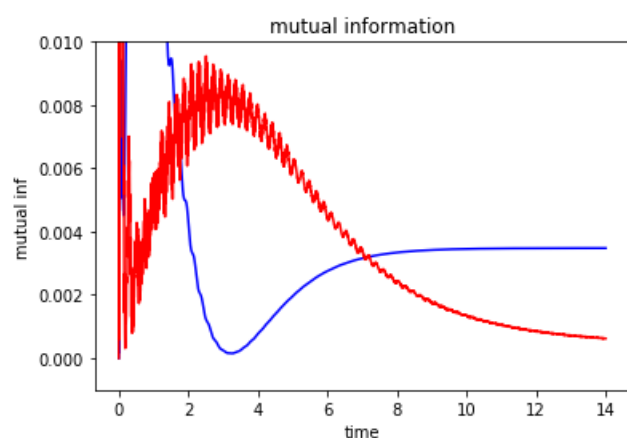
شکل ۱: شماتیکی از سیستم مورد نظر $E_1 = 4.5$

دینامیک سیستم

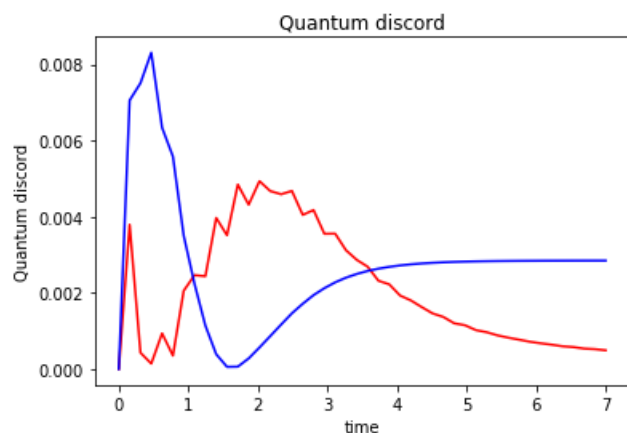
در این قسمت، یک نوع سیستم کاواک اپتومکانیک را مورد بررسی قرار می دهیم و هامیلتونی آن را محاسبه خواهیم کرد. فرض می شود دو کاواک متشکل از یک اتم دوترازه و میدان تابشی به طور همزمان مد اپتیکی اتلاف می کنند و میان این دو مد اپتیکی جفت شدگی اتلافی به وجود می آید. هامیلتونی سیستم به صورت زیر می باشد:

$$H = \hbar \omega_1 \sigma_{z_1} + \hbar \omega_2 \sigma_{z_2} + \hbar \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar \omega_2 a_2^\dagger a_2 + i \hbar E_1 (a_1^\dagger + a_1) + H_m + H_{int} \quad (1)$$

نتایج به دست آمده از شبیه سازی سیستم مورد نظر در نرم افزار کیوتیپ:



شکل ۲: نمودار مقایسه ای اطلاعات متقابل در دو حالت جفت شدگی اتلافی (نمودار آبی) و جفت شدگی مستقیم (نمودار قرمز) بین دو کیوبیت در دو کاواک با پارامترهای $\omega_1 = \omega_2 = 10.0$ و $g_1 = 1.0$ نرخ جفت شدگی بین مولفه های کیوبیت و میدان در هر کاواک و $g_2 = 2.0$ نرخ جفت شدگی بین دو کاواک، $E_1 = 4.5$ نرخ تحریک در کاواک (۱)، $K_1 = K_2 = 0.05$ را به عنوان ضریب ثابت اتلاف مد اپتیکی در دو کاواک اتخاذ کرده ایم.



شکل ۳: نمودار مقایسه ای ناهم خوانی کوانتومی در دو حالت جفت شدگی اتلافی (نمودار آبی) و جفت شدگی مستقیم (نمودار قرمز) بین دو کیوبیت در دو کاواک، با پارامترهای شکل ۲.

های دوترازه در دو کاواک پرداخت. در این تحقیق، برای محاسبه ناهم خوانی کوانتومی از روش povm که در مقاله دکتر عامری و همکارانش نیز آمده، استفاده شده است [4].

همبستگی و معیارهای اندازه گیری همبستگی:

دو نوع همبستگی داریم، همبستگی کلاسیکی و همبستگی کوانتومی، همبستگی کلاسیکی می تواند به عنوان اطلاعات به دست آمده درباره یک زیر سیستم باشد اگر اندازه گیری بر روی دیگری انجام پذیرد ولی در همبستگی کوانتومی اگر اندازه گیری روی سیستم انجام شود این اندازه گیری سیستم کوانتومی را مختل می کند.

ناهم خوانی کوانتومی معیاری برای تشخیص همبستگی کوانتومی است. اگر از همبستگی کلی، همبستگی کلاسیکی را کم کنیم این اختلاف صرفاً همبستگی کوانتومی است. در واقع باید اشاره کرد که تا کنون کمیت های مختلفی به عنوان معیار تشخیص همبستگی کوانتومی پیشنهاد شده است ولی ناهم خوانی کوانتومی مناسب تر از بقیه است. در این مقاله برای محاسبه ناهم خوانی کوانتومی از روش POVM (Positive Operator Valued Measures) استفاده شده است [9,2]. در ساده ترین حالت، یک POVM، مجموعه ای از اپراتورهای هرمیتی مثبت است $\{F_i\}$ در فضای هیلبرت H که جمع آنها اپراتور همانی است.

$$\sum_{i=1}^n F_i = I_H \quad (6)$$

اطلاعات متقابل در دو متغیر X و Y به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \quad (7)$$

شکل دیگر این معادله

$$I(X:Y) = H(X) + H(X|Y) \quad (8)$$

حال با دانستن Y این اطلاعات به $(X|Y)$ تقلیل پیدا می کند. بنابراین تفاوت این دو به میزان اطلاعی که Y درباره X می دهد.

واضح است که چنان چه دو کمیت X و Y مستقل باشند اطلاعات متقابل آنها صفر خواهد شد.

مدهای اپتیکی جفت شدگی اتلافی ایجاد شود همبستگی بیشتری را می توانیم بین مولفه های اتم دواترازه ایجاد کنیم.

مرجع ها

[۱] صوفیانی، رحیمه، کریمی، محمد، دینامیک درهم تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی برای یک زیر سیستم دو بخشی از سیستم سه کیوبیتی واقع در محیط اتلافی، دانشگاه تبریز، ۱۳۹۵، صفحه ۵۸۷ تا ۵۹۰

[۲] اخترشناس، سید جواد، محمدی، حمید رضا، نساج پور، وحید، موسوی، فهیمه سادات؛ «ناهم خوانی کوانتومی حالت های دوکیوبیتی»؛ دانشگاه/صفهان، سال ۲۰۱۹، صفحه ۸۸۵ تا ۸۸۸.

[3] Albert, Nazimiev, and Sergey P.Vyatchanin; ' Stable Optical Rigidity Based on Dissipative Coupling'; 1809.08596v1 [quant- Ph] 23 Sep 2018

[4] V.Ameri, M.Eghbali-Arani, A.Mari, A.Farance, F.Kheirandish, V.Giovanetti, and R.Fazio; ' Mutual information as an order Parameter for quantum Synchronization'; 1412.2585v1 [quant-ph] 8 Dec 2014

[5] Ming-Liang Hu, Jian, Sun; ' Sudden ehange of geometric quantum discord infinite temperature reservoirs'; Ann.Phys.354.265 (2015)

[6] Laleh Memarzadeh and Stefano Mancini; ' Entanglement dynamics for qubits dissipating into a common environment' ; Physical Review A 87, 032303 (2013)

[7] T. E. Lee, C.-K. Chan, and S. Wang, *Phys. Rev. E* 89, 022913 (2014).

[8] S. Walter, A. Nunnenkamp, and C. Bruder, *Annalen der Physik* (2014), 10.1002/andp.201400144.

[9] S. Hamieh, R. Kobes, and H. Zaraket, *Phys. Rev. A* 70, 052325 (2004).

[10] G. M. D'Ariano, P. Lo Presti, and P. Perinotti, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38, 5979 (2005).

[11] F. Galve, G. L. Giorgi, and R. Zambrini, *EPL (Europhysics Letters)* 96, 40005 (2011).

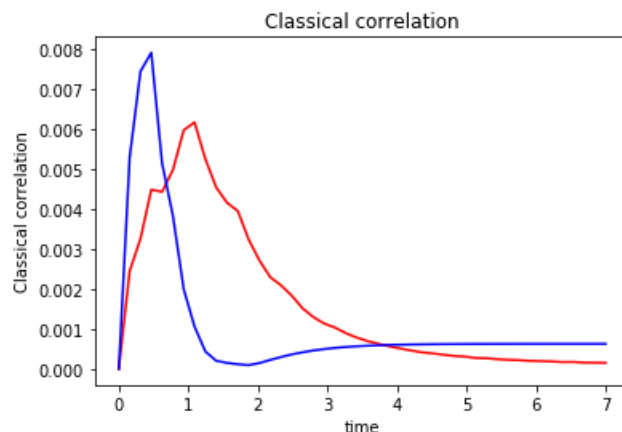
[12] F. Elste and S.M. Girvin and A.A. Clerk, *Physical Review Letters* 102, 207209 (2009).

[13] M. Li and W.H.P. Pernice and H.X. Tang, *Physical Review Letters* 103, 223901 (2009).

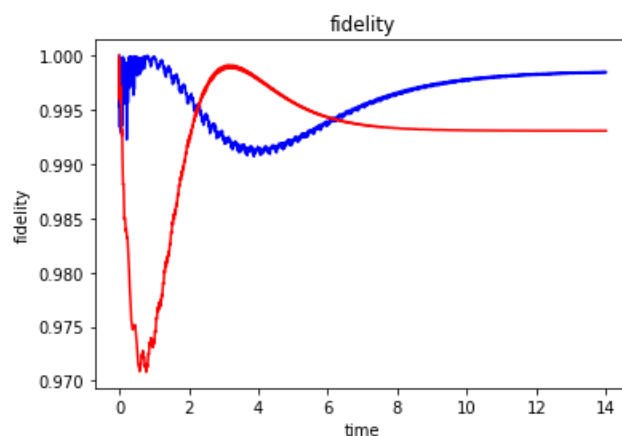
[14] A. Hryciw, M.Wu, B. Khanaliloo, and P. Barclay, *Optica* 2, 491 (2015).

[15] A. Sawadsky, H. Kaufer, R. Nia, S. Tarabrin, F. Khalili, K. Hammerer, and R. Schnabel, *Physical Review Letters* 114, 043601 (2015).

[16] T. Weiss, C. Bruder, and A. Nunnenkamp, *New Journal of Physics* 15, 045017 (2013).



شکل ۵: نمودار مقایسه ای همبستگی کلاسیکی در دو حالت جفت شدگی اتلافی (نمودار آبی) و جفت شدگی مستقیم (نمودار قرمز) بین دو کیوبیت در دو کاواک، با پارامترهای شکل ۲.



شکل ۶: نمودار مقایسه ای میزان ارتباط بین دو کاواک در دو حالت جفت شدگی اتلافی (نمودار آبی) و جفت شدگی مستقیم (نمودار قرمز) بین دو کیوبیت در دو کاواک، با پارامترهای شکل ۲.

نتیجه گیری

در این تحقیق، با مقایسه نتایج به دست آمده که از طریق شبیه سازی سیستم تعریف شده در نرم افزار کیوتیپ حاصل شد، می توان تاثیر جفت شدگی اتلافی بر ایجاد همبستگی بین مولفه های اتم دو ترازه را مشاهده کرد. شکل (۲) مقایسه اطلاعات متقابل، شکل (۳) مقایسه ناهم خوانی کوانتومی، شکل (۴) همبستگی کلاسیکی و شکل (۵) میزان ارتباط بین دو کاواک، حاصل از جفت شدگی اتلافی و جفت شدگی مستقیم را نشان می دهد (نمودار آبی رنگ مربوط به حالتی است که سیستم دارای جفت شدگی اتلافی، نمودار قرمز رنگ مربوط به حالتی است که سیستم دارای جفت شدگی مستقیم است) که به وضوح مشخص است که اگر بین

پیشنهاد روشی برای پیاده سازی گیت های کوانتومی هولونومی با استفاده از سیستم اپتومکانیک مرکب

رسا، سید محسن¹؛ بطحایی، مرضیه السادات¹؛ بهرامپور، علیرضا¹¹دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله گیت اپتومکانیکی بر پایه فاز هندسی را معرفی می‌کنیم که به طور همزمان بر روی حالت های یک سیستم اپتیکی و یک سیستم مکانیکی تحول ایجاد می‌کند. این گیت یک سیستم چهار جزئی شامل دو کاواک نوری و دو نوسانگر مکانیکی است. در نتیجه می‌توان توسط این گیت بر پایه کیوبیت‌های فوتونی و کیوبیت‌های فونونی محاسبات کوانتومی در فضای چهار بعدی انجام داد. همچنین می‌توان توسط این ساختار، گیت کوانتومی هولونومی عام تک کیوبیتی به طور مستقل برای سیستم مکانیکی یا اپتیکی ایجاد کرد. این گیت اپتومکانیکی کوانتومی هولونومیک در برابر نویزهای کنترلی مقاوم است.

واژه های کلیدی: فاز هندسی، گیت کوانتومی هولونومیک، سیستم اپتومکانیک

A proposed holonomic quantum gate based on a composite optomechanical system

Rasa, Seyed Mohsen¹; Bathaee, Marzieh¹; Bahrampour, Alireza¹¹ Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

In this paper we propose a composite optomechanical quantum gate based on the geometrical phase which is able to evolve simultaneously the optical and mechanical systems. This gate is a 4-component system including two optical cavities and two mechanical resonators. We show it is possible to quantum computing through both photon and phonon qubits simultaneously. Moreover, this scheme leads to a generation of a universal holonomic quantum one-qubit gate which affects separately on optical and mechanical system. The holonomic optomechanical quantum gate is robust to control errors.

Keywords: Geometric phase, holonomic quantum gate, Optomechanical system

PACS No. 03.67.-a, 03.67.Lx, 42.50.-p

مقدمه

در پیاده سازی این گیت ها، پارامتر های کنترلی را به نحوی تنظیم می کنند تا در انتهای تحول، فاز دینامیکی ایجاد شده صفر شود و تنها فاز هندسی که مستقل از پارامتر های کنترلی است باقی بماند. فاز هندسی به زمان تحول و هامیلتونی مربوط به آن وابسته نیست و تنها به مسیری که حالت سیستم در فضای هیلبرت می پیماید بستگی دارد [1].

از جمله پیاده سازی هایی که برای این گیت ها بر پایه فاز هندسی از نوع غیر آبلین شده است، میتوان به سیستم سه ترازه ای که گذارهای آن با اعمال پالس های لیزر کنترل می شود اشاره کرد [2]. و یا می توان به سیستم اپتومکانیکی که شامل دو کاواک و یک نوسانگر است اشاره کرد، که در آن نیز با اعمال پالس های

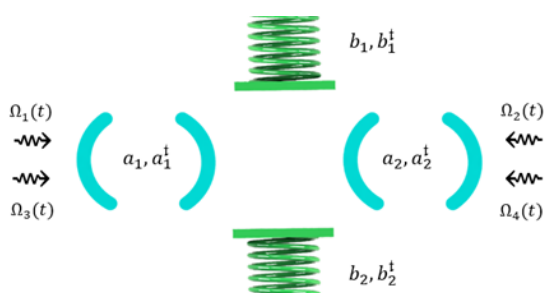
با ظهور مکانیک کوانتومی و به تدریج ظهور شاخه ای جدیدی از علم، به نام محاسبات کوانتومی، انسان به پردازش سریع تر اطلاعات امیدوار شد. لازمه دستیابی به این محاسبات سریع، دستیابی به یک مجموعه عام از گیت های کوانتومی است، گیت هایی که باید سریع و تا حد امکان بدون نویز باشند. یکی از روش های رسیدن به چنین گیت هایی، استفاده از فاز هندسی ایجاد شده در تحولات غیر بیدرو است، که هم سرعت بالایی دارند و هم مقاومت خوبی در برابر نویز های کنترلی نشان داده اند. گیت هایی که با این روش ساخته می شوند را، گیت های کوانتومی هولونومیک می نامند [1].

یکی از نکات مهم در پیاده سازی گیت های کوانتومی هولونومیک این است که در انتهای تحول، فاز دینامیکی صفر می شود، این امر ما را مجبور می کند که شکل پوش پالس ها را یکی در نظر بگیریم ($\Omega(t)$). علاوه بر آن، جهت ایجاد تحولات مورد نظر باید نسبت دامنه و فاز لیزرها را دو به دو به هم وابسته کنیم [3]:

$$\frac{\Omega_1(t)}{\Omega_2(t)} = \frac{g_{11}}{g_{21}} = -\tan \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \quad (2)$$

$$\frac{\Omega_3(t)}{\Omega_4(t)} = \frac{g_{12}}{g_{22}} = -\tan \frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'} \quad (3)$$

θ و φ (و θ' و φ') به ترتیب وظیفه تنظیم دامنه و فاز لیزر های 1 و 2 (و 3 و 4) را بر عهده دارند. و در مدت زمان تحول مقادیر ثابتی هستند.



شکل 1) پیکره بندی از سیستمی متشکل از دو کاواک و دو نوسانگر مکانیکی

با فرض سردسازی سیستم اپتومکانیک به حالت پایه، و تعریف حالت های برانگیخته مربوط به اجزای مختلف، می توانیم شکل هامیلتونی (1) را به صورت زیر بازنویسی کنیم: (اولین حالات برانگیخته کاواک 1 و 2 به ترتیب به صورت $|g_1\rangle = |1000\rangle$ و $|g_2\rangle = |0100\rangle$ و اولین حالات برانگیخته نوسانگر مکانیکی 1 و 2 به صورت $|e_1\rangle = |0010\rangle$ و $|e_2\rangle = |0001\rangle$ تعریف می شوند).

$$H(t) = \Omega(t)(g_{11}|g_1\rangle\langle e_1| + g_{21}|g_2\rangle\langle e_1| + g_{12}|g_1\rangle\langle e_2| + g_{22}|g_2\rangle\langle e_2| + H.C) \quad (4)$$

که در آن:

$$g_{11} = \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}, \quad g_{21} = -\cos \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

$$g_{12} = \sin \frac{\theta'}{2} e^{-i\varphi'}, \quad g_{22} = -\cos \frac{\theta'}{2} \quad (6)$$

لیزر می توان جابه جایی فوتون را در کاواک ها کنترل کرد [3]. در این سیستم ها، باید یک زیر فضای دو بعدی را به نحوی از فضای هیلبرت سه بعدی کل انتخاب کرد، که در انتهای تحول آن زیر فضای، ناوردا باقی بماند [1].

در این مقاله، مدلی را ارائه می دهیم که شامل یک پیکربندی چهار جزئی اپتومکانیکی است که می توان برای پیاده سازی گیت های کوانتومی هولونومیک از آن استفاده کرد. از جمله مزیت های این مدل آن است که می توان در یک ساختار یکسان هم گیت هولونومیک فونونی و هم فوتونی عام ایجاد کرد. بخش های مختلف مقاله به شرح زیر است:

در بخش اول در مورد مدل سازی تئوری سیستم اپتومکانیک مرکب صحبت میکنیم و هامیلتونی آن را بیان می کنیم، در بخش دوم تحول کلی سیستم و روابط حاکم بر آن و در بخش بعدی نتایج حاصل را بررسی می کنیم.

مدل سازی تئوری

سیستم پیشنهادی از دو کاواک و دو نوسانگر تشکیل شده است (شکل 1)، و برای این که برهمکنش بین اجزاء مختلف این پیکره بندی را کنترل کنیم باید از چهار پالس لیزر استفاده کنیم، به عبارت دیگر قرار است که مدهای اپتیکی دو کاواک را به وسیله دو مد مکانیکی به هم مرتبط کنیم (و بالعکس).

هامیلتونی مربوط به این تحولات برای یک سیستم اپتومکانیکی میکروویوی، در دستگاه چرخان و با توجه به تقریب موج چرخان (RWA)، به صورت زیر نوشته می شود [4].

$$H(t) = \Omega_1(t)a_1^\dagger b_1 + \Omega_2(t)a_2^\dagger b_1 + \Omega_3(t)a_1^\dagger b_2 + \Omega_4(t)a_2^\dagger b_2 + H.C \quad (1)$$

عملگرهای $a_i^\dagger a_i$ ، به ترتیب عملگرهای خلق (فنا) مربوط به مدهای اپتیکی کاواک i ام و عملگرهای $b_i^\dagger b_i$ ، به ترتیب عملگرهای خلق (فنا) مربوط به مدهای نوسانگر مکانیکی i ام هستند ($i = 0,1$). $\Omega_j(t)$ ها ($j = 1, \dots, 4$)، نیز اطلاعات مربوط به شکل پالس لیزرهایی هستند که گذارهای بین مدهای مختلف اپتیکی و مکانیکی را کنترل می کنند.

تحول سیستم و حالات نهایی

در این بخش می خواهیم با توجه به هامیلتونی، رابطه (4)، نحوه تحول سیستم را بررسی کنیم و با معرفی یک مسیر تحولی بسته در فضای تصویری، یک فاز هندسی غیر آبلین، هم برای سیستم مکانیکی و هم برای سیستم اپتیکی معرفی کنیم. در انتها نشان می دهیم که این سیستم چگونه می تواند تحولات یکانی مورد نظر ما را به طور همزمان بر روی دو سیستم اپتیکی و مکانیکی اعمال کند.

برای اینکه بتوانیم در پایان تحول، فاز هندسی غیر آبلین مورد نظرم را تولید کنیم، احتیاج به تعریف یک زیر فضای محاسباتی و همچنین تعریف یک زیر فضای بسته (زیر فضایی که تحت تاثیر یک تحول دوره ای، بسته باقی می ماند) داریم [1].

زیر فضای محاسباتی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|0\rangle_{c(p)} = |g_{1(3)}\rangle, \quad |1\rangle_{c(p)} = |g_{2(4)}\rangle \quad (7)$$

به $|0\rangle_{c(p)}$ یک کیوبیت محاسباتی می گوییم، که به معنی بودن فوتون (فونون) در کاواک نوری (مکانیکی) 1 و همین طور به بودن فوتون (فونون) در کاواک 2، $|1\rangle_{c(p)}$ را نسبت می دهیم. $|0\rangle_{c(p)}$ و $|0\rangle_{c(p)}$ نیز پایه های زیر فضای محاسباتی هستند. همانطور که گفتیم، علاوه بر تعریف یک زیر فضای محاسباتی، به تعریف یک زیر فضای بسته هم احتیاج داریم، بسته بودن یک زیر فضا به این معنی است که اگر در ابتدای تحول، حالت سیستم در زیر فضای مورد نظر ما باشد (که بخشی از فضای هیلبرت کل است)، در انتهای تحول نیز حالت سیستم، حتما در همان زیر فضا قرار می گیرد. تعریف این زیر فضا به صورت دلخواه و با توجه به هامیلتونی سیستم صورت می گیرد [2].

در ادامه اگر هامیلتونی (4) را به صورت جمع دو هامیلتونی H_1 و H_2 بازنویسی کنیم (8)، که H_i برهمکنش دو کاواک اپتیکی با نوسانگر مکانیکی i ام است، $i = 1, 2$ ، می توانیم حالت های $|d_j^c\rangle$ ، $|b_j^c\rangle$ ، $j = 1, 2$ ، را که مربوط به هامیلتونی i ام است را معرفی کنیم. در ادامه نشان خواهیم داد که این پایه ها، که پایه های روشن و خاموش نام دارند، همان پایه های زیر فضای بسته مطلوب را به وجود می آورند (9 و 10).

$$H_j = \Omega(t)(g_{1j}|g_1\rangle\langle e_j| + g_{2j}|g_2\rangle\langle e_j| + H.C) \quad (8)$$

$$|b_j^c\rangle = g_{1j}|g_1\rangle + g_{2j}|g_2\rangle \quad (9)$$

$$|d_j^c\rangle = -g_{2j}^*|g_1\rangle + g_{1j}^*|g_2\rangle \quad (10)$$

در ابتدا می خواهیم تحول سیستم اپتیکی را بررسی کنیم، به همین خاطر برای ساده سازی فرض می کنیم $H_2 = 0$ است، یعنی اینکه مدهای کاواک های 2 و 1، تنها از طریق نوسانگر 1 به هم تزویج می شوند و خبری از نوسانگر 2 در میان نیست، می توانیم تحول حالت های خاموش و روشن مربوط به هامیلتونی H_1 را به دست آورد تا با مفهوم آن ها آشنا شویم:

$$|d_1^c(t)\rangle = T[e^{-i/\hbar \int_0^t H_1(t)dt}]|d_1^c\rangle = |d_1^c\rangle \quad (11)$$

$$|b_1^c(t)\rangle = T[e^{-i/\hbar \int_0^t H_1(t)dt}]|b_1^c\rangle = \cos(\alpha(t))|b_1^c\rangle - i \sin(\alpha(t))|e_1\rangle \quad (12)$$

در روابط بالا (T)، به معنی مرتب سازی زمانی است و از آنجایی که شکل پوش پالس ها یکسان است و هامیلتونی در زمان های مختلف جابه جا می شود، پس نیازی به مرتب سازی زمانی نداریم. همانطور که مشخص است در طول تحول حالت $|d_1^c\rangle$ ثابت باقی می ماند، به همین خاطر به آن حالت خاموش می گوییم. در حالی که حالت $|b_1^c(t)\rangle$ در زمان t در ترکیب خطی ای از حالت $|b_1^c\rangle$ و $|e_1\rangle$ قرار می گیرد. به علت وجود این چنین گذارهایی به آن حالت روشن می گوییم.

مطابق آنچه که گفته شد برای استفاده از فاز هندسی غیر آبلین به دنبال یک تحول دوره ای هستیم. پس اگر در پایان تحول $t = \tau$ ، کمیت $\alpha(\tau)$ برابر با π شود در نتیجه $|b_1^c(\tau)\rangle = -|b_1^c\rangle$ می شود که نشان دهنده یک تحول دوره ای است. با این حساب می توانیم فرم کلی تحول را به شکل زیر بنویسیم:

$$U(\tau) = |d_1^c\rangle\langle d_1^c| - |b_1^c\rangle\langle b_1^c| \quad (13)$$

اگر از پایه های محاسباتی $|g_i\rangle$ ، $i = 1, 2$ برای تعریف عملگر تحول استفاده کنیم، این عملگر به شکل $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ در خواهد

مجددا می توانیم با شرط جابه جا شدن H_1 و H_2 ، به سادگی فرم عملگر تحول را پیدا کنیم. که این بار شکل خاصی از عملگر $\hat{\sigma} \cdot \hat{n}$ ($\varphi = \pi$) می شود. با شرط $\alpha(\tau) = \pi$ داریم:

$$U(\tau) = |b_2^m\rangle\langle b_2^m| - |b_1^m\rangle\langle b_1^m| = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (19)$$

نتایج:

با توجه به تحولات، اگر در لحظه $t = 0$ حالت اولیه سیستم به روی $|g_1\rangle$ قرار داشته باشد و θ و φ به ترتیب $\frac{\pi}{2}$ و 0 باشند، سیستم برای کیوبیت های اپتیکی به شکل گیت NOT عمل می کند. حال اگر حالت اولیه سیستم بر روی $|e_1\rangle$ قرار داشته باشد و θ و φ همان مقادیر را داشته باشند، حاصل یک گیت NOT به اضافه یک گیت فازی (π) بر روی کیوبیت های مکانیکی می شود. برای اینکه با این سیستم بتوانیم تمام تحولات SU(2) را، پوشش دهیم باید دو دسته چهارتایی از پالس های لیزر را به صورت پشت سر هم روی سیستم اثر دهیم [1].

در نتیجه توانسته ایم دو گیت کوانتومی هولونومی عام تک کیوبیتی، که به طور مستقل هم روی مدهای اپتیکی و هم روی مدهای مکانیکی داشته باشیم.

همچنین اگر، حالت اولیه سیستم را در ترکیب خطی از مد های مکانیکی و اپتیکی قرار دهیم، ($|g_1\rangle + |e_1\rangle$)، با اعمال یک گیت هادامارد [2] (θ و φ به ترتیب برابر با $\frac{\pi}{4}$ و 0) میتوانیم w-state تولید کنیم. که نتیجه آن به صورت زیر در می آید:

$$|\psi_{out}\rangle = |1000\rangle + |0100\rangle - |0010\rangle - |0001\rangle \quad (20)$$

در نتیجه توانستیم با کمک فاز هندسی، حالت W بسازیم.

مرجع ها:

- [1] Sjöqvist, Erik. "Geometric phases in quantum information." *International Journal of Quantum Chemistry* **115.19** (2015): 1311-1326.
- [2] Sjöqvist, Erik, et al. "Non-adiabatic holonomic quantum computation." *New Journal of Physics* **14.10** (2012): 103035..
- [3] Chen, Shan-Shan, et al. "Universal Single-Qubit Nonadiabatic Holonomic Quantum Gates on an Optomechanical System." *Annalen der Physik* **530.11** (2018): 1800239.
- [4] Malz, Daniel, et al. "Quantum-limited directional amplifiers with optomechanics." *Physical review letters* **120.2** (2018): 023601.

آمد، رابطه (15). ($\vec{\sigma}$ همان ماتریس های پائولی و $\hat{n}$ برداری با مولفه های $(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$ است).

حال اگر H_2 را هم غیر صفر در نظر بگیریم و از هر دو نوسانگر مکانیکی به عنوان کیوبیت های کمی استفاده کنیم، می توانیم تحول کلی سیستم پیشنهادی را به دست آوریم. برای سادگی در محاسبات از شرط ($[H_1, H_2] = 0$) استفاده میکنیم، که بر روی نسبت دامنه و فاز لیزر ها قید می گذارد: (نکته: در این قسمت حالت اولیه سیستم بر روی کیوبیت های اپتیکی کد می شود، این کار با استفاده از یک منبع PDC و تزریق تک فوتون فریاد کش به یکی از کاواک ها صورت می گیرد).

$$\theta' = \theta + \pi, \quad \varphi' = \varphi \quad (14)$$

با این اوصاف شکل کلی عملگر تحول به صورت زیر در خواهد آمد: ($\alpha(\tau) = \pi$).

$$U(\tau) = |b_2^c\rangle\langle b_2^c| - |b_1^c\rangle\langle b_1^c| = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\varphi} \\ \sin(\theta)e^{i\varphi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (15)$$

تا اینجا تحول فقط مربوط به حالت های اپتیکی بود. حال حالت اولیه سیستم را بر روی کیوبیت های مکانیکی کد می کنیم، به عبارت دیگر در اینجا کیوبیت های مکانیکی در حال تحول هستند و از کیوبیت های اپتیکی به عنوان کیوبیت کمی استفاده می کنیم. برای این حالت می توانیم هامیلتونی های H_1 و H_2 را به صورت زیر باز تعریف کنیم (H_j ، برهمکنش دو نوسانگر مکانیکی با کاواک اپتیکی j ام است، $j = 1, 2$).

$$H_j = \Omega(t)(g_{j1}|g_j\rangle\langle e_j| + g_{j2}|g_2\rangle\langle e_j| + H.C.) \quad (16)$$

$$|b_j^m\rangle = g_{1j}^*|e_1\rangle + g_{1j}^*|e_2\rangle \quad (17)$$

$$|d_j^m\rangle = -g_{2j}^*|e_1\rangle + g_{1j}^*|e_2\rangle \quad (18)$$

حالت های $|b_j^m\rangle$ و $|d_j^m\rangle$ جزئی از زیر فضای هامیلتونی H_j ، $j = 1, 2$ هستند. مثل قبل به این حالت ها، حالت های روشن و خاموش میگویند.