A GENERAL APPROACH TO DEFINE THE ADJOINT OF NON-LINEAR OPERATORS IN HILBERT SPACE

Mehdi Jafari Matehkolaee
Department of Physics, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic) P.O.Box:15875-4413, Tehran, Iran

Alameh Hajimohammadi Fariman
Department of Physics, Alzahra University, Tehran 19938-93973, Iran

Abstract

In this paper we have endeavored to indicate a general approach for the adjoint of non-linear operators. For this purpose, we have changed the classical definition of linear operators in the textbooks. Then we have obtained the adjoint of these operators with respect to the definition of the derivative an operator or "Frechet derivative". Regarding to definition of the adjoint of anti-linear operators, we have shown a general definition for the adjoint of non-linear operators. Our approach works for all of the differentiable operator.

Key words: Non-linear operator – Differentiable operator – Adjoint operator

1. Introduction

Most of the operators we deal with in quantum mechanics, are linear. By definition, every linear operator must have the two following conditions [1].

$$A[f(x)+g(x)]=A[f(x)]+A[g(x)] \tag{1}$$

$$A(af(x))=aA(f(x)), \tag{2}$$

where a is a complex constant.

There are two different fundamental classes of non-linear operators: the first is homogeneous non-linear operators which do not satisfy the condition of the equation (2), and the second is nonhomogeneous non-linear operators which do not satisfy the condition of the equation (1), [2]. As an example for homogeneous nonlinear operator, we can write

$$Af=|f|\int_0^{2\pi} e^{ia}Be^{-ia}\frac{f}{|f|}da, \tag{3}$$

where the domain of A is the same as domain of B.

The operator A is not differentiable, so as we see further, the adjoint of this operator cannot be defined. In fact, the point is that any differential operator which has the property of (2) is definitely a linear operator. The argument is very simple.

In the mathematical literature, anti-linear operator or conjugate linear operator is known operators that does not satisfy the equation (2). This operator is reminiscent of the time reversal operator in quantum mechanics. It is well known that Dirac's bra-ket notation is not suitable for these operators [3]. There is a report that examines this problem with a special approach [4].

Now consider a non-linear operator B which can be defined by

$$B[f(x)] = [f(x)]^2 \tag{4}$$

In the nest section, we discuss on the general approach for the adjoint of the operator B.

2. Adjoint of non-linear operator

For some reasons that will be revealed later we provide another definition in equations (1) and (2) for arbitrary linear operator A.

An arbitrary operator is linear if and only if its " Frechet derivative " is a constant number or a constant matrix. In another statement, operator A which acting on a function f is linear if its " Frechet derivative " does not depend on function f.

To clarify this definition, we consider two examples. At first, we consider linear operator A such that $Af(x) = f(g(x))$, where $f(x)$ and $g(x)$ are two arbitrary linear functions. So we can write

$$A[f(x) + h(x)] = f(g(x)) + h(g(x)) = Af(x) + \int h(y)\delta(g(x) - y)dy \tag{5}$$

The derivative of A or $(DA)f(x)$ is given by

$$(DA)f(x) = \delta(g(x) - y) \tag{6}$$

Obviously the equation (6) shows that the derivative of A does not depend on function f.

Now, consider other example.

$$Bf(x) = \ln(f(x)) \tag{7}$$

One can write

$$B[f(x) + h(x)] = \ln[f(x) + h(x)] = Bf(x) + \frac{h(x)}{f(x)}, \tag{8}$$

where we used the first order of h. Therefore the derivative of B is given by

$$(DB)f(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{9}$$

It is clear that the derivative of nonlinear operator B depends on the function f.

As the complex conjugate operator is not differentiable and linear, in an orthodox manner, its adjoint is not defined. However, perhaps one could extend the definition of the adjoint operator to include this case as well. This definition is attributed to Wigner [5]. If we consider the usual definition for adjoint of an operator A as following

$$\langle u | A^\dagger v \rangle = \langle Au | v \rangle \tag{10}$$

So for the anti-linear operators we should change the definition (10) as following form

$$\langle u | A^\dagger v \rangle = \langle v | Au \rangle \tag{11}$$

There are some references considering nonlinear operator algebra [6, 7] with no specific suggestion to define the adjoint of nonlinear operators. In one reference, [8], for the special class of non-linear operators in Banach space, which most of its operators are similar to linear operators, the adjoint of these operators is introduced on the basis of their derivatives.

At first we notice that for the nonlinear operator B, whatever $B^\dagger$ would be, the statement $\langle u, B^\dagger v \rangle$ should be anti-linear in terms of u. So we need to construct some function like $\Re$ of u, v and B in such a way that by using the inner product, we get $\langle u | B^\dagger v \rangle$; namely

$$\langle u, B^{\dagger} v \rangle = \Re(u, v, B) \tag{12}$$

But if the definition somehow resembles the definition of the adjoint operator, we expect that some operations like the action of B on u occurs in $\Re$. The problem is that if the action of B on u is non-linear, then it seems that there is no natural way to construct something anti-linear in terms of u, say from (Bu) and the inner product. The reason that one could construct such a thing for linear or anti-linear B's, is that if B is linear, $\langle Bu, . \rangle$ is anti-linear in terms of u, and if B is anti-linear, $\langle ., Bu \rangle$ would be anti-linear in terms of u. So the problem is to construct something quasilinear (linear or anti-linear) in u, from the action of something related to B on u.

One way to do this is to use the derivative of B instead of B itself. According to our definition in this paper, if B is linear, then its derivative is a constant matrix, which its action on a vector u is the same as $B(u)$, namely

$$(DB)u = B(u) \tag{13}$$

For the general case where B is not linear, of course above relation does not hold. Then in the general case of non-linear operator B, let's define $B^{\dagger}$ as $(DB)^{\dagger}$, that is

$$\langle u, B^{\dagger} v \rangle = \langle (DB)u, v \rangle \tag{14}$$

But then, the problem is that (DB) is no longer a constant, if B is nonlinear operator. So the correct form of the above relation should be

$$\langle u, [B^{\dagger}(f)]v \rangle = \langle [(DB)(f)]u, v \rangle, \tag{15}$$

where f is some point.

Now we come back to the equation (4), then

$$\begin{aligned}[B(f+\delta f)](x) &= [(f+\delta f)(x)]^2 = [f(x)]^2 + 2[f(x)][(\delta f)(x)] + \ldots = \\ &[f(x)]^2 + \int dy \, \{2[f(x)]\delta(x-y)\}[(\delta f)(y)] + \ldots\end{aligned} \tag{16}$$

Which means that

$$[(DB)(f)](x, y) = 2[f(x)]\delta(x-y) \tag{17}$$

The left-hand side is the matrix element of $[(DB)(f)]$. So

$$\{[(DB)(f)]u\}(x) = \int dy \, \{[(DB)(f)](x, y)\}u(y) = 2f(x)u(x) \tag{18}$$

Then

$$\langle [(DB)(f)]u, v \rangle = \int dx \, \overline{[2f(x)u(x)]}v(x) = \int dx \, \overline{[u(x)]}\overline{[2f(x)]}v(x) \tag{19}$$

Therefore,

$$\{[B^{\dagger}(f)v]\}(x) = \overline{[2f(x)]}v(x) \tag{20}$$

Or

$$[B^{\dagger}(f)](x, y) = \overline{[2f(x)]}\delta(x-y) \tag{21}$$

3. Conclusions

In this paper we have searched an original question. Is there an identified definition for adjoint of non-linear operators? Answering this question, we have argued and indicated by using the definition of the derivative of the operator we can obtain adjoint of the nonlinear operator. The method we have used in this paper, is suitable for nonlinear operators that are differentiable. It seems that for nonlinear operators that are not differentiable, there is no "natural way" to define the adjoint[1]. Our mean about "natural way" is preserving some of the properties of standard definition of the adjoint. For instance, in the new definition, it is necessary to keep the absolute value of the inner product. It is clear that, a central concept into the linear operator theory is the concept of the inner product. That is why we have used the derivative of the operator to define adjoint of non-linear operators.

Acknowledgements

I thank Professor Mohammad Reza Sarkardei for interesting discussions and comments, and Professor Mohammad Khorrami to critical reading.

References

[1] Weidmann,J, *Linear operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York, (1980).
[2] S. Bugajski, *Nonlinear quantum mechanics is a classical theory*, Int.J.Theor.Phys, **30**, 7,961-971(1991).
[3] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, edited by San Fu Tuan Benjamin/Cumminges, Menlo Park, Ca. 1985.
[4] A.Royer, *Antilinear operators in Dirac's bra-ket notation*, Am. J. Phys. **62**, 8,730-732 (1994).
[5] A. Uhlmann, *Anti – (Conjugate) linearity*, Sci, China-Phys.Mech.Astron.**59**.3, 630301-1 630301-38(2016).
[6] C. Schwartz, *Nonlinear operators and their propagators*, J.Math.Phys.**38**, 484-500 (1997).
[7] C. Schwartz, *Nonlinear operators and their propagators*, J.Math.Phys.**38**, 484-500 (1997).
[8] V. Buryskova, *Some properties of nonlinear adjoint operators*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics, **28**, 1, 41-59 (1998).

[1] For example consider an operator such as A which $A\psi(x)=|\psi(x)|^2$, this operator is not differentiable. One can write: $|\psi(x)+h(x)|^2=|\psi(x)|^2+\psi(x)h^*(x)+\psi^*(x)h(x)+O(h)$ but then, the sum of the second and third term (the pseudo-linear part) is neither linear nor anti-linear. Therefore, we don't know yet a "natural way" to define the adjoint of this operator.

تونل زنی در گذار هموارِ کوانتومی-کلاسیکی: حالت های خالص و آمیخته

سید وحید موسوی
دانشیار گروه فیزیک، دانشگاه قم
vmousavi@qom.ac.ir

چکیده

تونل زنی از یک سد سهموی در چارچوب معادلهٔ فون نویمان مقیاس شده که اخیرا برای گذار هموار از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک برای حالت های آمیخته پیشنهاد شده است، مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. در این گذار احتمال تونل زنی کاهش می یابد و در نهایت در رژیم کلاسیکی صفر می شود.

کلید واژه ها: تونل زنی، سد دافعهٔ سهموی، معادلهٔ فون نویمان مقیاس شده

Tunneling in smooth quantum-classical transition: pure and mixed states

Mousavi, S. V.[1]

[1] *Department of Physics, University of Qom, Qom*

Abstract

Tunneling through a parabolic repeller will be studied in the framework of the scaled von Neumann equation recently proposed for a smooth transition from quantum to classical mechanics for mixed states. Tunneling probability decreases in this transition and becomes ultimately zero in the classical regime.

key words: Tunneling, Parabolic repeller, Scaled von Neumann equation

مقدمه

یکی از پدیده های جالب کوانتومی، تونل زنی می باشد. هر چند این پدیده در حوزهٔ اپتیک کلاسیک برای امواج قابل مشاهده است ولی برای ذرات کلاسیکی رخ نمی دهد. از طرف دیگر، یکی از مسائل جالب توجه در مکانیک کوانتومی که عمری به اندازهٔ خود نظریه دارد، حد کلاسیک آن می باشد. روش های گوناگونی برای این مساله پیشنهاد شده که هر یک مزایا و معایب خود را دارد. یکی از روش هایی که اخیرا پیشنهاد شده بر اساس پتانسیل کوانتومی و نظریهٔ هامیلتون-ژاکوبی کلاسیک می باشد. استفاده از فرم قطبی تابع موج در معادلهٔ شرودینگر و جداسازی معادلهٔ منتجه به قسمت های حقیقی و موهومی منجر به دو معادله می شود که یکی از آن ها معادلهٔ پیوستگی است و معادلهٔ دیگر، معادلهٔ هامیلتون-ژاکوبی کلاسیک با یک جملهٔ اضافی موسوم به پتانسیل کوانتومی می باشد. حال اگر، پتانسیل کوانتومی از پتانسیل کلاسیکی در معادلهٔ شرودینگر کم شود، این بار جداسازی معادله همان معادلهٔ هامیلتون-ژاکوبی کلاسیک را می دهد. به این دلیل، معادلهٔ شرودینگر تغییر یافته، معادلهٔ شردودینگر کلاسیکی نامیده می شود که بر حسب تابع موج غیر خطی است.

اخیرا در یک تلاش برای توصیف هر دو مکانیک کوانتومی و کلاسیک با یک زبان مشترک، تابع موج، معادله‌ای غیر خطی برای گذار از رژیم

کوانتومی به رژیم کلاسیکی پیشنهاد شده که شامل یک پارامتر موسوم به پارامتر گذار است که در رژیم کوانتومی برابر واحد و در رژیم کلاسیکی برابر صفر است [1]. سپس با تعریف، ثابت پلانک مقیاس شده و همچنین تابع موج مقیاس شده، هم ارزی این معادلهٔ گذار غیر خطی با یک معادلهٔ خطی برای تابع موج مقیاس شده اثبات شده است. این رهیافت به حوزهٔ سیستم‌های کوانتومی اتلافی در چارچوب معادلات شرودینگر-لانژون و کلدیرولا-کانای تعمیم داده شده است [2]. در یک کار بسیار اخیر این نسخه برای معادلهٔ فون نویمان هم پیچیده شده است و حتی رهیافت مویال را هم شامل شده است [3].

در این مطالعه قصد داریم با بکارگیری معادلهٔ فون نویمان مقیاس شده، تونل زنی از یک سد دافعهٔ سهمومی را مطالعه کنیم تا علاوه بر مقایسه ای که بین حالت های آمیخته و خالص انجام خواهیم داد، رفتار تونل زنی در این گذار پیوستار کوانتومی-کلاسیکی را بررسی کنیم.

معادلهٔ فون نویمان مقیاس شده

با جایگذاری فرم قطبیِ ماتریس چگالی،

$$\rho(x,y,t)=A(x,y,t)e^{iS(x,y,t)/\hbar}$$

در معادله‌ی فون نویمان،

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,y,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho(x,y,t)+(U(x)-U(y))\rho(x,y,t)$$

و جداسازی معادلهٔ منتجه به قسمت های حقیقی و موهومی به جفت معادلات

$$-\frac{\partial}{\partial t}S(x,y,t)=\frac{[\partial_x S(x,y,t)]^2}{2m}-\frac{[\partial_y S(x,y,t)]^2}{2m}+[U(x)-U(y)]+Q(x,y,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A(x,y,t)+\frac{1}{m}(\partial_x A\,\partial_x S-\partial_y A\,\partial_y S)+\frac{1}{2m}(\partial_x^2 S-\partial_y^2 S)=0$$

برای تغییرات فاز و دامنهٔ ماتریس چگالی می رسیم که بترتیب معادلات هامیلتون-ژاکوبی و پیوستگی هستند که در آن $U(x)$ انرژی پتانسیل ناشی از اندرکنش است و $Q(x,y,t)$ انرژی پتانسیل کوانتومی می باشد،

$$Q(x,y,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{A(x,y,t)}(\partial_x^2-\partial_y^2)A(x,y,t)$$

حال با معرفی میدان برداریِ دو مولفه‌ای تکانه به صورت

$$\mathbf{P}(x,y,t)=(\partial_x S(x,y,t),-\partial_y S(x,y,t))$$

با استفاده از معادلهٔ هامیلتون-ژاکوبی به دست می آید:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(x,y,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(x,y,t)\cdot\nabla\right)\mathbf{P}(x,y,t)=-\nabla(U\pm Q)$$

که در آن $\mathbf{V}=\mathbf{P}/m$ میدان سرعت می باشد؛ و علامت + برای مولفه‌ی x تکانه و علامت – برای مولفه‌ی y آن که دلالت بر حرکت برگشت زمان داده شده دارد، به کار رفته است. این معادله همان قانون دوم نیوتن اصلاح شده است که اثرات کوانتومی با نیروی کوانتومیِ $-\nabla Q$ داده می شوند.

حال، با کم کردن پتانسیل کوانتومی از پتانسیل ناشی از اندرکش، معادلهٔ فون نویمان کلاسیکی

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\rm cl}(x,y,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho_{\rm cl}(x,y,t)$$
$$+(U(x)-U(y))\rho_{\rm cl}(x,y,t)$$
$$+\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{|\rho_{\rm cl}(x,y,t)|}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|\rho_{\rm cl}(x,y,t)|\right]\rho_{\rm cl}(x,y,t)$$

معرفی می شود؛ کلاسیکی از این نظر که پس از جداسازیِ آن دیگر پتانسیل کوانتومی در معادلهٔ هامیلتون-ژاکوبی ظاهر نمی شود و این معادله به شکل کلاسیکی آن خواهد بود. پس از آن، معادلهٔ گذار

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon(x,y,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho_\epsilon(x,y,t)$$
$$+(U(x)-U(y))\rho_\epsilon(x,y,t)$$
$$+(1-\epsilon)\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{|\rho_\epsilon(x,y,t)|}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|\rho_\epsilon(x,y,t)|\right]\rho_\epsilon(x,y,t)$$

که شامل پارامتر گذار ϵ است برایِ یک گذار هموار از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک پیشنهاد می شود که با معرفیِ ثابت پلانک مقیاس شدهٔ

$$\tilde{\hbar}=\sqrt{\epsilon}\hbar$$

و ماتریس چگالی مقیاس شدهٔ

$$\tilde{\rho}(x,y,t)=A_\epsilon(x,y,t)e^{iS_\epsilon(x,y,t)/\tilde{\hbar}}$$

می توان آن را به شکل

$$i\tilde{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(x,y,t)=-\frac{\tilde{\hbar}^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{\rho}(x,y,t)$$
$$+(U(x)-U(y))\tilde{\rho}(x,y,t)$$

در آورد که خطی بوده و معادلهٔ فون نویمان مقیاس شده نامیده می شود.

تونل زنی از سد سهموی

به عنوان یک مثال کاربردی از مدل ارائه شده، در این قسمت تونل زنی از سد سهموی یا پتانسیل نوسانگر هماهنگ معکوس را در نظر می گیریم:

$$U(x)=-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

حالت خالص را به شکل برهمنهی

$$\tilde{\Psi}(x)=\tilde{N}(\tilde{\psi}_a(x)+\tilde{\psi}_b(x))$$

در نظر می گیریم که در آن

$$\tilde{N}=\frac{1}{\sqrt{2(1+\mathrm{Re}[\langle\tilde{\psi}_a|\tilde{\psi}_b\rangle])}}$$

ثابت بهنجارش است و حالت آمیختهٔ متناظر را به صورت

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\tilde{\psi}_a(x)\tilde{\psi}_a^*(y)+\tilde{\psi}_b(x)\tilde{\psi}_b^*(y)}{2}$$

انتخاب می کنیم. احتمال عبور وابسته به زمان از سد دافعهٔ سهموی برای تابش از چپ به راست وقتی که حالت اولیه بخوبی در سمت چپ سد جایگزیده باشد با عبارت

$$\tilde{T}(t)=\int_0^\infty dx\ \tilde{P}(x,t)$$

داده می شود که در آن

$$\tilde{P}(x,t)=\tilde{\rho}(x,x,t)$$

تابع توزیع احتمال را نشان می دهد. جزءحالت های اولیه را به شکلِ گاوسی با پهناها و تکانه های یکسان ولی مراکز مختلف می گیریم:

$$\tilde{\psi}_i(x,0)=\frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}}\exp[-\frac{(x-x_{0i})^2}{4\sigma_0^2}+i\frac{p_0x}{\tilde{\hbar}}]$$

$$i=a,b$$

در این صورت برای احتمال عبورِ جزءِ iام به دست می آوریم:

$$\tilde{T}_i(t)=\frac{1}{2}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{x_{ti}}{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_t}\right)\right\},\qquad i=a,b$$

که در آن

$$x_{ti}=x_{0i}\cosh(\omega t)+\frac{p_0}{m}\frac{\sinh(\omega t)}{\omega}$$

$$\tilde{\sigma}_t=\sigma_0\sqrt{\cosh^2(\omega t)+\frac{\tilde{\hbar}^2}{4m^2\sigma_0^4}\frac{\sinh^2(\omega t)}{\omega^2}}$$

به ترتیب مرکز بسته موج و پهنای آن را نشان می دهند. بنابراین، احتمال عبور برای حالت آمیخته عبارتست از

$$\tilde{T}(t)=\frac{1}{2}\tilde{T}_a(t)+\frac{1}{2}\tilde{T}_b(t)$$

که برابر جمعِ وزن دارِ احتمال های عبورِ جزئی است. این در حالی است که برای حالت خالص داده شده، بدلیل تداخل حالت های جزئی، احتمال عبور به صورت زیر به دست می آید:

$$\tilde{T}(t)=\tilde{N}^2(\tilde{T}_a(t)+\tilde{T}_b(t)+2\,\mathrm{Re}[\int_0^\infty dx\,\tilde{\psi}_a^*(x,t)\tilde{\psi}_b(x,t)])]$$

دقت شود که اگر همپوشانیِ جزءحالت های $\tilde{\psi}_a$ و $\tilde{\psi}_b$ قابل اغماض باشد، خواهیم داشت: $\tilde{N}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

محاسبات عددی

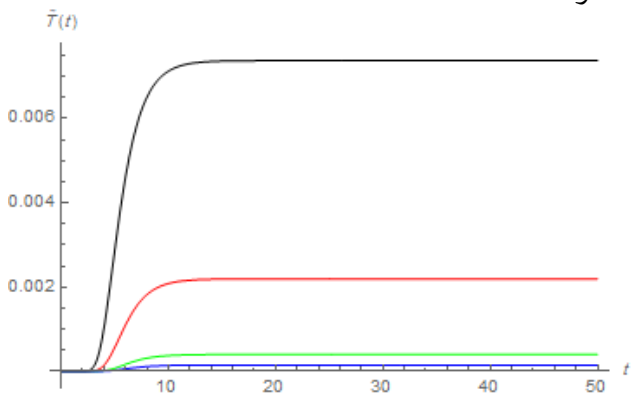
برای انجام محاسبات در سیستم واحدهای $m=1$ و $\hbar=1$ کار می کنیم. مقادیر عددی پارامترهای بسته های موج جزئی و همچنین قدرت سد را به گونه ای انتخاب می کنیم که انرژی حالت اولیه کمتر از قلهٔ سد (در اینجا، صفر) باشد. به این ترتیب، برای تونل زنی باید انرژی میانگین حالت اولیه منفی باشد. با انتخاب $\sigma_0=1, p_0=2$ و $x_{0a}=-13, x_{0b}=-10$ و $\omega=0.32$ برای انرژی میانگین حالت برهم نهی در رژیم کوانتومی به دست می آوریم: $\langle H\rangle=-4.8533$. انرژی میانگین برای سایر رژیم ها کمتر از این مقدار است.

در شکل ۱ احتمال تونل زنیِ حالت برهمنهی بر حسب زمان برای رژیم های

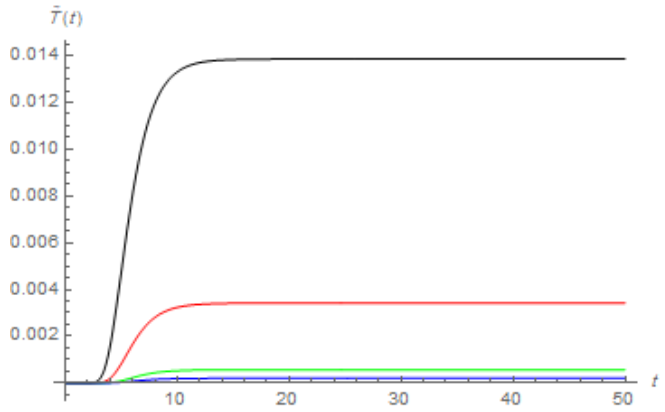
مختلف رسم شده است. شکل ۲ همین کمیت را برای حالت آمیخته نشان می دهد در حالی که در شکل ۳ مقدار پایایِ احتمال تونل زنی بر حسب پارامتر گذار رسم شده است. مطابق انتظار احتمال تونل زنی در رژیم کوانتومی برای هر دو حالت خالص و آمیخته نسبت به رژیم های دیگر بیشترین است. علاوه بر این، برای پارامترهای بکار رفته مقدار پایایِ احتمال تونل زنی برای حالت آمیخته بیشتر از حالت خالص است.

خلاصه و نتیجه گیری

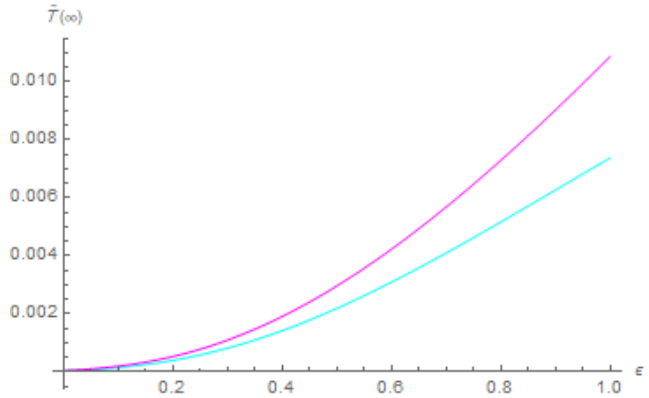
در این مقاله تونل زنی از یک سد دافعهٔ سهموی در چارچوب معادلهٔ فون-نویمان مقیاس شده برای یک گذار هموار کوانتومی-کلاسیکی برای حالت های آمیخته، مطالعه شد. تونل زنی در گذار از مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک کاهش می یابد. همچنین، برای پارامترهای انتخاب شده، در یک رژیم معینِ غیر کلاسیکی احتمال تونل زنی یک حالت برهمنهی در مقایسه با حالت آمیختهٔ متناظر کمتر است.



شکل۱: احتمال تونل زنیِ حالت برهمنهی از سد سهموی برای رژیم های مختلف: $\epsilon=1$ (مشکی)، $\epsilon=0.5$ (قرمز)، $\epsilon=0.2$ (سبز)، $\epsilon=0.1$ (آبی). جرم و ثابت پلانک را واحد گرفته ایم. مقادیر عددی پارامترهای بسته های موج جزئی و قدرت سد به صورت زیر انتخاب شده اند: $x_{0a}=-13, x_{0b}=-10, \sigma_0=1, p_0=2$ و $\omega=0.32$.



شکل۲: احتمال تونل زنیِ حالت آمیخته از سد سهموی برای رژیم های مختلف: $\epsilon=1$ (مشکی)، $\epsilon=0.5$ (قرمز)، $\epsilon=0.2$ (سبز)، $\epsilon=0.1$ (آبی). پارامترها همانند شکل ۱ انتخاب شده اند.



شکل۳: مقدارِ ایستایِ احتمال تونل زنی حالت آمیخته (بنفش) و حالت خالص برهمنی (فیروزه ای) از سد سهموی بر حسب پارامتر گذار. مقادیر عددی بسته های موج همانند شکل ۱ انتخاب شده اند.

مرجع ها

[1] C. D. Richardson et. al "Nonlinear Schrödinger wave equation with linear quantum behavior", *Phys. Rev. A* **89** (2014) 032118.
[2] S. V. Mousavi and S. Miret-Artes; "Dissipative tunneling by means of scaled trajectories"; *Ann. Phys.* **393** (2018) 76.
[3] S. V. Mousavi and S. Miret-Artes; "Quantum-classical transition for mixed states: the scaled von Neumann equation"; **Submitted** to *Symmetry*, Preprint DOI: 10.20944/preprints202304.0919.v1

امواج سالیتونی یون–صوتی در پلاسمای برخوردی دور از تعادل گرمایی

محمد قرجه قیایی
دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

محسن محمدنژاد
استادیار گروه فیزیک دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

چکیده

بصورت تئوری و تجربی نشان داده شده که در سیستم‌هایی با برهمکنش‌های بلند برد، تابع توزیع ماکسولی دیگر پاسخگو نمی‌باشد و باید از تابع توزیع‌های غیرتعادلی مثل تابع توزیع کاپا κ استفاده شود که این تابع توزیع، دارای متغیر شاخص طیفی ناوردا (κ_0) می‌باشد. با به کارگیری مجموعه معادلات سیالی برخوردی و همچنین با استفاده از تابع توزیع، رابطه پاشندگی در چنین پلاسمایی را به دست می‌آوریم که شامل دو قسمت حقیقی و موهومی است. در ادامه معادله ای تحت عنوان معادله KdV شامل پارامترهای میرایی و برخورد، به دست می‌آوریم. نشان می دهیم که در حضور برخورد، انرژی موج سالیتونی KdV با کاهش فرکانس برخورد، افزایش خواهد داشت و با افزایش κ_0 و $d_{e,\Phi}$ رابطه پاشندگی و قسمت حقیقی آن افزایش پیدا می‌کند. همچنین افزایش فرکانس برخورد منجر به کاهش قسمت حقیقی رابطه پاشندگی خواهد شد.

کلید واژه ها : تابع توزیع کاپا، پاشندگی، موج یون–صوتی، برخوردها

Ion-acoustic soliton waves in impinging plasma out of thermal equilibrium

M. Gharjeh Ghiyaei; M. Mohammadnejad

Faculty of Sciences, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz
Email: mohammadgharaje@yahoo.com

Abstract

It has been shown theoretically and experimentally that in systems with long-range interactions, the Maxwellian distribution function is no longer responsive and the non-equilibrium distribution function such as the Kappa distribution function κ should be used, which has a spectral index variable of Naverda. By applying the set κ_0 of collisional fluid equations and also by using the distribution function, we obtain the sputtering relationship in such a plasma, which includes two real and imaginary parts. In the following, we obtain an equation called the KdV equation including damping and impact parameters. We show that in the presence of the collision, the KdV soliton wave energy will gradually decrease with the increase of κ_0, and with the increase of κ_0 and $d_{e,\Phi}$, the sputtering ratio and its real part increase. Also, increasing the collision frequency will lead to a decrease of the real part of the sputtering relationship.

keywords : Kappa distribution function, Scattering, Ion-acoustic wave, Collisions

مقدمه

در سال ۱۸۳۴، جان اسکات راسل، نوع خاصی از امواج را در تحقیقات خود مشاهده می‌کند که دارای ویژگی منحصر بفرد بود و آن را از سایر امواج شناخته شده متمایز می‌ساخت، از جمله این که این موج در مسافت‌های به قدر کافی طولانی، بدون هیچ تغییر سرعت و تغییر شکلی، به مسیر خود ادامه می‌داد که به آنها سالیتون گفته می‌شد [۱]. در سال ۱۸۹۵، دو دانشمند هلندی به نام‌های کورته وگ و دی وری برای این نوع خاص از امواج سالیتونی، معادله ای تحت عنوان KdV را ارائه دادند [۲]. در دهه اخیر، غیرخطی بودن امواج یون–صوتی که یک موج مهم در پلاسما نیز محسوب می‌شود، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است که

می‌توان به مطالعات، تجزیه و تحلیل این امواج توسط سقدی اف اشاره کرد [۳].

اخیراً پژوهش‌های متعددی در زمینه این نوع از سالیتون‌های یون–صوتی که در آن الکترون‌ها فوق حرارتی در نظر گرفته می‌شوند (از تابع توزیع کاپا تبعیت می کنند)، صورت گرفته است.

در سال ۲۰۲۱، کامران و همکارانش، امواج ضربه‌ای غبار یون–صوتی غیربرخوردی را با الکترون‌های فوق حرارتی در پلاسما فضایی و آزمایشگاهی را مطالعه کردند و نتیجه گرفتند که با انحراف از تابع توزیع ماکسولی، دامنه و شیب پالس افزایش می‌یابد [۴]. در سال ۲۰۱۸، پلاسمایی غباری یون–صوتی برخوردی مغناطیده توسط زاهد و همکارانش توسط تابع توزیع کاپا مورد مطالعه قرار گرفت و با استفاده از شبه پتانسیل سقدی اف نشان داده شد که این پتانسیل برای پلاسمای با پتانسیل مثبت، مقداری منفی است و بالعکس [۵].

دینامیک امواج یون–صوتی در پلاسمای برخوردی

بطور کلی دو رویکرد برای توصیف ماکروسکوپیکی پلاسما وجود دارد، دیدگاه تک سیالی و دوسیالی. در دیدگاه دوسیالی، الکترون‌ها و یون‌ها، هر کدام بصورت سیال در نظر گرفته می‌شود که به وسیله معادلات ماکسول و انتقال تکانه به یکدیگر جفت می‌شوند. بنابراین معادلات بهنجار شده ماکروسکوپیکی دوسیالی شامل الکترون‌های فوق حرارتی و یون‌های سرد در حضور برخوردها در یک پلاسمای نسبتاً یونیزه بصورت زیر می‌باشد [۶]:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial x'}(n'v')=0, \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'}+v'\frac{\partial v'}{\partial x'}=-\frac{\partial \chi}{\partial x'}-3\sigma n'\frac{\partial n'}{\partial x'}-\upsilon' v', \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x'^2}=n_e-n', \qquad (۳)$$

که با مجموعه متغیرهای بدون بعد زیر بهنجار شده اند [۷]:

$$\begin{aligned} &x/\lambda_D \to x' \;;\; \lambda_D=\sqrt{\varepsilon_0 k_B T_e/n_0 e^2},\\ &t\omega_{pi} \to t' \;;\; \omega_{pi}=\sqrt{n_0 e^2/\varepsilon_0 m_i},\\ &v_i/c_s \to v' \;;\; c_s=\sqrt{k_B T_e/m_i},\\ &e\varphi/k_B T_e \to \chi,\; n_i/n_0 \to n', \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن به ترتیب معادله پیوستگی، معادله انتقال تکانه و معادله پواسون است. همچنین، n_i و n_e به ترتیب چگالی یونی و الکترونی، v_i سرعت یون ها، φ پتانسیل الکتروستاتیکی، λ_D طول موج دبای، m_i جرم یونی، k_B ثابت بولتزمن و σ نسبت دمای یون به الکترون می باشد. υ فرکانس برخورد ذره یونی با اتم خنثی است که به فرکانس یونی پلاسما نرمالیزه شده است. T_e و c_s به ترتیب دمای الکترونی و سرعت موج یون–صوتی است. در این مدل تابع توزیع چگالی، بصورت زیر داده می‌شود [۸ و ۹]

$$n_e(\varphi)=\left(1-\frac{1}{\kappa_0}.\chi\right)^{-\kappa_0-1+\frac{d_{e,\Phi}}{2}}, \qquad (۵)$$

که بر اساس مجموعه معادلات (۴) بهنجار شده است. $d_{e,\Phi}$ تعداد درجات آزادی است که وابسته به پتانسیل اختلالی است.

پاشندگی امواج یون–صوتی در پلاسمای برخوردی

در اینجا برای به دست آوردن رابطه پاشندگی، از معادله (۳) بصورت خطی سازی شده استفاده می کنیم.

$$k^2\chi=n_{i1}-n_{e1}, \qquad (۶)$$

با بسط دادن رابطه (۵) تا مرتبه خطی و قرار دادن آن در رابطه (۶)، داریم:

$$n_{e1}=\left[1+\left(-\kappa_0-1+\frac{d_{e,\Phi}}{2}\right)\left(-\frac{1}{\kappa_0}\chi\right)+\ldots\right]\simeq\left(1+\frac{1}{\kappa_0}-\frac{d_{e,\Phi}}{2\kappa_0}\right)\chi \qquad (۷)$$

$$\begin{aligned} &k^2\chi=\frac{k}{\omega}v_{i1}-\chi\left(1+\frac{1}{\kappa_0}-\frac{d_{e,\Phi}}{2\kappa_0}\right),\\ &\chi\left[k^2+\left(1+\frac{1}{\kappa_0}-\frac{d_{e,\Phi}}{2\kappa_0}\right)\right]=\frac{k}{\omega}v_{i1}, \end{aligned} \qquad (۸)$$

که در آن چگالی یونی به وسیله معادله خطی شده (۱) داده می‌شود:

$$n_{i1}=\frac{k}{\omega}v_{i1} \qquad (۹)$$

با قرار دادن روابط (۸) و (۹) در معادله انتقال تکانه یون (۲)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$i\omega v_{i1} - \upsilon v_{i1} = 3\sigma i k n_{i1} + ik\chi,$$

$$v_{i1}(\omega + i\upsilon) = 3\sigma\frac{k^2}{\omega}v_{i1} + \frac{k^2}{\omega}v_{i1}\left[k^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa_0} - \frac{d_{e,\Phi}}{2\kappa_0}\right)\right]^{-1}, \qquad (۱۰)$$

با ساده سازی رابطه (۱۰)، رابطه پاشندگی در چنین پلاسمایی بصورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = 3\sigma - i\frac{\upsilon\omega}{k^2} + \frac{1}{\left[k^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa_0} - \frac{d_{e,\Phi}}{2\kappa_0}\right)\right]}, \qquad (۱۱)$$

با فرض اینکه $\omega = \omega_r + i\omega_i$ باشد (ω_r و ω_i به ترتیب قسمت حقیقی و موهومی است)، در اینصورت رابطه (۱۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\omega_r = \left\{3\sigma k^2 - \frac{\upsilon^2}{4} + \frac{k^2}{\left[k^2 + \left(1 + \frac{1}{\kappa_0} - \frac{d_{e,\Phi}}{2\kappa_0}\right)\right]}\right\}; \qquad (۱۲)$$

$$\omega_i = -\frac{\upsilon}{2}.$$

استخراج معادله KdV تعمیم یافته برخوردی

برای به دست آوردن معادله KdV، روابط قبل را باید برحسب دامنه موج بسط داده و جملات را تا یک مرتبه بالاتر از نظریه خطی نگه داریم [۷]:

$$n' = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\delta^j n_j = 1 + \delta n_1 + \delta^2 n_2 + \cdots$$

$$v' = \sum_{j=1}^{\infty}\delta^j v_j = \delta v_1 + \delta^2 v_2 + \cdots \qquad (۱۳)$$

$$\chi = \sum_{j=1}^{\infty}\delta^j \chi_j = \delta\chi_1 + \delta^2\chi_2 + \cdots$$

و همچنین تغییر متغیرهای مکانی و زمانی زیر را در نظر می‌گیریم [۷]:

$$\partial/\partial r' = \delta^{1/2}\,\partial/\partial\xi$$

$$\partial/\partial t' = \delta^{3/2}\,\partial/\partial\tau - \delta^{1/2}\,\partial/\partial\xi \qquad (۱۴)$$

با قرار دادن روابط (۱۳) و (۱۴) در مجموعه معادلات (۱–۳) و با در نظر گرفتن مرتبه دوم هر یک از معادلات، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{U}{\tau} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial^3 U}{\partial\xi^3} + \beta U\frac{\partial U}{\partial\xi} = -\gamma U \qquad (۱۵)$$

معادله اخیر به معادله کورته وگ–دی وری با یک جمله میرایی معروف است. در این معادله ضرایب α، β و γ به ترتیب ضریب پاشندگی، ضریب غیرخطیت و ضریب میرایی می‌باشند که بصورت زیر تعیین می‌شود:

$$\alpha = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{(c^2 - 3\sigma)^2}\right]^{-1} + \left[1 - \frac{1}{\kappa_0}\left(d_{e,\Phi} - \frac{2}{\kappa_0} - 3\right) + \frac{d_{e,\Phi}}{4\kappa_0^2}\left(d_{e,\Phi} - 6\right)\right],$$

$$\beta = \alpha\left\{\left[\frac{3(c^2 + \sigma)}{(c^2 - 3\sigma)^3}\right] + \left[1 + \frac{1}{\kappa_0}\left(1 - \frac{d_{e,\Phi}}{2}\right)\right]\right\},$$

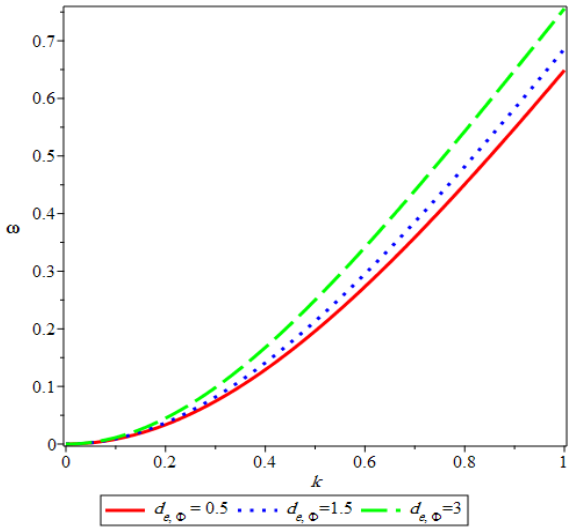
$$\gamma = \frac{1}{2}\upsilon_0. \qquad (۱۶)$$

پاسخ معادله (۱۵) بصورت سالیتونی زیر می‌باشد:

$$U(\xi,\tau) = \frac{3c}{\beta}\operatorname{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4\alpha}}\left[\xi - \frac{1}{3}\beta\int_0^{\tau}U_0(\bar{\tau})d\bar{\tau}\right], \qquad (۱۷)$$

نتیجه گیری

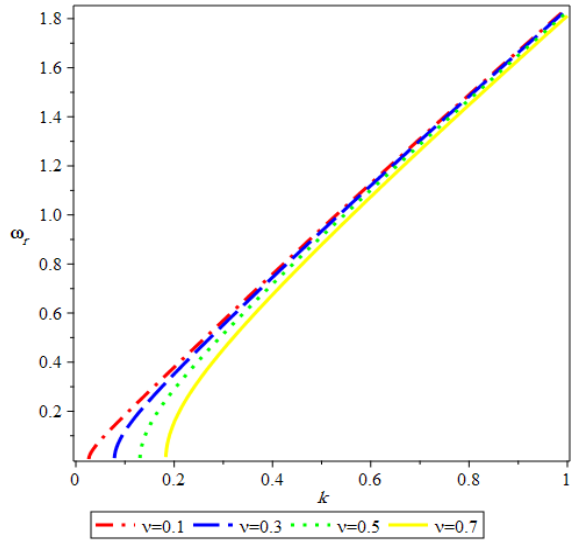
در شکل (۱)، اثرات تعداد درجات آزادی ($d_{e,\Phi}$) بر رابطه پاشندگی با مقادیر $\kappa_0 = 2$ و $\sigma = 0$ نشان داده شده است.



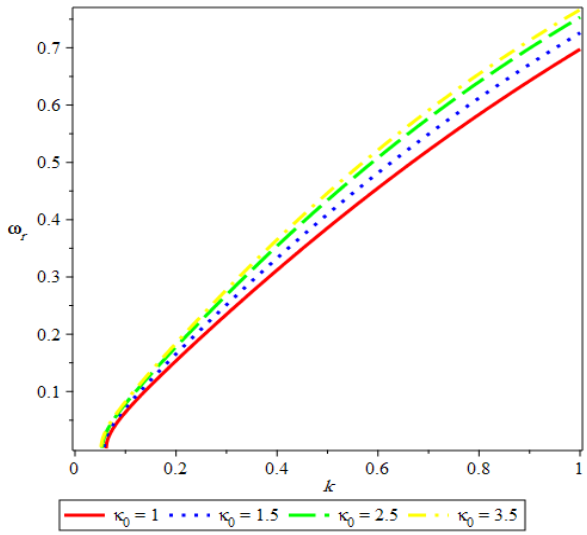
شکل ۱. تأثیر تعداد درجات آزادی در موج سالیتونی KdV

ملاحظه می شود، با افزایش تعداد درجات آزادی، پاشندگی نیز افزایش پیدا می‌کند.

در شکل (۲) و (۳) اثرات برخورد بر قسمت حقیقی پاشندگی با مقادیر $\upsilon = 0.1, \sigma = (1, 0.05), d_{e,\Phi} = 0.1, \kappa_0 = 2$ نشان داده شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش شاخص طیفی در حضور برخورد، قسمت حقیقی رابطه پاشندگی، افزایش می‌یابد و همینطور با افزایش پارامتر برخورد، قسمت حقیقی رابطه پاشندگی در ابتدا کاهشی بوده ولی از یک نقطه ای به بعد تقریباً همگرا می شود.

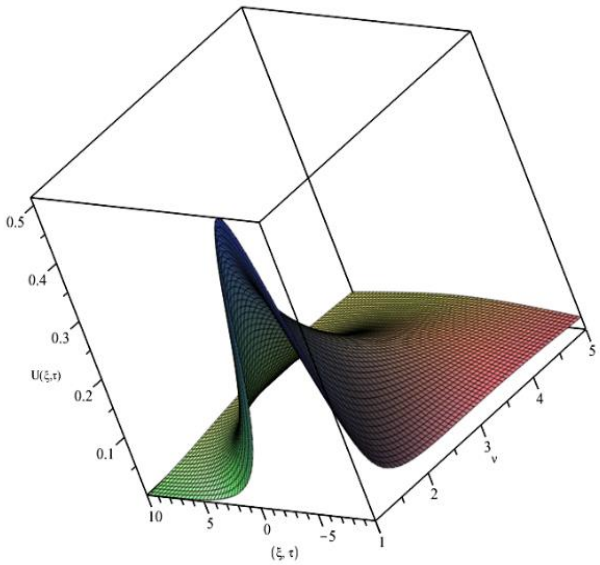


شکل ۲. اثرات برخورد بر قسمت حقیقی پاشندگی



شکل ۳. اثرات شاخص طیفی بر قسمت حقیقی پاشندگی

در شکل (۴)، پارامتر برخورد در انرژی موج سالیتونی نشان داده شده است. $c = 1.2, d_{e,\Phi} = 0.1, \kappa_0 = 5, \sigma = 0.25$، مشاهده می‌شود که با کاهش برخورد υ، انرژی که صرف برخوردها می‌شود افزایش پیدا می‌کند و در نهایت موج سالیتونی به نقطه پیک خود می رسد و به حالت قله مانند در می‌آید.



شکل ۴. اثر فرکانس برخورد بر انرژی موج سالیتونی KdV

مرجع‌ها

[1] J. S. Russell, 1844, "Report on Waves", *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pp. 311–390.

[2] D. J. Korteweg, G. de Vries, 1895, "On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves", *Philosophical Magazine*, 5the series 39, pp. 422.

[3] Sagdeev, R.Z. and Leontovich, M.A. (1966) Cooperative Phenomena and Shock Waves in Collisionless Plasmas. *Reviews of Plasma Physics*, **4**, 23.

[4] M. Kamran, Fazal Sattar, Majid Khan, R. Khan, M. Ikram, 2021. Dust-ion-acoustic shock waves in the presence of dust charge fluctuation innonunionnoninnon-Maxwellian plasmas with Kappa-distributed electrons, *Journal Results in Physics*, Volume 21,2211–3797,

[5] Zahed, H., et al., *Investigation of Dust-Ion Acoustic Waves in a Magnetized Collisional Dusty Plasma with Kappa Distribution Function for Electrons.* International Journal of Optics and Photonics, 2018. **12**(2): p. 81–90. Xue, J.K. (2003) Cylindrical and Spherical Dust-Ion Acoustic Shock Waves. *Physics of Plasmas*, **10**, 4893.

[6] Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece, "Principles of plasma physics", University of Maryland, (1973).

[7] Washimi, H. and Taniuti, T., "Propagation of Ion-Acoustic Solitary Waves of Small Amplitude", *Phys. Rev*. Lett., 17, 1966.

[8] Livadiotis, G., Desai, M.I., Wilson, L.B., 2018. Generation of Kappa distributions in Solar Wind at 1 au. *Astrophys. J.* 853, 153.

[9] Livadiotis, G. "Kappa distributions Theory and Applications in Plasma", *Elsevier Publisher*, 2017.

کاربرد و شبیه‌سازی اعداد p–ادیک و فضاهای نا‌ارشمیدسی در فیزیک

داود حطیبی عقدا
دکتری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد
khatibi@stu.yazd.ac.ir

سیدمحمدصادق مدرس‌مصدق
استاد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد
smodarres@yazd.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی کاربردهای ریاضی اعداد p–ادیک و فضاهای نا‌ارشمیدسی در فیزیک می‌پردازیم. ابتدا با تعریف اعداد p–ادیک، فضاهای نا‌ارشمیدسی و بیان ویژگی‌های آن‌ها، این مفاهیم برای خواننده روشن‌تر می‌گردد. سپس روشی ریاضی را ارائه می‌کنیم که از اعداد p–ادیک و فضاهای نا‌ارشمیدسی در حل مسائل فیزیک استفاده شده است. همچنین کاربردهایی از این اعداد، فضاهای نا‌ارشمیدسی و هندسه‌ی نا‌ارشمیدسی بیان خواهد شد و درنهایت با استفاده از نرم افزار میپل و نوشتن چند قطعه کد کاربردی، به محاسبه‌ی ماشینی موارد مطرح شده و شبیه‌سازی آن‌ها خواهیم پرداخت.

کلید واژه ها: *اعداد p–ادیک، شبیه‌سازی در میپل، فضاهای نا‌ارشمیدسی، روشهای ریاضی–فیزیک.*

Application and simulation of p-adic numbers and non-Archimedean spaces in physics

Khatibi, Davood[1]; Modarres Mosadegh, Seyed Mohammad Sadegh[2]

[1] Department of Mathematical Sciences Yazd University, Yazd
[2] Department of Mathematical Sciences Yazd University, Yazd

Abstract

In this paper, we explore the mathematical applications of p-adic numbers and non-Archimedean spaces in physics. By defining p-adic numbers and non-Archimedean spaces and elucidating their properties, our objective is to provide clarity to the reader. Subsequently, we introduce a mathematical approach that employs p-adic numbers and non-Archimedean spaces to solve physics problems. Furthermore, we delve into the applications of these numbers, non-Archimedean spaces, and non-Archimedean geometry. Finally, by utilizing the Maple software and constructing practical code snippets, we conduct machine calculations and simulations for the discussed scenarios.

Keywords: *p-adic Numbers, non-Archimedean Spaces, Maple Software, Mathematical physics method.*

مقدمه

در ریاضیات، مطالعه مجموعه‌ی اعداد بسیار فراتر از اعداد حقیقی و مختلط می‌باشد. یکی از شاخه‌های جذاب نظریه‌ی اعداد، اعداد p–ادیک و فضاهای نا‌ارشمیدسی می‌باشد که علاوه بر کاربردهای گسترده در شاخه‌های مختلف ریاضی، در فیزیک کوانتوم، مکانیک و سایر علوم دیگر نیز کاربردهای فراوانی دارد. این اعداد برای اولین بار، توسط ریاضی‌دانی به نام کرت هنسل در اوایل قرن بیستم معرفی شدند. اعداد p–ادیک، یک دستگاه جدید اعداد را تشکیل می دهند که اعداد گویا را توسعه داده و نظریه اعداد را دگرگون می‌سازد. هنسل از این اعداد به عنوان ابزاری برای مطالعه‌ی معادلات دیوفانتین استفاده نمود که شامل یافتن جواب‌های صحیح برای معادلات چند جمله‌ای است. برخلاف اعداد حقیقی، اعداد p–ادیک بر اساس یک متریک متفاوت ساخته می‌شوند که به عنوان متریک p–ادیک شناخته می شود. این متریک قدرمطلق یا "ارزش" یک عدد را بر حسب بخش‌پذیری آن بر عدد اول p بیان می‌کند. اعداد p–ادیک در ساخت نمونه‌ای از فضاهای توپولوژیک منحصر به فرد مانند فضاهای نا‌ارشمیدسی نقش دارند. بر خلاف ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی، که بیان می کند بین هر

دو عدد حقیقی مثبت، یک عدد صحیح مثبت وجود دارد، فضاهای نااارشمیدسی رفتار متفاوتی از خود نشان می دهند. در این فضاها، اعداد می توانند بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک باشند، به‌عبارتی مفهوم مجاورت را بیان می‌نمایند. ضمناً فضاهای نااارشمیدسی که با استفاده از اعداد p–ادیک ساخته می‌شوند، در مکانیک کوانتومی نیز کاربرد دارند. مفهوم مجاورت در فضاهای نارشمیدسی اجازه می‌دهد تا دیدگاه متفاوتی در مورد حالت های کوانتومی و ویژگی های درهم‌تنیدگی آنها داشته باشیم. پژوهشگران زیادی امکان ساخت مدل‌های کوانتومی در فضاهای نااارشمیدسی را بررسی کرده‌اند که می‌تواند دید تازه‌ای در مورد ماهیت پردازش اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی ارائه دهد. همچنین اعداد p–ادیک و فضاهای نااارشمیدسی در تئوری اندازه‌گیری و ادغام در مطالعه‌ی نظریه‌های میدان کوانتومی فوق متقارن و فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی، کاربرد گسترده‌ای دارند. به‌علاوه، اعداد p–ادیک برای تجزیه و تحلیل جنبه‌های خاصی از فیزیک ذرات، مانند توزیع اعداد اول در زمینه فرضیه ریمان، استفاده شده است. در این مقاله به بررسی و معرفی اعداد p–ادیک و فضاهای نااارشمیدسی پرداخته و با شبیه‌سازی تعاریف و مفاهیم با برنامه‌های میپل، از منظری دیگر به بررسی این ساختارهای ریاضی–فیزیک می‌پردازیم.

فضاهای اولترامتریک

فاصله (متریک) در فضاهای نااارشمیدسی که به عنوان فضاهای اولترامتریک نیز شناخته می شوند، ویژگی‌های ریاضی منحصر به فردی را نشان می دهند که آنها را از فضاهای ارشمیدسی مبتنی بر اعداد حقیقی متمایز می کند. در این بخش، تعریف و ویژگی‌های فضاهای اولترامتریک را بیان کرده، نامساوی اولترامتریک را تعریف کرده و نمونه‌هایی از فضاهای نااارشمیدسی را معرفی می‌نماییم.

فضای اولترامتریک ساختاری ریاضی است که نابرابری اولترامتریک نقش اساسی در آن دارد. اگر X مجموعه ای مجهز به متریک $d: X \times X \to \mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه متریک d را اولترامتریک گوییم، هرگاه به ازای هر x، y و z در X در شرایط زیر صدق کند:

1- غیرمنفی بودن: $d(x, y) \geq 0$ و $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

2- متقارن بودن: $d(x,y)=d(y,x)$

3- نابرابری اولترامتریک:

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

نابرابری اولترامتریک ویژگی اصلی متمایز کننده‌ی فضاهای نااارشمیدسی و ارشمیدسی است. این ویژگی بیان می‌کند که برای هر نقطه‌ی میانی y، فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی x و z از حداکثر فاصله بین x و y و فاصله‌ی بین y و z بیشتر نیست. این ویژگی سلسله مراتب ساختاری درخت مانندی را ایجاد نموده که در آن عناصری که به یکدیگر نزدیک هستند دارای درجه‌ی بیشتری از شباهت یا قرابت می‌باشند.

فضاهای اولترامتریک چندین ویژگی جالب از خود نشان می دهند:

1- نابرابری مثلث: در فضای اولترامتریک، نابرابری مثلثی با نامساوی اولترامتریک جایگزین می‌شود که شرط قوی‌تری است.

2- گوی‌های تودرتو: فضاهای اولترامتریک ساختار تودرتو دارند که در آن گوی‌های با شعاع‌های مختلف در داخل یکدیگر قرار می گیرند.

3- رفتارهای فراکتال مانند: ساختار سلسله مراتبی فضاهای اولترامتریک خواص فراکتال مانند را نشان می‌دهد.[3]

اعداد p–ادیک

اعداد p–ادیک که با $\mathbb{Q}_p$ نشان داده می شوند به کمک مجموعه‌ی اعداد گویا و با یک متریک خاص که به متریک p–ادیک معروف است، ساخته می شوند. متریک p–ادیک فاصله‌ی بین دو عدد را به روشی متفاوت در مقایسه با فاصله استاندارد اقلیدسی مورد استفاده در اعداد حقیقی بیان می کند. فرض کنید $q = \frac{a}{b}$ که در آن $a, b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$ یک عدد گویا باشد، در این‌صورت قدرمطلق p–ادیک برای عدد q که با نماد $|q|_p$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنید k_1، بزرگترین عددی است که p^{k1} بر a بخش‌پذیر بوده و k_2، بزرگترین عددی باشد که p^{k2} بر b بخش‌پذیر باشد. در این صورت $v_p(q)=k_1-k_2$ تعریف می‌شود که اصطلاحاً به آن تابع ارزش نیز گویند.

حال اگر $q = 0$ آن‌گاه $|q|_p = 0$ و در غیر اینصورت $|q|_p = p^{-vp(q)}$ تعریف می‌شود. متریک p–ادیک القا شده توسط قدر مطلق p–ادیک به صورت زیر تعریف می شود:

برای هر دو عدد گویای x, y، فاصله‌ی p–ادیک بین x, y را که با نماد $d_p(x, y)$ نشان می‌دهیم برابر است با $|x - y|_p$.

مجموعه اعداد p–ادیک که با $\mathbb{Q}_p$ یا $\mathbb{Z}_p$ نشان داده می‌شوند، نمونه‌های معروفی از فضاهای ناارشمیدسی می‌باشند.

به کاربردی ملموس‌تر از این اعداد در فیزیک توجه فرمایید:

متحرکی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی ثابت در یک بعد حرکت می کند. می‌توانیم موقعیت متحرک را در یک زمان معین با استفاده از اعداد p–ادیک محاسبه نماییم.

معادله حرکت ذره توسط قانون دوم نیوتن به دست می آید:

$$m\, d^2x/dt^2 = F,$$

که در آن m جرم ذره، x موقعیت آن، t زمان و F نیروی ثابتی است که بر ذره وارد می شود.

برای حل این معادله، فرض می‌کنیم که نیروی F معلوم است و شرایط اولیه با

$$dx/dt\ (t = 0) = v_0 \text{ و } x(t = 0) = x_0$$

مشخص شده‌اند که در آن x_0 موقعیت اولیه و v_0 سرعت اولیه ذره است.

با استفاده از دستگاه اعداد p–ادیک، می‌توانیم موقعیت ذره را در یک زمان معین t به عنوان یک سری p–ادیک بیان کنیم:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + (1/2)\,(F/m)t^2 + \dots .$$

که، اعداد p–ادیک به عنوان ضرایب بسط سری، با در نظر گرفتن خصوصیات متریک ناارشمیدسی و نامساوی اولترامتریک ظاهر می‌شوند.

ضرایب در سری p–ادیک را می توان با استفاده از قواعد حسابی p–ادیک، مانند جمع، تفریق و ضرب محاسبه کرد. با محاسبه سری p–ادیک با دقت مورد نظر، می توانیم تقریبی از موقعیت ذره در یک زمان معین در دستگاه اعداد p–ادیک به دست آوریم.

شایان ذکر است که درحال حاضر استفاده از اعداد p–ادیک در محاسبات فیزیک یک حوزه‌ی فعال تحقیقاتی است لذا کاربردها و فرمول‌های خاص ممکن است بسته به زمینه و شرایط موجود متفاوت باشند. درهرصورت مثال بالا نشان می دهد که چگونه اعداد p–ادیک می‌توانند به کمک محاسبات ریاضی در فیزیک بیایند[2].

شبیه‌سازی با نرم افزار میپل

بدیهی است امروزه بدون استفاده از نرم افزارهای مختلف نمی‌توان در دنیای پیچیده‌ی محاسبات راهی پیش برد. لذا به‌عنوان یک کاربرد جالب و جدید به بررسی و شبیه‌سازی موارد مطرح شده در این مقاله با نرم افزار میپل می‌پردازیم[1].

1- به کمک قطعه کد زیر $\left|\frac{2354}{3625}\right|_3$ را محاسبه می‌کنیم:

```
num := 2354;
den := 3625;
p := 3;
valuation:= pAdicValuation(num/den, p);
result := Power (p, valuation)
result;
```

نتیجه‌ای که میپل به ما می‌دهد $\left|\frac{2354}{3625}\right|_3 = 3^{-(-2)} = 9$ می‌باشد. خواننده می‌تواند قطعه کد را در نرم افزار میپل اجرا کرده و با تغییر مقادیر num، den و p به سادگی به محاسبه‌ی قدرمطلق p–ادیک مقادیر مربوط به اعداد گویا با عدد اول p دلخواه بپردازد.

2- قطعه کد زیر را در نظر بگیرید.

```
with(Ultrametric):
X := UltrametricSpace([1.0, 2.5, 3.7, 4.2], distfunc = (x, y)
-> max(x, y));
d := X:-Distance(2.5, 4.2);
b := X:-Ball(3.7, 1.0);
# Display the results
b;
d;
```

در خط اول این قطعه کد، پکیج *Ultrametric* برای محاسبات اولترامتریک در حافظه قرار می‌دهیم. در خط دوم و سوم فضای X

شامل 4 عدد حقیقی را تعریف کرده و با تابع *distfunc* مشخص می‌کنیم که متر موجود روی X متر نااارشمیدسی می‌باشد. در خط چهارم، با توجه به فاصله‌ی تعریف شده روی X در خطوط دوم و سوم، فاصله‌ی دو عدد 2.5 و 4.2 را محاسبه می‌کنیم. همچنین در خط بعدی گوی به مرکز 3.7 و شعاع یک را پیدا می‌کنیم. در آخر کد نیز نتیجه به کاربر نشان داده می شود. نتایج محاسبه شده توسط میپل برای فاصله دو عدد، 4.2 و برای گوی(بازه) [3.7, 4.2] می‌باشد. همانگونه که ملاحظه می فرمایید فاصله‌ی دوعدد 2.5 و 4.2 در فضای نااارشمیدسی 4.2 می باشد، حال آنکه در فضاهای ارشمیدسی و با قدرمطلق معمولی این فاصله 1.7 است.

3- با استفاده از کد زیر می‌توان 10 جمله از بسط سری p–ادیک تابع $1/(1 - x)$ را محاسبه نمود.

```
# Load the NumberTheory package
with(NumberTheory):
p := 3;
terms=10;
MyFunc := 1/(1 - x);
series := pAdicSeries(MyFunc, x = 0, terms = terms);
# Display the p-adic series
series;
```

نتیجه‌ی کد فوق به صورت زیر است:

```
1 + 3*x + 9*x^2 + 27*x^3 + 81*x^4
+ 243*x^5 + 729*x^6 + 2187*x^7 + 6561*x^8 +
19683*x^9 + 0(x^10).
```

کاربر می‌تواند با تغییر p، MyFunc و terms به ترتیب عدد اول مورد نظر، تابع و تعداد جملات بسط را به صورت دستی تعیین نماید.

4- در پایان با قطعه کد زیر معادله دیفرانسیل مطرح شده در بخش قبل را در دستگاه اعداد p–ادیک برای یافتن موقعیت تقریبی ذره حل می‌کنیم:

```
with(NumberTheory):
# Define the variables and parameters
t := 4;   # time
m := 2;   # mass
F := 7;   # force
p := 3;   # p-adic base
# Define the p-adic position function x(t) as an univariate function
x := unapply(x(t), t);
# Define the p-adic position equation
eq := m * diff(x(t), t$2) = F;
# Solve the equation using p-adic calculations
solution := pAdicSolve(eq, x(t), p);
# Apply initial conditions
solution := subs({x(0) = 0, D(x)(0) = 10}, solution);
# Evaluate the p-adic solution at t = 4
position := evalp(subs(t = 4, solution), p);
# Display the p-adic position
position;
```

خروجی کد در میپل به صورت زیر است.

position = 4 + 9 * 3 + 0(3^2).

یعنی با شرایط داده شده، در لحظه‌ی t=4 ، موقعیت ذره 31 است.

نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از نرم افزار قدرتمند محاسبات ریاضی یعنی میپل و سیستم اعداد p–ادیک با پایه `p`، نمایش p–ادیک موقعیت یک ذره در لحظه‌ی `t` را محاسبه کردیم. به‌طور کلی با استفاده از محاسبات p–ادیک، می توانیم معادلات ریاضی را به طرق دیگری تجزیه و تحلیل کرده و از آن نتایجی جدید استخراج کنیم به‌گونه‌ای که در آن‌ها ماهیت نااارشمیدسی دستگاه اعداد، درنظر گرفته می‌شود. تحقیقات بیشتر درباره‌ی کاربردهای اعداد p–ادیک و استفاده از آن‌ها در حوزه‌ی ریاضیات، فیزیک و علوم دیگر می‌تواند منجر به بیان راه‌حل‌ها و پیشرفت‌های جدید جهت درک بیشتر و ساده‌تر سیستم‌های پیچیده‌ی فیزیکی یا سایر علوم شود.

لازم به ذکر است نرم افزار میپل، توانمندی ما را در تجزیه و تحلیل معادلات افزایش داده و یک ابزار ارزشمند و ساده برای بررسی محاسبات، روی پدیده‌هایی که رفتار نااارشمیدسی دارند را فراهم می‌کند.

مرجع‌ها

[1] کلانی، حمید؛ «*مرجع کاربردی maple 2016*»؛ موسسه فرهنگی هنری دیباگران تهران (1395).

[2] A. Khrennikov; "p-Adic Valued Distributions in Mathematical *Physics*"; Kluwer, Dordrecht (1994).

[3] A. Khrennikov; "*Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*"; Springer, Dordrecht (1997).

تاثیر پدیده ی دما و فشار در شفافیت القایی الکترومغناطیسی در یک نقطه ی کوانتومی با هندسه ی استوانه ای مسطح

رفیعی چهاربرج، فرشید[۱]
گروه فیزیک، دانشکده ی علوم پایه، دانشگاه شاهد تهران
Farshid.rafiei28963@gmail.com

بخشی، زهرا[۲*]
گروه فیزیک، دانشکده ی علوم پایه، دانشگاه شاهد تهران
z.bakhshi@shahed.ac.ir

چکیده

در این مقاله شفافیت القایی الکترومغناطیسی (EIT) را در یک نقطه کوانتومی با هندسه دیسک کوانتومی که به شکل یک استوانه مسطح فرض شده است، به صورت نظری بررسی و نشان می‌دهیم. سطوح انرژی زیر باند در حضور میدان مغناطیسی عمود بر هم بدست می‌آید. بر اساس انرژی‌های محاسبه‌شده، طیف‌های جذب، طیف پراکندگی و شاخص گروه را تحت تأثیر ترکیبی از عوامل خارجی مانند میدان مغناطیسی، فشار هیدرواستاتیک میدان لیزر، دما و طول‌های محصور شدن نقطه کوانتومی مورد مطالعه قرارمی‌دهیم.

کلید واژه : دما و فشار هیدرواستاتیک؛ سیستم کوانتومی نقطه ای؛ شفافیت القایی الکترومغناطیسی

The effect of temperature and pressure phenomena on electromagnetic induction transparency in a quantum dot with flat cylindrical geometry

Rafiei Chaharborj, Farshid[1]; bakhshi, Zahra[2*]

[1&2]Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahed University, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, we theoretically investigate and demonstrate electromagnetic induction transparency (EIT) in a quantum dot with a quantum disk geometry assumed to be a flat cylinder. Subband energy levels are obtained in the presence of a perpendicular magnetic field. Based on the calculated energies, we study absorption spectra, scattering spectra and group index under the influence of a combination of external factors such as magnetic field, laser field hydrostatic pressure, temperature and quantum dot confinement lengths.

Keyword: electromagnetic induction transparency; quantum dot system; Temperature and hydrostatic pressure

PACS No.10

مقدمه

پدیده شفافیت القایی الکترومغناطیسی در واقع تبدیل یک محیط کدر به محیط شفاف است که در سیستم‌های اتمی چند ترازه روی می‌دهد. این پدیده با اندرکنش نور و ماده توضیح داده می‌شود (۱-۳). پنجره شفافیت و سرعت گروهی میدان‌های کاوشگر به شدت به میدان‌های خارجی و فشار بستگی دارد که خود فشار می‌تواند تحت تاثیر تغییرات دما قرار بگیرد(۴). عوامل خارجی مانند میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی، میدان لیزر، فشار هیدرواستاتیک، دما و

ناخالصی پارامترهای مهمی برای مطالعه خواص الکترونیکی و و نوری نانوساختارها هستند و به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این عوامل همچنین می‌توانند تأثیر زیادی بر روند EIT داشته باشند. فشارهیدرواستاتیک ساختار نوار نیمه هادی راتغییر می دهد و به طور موثر سطوح انرژی را بدون تغییر تقارن سیستم ناهمسان تغییر می‌دهد. تغییرات فشار هیدرواستاتیکی خواص فیزیکی ناهمساختارهای کم‌بعد برای کاوش پدیده‌های جدید مفید است و برای سال‌ها هم از نظر تجربی و هم از نظر تئوری مورد توجه قرار گرفته است (۵-۸).

در کار فعلی، ما محاسبه پاسخ غیرخطی میدان مغناطیسی، فشار و دما را بر روی شفافیت القایی الکترومغناطیسی در یک نقطه کوانتومی با هندسه دیسک کوانتومی مسطح (QDG) گزارش می‌کنیم. در این مقاله مطالعات دقیقی از اثرات تغییر میدان مغناطیسی ساکن، فشار هیدرواستاتیک و دما بر روی جذب، پراکندگی و سرعت گروهی پالس نور پروب انجام شده است.

مدل و نظریه

حالت های الکترونیکی در یک نقطه کوانتومی با هندسه دیسک کوانتومی

ما یک الکترون را در نوار رسانایی نیمه‌هادی یک نقطه کوانتومی GaAs/AlxGa1 در نظر می‌گیریم. در مدل ما، این نقطه به عنوان یک QDG در نظر گرفته شده به شکل یک استوانه تخت در نظر گرفته می‌شود. با نادیده گرفتن برهمکنش با اسپین الکترون، معادله شرودینگر ساکن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H\Psi = E\Psi \qquad (۱)$$

با اعمال تقریب جرم موثر برای الکترون در نوار رسانایی نیمه هادی، معادله شرودینگر تبدیل می‌شود.

$$\left[\frac{1}{2m^*}\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)^2 + V_{conf}(\vec{r})\right]\Psi = E\Psi \qquad (۲)$$

ما پتانسیل محصور شدن شعاعی را با یک پتانسیل سهموی شکل مدل می‌کنیم.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m^*\omega_0^2 r^2 \qquad (۳)$$

معادله شرودینگر مستقل از زمان به شکل زیر است:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{2}\hbar\omega_c\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{8}m^*\omega^2 r^2 + V(z)\right\}\Psi(r,\theta,z) = \left(E_{nm}^{(r)}+E_l^{(Z)}\right)\Psi(r,\theta,z) \qquad (٤)$$

ما $E = E_{nm}^{(r)} + E_l^{(z)}$ معرفی کردیم که در آن $E_{nm}^{(r)}$ و $E_l^{(z)}$ سطوح انرژی الکترون را به ترتیب در جهت شعاعی و z نشان می‌دهد.

$\psi(r,\theta,z)$ توابع موج هستند. $w_c = \frac{eB}{m^*}$ فرکانس سیکلوترون و $\omega^2 = \omega_c^2 + 4\omega_o^2$ فرکانس سیکلوترون نرمال شده است.

$$\Psi(r,\theta,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\theta}R(r)Z(z) \qquad m = 0; \pm1; \pm2; \ldots \qquad (۵)$$

$$\alpha = \frac{m^*\omega}{2\,h}r^2 \quad \text{و} \quad k = \frac{E_{nm}^{(r)}}{h\omega} - \frac{m\omega_c}{2\omega} \qquad (٦)$$

معادله قسمت شعاعی تابع موج را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha\frac{d^1}{d\alpha^2} + \frac{dR}{d\alpha} + \left(k - \frac{1}{4}\alpha - \frac{m^2}{4\alpha}\right)R = 0$$

با استفاده از $R(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{2}}\alpha^{\frac{|m|}{2}}\eta(\alpha)$، معادله فوق به معادله کومر تبدیل می‌شود.

$$\alpha\frac{d^2\eta}{d\alpha^2} + (|m|+1-\alpha)\frac{d\eta}{d\alpha} + \left(k - \frac{1}{2}(|m|+1)\right)\eta = 0 \qquad (۷)$$

$\eta(\alpha) = F[a, |m|+1, \alpha]$ اینجا $\alpha = \frac{|m|+1}{2} - k$

برای مقادیر بزرگتر α این تابع بصورت e^{α} واگرا می‌شود. بنابرین از عادی سازی جلوگیری می‌شود: اگر و فقط اگر $a = n$ با $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ سری همگرای Hypergeometric به یک چند جمله‌ای تبدیل می‌شود و تابع موج می‌تواند نرمال شود.

$$R_{NM}(R) = l_0 \frac{\sqrt{(n+|m|)!}}{|m|!\sqrt{n!}} \alpha^{|m|/2} e^{-\alpha/2} F[-n, |m| + 1, \alpha] \quad (۸)$$

$$E_{nm}^{(r)} = \hbar\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}\left[n + \frac{1}{2}(|m| + 1)\right] + \frac{1}{2} m\hbar\omega_c \quad (۹)$$

$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m^*\omega}}$ طول محصور شدن موثر نقطه کوانتومی است.

بنابراین حرکت الکترون در صفحه X و Y با دو عدد کوانتومی mوn توصیف می‌شود .

$$z = \pm d/2$$

$$Z(z) = \sqrt{\frac{1}{2}\sin(l\pi z/d)} \quad (۱۰)$$

جایی که $l = \pm 2, \pm 4, \ldots$ برای حالت‌های فرد $Z(z)$ شبیه کسینوس است.

$$E_l^{(z)} = l^2\pi^2\hbar^2/2m^*d^2 \quad (۱۱)$$

اثرات دما و فشار هیدرواستاتیک

اعمال دما و فشارهیدرواستاتیکی جرم موثر و ثابت دی الکتریک را اصلاح می‌کند. در ادامه، عبارات صریح این کمیت‌ها را به عنوان تابعی از دما و فشار هیدرواستاتیک، که در آن واحد فشار و دما به ترتیب kbar و K است به دست می‌آوریم. جرم موثر وابسته به فشار و دما برای الکترون به دست می‌آید (۹-۱۰).

$$m_e^*(P,T) = \frac{m_0}{1 + E_P^{\Gamma}\left(\frac{2}{E_P^{\Gamma}(P,T)} + \frac{1}{E_g^{\Gamma}(P,T) + \Delta_0}\right)} \quad (۱۲)$$

$\Delta_0 = 0.341eV$ تقسیم چرخش مدار است و $E_g^{\Gamma}(P,T)$ انرژی وابسته به فشار و دما است که برحسب الکترون ولت داده شده است.

$$E_g^{\Gamma}(P,T) = E_g^{\Gamma}(0,T) + bP + cP^2 \quad (۱۳)$$

$$b = 1.25 \times 10^{-2} eV\ kbar^{-1}, c = 3077 \times 10^{-5} eV\ kbar^{-2}$$

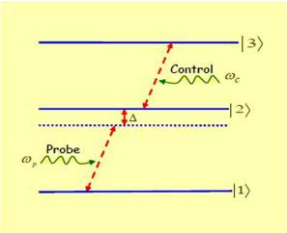
$$E_g^{\Gamma}(0,T) = 1.519 - \frac{5.405\times10^{-4}T^2}{T+204} eV$$

بنابراین عوامل خارجی مانند دما و فشار هیدرواستاتیکی می‌توانند به طور قابل توجهی شکاف انرژی و خواص نوری نانوساختارها را تغییر دهند.

مدل نظری شفافیت القایی الکترومغناطیسی:

ما نوار رسانش را در یک QDG به سه زیر باند تقسیم می‌کنیم که مربوط به انرژی‌های $|1\rangle$، $|2\rangle$ و $|3\rangle$ (نشان داده شده در شکل (۱) است).

$$H = H_0 + H_I \quad (۱٤)$$



شکل ۱: شماتیک یک سیستم آبشاری سه سطحی در یک نقطه کوانتومی با QDG مسطح بر تعامل با میدان‌های کنترل و کاوشگر.

$$H = \frac{\hbar}{1}\begin{bmatrix} 2\omega_1 & -\Omega_p E_p e^{i\omega_p t} & 0 \\ -\Omega_p^* E_p e^{i\omega_p t} & 2\omega_2 & -\Omega_c E_c e^{i\omega_p t} \\ 0 & -\Omega_c^* E_c e^{i\omega_p t} & 2\omega_3 \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

ما همچنین فرض کرده‌ایم که انتقال بین حالت‌های $|۱\rangle$ و $|۳\rangle$ توسط برهمکنش دوقطبی میدان الکتریکی ممنوع است.

$$\dot{\rho_{21}} = -(i\,\omega_{21} + \gamma_{21})\rho_{21} + \frac{i\,\Omega_p^*}{2}\,e^{-i\omega_p^t}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{i\Omega_c}{2}e^{i\,\omega_c^t}\rho_{31} \quad (۱۶)$$

$$\dot{\rho_{32}} = -(i\,\omega_{32} + \gamma_{32})\rho_{32} + \frac{i\,\Omega_c^*}{2}\,e^{-i\omega_c^t}(\rho_{33} - \rho_{22}) + \frac{i\Omega_p}{2}e^{i\,\omega_p^t}\rho_{31} \quad (۱۷)$$

$$\dot{\rho_{31}} = -(i\,\omega_{31} + \gamma_{31})\rho_{31} + \frac{i\,\Omega_c^*}{2}\,e^{-i\omega_c^t}\rho_{32} - \frac{i\Omega_c}{2}e^{-i\omega_c^t}\rho_{21} \quad (۱۸)$$

$$\dot{\tilde{\rho}_{21}} = -(i\Delta + \gamma_{21})\tilde{\rho}_{21} + \frac{i\Omega_p}{2} + \frac{i\Omega_c}{2}\,\tilde{\rho}_{31} \quad (۱۹)$$

$$\dot{\tilde{\rho}_{21}} = \frac{(\Omega_p/2)(\Delta + i\gamma_{31})}{(|\Omega_c|^2/4) - (\Delta + i\gamma_{21})(\Delta + i\gamma_{31})} \quad (۲۰)$$

$$\dot{\tilde{\rho}_{21}} = \frac{\left(\frac{\Omega_p}{2}\right)(\Delta + i\gamma_{31})}{\left(\frac{|\Omega_c|^2}{4}\right) - (\Delta + i\gamma_{21})(\Delta + i\gamma_{31})} \quad (۲۱)$$

$$\chi(\omega_p) = \chi' + i\chi'' \quad (۲۲)$$

$$\chi' = \left(\frac{N\mu_{21}^2}{\varepsilon_0 hG}\right)\Delta\left((|\Omega_c|^2/4) - \gamma_{31}^2 - \Delta^2\right) \quad (۲۳)$$

$$\chi'' = \left(\frac{N\mu_{21}^2}{\varepsilon_0 hG}\right)\left[\gamma_{31}\left((|\Omega_c|^2/4) + \gamma_{21}\gamma_{31}\right)\right] + \Delta^2\gamma_{21} \quad (۲۴)$$

بطوریکه (۲۵)

$$G = [(|\Omega_c|^2/4) + \gamma_{21}\gamma_{31} - \Delta^2]^2 + \Delta^2(\gamma_{21} + \gamma_{31})^2$$

و برای ضریب جذب و ضریب شکست داریم :

$$\alpha(\omega_p) = (\omega_p/c)\chi'' \quad (۲۶)$$

$$n_r(\omega_p) = 1 + (\chi'/2) \quad (۲۷)$$

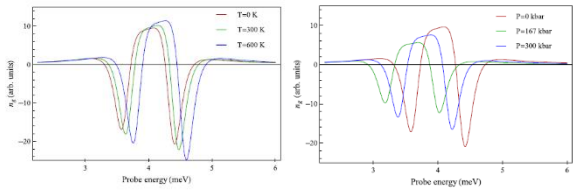
همچنین یکی از ویژگی‌های قابل توجه EIT کاهش شـدید در سـرعت گروهی عبور نور از ماده اسـت. هنگامی که یک پالس نور وارد یک محیط خطی پراکنده می‌شـود، پالس نور با سرعت گروهی $v_g = c/n_g$ منتشر می‌شود.

$$v_g = \frac{c}{1 + n_r(\omega_p) + \omega_p\frac{\partial}{\partial\omega_p}n_r(\omega_p)} \quad (۲۸)$$

و n_g شاخص گروهی است که می‌توان آن را محاسبه کرد:

$$n_g = 1 + \frac{\chi_1}{2} + \frac{\omega_p}{2}\frac{\partial\chi_1}{\partial\omega_p} \quad (۲۹)$$

علاوه بر این، پنجره شفافیت و فواصل فرکانس زیر نور و ابر نور با افزایش فشار افزایش می‌یابد (۱۱).



شکل ۲ : سمت راست، تغییر شاخص گروه در برابر انرژی میدان پروب در مقادیر مختلف فشار و سمت چپ، تغییر شاخص گروه در برابر انرژی میدان پروب در مقادیر مختلف دما را نشان می‌دهد.

نتیجه گیری:

در نتیجه، ما شفافیت القایی الکترومغناطیسی (EIT) را در یک نقطه کوانتومی با هندسه دیسک کوانتومی که به شکل یک استوانه مسطح فرض شده است، به صورت نظری بررسی و نشان دادیم. بر اساس انرژی‌های محاسبه شده، طیف جذب، طیف پراکندگی و شاخص گروه را تحت تأثیر ترکیبی از عوامل خارجی مانند میدان مغناطیسی، فشار هیدرواستاتیک میدان لیزر، دما و طول های محصور شدن نقطه کوانتومی مورد مطالعه قرار داده‌ایم. مدولاسیون ضرایب جذب که می‌تواند مناسب برای عملکرد خوب مدولاتورهای نوری و کاربردهای مختلف دستگاه های نوری مادون قرمز را می‌توان با تنظیم قدرت فشار هیدرواستاتیک به راحتی به دست آورد. و همچنین نتیجه گرفتیم که دما و فشار هیدرواستاتیکی می‌توانند شکاف انرژی و خواص نوری نانوساختارها را بخوبی تغییر دهند.

مراجع

[**1**] S. E. Harris, J. E. Field, A. Imamoglu, "Non-linear optical processes using lectromagnetically induced transparency", *Phys. Rev. Lett.*, 64, 1107–11010 (1990). [**2**] G. Alzetta, A. Grozzini, L. Moi, G. orriols, "An experimental method for the observation of transitionsand laser beat resonance in Na vapor", *Nuovo Cimento B*, 36, 5–10 (1976). [**3**] T. van Boxtel, "Electromagnetically Induced Transparency in Rydberg Gas", M.Sc. Thesis in Physics, University of Stuttgart, Germany, 200. [**4**] H.J. Ehrenreich, J. Appl. Phys. 32 (1961) 2155. [**5**] H.O. Oyoko, C.A. Duque, N. Porras-Montenegro, J. Appl. Phys. 90 (2001) 819. [**6**] C.A. Moscoso-Moreno, R. Franco, J. Silva-Valencia, Phys. Status Solidi B 246 (2009) 486. [**7**] S.T. Perez-Merchancano, H. Paredes-Gutierrez, J. Silva-Valencia, J. Phys.: Condens. Matter. 19 (2007) 026225. [**8**] M. Gambhit, S. Gumber, P. K. Jha, M. Mohan, Superlattices and Microstructures, 71, (2014) 147-161. [**9**] B. Vaseghi, N. Mohebi, Jounal of Luminescence, 134, (2013) 352-357[**10**] B. Welber, M. Cardona, C.K. Kim, S. Rodriquez, Phys. Rev B 12 (1975) 5729. [**11**] B. Vaseghi, N. Mohebi, J. Lumin. 134 (2013) 352

Solution of Radiative Transfer Equation in Heterogeneous Tissue Based on Kubelka-Munk Theory

Alireza Mohammadian Pourtalari

Department of Physics, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
E-mail: amp_pprc@yahoo.com

Abstract

The interaction of electromagnetic waves with biological tissues is the most fundamental physical interaction in biology, and its study is expected to have a significant impact on the regulation of the life process, but due to the heterogeneity of the molecules in the biological hull environment, it is not possible to apply Maxwell's equations analytically, so approximate methods and radiation transfer theory should be used. In this paper, an approximate solution for the propagation of electromagnetic waves in biological tissues has been presented by a mathematical modeling based on Kubelka-Munk (K.M.) theory. This theory is an approximation of the radiation transfer equation that explains the emission of diffuse and isotropic radiation through a homogeneous medium to a thickness d along the z-axis, regardless of the reflection of light from the tissue boundary surface. In mathematical calculations and modeling, the thermal effects due to the interaction of the electromagnetic wave with the heterogeneous tissue have been neglected and the intensity of the beam within the tissue is considered according to Lambert's law.

Key words: Radiative Transfer Equation, Mathematical Model, Heterogeneous Tissue, Kubelka-Munk Theory.

1. Introduction

The interaction of electromagnetic waves with tissue is the most basic physical interaction in biology, and it is expected that the study of the propagation of electromagnetic waves and their biological effects will have a significant effect on the regulation of the life process. When electromagnetic waves collide with biological tissues, part of the beam is reflected and the rest enters the tissue. The reflected light acts as a mirror and a scattering. In mirror reflection, the angle of reflection is equal to the angle of light emission, but in reflective reflection, the reflected light has irregular reflection angles. Since the surface of biological tissues, such as skin, is uneven, the latter is practically considered. After light enters the tissue, both absorption and scattering processes can occur and their extent depends on the optical density that controls the amount of beam permeability [1].

The interaction of electromagnetic waves with biological environments depends on the thickness of the layers and the optical properties of the different tissue layers, which is itself a function of the wavelength of the incident radiation. For wavelengths much larger than the cell diameter, the scatter is smaller than the cell structure [2].

To facilitate the mathematical description of this distribution, we consider the radiation of the beam on the tissue as parallel beams that shine perpendicular to the surface of the tissue, and assume that the scattering and absorption centers are uniformly within the tissue. Although the theory of radiation transfer allows a good description of the scattered and absorbed beam, its general solution is not possible, so approximate solutions are considered to solve the radiation transfer equation in a sample (biological tissue). In this paper, with a mathematical modeling based on K.M. theory, an approximate solution for the propagation of electromagnetic waves in biological tissues is presented.

2. Geometry of the radiation

The geometry of the radiation of an electromagnetic wave descending on the sample in the distribution of monochromatic radiation at location $r(x, y, z)$ and in the direction $S(\theta, \phi)$ is shown in Figure (1):

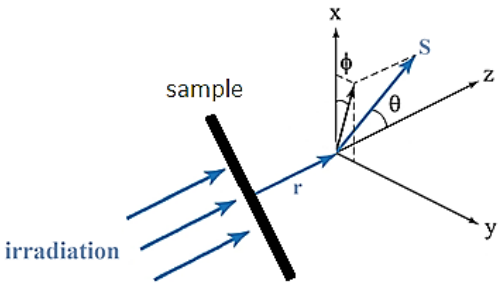


Figure 1: Geometry of the incident radiation on the sample

Accordingly, the single-distribution radiation function $L(r, s)$, which represents the amount of radiant energy passed per unit time from the surface unit perpendicular to the vector S in the unit of spatial angle, can be written as follows:

$$L(r, s) = L_p(r, z) + L_s(r, s) \tag{1}$$

Where $L_p(r, z)$ is the parallel radiation remaining at r in the z direction within the tissue and $L_s(r, s)$ is the scattered radiation at location r and in the direction S within the tissue, which are defined as follows:

$$\frac{dL_p(r, z)}{dz} = -\gamma L_p(r, z) \tag{2}$$

$$\frac{dL_s(r, s)}{ds} = \vec{S}.\vec{\nabla}L_s(r, s) = -\gamma L_s(r, s) + \gamma \int \Phi(s, s')L_s(r, s')\, d\Omega + \gamma\Phi(s, z) + L_p(r, z) \tag{3}$$

In these relations, γ is the attenuation coefficient, $\Phi(s, s')$ is the phase function of the biological environment and $d\Omega$ is the differential element of the spatial angle in the spherical coordinates ($d\Omega = 2\pi\, sin\, \theta\, d\theta d\phi$). Equation (2) shows the attenuation of the parallel beam $L_p(r, z)$ due to direct absorption and scattering in the tissue. The first expression to the right of Equation (3) indicates a decrease in the intensity of the scattered beam due to absorption and scattering. The second expression indicates an increase in the intensity of the beam in the direction S due to light scattering from all directions to this direction. The third expression also shows the increase in beam intensity in the S direction due to light scattering from the z direction to this direction. The integral of the function $L(r, s)$ with respect to the differential of the spatial angle $d\Omega$ at a given interval (4π estradians) shows the radiant flux:

$$F_\Omega = \int L(r, s) d\Omega \tag{4}$$

3. Kubelka-Munk theory

Radiation flux in K.M. theory consists of two fluxes forward (F_+) and backward (F_-), which are defined as follows:

$$F_+ = \int L(r, s)\vec{S}.\vec{z}\, d\Omega \quad , \quad F_- = \int L(r, s)\vec{S}.(-\vec{z})\, d\Omega \tag{5}$$

The total flux is obtained from the sum of two fluxes F_+ and F_- :

$$F = F_+ + F_- \tag{6}$$

The forward and backward scattered photon fluxes are obtained from the following differential equations:

$$\frac{dF_+}{dz} = -A_{KM}\, F_+ + S_{KM}\, F_+ + S_{KM}\, F_- \quad , \quad \frac{dF_-}{dz} = -A_{KM}\, F_- - S_{KM}\, F_- + S_{KM}\, F_+ \tag{7}$$

Where, A_{KM} and S_{KM} coefficients are called the Kubelka-Monk absorption and dispersion coefficients, respectively.

Figure (2) shows a schematic of two diffusion fluxes (forward flux and reverse flux). The forward flux (F_+) is in the direction of incident radiation and the forward flux is (F_-) in the opposite direction [3]:

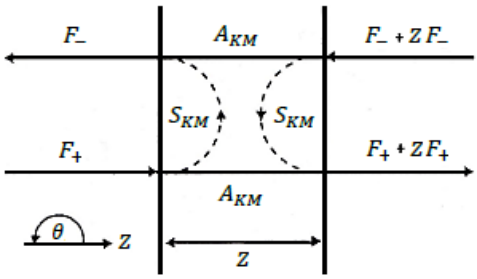


Figure 2: Schematic of forward and backward fluxes

The answers to the differential equation (7) are as follows:

$$F_+(z) = c_{11}e^{-\gamma z} + c_{12}e^{+\gamma z} \quad , \quad F_-(z) = c_{21}e^{-\gamma z} + c_{22}e^{+\gamma z} \tag{8}$$

The coefficients $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ are the members of a matrix differential equation in transport theory and γ the attenuation coefficient [4]. Equation (8) show that with increasing tissue thickness in the direction of z (direction of average incident radiation), the forward flux decreases and the backward flux increases due to the absorption and dispersion of the biological environment.

4. Optical properties

There are several methods for obtaining the optical properties of biological tissues based on quantities such as trajectory intensities, reflectance, and scatter. These methods are generally divided into two categories of direct and indirect methods [4]. In direct methods, α and β coefficients are measured without considering the mathematical model for the optical properties of the texture and only using the experimental design scheme. Figure (3) shows a schematic of the calculation of the optical properties of α and β based on K.M. theory, in which the values of R and T are obtained first by experimental measurement of the optical quantities of reflected and transmitted beams. Then, using a mathematical model, the optical properties of bioavailable tissue are calculated. Because the photons absorbed by the tissue cannot be detected, so the measurement of the absorption coefficient α based on experimental methods is very difficult [5]. In indirect methods that show how the electromagnetic wave is scattered in the tissue, a theoretical model is used and with the help of mathematical modeling, the optical properties of the biological tissue are calculated. The advantage of using this mathematical modeling is that the absorption coefficient α and the reduced scattering coefficient $\beta(1-g)$ are obtained indirectly, where g is the heterogeneity coefficient of the biological tissue and is a measure of the scattering anisotropy.

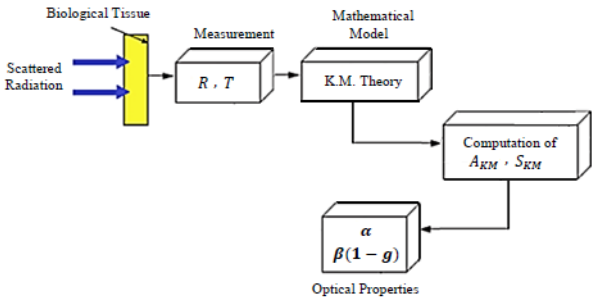


Figure 3: Scheme of calculation of optical properties of tissue in indirect method

For $g = 1$, the scattering occurs completely forward and for $g = -1$, the scattering occurs completely backward, and for $g = 0$, isotropic scattering occurs. The range of g for most biological tissues is between 0.7 and 0.99 . Based on the proposed model, for fully forward scattering ($g = 1$):

$$\gamma = [A_{KM}^2 + 2A_{KM}\, S_{KM}]^{1/2} \tag{9}$$

Assuming that the phase function is homogeneous in this modeling, the amount of beam intensity at the distance z from the tissue surface decreases exponentially due to scattering with attenuation coefficient γ, but its radial shape does not change. It can be written according to Lambert's law:

$$I(r,z) = I_0(r)\exp(-\gamma z) \tag{10}$$

From Equations (9) and (10), the electromagnetic wave intensity is obtained as follows:

$$I(r,z) = I_0(r)\exp\left\{-z[A_{KM}(A_{KM} + 2\,S_{KM})]^{1/2}\right\} \tag{11}$$

5. Results

The condition for using K.M. theory is that the electromagnetic wave is propagated in the form of a beam and is wide, so we consider radiation as a Gaussian curve in which the maximum radiation intensity is at its center and gradually it decreases around. If the electromagnetic wave strikes the surface of biological tissue in the form of a Gaussian wave, the intensity of the beam deep inside the tissue will be as follows:

$$I(r,z) = I_0\exp\left(\frac{-2r^2}{W^2}\right)\exp\left\{-z[A_{KM}(A_{KM} + 2\,S_{KM})]^{1/2}\right\} \tag{12}$$

This equation shows the intensity of the electromagnetic wave propagated within the biological tissue in the proposed mathematical model in terms of K.M. coefficients.

The results show that in the process of interaction of electromagnetic waves with biological tissues, both absorption and scattering factors are involved, but because the role of scattering is very small compared to absorption, so $\beta = 0$ is often considered. From relations (10) and (12) we have:

$$I(r,z) = I_0\exp\left(\frac{-2r^2}{W^2}\right)\exp\left\{-z[A_{KM}(A_{KM} + 2\,S_{KM})]^{1/2}\right\} \tag{13}$$

The advantage of modeling done in this paper based on K.M. theory is that the absorption and scattering coefficients α and β can be obtained directly through the reflection and transfer coefficients R and T (measured by experimental methods).

$$A_{KM} = (p-1)\,S_{KM} \quad , \quad S_{KM} = \frac{1}{pz}\,ln\left[\frac{1-R(p+q)}{T}\right] \tag{14}$$

The coefficients p and q are obtained from the following equations:

$$p = \frac{1+R^2-T^2}{R} \quad , \quad q = (p^2-1)^{1/2} \tag{15}$$

The final results of the calculations in the proposed mathematical model give the following relations for the optical properties of the biological tissue:

$$\alpha = \frac{1}{2}A_{KM} = \left[\frac{1-R+R^2-T^2}{2R}\right]S_{KM} \tag{16}$$

$$\beta = \left[\frac{1+7R+R^2-T^2}{6(1-g)R}\right]S_{KM} = \frac{4R}{3z(1-g)(1+R^2-T^2)}\,ln\left\{\frac{T^2-R^2}{T} - \left[\frac{1+R^2(1+R^2)}{T^2} + 2(1+R^2) - T^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{6(1-g)}A_{KM} \tag{17}$$

6. Discussion

In mathematical calculations and modeling, the thermal effects due to the interaction of the electromagnetic wave with the biological tissue have been neglected. Depending on the time of irradiation and the maximum temperature of the tissue, these effects can cause changes in the physical and chemical properties of the tissue and cause damage. Also K.M. theory is one-dimensional modeling and the angular distribution of the beam intensity $I(Cos\theta)$ is unpredictable. Using other approximate theories such as Beam Broadening Theory, the value of variance W^2 can be considered as a function of z and changes in the shape of the radial distribution of the electromagnetic wave can be considered.

References

[1] M.E. Khosroshahi, (2012), Laser Application in Medicine, Amirkabir University Press, 130-135.
[2] J. L. Boulnois, (1986), *Lasers Med. Sci.*
[3] P. Kuubelka, F. Munk, Z. Techn. (1931), Phys 12.
[4] P. Kuubelka, (1948), Z. Techn. Phys 38.
[5] J.W. Pickering, and etal, (1992), Opt. Soc. Am.

امواج سالیتاری ذره گون از معادلات کلاین-گوردون غیرخطی

سیدسیناشفیعی
دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
sinashafee۱۹۹۷@gmail.com

فاطمه احمدی کلاته
عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
Fahmadi@sru.ac.ir

فرزانه نوروزی لرکی
عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
fnlarki@gmail.com

چکیده

معادلات تحولی غیرخطی در ریاضی- فیزیک به دلیل نقش مهم شان در تمامی رشته های علوم به شدت مطالعه و بررسی می شوند. امواج سالیتاری و سالیتونی به جواب های خاصی از معادلات موج غیرخطی گفته می شود که چگالی انرژی آنها جایگزیده است. در این مقاله قصد داریم با استفاده از روش تانژانت هایپربولیک جواب های سالیتاری یا سالیتونی یک معادله کلاین-گوردون غیرخطی را بطور نمونه بدست بیاوریم و همچنین جایگزیده بودن چگالی انرژی این جوابها را مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم.

کلید واژه ها : معادله کلاین-گوردون، امواج سالیتاری، امواج سالیتونی، روش تانژانت هایپربولیک

Particle-Goon Solitary waves from nonlinear Klein-Gordon equations

Shafiee, Seyed Sina[1]; Ahmadi, Fatemeh[1]; Norouzi , Farzaneh[2]
[1] *Department of Physics, University of Shahid Rajaee Teacher Training, Tehran,*
[2] *Department of Mathematical, University of Shahid Rajaee Teacher Training, Tehran*

Abstract

Non-linear evolutionary equations in mathematics- physics are intensively studied and investigated due to their important role in all majer of science. Solitary and Soliton waves are special solutions of nonlinear wave equations whose energy density is localised. In this article, we are going to use the hyperbolic tangent method to obtain solitary or soliton solutions of a non-linear Klein-Gordon equation as an example, and also to study and check the localised of the energy density of these solutions.

Keywords: Klien-Gordon equation, Soliton waves, Solitary waves, Hyperbolic tangent method

مقدمه

اولین گزارش از بسته موج های جایگزیده در سال ۱۸۳٤ میلادی توسط دانشمند اسکاتلندی جان اسکات راسل ارائه شد. ایشان مشاهده کرد که یک موج منفرد(سالیتاری) خوش ترکیب می تواند مسافت زیادی را در یک کانال باریک و کم عمق بدون تغییر شکل یا کاهش سرعت طی کند. ایشان اسم این موج را موج انتقال (Translation wave) نامید. کشف این امواج، دانشمندان را ترغیب کرد تا حجم عظیمی از کار تحقیقاتی را برای مطالعه این امواج اختصاص دهند. در سال ۱۸۹۵میلادی دو هلندی به نام های کورتوگ و دوریس توانستند یک معادله دیفرانسیل جزئی غیر

خطی استخراج کنند که معروف به معادله Kdv است[۱]. معادله Kdv یکی از اولین معادلات مربوط به امواج سالیتاری است. در سال ۱۹٦٥ میلادی زاباسکی و کراسکل در بررسی برخورد میان چنین بسته موج به نتایج جالبی دست یافتند. آنها متوجه شدند که انرژی و سرعت اولیه این امواج در برخوردها پایسته می ماند. در واقع این بسته موج های جایگزیده در برهمکنش با یکدیگر مانند ذرات رفتار می کنند و به این دلیل آن ها را سالیتون نامیدند[۱]. خوب است در اینجا به این نکته اشاره کنیم، که دینامیک سالیتون شبیه دینامیک کلاسیک یک ذره است که در میدان پتانسیل موثر حرکت می کند.

امواج سالیتاری در انواع مختلفی مانند سالیتون ها، کینک ها، کاسپون ها، کامپکتون ها، پیکون ها و اشکال دیگر ظاهر می شوند که هر کدام از آنها، ویژگی های خاص خود را دارند[۲]. در این مقاله، جوابهای سالیتاری یک معادله کلاین–گوردون غیر خطی را به کمک روش تانژانت هایپربولیک بدست می آوریم و جایگزیدگی انرژی آن را بررسی می کنیم.

روش تانژانت هایپربولیک

برای حل معادلات غیرخطی روش های مختلفی بکار گرفته می شود، یکی از روش های حل معادلات غیرخطی، روش تانژانت هایپربولیک است. اخیرا حالت های توسعه یافته ی متنوعی از این روش معرفی شده اند و برای حل معادلاتی از قبیل معادلات kdv و معادلات کلاین–گوردون و... بکار گرفته شده اند. در اینجا، ابتدا با استفاده از متغیر موج $\xi = x - vt$ معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی

$$P(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_{xx}, \dots) = 0 \qquad (۱)$$

را به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی

$$Q(\phi, \phi', \phi'', \dots) = 0 \qquad (۲)$$

تبدیل می کنیم. از معادله ی (۲) انتگرال گرفته و ثابت های انتگرال را مساوی با صفر قرار می دهیم. سپس یک متغیر مستقل جدید معرفی می کنیم

$$y = \tanh(\mu\xi) \qquad (۳)$$

سپس مشتق ها به صورت های زیر بدست می آیند

$$\frac{d}{d\xi} = \mu(1 - y^2)\frac{d}{dy}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \mu^2(1 - y^2)\left(-2y\frac{d}{dy} + (1 - y^2)\frac{d^2}{dy^2}\right) \qquad (٤)$$

روش Tanh، سری متناهی زیر را برای جواب ارائه می دهد

$$\phi(\mu\xi) = S(y) = \sum_{m=0}^{M} a_m y^m \qquad (٥)$$

پارامتر M یک عدد صحیح مثبت خواهد بود. برای تعیین پارامتر M، جمله ی خطی (مشتق) با بالاترین مرتبه با جمله ی غیرخطی با بالاترین درجه موازنه می شود. به این صورت که بالاترین توان جمله ی غیرخطی در M ضرب شده و در یک طرف تساوی قرار می گیرد و بالاترین مرتبه مشتق نیز با M جمع شده و در طرف دیگر تساوی قرار می‌گیرد، سپس با حل معادله ی حاصل M محاسبه می شود. با جایگذاری سری (٥) در معادله (۲) یک معادله ی جبری شامل توان های مختلف y به دست می آید، با جدا کردن ضرایب توان های مختلف y و مساوی صفر قرار دادن آن ها، به یک دستگاه معادلات می رسیم که با حل آن، پارامتر های a_m $(m = 0, \dots, M)$ و μ به دست می آیند. با جایگذاری این مقادیر در سری رابطه (٥) جواب های معادله به دست می آیند[۳و٤].

معادله کلاین–گوردون

فرض کنید، چگالی لاگرانژی برای میدان ϕ به صورت زیر است

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi) \qquad (٦)$$

وردش گیری نسبت به ϕ معادله اویلر–لاگرانژ زیر بدست می آید

$$\Box\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \qquad (۷)$$

معادله فوق فرم کلی معادله کلاین– گوردون می باشد، که خطی و

غیر خطی بودن معادله(۷) به انتخاب پتانسیل $V(\phi)$بستگی دارد. اگر پتانسیل به صورت زیر باشد

$$V(\phi)=\frac{1}{2}\alpha\phi^2-\frac{1}{4}\beta\phi^4+\frac{1}{6}\gamma\phi^6 \qquad (8)$$

پس معادله (۷) به صورت زیر نوشته می شود

$$\Box\phi+\alpha\phi-\beta\phi^3+\gamma\phi^5=0 \qquad (9)$$

معادله فوق در دوبعد به صورت زیر است

$$\phi_{tt}-\phi_{xx}+\alpha\phi-\beta\phi^3+\gamma\phi^5=0 \qquad (10)$$

که اندیس x و t به ترتیب معرف مشتق نسبت به مکان و زمان است. در این جا سرعت c (سرعت نور) را برابر یک گرفته و معادله (۱۰)را با استفاده از روش تانژانت هایپربولیک حل می کنیم[۳]. برای شروع با استفاده از متغیر موج $\xi=x-vt$ معادله ی (۱۰) به معادله ی دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می شود

$$(v^2-1)\phi''+\alpha\phi-\beta\phi^3+\gamma\phi^5=0 \qquad (11)$$

روش تانژانت هایپربولیک سری متناهی (۵) برای جواب ارائه می دهد

$$\phi=S(y)=\sum_{m=0}^{M}a_m y^m \qquad (12)$$

پس از جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱)، برای محاسبه پارامتر M جمله ی با بالاترین مرتبه مشتق یعنی ϕ'' با جمله غیر خطی ϕ^5، برابر قرار می دهیم، با کمی محاسبه بدست می آید

$$M=\frac{1}{2} \qquad (13)$$

M باید یک عدد طبیعی باشد، که در اینجا M یک عدد طبیعی نیست. این مستلزم استفاده از تغییر متغیر زیر می باشد

$$\phi=u^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

با جایگذاری معادله (۱٤) در معادله (۱۱) داریم

$$2(v^2-1)uu''-(v^2-1)(u')^2+4\alpha u^2-4\beta u^3+4\gamma u^4=0 \qquad (15)$$

طبق روش تانژانت هایپربولیک سری زیر را در نظر می گیریم

$$u=S(y)=\sum_{m=0}^{M}a_m y^m$$

پس از جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۱۵) ، با موازنه ی جمله ی با بالاترین مرتبه مشتق uu'' با جمله ی غیرخطی u^4، M را بدست می آوریم

$$M=1 \qquad (16)$$

پس جواب به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,t)=S(y)=a_0+a_1y \quad \text{و} \quad y=\tanh(\mu\xi) \qquad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۵) پس داریم

$$2(v^2-1)(a_0+a_1y)\mu^2(1-y^2)(-2ya_1)-(v^2-1)\left(\mu(1-y^2)a_1\right)^2+4\alpha(a_0+a_1y)^2-4\beta(a_0+a_1y)^3+4\gamma(a_0+a_1y)^4=0 \qquad (18)$$

معادله (۱۸) را حل کرده و ضرایب هر توانی از y را برابر صفر قرار می دهیم. در نهایت به دستگاه معادلات زیر می رسیم

$$\begin{aligned}
&y^4 \text{ ضریب}: && 3\mu^2(v^2-1)+4\gamma a_1^2=0\\
&y^3 \text{ ضریب}: && 4\mu^2a_0(v^2-1)-4\beta a_1^2+16\gamma a_0a_1^2=0\\
&y^2 \text{ ضریب}: && 2\mu^2(1-v^2)+4\alpha-12\beta a_0+24\gamma a_0^2=0\\
&y^1 \text{ ضریب}: && 4\mu^2(1-v^2)+8\alpha-12\beta a_0+16\gamma a_0^2=0\\
&y^0 \text{ ضریب}: && \mu^2a_1^2(1-v^2)+4\alpha a_0^2-4\beta a_0^3+4\gamma a_0^4=0
\end{aligned} \qquad (19)$$

با حل دستگاه معادلات (۱۹) با استفاده از نرم افزارهای میپل یا متلب ما دو دسته جواب برای پارامتر های a_0 ، a_1 ، μ و γ به صورت زیر به دست می آوریم

دسته اول

$$a_0=\frac{2\alpha}{\beta} \quad \text{و} \quad a_1=\frac{2\alpha}{\beta} \quad \text{و} \quad \mu=\sqrt{\frac{\alpha}{1-v^2}} \quad \text{و} \quad \gamma=\frac{3\beta^2}{16\alpha}$$

و دسته دوم

$$a_0=\frac{2\alpha}{\beta} \quad \text{و} \quad a_1=-\frac{2\alpha}{\beta} \quad \text{و} \quad \mu=\sqrt{\frac{\alpha}{1-v^2}} \quad \text{و} \quad \gamma=\frac{3\beta^2}{16\alpha}$$

در هر دو جواب برای μ این شرط زیر باید در نظر گرفت

$$\frac{\alpha}{1-v^2}>0 \quad \text{و} \quad v\neq\pm1$$

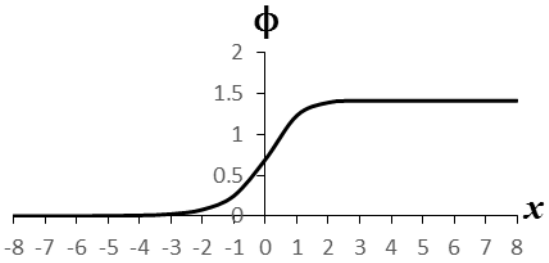
با توجه به جواب های فوق و با توجه به این که $\phi=u^{\frac{1}{2}}$، جواب های معادله (۱۰) به صورت زیر بدست می آیند

$$\phi(x,t)=\left\{\frac{2\alpha}{\beta}\left[1+\tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1-v^2}}(x-vt)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (20)$$

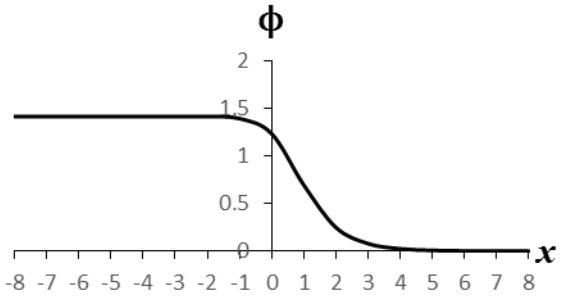
و

$$\phi(x,t)=\left\{\frac{2\alpha}{\beta}\left[1-\tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{1-v^2}}(x-vt)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (21)$$

جواب سالیتاری (۲۰)، کینک و جواب سالیتاری (۲۱)، آنتی کینک است. نمودار جواب های فوق با در نظر گرفتن مقادیر $\beta = ۲$ ، $\alpha = ۱$ و $v = ۰.۵$ در زمان $t = ۱$ به صورت زیر رسم می شود



شکل۱: نمودار کینک رابطه (۲۰)



شکل۲: نمودار آنتی کینک رابطه (۲۱)

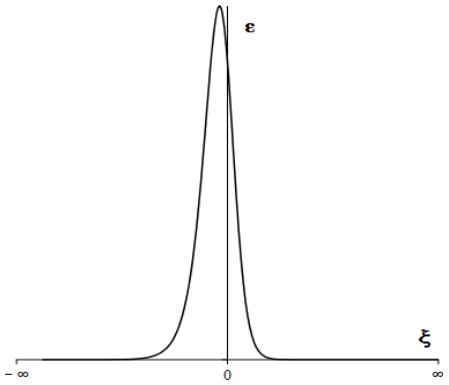
برای این میدان کلاین- گوردون، انرژی کل به صورت زیر می باشد

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}(\phi')^{۲}(v^{۲}+۱) + \frac{۱}{۲}\alpha\phi^{۲} - \frac{۱}{۴}\beta\phi^{۴} + \frac{۱}{۶}\gamma\phi^{۶}\right) d\xi$$

چگالی انرژی عبارت است

$$\varepsilon = \frac{۱}{۲}(\phi')^{۲}(v^{۲}+۱) + \frac{۱}{۲}\alpha\phi^{۲} - \frac{۱}{۴}\beta\phi^{۴} + \frac{۱}{۶}\gamma\phi^{۶} \quad (۲۲)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\xi = x - vt$ جواب کینک معادله (۱۰) را برحسب ξ بیان می کنیم و سپس با جایگذاری رابطه بدست آمده در رابطه (۲۲)، نمودار چگالی انرژی کینک با در نظر گرفتن این مقادیر $\alpha = ۱$ و $\beta = ۲$ و $\gamma = \frac{۳}{۴}$ و $v = ۰.۵$ رسم می کنیم



شکل ۳: نمودار چگالی انرژی کینک

نتیجه گیری

در آخر می توان گفت، سالیتون ها به عنوان جواب های یک کلاس گسترده از معادلات دیفرانسیل جزئی با پراکندگی ضعیف غیرخطی، که سیستم های فیزیکی را توصیف می کنند، است. سالیتون ها امواج سالیتاری با خاصیت پراکندگی الاستیک هستند. امواج سالیتاری دارای چگالی انرژی جایگزیده هستند که ما این جایگزیدگی را در شکل۳ برای یک موج سالیتاری حاصل از یک معادله کلاین–گوردون نشان دادیم. این جایگزیدگی، مبنای توصیف رفتار ذره گون این امواج است.

مرجع ها

[۱] Hereman,Willy; *"Shallow Water Waves and Solitary Waves"*; National Science Foundation (NSF) of the USA under Award No. (۲۰۱۳) ۳-۵.

[۲]Waswas, Abdul-Majid; *"Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory"*; Springer Berlin, Heidelberg. (۲۰۰۹) ۴۸۹-۴۹۱.

[۳] Wazwaz, Abdul-Majid; *"Compactons, Solitons and periodic solutions for some forms of nonlinear Klein-Gordon equations"*; *Elsevier*. (۲۰۰۵) ۱۰۰۵-۱۰۰۸.

[٤] غفوری ابرقویی، آسیه؛ *« حل تحلیلی معادلات غیرخطی با مشتقات جزئی با روش های* tanh *و* tanh-coth *»*؛ کارشناسی ارشد؛ دانشگاه یزد؛ صفحه ۸ تا۹.

حل معادله هدایت حرارتی غیرخطی در همجوشی محصورشدگی لختی با بررسی اثر تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون- یون

علیرضا محمدیان پورطالاری

گروه فیزیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول : amp_pprc@yahoo.com

چکیده

جذب انرژی لیزر توسط پلاسما یکی از مکانیسم های اساسی در همجوشی محصورشدگی لختی است و برخورد الکترون-یون در این فرآیند اهمیت ویژه ای دارد. تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون-یون اثر مهمی است که با در نظر گرفتن نقش فرآیند تابش ترمزی معکوس در محاسبات گنجانده شده است. این مقاله به بررسی اثرات تصحیح کوانتومی بر ویژگی‌های مشخصه معادله هدایت حرارتی غیرخطی در واکنش همجوشی دوتریوم-تریتیوم می‌پردازد. پس از مطالعهٔ فرکانس برخورد کلاسیک ، مشخص شد که فرکانس برخورد اصلاح شدهٔ کوانتومی منجر به کاهش انرژی آستانهٔ همجوشی می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده برای دمای یون و انرژی آستانه ، بهبود شرایط وقوع واکنش همجوشی محصورشدگی لختی را نشان داد. برآورد دیگری نیز برای واکنش همجوشی هیدروژن-بور ارائه شد.

کلید واژه ها: تصحیح کوانتومی، فرکانس برخورد، هدایت حرارتی، تابش ترمزی معکوس، انرژی آستانه

Solving Nonlinear Heat Conduction Equation in ICF by investigating the Effect of Quantum Correction of Electron–Ion Collision Frequency

Alireza Mohammadian Pourtalari

Department of Physics, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran
E-mail: amp_pprc@yahoo.com

Abstract

Absorption of laser energy by plasma is one of the basic mechanisms in inertial confinement fusion and electron-ion collision is special importance in this process. Quantum correction of electron-ion collision frequency is an important effect that is included by considering the role of inverse bremsstrahlung process in calculations. This article investigates the effects of quantum correction on characteristic features of nonlinear heat conduction equation in the Deuterium-Tritium (D-T) fusion reaction. Following the studying of the classical collision frequency, it was found that the modified quantum collision frequency leads to a decrease in the fusion threshold energy. The results obtained for the ion temperature and the fusion threshold energy showed the improvement of the conditions for inertial confinement fusion reaction. Another estimate was made for Hydrogen-Boron (H-^{11}B) fusion reaction.

Key words: Quantum Correction, Collision Frequency, Heat Conduction, Inverse Bremsstrahlung, Threshold Energy.

مقدمه

در همجوشی محصورشدگی لختی ، هدفهای حاوی سوخت هسته‌ای را توسط باریکه های پرتوان لیزری بمباران می‌کنند و به این طریق انرژی لازم برای گرمایش سوخت تا دمای همجوشی را تأمین می کنند. وقتی پالس پر انرژی لیزر به هدف برخورد می‌کند ، مادهٔ هدف از سطح آن بخار شده و در نتیجه لایه‌ای از پلاسما ایجاد می‌گردد که به آن کرونا می‌گویند. میدان الکتریکی القا شده توسط لیزر سبب نوسان الکترونهای پلاسما می‌گردد و این انرژی

نوسانی در اثر برخوردهای الکترون–یون به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود ، این فرآیند را تابش ترمزی معکوس می نامند [۱].

همانطوری که در تابش ترمزی ، الکترون در میدان الکتریکی یون حرکت می کند و در اثر برخورد کولنی با یون شتاب گرفته و امواج الکترومغناطیسی تابش می‌کند ، در تابش ترمزی معکوس نیز الکترون پراکنده شده در میدان یون ، یک فوتون جذب می‌کند. سطح مقطع چنین برخورد کولنی از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\frac{d\sigma_{ei}}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left[\frac{Ze^2}{m_e v^2}\right]^2 \frac{1}{sin^4(\theta/2)} \qquad (۱)$$

که در آن θ زاویه پراکندگی و Ω زاویه فضایی دیفرانسیلی است. سطح مقطع کل σ_{ei} برای برخورد الکترون– یون با انتگرال‌گیری روی تمام زوایای ممکن پراکندگی بدست می‌آید:

$$\sigma_{ei} = \int \frac{d\sigma_{ei}}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{2}\left[\frac{Ze^2}{m_e v^2}\right]^2 \int_0^{\pi} \frac{sin\,\theta}{sin^4(\theta/2)} d\theta \qquad (۲)$$

این انتگرال به ازای $\theta \to ۰$ تا $\theta \to \pi$ که هم ارز $b \to \infty$ و $b \to 0$ است واگرا می باشد. اما وضعیت فیزیکی موجود در یک پلاسما اجازه تعریف حدود بالا و پایین (b_{max}, b_{min}) را برای این انتگرال گیری می‌دهد و لذا معادله (۲) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\sigma_{ei} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{Ze^2}{m_e v^2}\right]^2 \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{sin\,\theta}{sin^4(\theta/2)} d\theta \qquad (۳)$$

حد بالای تعریف شده همان طول دبای λ_D پلاسما است که برخوردهای با فاصله زیاد را بی‌تأثیر می‌کند و حد پایین b_{min} اغلب مساوی با طول موج دوبروی $Ze^2/k_B T_e$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین سطح مقطع کلی در پلاسما با معادلهٔ زیر داده می‌شود:

$$\sigma_{ei} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{Ze^2}{m_e v^2}\right]^2 \int_{Ze^2/k_B T_e}^{\lambda_D} \frac{sin\,\theta}{sin^4(\theta/2)} d\theta \qquad (٤)$$

سطح مقطع برخورد یک کمیت مهم برای تحلیل واکنش‌های همجوشی هسته‌ای می‌باشد، زیرا میزان احتمال انجام واکنش بین زوج ذرات را بیان می‌کند [۲]. با دانستن سطح مقطع برخورد می‌توان فرکانس برخورد الکترون– یون را محاسبه نمود.

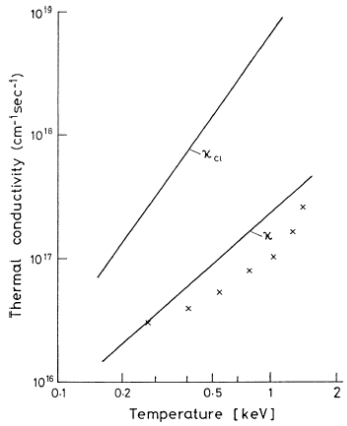
فرکانس برخورد ν_{ei} به عنوان تعداد برخوردهایی در نظر گرفته می شود که یک الکترون با یونهای زمینه در واحد زمان انجام می‌دهد و به می‌دهد و به چگالی یون n_i ، سطح مقطع σ_{ei} و سرعت الکترون v_e بستگی دارد:

$$\nu_{ei} = n_i \sigma_{ei} v_e = \left(\frac{2\pi}{m_e}\right)^{1/2} \frac{4Z^2 e^4 n_i}{3(k_B T_e)^{3/2}} ln\,\Lambda \qquad (۵)$$

که در آن ضریب $ln\,\Lambda$ لگاریتم کولنی نامیده می‌شود.

تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون– یون

یک توازن معنادار بین همجوشی محصورشدگی مغناطیسی و همجوشی محصورشدگی لختی ، به آزمایشات انجام شده توسط رزوموا [۳] باز می‌گردد. اندازه‌گیری های رزوموا پیش بینی نمود که هدایت حرارتی الکترونها در پلاسمای دوتریوم– تریتیوم در همجوشی محصورشدگی مغناطیسی ۲۰ برابر کمتر از هدایت حرارتی کلاسیکی آنها است. علت این امر از طریق تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترونها با یونها توضیح داده شده است [٤]. شکل (۱) ، هدایت حرارتی اندازه‌گیری شده در مقایسه با هدایت حرارتی کلاسیکی در پلاسمای دوتریوم– تریتیوم بر حسب دما را در یک توکاماک نشان می دهد:



شکل ۱ : هدایت حرارتی اندازه‌گیری شده در مقایسه با هدایت حرارتی کلاسیکی در پلاسمای دوتریوم– تریتیوم بر حسب دما

تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون– یون برای اولین بار توسط بته [۵] مطرح شد. وی فرکانس کلاسیکی برخورد را به صورت زیر اصلاح نمود:

$$\nu_e = \begin{cases} \nu_{ec} & T < T^* \\ \nu_{ec}\dfrac{T}{T^*} & T > T^* \end{cases} \qquad (٦)$$

که در آن:

$$T^* = (\frac{4}{3})Z^2mc^2\alpha^2 \qquad (۷)$$

در این رابطه Z عدد بار الکتریکی یون ، m جرم سکون الکترون ، c سرعت نور ، $\alpha = 2\pi e^2/hc$ ثابت ساختار ریز ، e بار الکترون و h ثابت پلانک است.

از معادلهٔ (۲۵) مرجع [٦] برای هدایت حرارتی الکترونها با تصحیح کوانتومی داریم:

$$K_e = \begin{cases} K_{ec} & T < T^* \\ K_{ec}\dfrac{T^*}{T} & T > T^* \end{cases} \qquad (۸)$$

هدف اصلی این مقاله ، بررسی اثر تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون- یون بر ویژگی‌های مشخصهٔ معادلهٔ هدایت حرارتی غیرخطی در واکنش همجوشی دوتریوم-تریتیوم [۷] است. برای این منظور ارزیابی جدیدی از معادلات انتقال حرارت در واکنش گرما هسته‌ای دوتریوم- تریتیوم و چگالی شار انرژی آستانه انجام می گیرد. ابتدا باید ضریب هدایت حرارتی بکار رفته در مرجع [۷] ، به شکل زیر تغییر یابد:

$$K_e = \frac{20(2/\pi)^{3/2}[T_e^{3/2} \times T^*]}{(m_e^{1/2}e^4 \ln \Lambda)} \qquad (۹)$$

با توجه به اینکه توان دمای الکترون از $\frac{5}{2}$ به $\frac{3}{2}$ کاهش یافته است ، بنابراین معادلهٔ هدایت حرارتی غیرخطی الکترون بر اساس معادلهٔ (۲۹) مرجع [۷] به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}(T_e^{3/2}\frac{\partial T_e}{\partial x}) \qquad (۱۰)$$

معادلات (۹) و (۱۰) و (۱۱) و (۱۲) مرجع [۷] هم به شکل زیر تغییر می یابد:

$$T_e = (\frac{Q^2}{at})^{2/7} f(\xi) \qquad (۱۱)$$

$$f(\xi) = \left[\frac{3}{18}(\xi_0^2 - \xi^2)\right]^{2/3} \qquad (۱۲)$$

$$\xi_0^{7/2} = \frac{(7/2)^{5/2}2^{-1/2}}{\frac{3}{2}\pi^{3/4}}\left[\frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(2/3)}\right]^{3/2} \qquad (۱۳)$$

$$\xi = \frac{x}{(Q^{3/2}at)^{2/7}} \qquad (۱٤)$$

برآورد انرژی آستانهٔ همجوشی

برای ارزیابی جزئیات مربوط به چگالی شار انرژی آستانه ، از محاسباتی استفاده می‌کنیم که بسیار نزدیک به محاسبات چو [۸] می‌باشند ، زیرا معادلات هیدرودینامیکی شامل معادلهٔ پیوستگی چگالی ، معادلهٔ آهنگ واکنش ، معادلهٔ حرکت و معادلات دمای الکترون و یون می‌توانند به خوبی ساختار و رفتار یک موج واکنش گرما هسته‌ای را توصیف کنند:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + u\frac{\partial Y}{\partial x} = W \qquad (۱٦)$$

که در آنها ρ چگالی جرمی، u سرعت جرمی و Y کسری از مادهٔ سوخته شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \frac{n_\alpha + n_n}{n_D + n_T + n_\alpha + n_n} \qquad (۱۷)$$

تابع آهنگ واکنش همجوشی W نیز از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$W = \frac{1}{2}n(1-Y)^2\langle\sigma V\rangle \qquad (۱۸)$$

معادلهٔ حرکت به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\rho\frac{k_b}{m_i}\frac{\partial}{\partial x}[\rho(T_i + T_e)] + \rho^{-1}\left[(\mu_i + \mu_e)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad (۱۹)$$

که در آن عبارتهای مربوط به فشار و چسبندگی نیز شامل شده‌اند. معادلات دمای یون والکترون به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + u\frac{\partial T_i}{\partial x} = -\frac{2}{3}T_i\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2m_i}{3K_b\rho}\mu_i(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \frac{2m_i}{3K_b\rho}\frac{\partial}{\partial x}(K_i\frac{\partial T_i}{\partial x}) + W_i + \frac{T_e - T_i}{\tau_{ei}} \qquad (۲۰)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + u\frac{\partial T_e}{\partial x} = -\frac{2}{3}T_e\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2m_i}{3k_b\rho}\mu_e(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \frac{2m_i}{3k_b\rho}\frac{\partial}{\partial x}(K_e\frac{\partial T_e}{\partial x}) + W_e + \frac{T_i - T_e}{\tau_{ei}} - A\rho T_e^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۱)$$

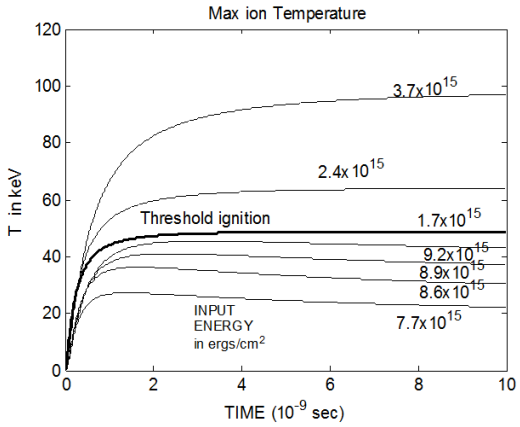
که در آنها طرف راست شامل فشار ، چسبندگی ، هدایت ، انرژی گرما هسته‌ای تولیدشده و عبارتهای تعادلی می‌باشد. آخرین عبارت در طرف راست معادلهٔ (۲۱) نیز عبارت مربوط به تابش ترمزی می‌باشد.

نتیجه گیری و بحث

با فرض همدمایی الکترونها و یونها $(T_e = T_i)$ به هنگام گداخت و صرفنظر کردن از هدایت حرارتی یونها و پس از اندکی محاسبه، معادلهٔ نهایی انرژی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W_i + W_e = A\rho T_e^{1/2} + \frac{4}{3}T_e\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2m_i}{3k_b\rho}\frac{\partial}{\partial x}(K_e\frac{\partial T_e}{\partial x}) \qquad (۲۲)$$

با استفاده از این معادله ، بیشینهٔ دمای یون در پلاسمای همجوشی دوتریوم– تریتیوم بدست می‌آید. شکل (۲) ، منحنی‌های بیشینهٔ دمای یون را نشان می دهد:



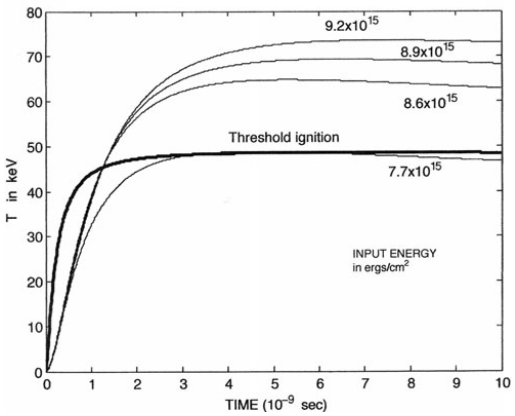
شکل۲: بیشینهٔ دمای یون در پلاسمای همجوشی دوتریوم– تریتیوم با در نظر گرفتن اثر تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون–یون

درشکل (۲)، انرژی آستانهٔ همجوشی برابر است با:

$$E^*_{threshold} \approx 1.7 \times 10^{15} erg/cm^2 \qquad (۲۹)$$

بنابراین در اثر تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون– یون، انرژی آستانهٔ همجوشی برابر با $1.7 \times 10^{15} erg/cm^2$ بدست می آید که نسبت به نتایج قبلی، کاهش یافته است و شرایط وقوع واکنش همجوشی دوتریوم–تریتیوم را بهبود بخشیده است.

برآورد دیگری نیز برای واکنش همجوشی هیدروژن–بور انجام شد که در آن ، انرژی آستانهٔ همجوشی برابر با $8.6 \times 10^{15} \mathrm{erg/cm^2}$ بدست آمد. می توان نتیجه گرفت که در مورد هیدروژن–بور به علت بزرگ بودن سد کولنی بین هسته ها و کوچک بودن سطح مقطع واکنش ، مقدار انرژی آستانه برای وقوع واکنش همجوشی بیشتر از واکنش همجوشی دوتریوم–تریتیوم می باشد.



شکل۳: بیشینهٔ دمای یون در پلاسمای همجوشی هیدروژن– بور با در نظر گرفتن اثر تصحیح کوانتومی فرکانس برخورد الکترون–یون

در حالت آستانه، اتلاف تابش ترمزی با هدایت حرارتی الکترونها برابر می‌شود. منحنی‌های پایین حالت آستانه، مربوط به احتراق ساده می‌باشند که بعد از رسیدن به یک مقدار بیشینه شروع به کاهش می‌کنند و منحنی‌های بالای حالت آستانه، مربوط به همجوشی می‌باشند که همواره در حال افزایش دما هستند.

مرجع‌ها

[1] S. Pfalzner, *"An Introduction to Inertial Confinement Fusion"*, University of Cologne, Germany, CRC Press, (2006), 76.
[2] S. Atzeni, J. Meyer-Ter-Vehn, *"The physics ofinertial fusion"*, Oxford University Press, (2004), 18.
[3] K.A. Razumova, Plasma Phys., 26, 37–43, 1983.
[4] H. Hora, NuovoCimento, (1981), **64B**, 1–8.
[5] H. A. Bethe, *"Handbuch der Physik"*, vol. 24, part 1, Springer, Heidleberg, (1934), 497.
[6] H. Hora, *"Plasmasat High Temperature and Density"*, Springer,Heidelberg, (2000), 85.
[7] A. Mohammadian Pourtalari, M.A. Jafarizadeh, M. Ghoraanneiss, *"Nonlinear Electron Heat ConductionEquation and Self-Similar Method for 1-D Thermal Waves in the Laser Heating of Solid Density DT Fuel"*, Numerical Heat Transfer, Part A., **63**,(2013), 55–73.
[8] M.S. Chu, *"Thermonuclear reaction waves at high densities"*, Phys. Fluids, (1972), **15**, 413-422.

MODIFIED GEOMETRICAL OPTICS IN A CURVED SPACETIME

M. M. Baghaiefard
Isfahan University of Technology
mehdi.baghaiefard@ph.iut.ac.ir

Abstract

In this article, the propagation of high-frequency monochromatic beam of circularly polarized electromagnetic waves in a curved spacetime has been studied. At first, the standard geometrical optics is investigated; That is, we consider the waves with infinitely high frequency. In this step, it is found that the trajectories of light are null geodesics. Secondly, the geometrical optics is modified. For this end, by considering the polarization of light, helicity-dependent correction on the geometrical optics is included. As a result, we realize that the modified wave vector is null. Furthermore, the trajectories of light are null non-geodesic paths.

Key words: Circular Polarization, Helicity, Curved Spacetime, Geometrical Optics, Modified-Geometrical Optics.

1.Introduction

The propagation of circularly polarized beam of light in a gravitational field has been a matter of study in the past several years [1-6]. As we know, the propagation of electromagnetic waves in general relativity is obtained by investigating Maxwell equations in a curved spacetime. But, finding an exact solution to Maxwell equations in such spaces is a formidable problem. When the electromagnetic wave is highly monochromatic over a region of spacetime, we use an asymptotic short- wave approximation. In quantum mechanics, this method is known as WKB approximation and in wave optics is called geometrical optics approximation. This approximation is valid when the reduced wavelength (wavelength/2π) is much smaller than any characteristic scales (such as the curvature of the wave front, the size and duration of the radiation beam and the radius of the spacetime curvature) in the problem.

we begin with the Maxwell equations in a curved spacetime. we write the Lorenz condition and wave equation for the potential 1-form. we select an ansatz for the potential and put it in the Lorenz condition and wave equation. Investigating these equations, we conclude that in the leading order of the geometrical optics approximation,, light ray paths are null geodesics [7]. But, if the light frequency is very high but it is finite, we modify the geometrical optics by including helicity-dependent corrections on phase function of the potential ansatz. Considering this approach, we find that the modified wave vector is null and the ray trajectories of circularly polarized light in this approach are null but not geodesic.

In this article, the metric has signature $(-,+,+,+)$, vectors and differential forms are denoted by boldface letters, the inner product of two vectors $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ is defined as $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \coloneqq g_{\mu\nu}a^{\mu}b^{\nu}$, with $\boldsymbol{a}^2 \coloneqq (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ and we shall use geometrized units $c = G = 1$.

2. Null Tetrads and Maxwell Equations

2.1 Null tetrads and Polarization forms

We consider the null tetrads $\{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \bar{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{n}\}$ satisfying the normalization conditions:

$$(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}) = -1 \ , \ (\boldsymbol{m}, \bar{\boldsymbol{m}}) = 1, \tag{1}$$

while all other scalar products vanish. It is necessary to mention that there are some freedoms in selecting such null tetrads. Of course, there are some conditions which fix gauge ambiguity in the choice of these bases. It is important to mention that to have a suitable frame to measure the quantities along the ray trajectories, the bases should be Fermi-Walker transported. Volume 4-form and three polarization 2-forms $\boldsymbol{\pi}^{(a)}$, $a = 0,1,2$, are defined as [5]:

$$\boldsymbol{e} = i\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{m} \wedge \bar{\boldsymbol{m}} \wedge \boldsymbol{n}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\pi}^{(0)} = \bar{\boldsymbol{m}} \wedge \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\pi}^{(1)} = -(\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{n} - \boldsymbol{m} \wedge \bar{\boldsymbol{m}}), \quad \boldsymbol{\pi}^{(2)} = \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{m}. \tag{3}$$

For the electromagnetic field 2-form $\boldsymbol{F}$, Maxwell equations in the absence of electric currents can be written as $d\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{F} = 0$, in which d is the differential operator, $\delta = \star\, d \star$ is the codifferential operator and $\star$ is the Hodge star operator. We define [5]:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F} - i\sigma(\star\, \boldsymbol{F})], \tag{4}$$

in which $\sigma = +1$ is the helicity parameter of the field related to right-handed and $\sigma = -1$ is related to left-handed circularly polarized waves. Since in our 4-dimensional spacetime with the defined signature we have $\star\star\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}$, we can write $\star\star\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma} = \boldsymbol{i}\sigma\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma}$. Then, $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{+1}$ and $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}$are self-dual and anti-self-dual complex electromagnetic fields, respectively. For these fields we have $d\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma} = \delta\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma} = 0$. Using the coefficients Φ_a^{σ}, we can express $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma}$ in terms of the basis 2-forms $\boldsymbol{\pi}^{(a)}$ as [5]:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma} = \sum_{a=0}^{2} \Phi_a^{\sigma} \boldsymbol{\pi}^{\sigma(a)} \ . \tag{5}$$

The exactness of $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma}$ and using Poincare lemma we can define the complex potential 1-form $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\sigma}$ as $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\sigma} = d\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\sigma}$. The Lorentz gauge condition is $\delta\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\sigma} = \boldsymbol{0}$.

2.2 Field equations

We start with the following ansatz for the potential 1-form of the electromagnetic field:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\sigma} = \boldsymbol{a}^{\sigma}\, e^{\frac{iS^{\sigma}}{\epsilon}} \ , \tag{6}$$

in which $\boldsymbol{a}^{\sigma}$ is the complex amplitude 1-form which varies slowly, S^{σ} is the real phase function (eikonal function) which varies rapidly and $\epsilon \ll 1$ is a dummy expansion parameter that helps to track order of terms: a term with ϵ^n, for some integer n, varies as $(\lambda\!\!\!^{-}/\ell_{min})^n$, where $\lambda\!\!\!^{-}/\ell_{min} \ll 1$. Here $\lambda\!\!\!^{-}$ is the reduced wavelength (wavelength/2π) and ℓ_{min} is the minimal of the characteristic scales of the problem. It is important to mention that we skip the helicity index σ and our calculation will be for the wave with right-handed polarization. For left-handed one, it is necessary to change $\epsilon \to -\epsilon$ and $\boldsymbol{a} \to \bar{\boldsymbol{a}}$. Putting the ansatz (6) into Lorentz gauge condition gives:

$$\star\left(\boldsymbol{P} \wedge\star\, \boldsymbol{a}\right) - i\epsilon \star d \star \boldsymbol{a} = 0 \ , \tag{7}$$

in which $\boldsymbol{P} := dS$ is the wave form. Also, the field strength $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ can be written as:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{i}{\epsilon}\, \boldsymbol{\mathcal{Z}} e^{\frac{iS}{\epsilon}}, \tag{8}$$

in which

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}} := \boldsymbol{\mathcal{B}} - i\epsilon \boldsymbol{\mathcal{C}}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}} := \boldsymbol{P} \wedge \mathbf{a}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}} := d\boldsymbol{a}. \tag{9}$$

It is easy to show that:

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{-1}{\epsilon^2} e^{\frac{iS}{\epsilon}} \boldsymbol{j}, \tag{10}$$

in which

$$\boldsymbol{j} =^1 -\star [\boldsymbol{P} \wedge \star (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{P})] - i\epsilon [\star (\boldsymbol{P} \wedge \star\, d\boldsymbol{a}) - \star\, d \star (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{P})], \tag{11}$$

is the truncated current 1-form up to the first order ϵ. Note that the symbols $=^0$ and $=^1$ indicate that we have kept the equations up to zero order and first order of the parameter ϵ, respectively. Maxwell equations in current free spaces are satisfied if $\boldsymbol{j} = 0$. This point reaches us to the following field equation:

$$\boldsymbol{P}^2 \boldsymbol{a} - \mathrm{i}\epsilon[(\nabla^\nu P_\nu)\boldsymbol{a} + 2P^\nu (\nabla_\nu a_\mu) e^\mu] =^1 0, \tag{12}$$

in which ∇_ν is the covariant derivative associated with the spacetime metric $g_{\mu\nu}$ and $\boldsymbol{e}^\mu$ are covectors. It is necessary to mention that some conditions are needed to be imposed on the fields depending on the point that either they are self-dual or anti-self-dual. For the self-dual field we should have:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{+1} \circ \overline{\boldsymbol{\pi}}^{(a)} = 0 \tag{13}$$

which " $\circ$ " indicates the inner product of two differential 2-forms [8]. It is necessary to note that the gauge condition $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + d\Psi$ which $\Psi := \epsilon\psi e^{\boldsymbol{iS}/\epsilon}$ and ψ is a scalar function, preserves the physics of the problem. This gauge condition will help us to find vector polarization in geometrical optics approximation.

3. Geometrical Optics

At first, we keep the equation (12) up to zero order of the parameter of expansion. so, we have:

$$\boldsymbol{P}^2 =^0 0. \tag{14}$$

This means that $\boldsymbol{P}$ is null. If we interpret $P_\alpha = \nabla_\alpha S$ as the momenta canonically conjugated to x^a, we can identify the equation (14) with the Hamilton-Jacobi equation with an effective Hamiltonian defined as follows [9]:

$$H(x^\mu, P_\mu) := \frac{1}{2} g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu. \tag{15}$$

Let $x^a(\lambda)$, which λ is an affine parameter, be an integral curve of P^α, $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$, then the Hamiltonian equations give the trajectories of light in the geometrical optics limit:

$$\frac{D^2}{D\lambda^2} x^\mu := \frac{d^2}{d\lambda^2} x^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{d}{d\lambda} x^\alpha \frac{d}{d\lambda} x^\beta = 0, \tag{16}$$

in which $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ are Christoffel symbols. So, in the geometrical optics approximation, the trajectories of light are null geodesics.

4. Modified Geometrical Optics

In the next step, we modify the geometrical optics by including first order correction in wave vector, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 + \epsilon \boldsymbol{P}_1$. If we put this in the equation (12), we have:

$$(\boldsymbol{P}_0 + \epsilon \boldsymbol{P}_1)^2 a_{0\mu} + \epsilon(\boldsymbol{P}_0 + \epsilon \boldsymbol{P}_1)^2 a_{1\mu}$$
$$-2i\epsilon \left[(\boldsymbol{P}_0 + \epsilon \boldsymbol{P}_1)_\nu \nabla_\nu a_{0\mu} + \frac{1}{2} a_{0\mu} \nabla^\nu (\boldsymbol{P}_0 + \epsilon \boldsymbol{P}_1)_\nu\right] =^1 0. \tag{17}$$

Now, we split this equation order by order in ϵ. At first, we have $\boldsymbol{P}_0{}^2 = 0$. Here, we put $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{l}$. If we put this result into (17) and use the relation $a_{0\mu} = f_0 z_{0\mu}$, by some simplifications we obtain:

$$(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{P}_1) - i l^\nu \bar{z}_0{}^\mu \nabla_\nu z_{0\mu} = 0. \tag{18}$$

Using the condition (13) and the mentioned gauge condition, we can imply that $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{m}$. Therefore, we get:

$$(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{P}_1) - i l^\nu \bar{m}^\mu \nabla_\nu m_\mu = 0. \tag{19}$$

Using the property of Fermi-Walker transportation, the second term on the left hand side is zero, then we have $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{P}_1) = 0$. Therefore, we can write:

$$\boldsymbol{P}^2 =^1 \boldsymbol{l}^2 + 2\epsilon(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{P}_1) = 0. \tag{20}$$

This indicate that in the modified geometrical optics, the wave vector correction up to the first order of ϵ is null. Up to now, we find that $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{l} + \epsilon \boldsymbol{P}_1$, so we have $(\boldsymbol{P} - \epsilon \boldsymbol{P}_1)^2 = 0$. Like the geometrical optics section, we introduce the Hamilton-Jacobi equation:

$$H(x^\mu, P_\mu) := \frac{1}{2}(\boldsymbol{P} - \epsilon \boldsymbol{P}_1)^2. \tag{21}$$

Inspecting the effective Hamilton equations, we obtain:

$$\frac{D^2}{D\lambda^2} x^\mu = \epsilon\sigma(\nabla^\mu P_{1\nu} - \nabla_\nu P_1{}^\mu)\dot{x}^\nu. \tag{22}$$

Which means in modified geometrical optics the trajectories of light rays are null non-geodesics.

5. Conclusion

In this paper, we studied the propagation of circularly polarized high-frequency electromagnetic waves in a curved spacetime. We found that in the geometrical optics limit, the trajectories of light rays are null geodesics. But, modifying the wave vector up to first order correction, we concluded that the modified wave vector is null and the ray trajectories of light are null non-geodesics.

References:

[1] V. P. Frolov and A. A. Shoom, Phys. Rev. D 84, 044026 (2011)
[2] V. P. Frolov and A. A. Shoom, Phys. Rev. D 86, 024010 (2012).
[3] M. A. Oancea, J. Joudioux, I. Dodin, D. Ruiz, C. F. Paganini, and L. Andersson, (2020)
[4] S. R. Dolan, (2018), arXiv:1801.02273 [gr-qc].
[5] V. P. Frolov, Phys. Rev. D 102, 084013 (2020).
[6] M.M.Baghaiefard, *The effect of polarization on the ray trajectories of light in a curved spacetime.* M.Sc. Thesis. Department of Physics, Isfahan University of Technology, Iran (2023).
[7] C. W. Misner, K, Thorne, and J, Wheeler, *Gravitation* (1947).
[8] Benn, I.M. and Tucker, R.W. *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics.* Adam Hilger (IOP publishing Ltd), 1987.
[9] I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics* (Springer, 1989).

بررسی آماری چگالی الکترونی سیستم برهمکنشی لیزر- هوا با استفاده از رابطه ساها در تعادل ترمودینامیکی موضعی

علیرضا همتی آهوئی
گروه فوتونیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین(ع)
alirezaht96@gmail.com

ابراهیم حاجی علی
گروه فوتونیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین(ع)
ehajiali@ihu.ac.ir

نادر امیری راد
گروه فوتونیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین(ع)
naderamiri@ihu.ac.ir

داود شهابی
گروه فوتونیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین(ع)
shahabi.phy@gmail.cm

چکیده

بررسی سیستم‌های پیچیده و دستیابی به اطلاعات سالهاست که مورد علاقه پژوهشگران می‌باشد. سیستم مورد نظر در این پژوهش شامل بررسی پلاسمای حاصل از برهمکنش لیزر با ماده می‌باشد. هوا ماده انتخابی جهت تولید پلاسما در برهمکنش با لیزر است. از لیزر Nd:YAG به منظور پرتو فرودی جهت برهمکنش با ماده هوا استفاده کردیم. با اندرکنش لیزر با هوا، پلاسما تشکیل شد. در ادامه با بیناب‌نگاری پلاسمای حاصل از برهمکنش لیزر با هوا به بررسی چگالی پلاسما می‌توان پرداخت. لذا جهت تعیین چگالی الکترونی به روش ساها ابتدا نیازمندیم دمای الکترونی محاسبه گردد که از روش نسبت شدت جفت خط طیفی دمای پلاسما برابر ۲.٦٤٧٩ × ۱۰^٤ کلوین محاسبه گردید. در ادامه پژوهش چگالی الکترونی به کمک معادله ساها ۲.٥٩١٤ × ۱۰^۲۰ cm^{-3} اندازه‌گیری شد.

کلید واژه ها : *برهمکنش‌های لیزر-پلاسما، دما و چگالی پلاسما، طیف‌سنجی لیزری، معادله ساها*

Statistical Investigation of Electronic Density of Laser-Air Interaction System Using Saha Relation in Local Thermodynamic Equilibrium

Alireza Hemmati Ahooee ۱, Ebrahim Hajiali ۲ , Nader Amiri Rad ۳ and Davod Shahabi ٤
۱-٤ Department of Photonics, Faculty and Research Institute of Basic Sciences, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran

۱ (alirezaht۹٦@gmail.com), ۲ (ehajiali@ihu.ac.ir), ۳ (naderamiri@ihu.ac.ir), ٤ (shahabi.phy@gmail.com)

Abstract

Investigating complex systems and accessing information has been of interest to researchers for many years. The system in question in this study includes the investigation of plasma produced by laser interaction with matter. Air is the material of choice for plasma production in interaction with lasers. We used the Nd:YAG laser for incident beam to interact with air material. By interaction of the laser with air, plasma was formed. Later, the plasma density of the plasma obtained from the interaction of the laser with air can be investigated. Therefore, in order to determine the electron density by SAHA method, the electron temperature must be calculated, and the plasma temperature was calculated by the spectral line pair intensity ratio of plasma temperature equal to 2.6479×10^4 *Kelvin. The electronic density was* $2.5914\times10^{20}cm^{-3}$ *measured using Saha equation.*

key words: Laser-plasma interactions, Plasma temperature and density, Laser spectroscopy, Saha equation

مقدمه

برای تشکیل پلاسما از لیزرهای متنوعی متناسب با نوع تحقیق استفاده می‌شود که با توجه به ویژگی‌هایی که در جدول(۱) آمده است، نوع لیزر برای پژوهش انتخاب گردیده است.

جدول۱: مشخصات لیزرهای استفاده شده در LIBS[۱]

نوع لیزر	طول موج (nm)	طول تپ (ns)	نرخ تکرار (Hz)	ویژگی‌های مربوط به کاربرد
Nd:YAG	هارمونیک: اصلی:۱۰۶۴ دوم:۵۳۲ سوم:۳۵۵ چهارم:۲۶۶	۶-۱۵ ۴-۸	۱-۲۰	- دسترسی آسان به هارمونیک - دارای کیفیت پرتو فوق العاده - توانایی تولید تپ دوتایی - پمپ توسط لامپ درخش و پمپ دیودی
Excimer	XeCl:۳۰۸ KrF:۲۴۸ ArF:۱۹۴	۲۰	۲۰۰	- نیاز به شارژ کردن تناوبی گاز - تولید طول موج های UV
CO_2	۱۰۶۰۰	۲۰۰	۲۰۰	- نیاز به شارژ کردن تناوبی گاز
Microchip	۱۰۶۴	<۱	۱-۱۰ K	- دارای کیفیت خوب پرتو و مد - توانایی تولید تپ تا تپ بالا - نرخ تکرار بالا

در این پژوهش با برپایی چیدمان لیزر Nd:YAG آن را ایجاد کردیم و برای ایجاد پلاسما از روش فروشکست القایی لیزری[۱] (LIBS) کمک گرفته‌ایم، در این روش یک تپ فوق کوتاه Q سوئیچ از یک لیزر Nd:YAG با چگالی انرژی بالا روی سطح هدف کانونی شده است. متمرکز کردن لیزر بر روی نمونه، موجب افزایش سریع دمای سطح نمونه می‌شود. به نحوی که مواد زیرین سطح به دما و فشار بحرانی رسیده و منجر به انفجار سطح می‌شود. مواد کنده شده در اثر جذب انرژی از تپ لیزر، تبخیر، اتمیزه و یونیزه شده و به این ترتیب پلاسما تشکیل می‌شود. که در این پژوهش لیزر Nd:YAG بر روی هوا متمرکز شده و پلاسمای حاصل از برهمکنش لیزر با هوا تشکیل گردید. با بیناب‌نگار، بیناب پلاسمای حاصل از برهمکنش لیزر با هوا را ثبت کردیم و با استفاده از نتایج بیناب گرفته شده، به روش شدت جفت خط طیفی دمای الکترونی تعیین گردید و به کمک رابطه ساها چگالی الکترونی محاسبه شده است.

روش‌ها / محاسبات /معادلات حاکم

(الف)تعادل ترمودینامیکی موضعی:

تعادل ترمودینامیکی سیستم، حالتی از سیستم می‌باشد که برای هیچ یک از خواص سیستم، با گذشت زمان تغییر حاصل نشود.تعادل ترمودینامیکی کامل با برقراری تعادل در چهار فرآیند تعادل جنبشی، برانگیختگی، یونیزاسیون و تابشی حاصل می‌شود. در چنین پلاسمایی توزیع سرعت الکترون و یون از تابع توزیع ماکسول–بولتزمن[۲] و توزیع حالت‌های برانگیخته از نوع ساها–بولتزمن و فوتون‌ها از تابع توزیع انرژی پلانک[۳] پیروی می‌کنند[۲].

هنگامی که فوتون‌ها در فرآیند تابش، از پلاسما فرار می‌کنند توزیع انرژی آنها دیگر از توزیع پلانک پیروی نمی‌کند و ناگریز بر روی تعادل الکترون‌ها، یون‌ها و اتم ها اثر می‌گذارد. به هر حال اگر انرژی اتلافی به وسیله تابش پلاسما کم‌تر از انرژی‌های درگیر در فرآیندها و تبادل انرژی‌های دیگر باشد شرایط تعادل ترمودینامیک کامل[۴] (TE) امکان پذیر نمی‌باشد، در حالی که سه فرآیند تعادل–جنبشی، برانگیختگی و یونیزاسیون دارای تعادل ترمودینامیکی موضعی هستند و توزیع ماکسول و ساها–بولتزمن برای توصیف سیستم هنوز معتبر می‌باشد و تعادل جدیدی تعریف می‌شود با عنوان تعادل ترمودینامیک موضعی[۵] (LTE) این تعادل به این دلیل موضعی می‌باشد که تنها در ناحیه کوچکی از حجم پلاسما برقرار است و از ناحیه‌ای به ناحیه دیگر در پلاسما دما متفاوت خواهد بود. با توجه به تعداد برخوردهای زیاد در پلاسما، دما در تمام ناحیه پلاسمایی با یک تقریب خوب یکسان خواهد بود و دمای محاسبه شده میانگینی از دما در تمام ناحیه پلاسمایی خواهد بود[۲].

---

[۱] Laser Induced Breakdown Spectroscopy

[۲] Maxwell–Boltzmann distribution

[۳] Planck Energy distribution

[۴] Thermodynamic Equilibrium (TE)

[۵] Local Thermodynamic Equilibrium (LTE)

اندازه‌گیری پارامترهای پلاسما فقط در صورتی ممکن است که پلاسما در شرایط تعادل ترمودینامیکی محلی باشد. در این شرایط فرض می‌شود که پلاسما به حالت تعادل رسیده و پارامترهای آن از قبیل دما و چگالی الکترونی آن ثابت و قابل اندازه‌گیری است[۲].

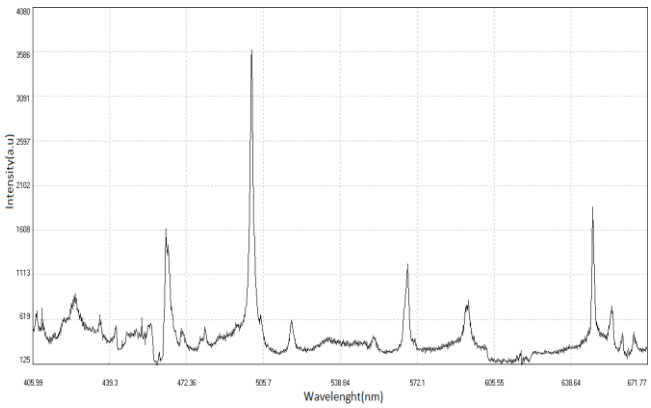
(ب) اندازه‌گیری چگالی با استفاده از رابطه ساها:

اگر پلاسما در شرایط تعادل ترمودینامیکی موضعی درنظر بگیریم چگالی الکترونی را می‌توان با استفاده از نسبت شدت حالت‌های یونیزاسیون مختلف مربوط به یک عنصر محاسبه کرد در حالی که معادله ساها برحسب نسبت چگالی تعداد کل دو حالت یونیزه مربوط به یک عنصر نوشته می‌شود. چگالی الکترونی پلاسما را می‌توان با درنظرگرفتن دو خط با درجه یونیزاسیون مختلف و استفاده از رابطه(۱) که به معادله‌ی ساها معروف است به دست آورد:

$$n_e \frac{I_2}{I_1} = 2\left(\frac{2\pi m_e}{h^2}\right)^{3/2} (kT)^{3/2} \frac{U^{II}(T)}{U^{I}(T)} e^{-E_{ion}/kT} \qquad (۱)$$

در این رابطه m_e جرم الکترون، h ثابت پلانک، k ثابت بولتزمن ، E_{ion} انرژی یونیزاسیون بر حسب الکترون ولت و T دمای پلاسما برحسب کلوین است $U^{I}(T)$ و $U^{II}(T)$ تابع پارش با یونیزاسیون درجه یک و دو در دمای پلاسما و n^{I} و n^{II} تعداد فوتون‌های گسیل شده از پلاسما در این حالت‌ها می‌باشد و n_e چگالی الکترونی پلاسما بر حسب $cm^{-۳}$ به دست می‌آید[۲].

نتایج و بحث



شکل ۱. بیناب پلاسمای حاصل از برهمکنش لیزر با هوا در محدوده ۴۰۵.۹۹–۶۷۱.۷۷ نانومتر

از برهمکش لیزر Nd:YAG با هوا پلاسمای لیزری تشکیل گردید. توسط عدسی نور ساطع شده از پلاسما جمع می‌شود و با کمک فیبر نوری به بیناب نگار منتقل می‌شود.

با کمک نرم افزارCCD-Array Toolkit بیناب پلاسما هوا در لپ‌تاپ مشاهده می‌گردد در شکل(۱) بیناب پلاسمای حاصل از برهمکنش لیزر با هوا به نمایش گذاشته شده است. در جدول(۲) عناصر نیتروژن مشاهده شده از بیناب پلاسمای هوا در محدوده ۴۰۵.۹۹–۶۷۱.۷۷ نانومتر نشان داده شده و مشخصات خطوط گسیلی مربوط به بیناب شکل(۱) در جدول (۳) آورده شده است.

جدول۲: عناصر نیتروژن شناسایی شده از بیناب شکل۱[۳]

عنصر	طول موج مشاهده شده	طول موج استاندارد
N I	۴۰۹.۹۸	۴۰۹.۹۹
N II	۴۴۴.۶۷	۴۴۴.۷۰
N II	۴۶۰.۶۲	۴۶۰.۷۱
N II	۶۱۶.۷۶	۶۱۶.۷۷
N I	۶۴۸.۲۵	۶۴۸.۱۷
N II	۶۶۱.۰۸	۶۶۱.۰۵
N I	۶۶۵.۶۳	۶۶۵.۶۵

جدول۳: مشخصات خطوط گسیلی بیناب شکل۱[۳]

g	$E_k(eV)$	$A_{ki} \times ۱۰^{۷}$	عنصر	I	طول‌موج استاندارد
۴	۱۳.۷۰۲	۰.۳۴۸	N I	۷۴۱	۴۰۹.۹۹
۵	۲۳.۱۹۶	۱۱.۲	N II	۳۸۰	۴۴۴.۷۰
۳	۲۱.۱۵۲	۳.۱۵	N II	۲۵۰	۴۶۰.۷۱
۷	۲۵.۱۵۱	۲.۶۵	N II	۲۲۶	۶۱۶.۷۷
۴	۱۳.۶۶۲	۰.۳۴۳	N I	۱۸۶۳	۶۴۸.۱۷
۳	۲۰.۴۰۹	۲.۵۸	N II	۵۲۰	۶۴۸.۲۰
۷	۲۳.۴۷۴	۶.۰۱	N II	۴۵۸	۶۶۱.۰۵
۲	۱۳.۶۱۴	۰.۲۱۷	N I	۴۸۵	۶۶۵.۶۵

شماره(۱) در جدول(۴): با توجه به داده‌های جدول(۳) مطابق معادله نسبت شدت جفت خط طیفی با دو خط N I(۴۰۹.۹۹) و N II(۴۴۴.۷۰) دمای پلاسما محاسبه شده است[۴]و[۵]:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{g_2 A_2}{g_1 A_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{KT}\right)$$

$$\frac{741}{380}=\frac{4\times0.348}{5\times11.2}\exp(-\frac{13.702-23.196}{0.86\times10^{-4}\times T})$$
$$\rightarrow T=2.5172\times10^{4}K$$

و برای بقیه‌ی نسبت‌های دو خط نیز به همین صورت محاسبه می‌شود که نتایج آماری آن در جدول (٤) آورده شده است.

جدول٤: نتایج محاسبه دما با نسبت دو خط متفاوت

شماره	عنصرخط (۱) (طول موج-nm)	عنصرخط (۲) (طول موج-nm)	$T(K)$
۱	(٤٠٩.٩٩) $N\,I$	(٤٤٤.٧٠) $N\,II$	٢.٥١٧٢ × ١٠^٤
۲	(٤٠٩.٩٩) $N\,I$	(٤٦٠.٧١) $N\,II$	٢.٨٨٥٩ × ١٠^٤
۳	(٦١٦.٧٧) $N\,II$	(٦٤٨.١٧) $N\,I$	٢.٨٣٤٢ × ١٠^٤
٤	(٦٤٨.١٧) $N\,I$	(٦٦١.٠٥) $N\,II$	٢.٣٦٤١ × ١٠^٤
٥	(٦٤٨.٢٠) $N\,II$	(٦٦٥.٦٥) $N\,I$	٢.٨١٠٤ × ١٠^٤
٦	(٦٦١.٠٥) $N\,II$	(٦٦٥.٦٥) $N\,I$	٢.٤٧٥٦ × ١٠^٤

در ادامه چگالی الکترونی را با روش ساها نیز محاسبه شده است:

$$n_e\frac{I_2}{I_1}=2(\frac{2\pi m_e}{h^2})^{3/2}(kT)^{3/2}\frac{U^{II}(T)}{U^{I}(T)}e^{-E_{ion}/kT}$$
$$2(\frac{2\pi m_e}{h^2})^{3/2}=6.05\times10^{21},k=0.86\times10^{-4}eV$$

با توجه به رابطه(۱) به توابع پارش و انرژی یونش متناسب با دو خط نیازمندیم، این پارامترها را از داده‌های کتابخانه‌ای کسب کرده و در جدول(۵) گردآوری شده است.

جدول۵: داده‌های موردنیاز رابطه ساها [۳]

شماره	تابع پارش عنصر یکبار یونیزه‌شده	تابع پارش عنصر دوبار یونیزه‌شده	انرژی یونش (eV)
۱	١١.٣٨	١١.٦٣	١٤.٥٣٤١
۲	١٥.٧٤	١٢.١٩	١٤.٥٣٤١
۳	١٥.٠٢	١٢.١١	١٤.٥٣٤١
٤	١٠.٠٧	١١.٤١	١٤.٥٣٤١
٥	١٤.٦٩	١٢.٠٧	١٤.٥٣٤١
٦	١١.٠١	١١.٥٧	١٤.٥٣٤١

شماره(۱) در جدول(۵): برای دو خط N I(٤٠٩.٩٩) و N II(٤٤٤.٧٠) تابع پارش مربوطه برابر $U^{II}=$ ١١.٦٣ و $U^{I}=$ ١١.٣٨ می‌باشد و انرژی یونش آن برابر $E_{ion}=$ ١٤.٥٣٤١ می‌باشد و بدین ترتیب چگالی الکترونی برای این دو خط محاسبه شده است:

$$n_e\frac{380}{741}=(6.05\times10^{21})(2.164)^{3/2}\frac{11.63}{11.38}e^{-14.5341/2.164}$$
$$\rightarrow n_e=4.6619\times10^{19}cm^{-3}$$

و برای بقیه‌ی خطوط نیز به همین صورت محاسبه می‌شود که نتایج آماری آن در جدول (٦) آورده شده است.

جدول٦: نتایج محاسبه چگالی با معادله ساها

شماره	عنصر یکبار یونیزه (طول موج-nm)	عنصر دوبار یونیزه (طول موج-nm)	$n_e(cm^{-3})$
۱	(٤٠٩.٩٩) $N\,I$	(٤٤٤.٧٠) $N\,II$	٤.٦٦١٩ × ١٠^١٩
۲	(٤٠٩.٩٩) $N\,I$	(٤٦٠.٧١) $N\,II$	١.٥٥٤٣ × ١٠^٢٠
۳	(٦٤٨.١٧) $N\,I$	(٦١٦.٧٧) $N\,II$	٣.٩٣٦٢ × ١٠^٢٠
٤	(٦٤٨.١٧) $N\,I$	(٦٦١.٠٥) $N\,II$	٦.٣٥٣٤ × ١٠^١٩
٥	(٦٦٥.٦٥) $N\,I$	(٦٤٨.٢٠) $N\,II$	٤.٢٦٠٩ × ١٠^١٩
٦	(٦٦٥.٦٥) $N\,I$	(٦٦١.٠٥) $N\,II$	٢.٢٦٨٢ × ١٠^١٩

نتیجه‌گیری

در این پژوهش مقادیر دما و چگالی الکترونی برای پلاسمای حاصل از برهمکنش لیزر با هوا محاسبه شده است. برای تعیین دمای الکترونی، از روش شدت جفت خط طیفی بهره گرفته شد. با میانگین‌گیری از نتایج محاسبات دما از جدول(٤)، مقدار ٢.٦٤٧٩ × ١٠^٤ کلوین برای دمای الکترونی تعیین گردید و برای محاسبه چگالی الکترونی، از معادله‌ی ساها کمک گرفته شد و با میانگین‌گیری از نتایج محاسبات چگالی الکترونی از جدول(٦) مقدار ٢.٥٩١٤ × ١٠^٢٠ cm^{-3} برای چگالی الکترونی به دست آمد.

مرجع‌ها

[۱] فاطمه خلیلی نژاد, "بیناب نگاری فروشکست القایی لیزری مایعات غلیظ با طول موج آی آر لیزر سوئیچ شده." ۱۳۹۰.

[۲] A. W. Miziolek, V. Palleschi, and I. Schechter, Eds., *Laser-Induced Breakdown Spectroscopy (LIBS)*. Cambridge: Cambridge University Press, ۲۰۰٦. doi: ١٠,١٠١٧/CBO٩٧٨٠٥١١٥٤١٢٦١.

[۳] physics.nist.gov

[٤] D. a. Cremers and L. J. Radziemski, *Handbook of Breakdown Spectroscopy*. ۲۰۰٦.

[٥] T. P. Hughes and J. E. Bayfield, "Plasmas and Laser Light," *Phys. Today*, vol. ٣٠, no. ٤, pp. ٥٤–٥٦, Apr. ١٩٧٧, doi: ١٠,١٠٦٣/١,٣٠٣٧٥٠١.

درهم‌تنیدگی حالت GHZ تعمیم‌یافته در چارچوب‌های نالخت

رضا حمزه عوفی
گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز
r-hamzehofi@scu.ac.ir

داود افشار
گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز
da_afshar@scu.ac.ir

مهرزاد اشرف پور
گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز
m.ashrafpour@scu.ac.ir

چکیده

در این تحقیق ابتدا ماتریس چگالی حالت GHZ تعمیم‌یافتهٔ n-کیوبیتی که m جزء آن شتابدار هستند را می‌یابیم. سپس درهم‌تنیدگی حالت خاص GHZ با یک و دو جزء شتابدار بررسی می‌شود. مشاهده می‌شود درهم‌تنیدگی تابع کاهشی از پارامتر شتاب است. از این رو درهم‌تنیدگی از دید ناظر نالخت کمتر از مقداری است که یک ناظر لخت ثبت می‌کند. به‌علاوه کاهش درهم‌تنیدگی سامانه درحالت دو جزء شتاب‌دار، نسبت به حالت یک جزء شتابدار، بیشتر است.

واژه های کلیدی: *درهم‌تنیدگی، چارچوب نالخت، اثر آنرو، حالت GHZ تعمیم‌یافته*

Entanglement of a generalized GHZ state in non-inertial frames

Hamzeh Ofi, Reza[1]; Afshar, Davood[1,2]; Ashrafpour, Mehrzad[1,2]

[1] *Department of Physics, Faculty of science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz*
[2] *Center for Research on Laser and Plasma, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz*

Abstract

In this research, we first obtain the density matrix of a generalized n-qubit GHZ state where m components of it are accelerated. Then the entanglement of a special case, GHZ state, with one and two accelerated components is investigated. The entanglement is observed to be a decreasing function of the acceleration parameter. Hence, the entanglement recorded by a non-inertial observer is less in comparison to the one recorded by an inertial observer. Moreover, the reduction of the entanglement of the system with two accelerated components is more than the system with one accelerated component.

***Keywords**: entanglement, non-inertial frame, Unruh effect, generalized GHZ state*

PACS No, 3

۱. مقدمه

تابش فولینگ–دیویس–آنرو یا به اختصار اثر آنرو، یک اثر مهم در مطالعهٔ چارچوب‌های نالخت می‌باشد [۱–۳]. این اثر بیان می‌کند که یک ناظر نالخت تابشی مشاهده می‌کند که ناظر لخت قادر به مشاهدهٔ آن نیست. از این رو این اثر وابسته به ناظر می‌باشد. آنرو به‌صورت نظری نشان داد که مفهوم خلأ به مسیر ناظر در فضا-زمان بستگی دارد. به‌گونه‌ای که خلأ، که از نظر ناظر لخت تهی از هر چیزی است، از نظر ناظر نالخت دارای ذرات زیادی در تعادل گرمایی می‌باشد. در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، مفاهیم «خلأ» و «فضای خالی» معادل نیستند. فضا را می‌توان مملو از میدان‌های کوانتومی دانست که حالت خلأ پایین‌ترین انرژی ممکن میدان را دارد. حالت‌های انرژی هر میدان کوانتیده توسط هامیلتونی، بر

اساس مختصات فضا–زمان تعریف می‌شوند. بر اساس نسبیت خاص، دو ناظر در حال حرکت یکنواخت نسبت به یکدیگر می‌توانند از چارچوب فضا–زمان یکسانی استفاده کنند. اما اگر آن ناظرها شتابدار باشند، ممکن است چارچوب مشترکی وجود نداشته باشد. از این رو، ناظرها حالت‌های کوانتومی متفاوتی را مشاهده و برداشت‌های مختلفی از خلأ خواهند داشت. یک ناظر شتابدار، یک افق رویداد ظاهری را درک خواهد کرد. وجود تابش آنرو را می توان به این افق رویداد ظاهری مرتبط کرد و آن را در چارچوب مفهومی مشابه تابش هاوکینگ قرار داد [۴].

در حوزهٔ اطلاعات کوانتومی نسبیتی، اثر آنرو همیشه موضوع مورد علاقهٔ پژوهش‌گران بوده است [۵–۱۰]. پرسش اصلی این است که رفتار یک سامانهٔ کوانتومی و خصوصاً درهم‌تنیدگی آن، از دید یک ناظر نالخت چگونه خواهد بود؟ در این پژوهش نیز هدف اصلی جواب دادن به بخشی از این پرسش است. بدین منظور یک حالت GHZ تعمیم‌یافته را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم تعدادی از اجزاء آن که از نوع بوزونی هستند دارای شتاب ثابت هستند. در ادامه در بخش ۲ سنجه‌های استفاده شده در این پژوهش را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳ درهم‌تنیدگی حالت GHZ تعمیم‌یافته در چارچوب نالخت را محاسبه کرده و سپس به تحلیل نتایج می‌پردازیم.

۲. سنجه‌های درهم‌تنیدگی منفیت و سه‌پای

منفیت یک سنجهٔ درهم‌تنیدگی کوانتومی است که محاسبهٔ آن ساده می‌باشد. این سنجه برگرفته شده از معیار ترانهاد جزئی PPT است [۱۱]. منفیت زیرسامانه A به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲].

$$N(\rho^A)=\tfrac{1}{2}(\|\rho^{T_A}\|-1) \qquad (۱)$$

که در آن ρ^{T_A} عملگر ترانهاد جزئی حالت ρ^A نسبت به زیرسامانه A است و $\|\rho^{T_A}\|=Tr\sqrt{(\rho^{T_A})^\dagger\rho^{T_A}}$ می‌باشد.

از سوی دیگر برای هر حالت $2\otimes2\otimes2$ و خالص $|\phi\rangle^{ABC}$، منفیت محاسبه شده بین اجزای مختلف در رابطه مونوگامی زیر صدق می‌کند [۱۳]:

$$(N^{AB})^2+(N^{AC})^2\le(N^{A(BC)})^2 \qquad (۲)$$

در این رابطه، منفیت‌های سمت چپ نابرابری، مربوط به زیرسامانه‌های آمیختهٔ AB و AC می‌باشند.

تفاوت بین دو طرف رابطهٔ (۲) می‌تواند به‌عنوان ماندهٔ درهم‌تنیدگی تفسیر شود:

$$\pi^A=(N^{A(BC)})^2-(N^{AB})^2-(N^{AC})^2 \qquad (۳)$$

و به همین صورت روابط زیر را نیز خواهیم داشت:

$$\pi^B=(N^{B(AC)})^2-(N^{BA})^2-(N^{BC})^2 \qquad (۴)$$

$$\pi^C=(N^{C(AB)})^2-(N^{CA})^2-(N^{CB})^2 \qquad (۵)$$

به‌صورت کلی رابطهٔ $\pi^A\neq\pi^B\neq\pi^C$ برقرار است. این رابطه نشان دهنده این است که مانده درهم‌تنیدگی مرتبط با زیرسامانه‌های مختلف تحت جابجایی کیوبیت‌ها تغییرپذیر است.

میانگین درهم‌تنیدگی π^{ABC} را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\pi^{ABC}=\tfrac{1}{3}(\pi^A+\pi^B+\pi^C) \qquad (۶)$$

که چنین سنجه‌ای تحت جابجایی کیوبیت‌ها ناوردا می‌باشد.

۳. حالت GHZ تعمیم‌یافته در چارچوب نالخت

در این پژوهش حالت درهم‌تنیدهٔ زیر در نظر گرفته شده است:

$$|\mathrm{GHZ}\rangle=\alpha_1|00...0\rangle+\alpha_2|11...1\rangle \qquad (۷)$$

که در آن $|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2=1$ است. در حالت خاص چنانچه $\alpha_1=\alpha_2=1/\sqrt{2}$ باشد، حالت GHZ تعمیم‌یافته به‌دست می‌آید [۱۴]. فرضِ این پژوهش بر این است که m کیوبیت آخر $(m<n)$، در چارچوب نالخت با شتاب ثابت قرار دارند. مطابق پژوهش‌ها از دید یک ناظر نالخت با شتاب ثابت حالت‌های خلأ و نخستین حالت برانگیخته به‌شکل زیر هستند [۱۵]:

$$|0\rangle_U=\cosh^{-1}(r)\sum_{n=0}^{\infty}\tanh^n(r)|n\rangle_I|n\rangle_{II},$$
$$|1\rangle_U=\cosh^{-2}(r)\sum_{n=0}^{\infty}\tanh^n(r)\sqrt{n+1}|n+1\rangle_I|n\rangle_{II} \qquad (۸)$$

که در آن‌ها $\tanh(r)=(e^{-2\pi\omega c/a}+1)^{-1/2}$ است. a، c و ω به ترتیب شتاب، سرعت نور و بسامد ذرهٔ دیراک را نشان می‌دهند. برای $a\in[0,\infty)$ محدودهٔ پارامتر شتاب $r\in[0,\pi/4)$ است. همچنین زیرنویس U نشان دهندهٔ حالت‌های آنرو می‌باشد و زیرنویس‌های I و II به‌ترتیب نشانگر ناحیه‌های اول و دوم ریندلر هستند. این دو

ناحیه کاملاً مستقل هستند و ناظر نالخت تنها می‌تواند در یکی از آن‌ها حضور داشته باشد. معنی روابط (۸) این است که ناظر نالخت حالت‌های خلأ و نخستین حالت برانگیخته را به‌صورت برهم‌نهی از دو مد در دو ناحیهٔ ریندلر می‌بیند. علاوه بر آن، ناظر نالخت حالت خلأ $|0\rangle$ در چارچوب لخت را به شکل یک تابش بوزونی با ویژه کت‌های $|n\rangle$ مشاهده می‌کند. این تابش همان تابش معروف فولینگ–دیویس–آنرو می‌باشد که به‌طور خلاصه از آن به عنوان اثر آنرو نیز یاد می‌کنند.

با جایگذاری روابط (۲) به جای m کیوبیت آخرِ حالت (۷) با پارامترهای شتاب $r_1, r_2, \ldots, r_m$ داریم:

$$|GHZ\rangle' = \alpha_1 \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\tanh^{n_i}(r_i)}{\cosh(r_i)} |0\rangle^{\otimes q} |n_i\rangle^{I} |n_i\rangle^{II} + \alpha_2 \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\tanh^{n_i}(r_i)}{\cosh^2(r_i)} \sqrt{n_i+1}\, |1\rangle^{\otimes q} |n_i+1\rangle^{I} |n_i\rangle^{II} \tag{۹}$$

که در آن $q = n - m$ است. با فرض اینکه ناظر نالخت در ناحیهٔ I ریندلر قرار دارد، پس از رَدگیری جزئی نسبت به ناحیهٔ غیرقابل دسترس II، عملگر چگالی به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\rho = {} & |\alpha_1|^2 \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\tanh^{2n_i}(r_i)}{\cosh^2(r_i)} |0\rangle^{\otimes q} |n_i\rangle\langle 0|^{\otimes q} \langle n_i| + \\ & \alpha_1\alpha_2^* \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\tanh^{2n_i}(r_i)}{\cosh^3(r_i)} \sqrt{n_i+1}\, |0\rangle^{\otimes q} |n_i\rangle\langle 1|^{\otimes q} \langle n_i+1| + \\ & \alpha_2\alpha_1^* \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\tanh^{2n_i}(r_i)}{\cosh^3(r_i)} \sqrt{n_i+1}\, |1\rangle^{\otimes q} |n_i+1\rangle\langle 0|^{\otimes q} \langle n_i| + \\ & |\alpha_2|^2 \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\tanh^{2n_i}(r_i)}{\cosh^4(r_i)} (n_i+1) |1\rangle^{\otimes q} |n_i+1\rangle\langle 1|^{\otimes q} \langle n_i+1|\end{aligned} \tag{۱۰}$$

در رابطهٔ بالا از قرار دادن اندیس I صرف‌نظر شده است. برای یک سامانهٔ سه‌جزئی درهم‌تنیده (GHZ)، هنگامی که دو جزء آن شتابدار باشند ($m = 2$)، رابطهٔ (۱۰) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\rho = {} & |\alpha_1|^2 \sum_{n_1,n_2}^{\infty} \frac{\tanh^{2n_1}(r_1)}{\cosh^2(r_1)} \frac{\tanh^{2n_2}(r_2)}{\cosh^2(r_2)} |0n_1n_2\rangle\langle 0n_1n_2| + \\ & \alpha_1\alpha_2^* \sum_{n_1,n_2}^{\infty} \frac{\tanh^{2n_1}(r_1)}{\cosh^3(r_1)} \frac{\tanh^{2n_2}(r_2)}{\cosh^3(r_2)} \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \\ & |0n_1n_2\rangle\langle 1(n_1+1)(n_2+1)| + \\ & \alpha_2\alpha_1^* \sum_{n_1,n_2}^{\infty} \frac{\tanh^{2n_1}(r_1)}{\cosh^3(r_1)} \frac{\tanh^{2n_2}(r_2)}{\cosh^3(r_2)} \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \\ & |1(n_1+1)(n_2+1)\rangle\langle 0n_1n_2| + \\ & |\alpha_2|^2 \sum_{n_1,n_2}^{\infty} \frac{\tanh^{2n_1}(r_1)}{\cosh^4(r_1)} \frac{\tanh^{2n_2}(r_2)}{\cosh^4(r_2)} (n_1+1)(n_2+1) \\ & |1(n_1+1)(n_2+1)\rangle\langle 1(n_1+1)(n_2+1)|\end{aligned} \tag{۱۱}$$

عملگرهای ترانهاد جزئی نسبت به جزء اول، با تبدیلات زیر روی رابطهٔ (۱۱) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & |0n_1n_2\rangle\langle 1(n_1+1)(n_2+1)| \to |1n_1n_2\rangle\langle 0(n_1+1)(n_2+1)| \\ & |1(n_1+1)(n_2+1)\rangle\langle 0n_1n_2| \to |0(n_1+1)(n_2+1)\rangle\langle 1n_1n_2| \end{aligned} \tag{۱۲}$$

عملگر ترانهاد جزئی نسبت به جزء دوم نیز با تبدیلات زیر روی ماتریس چالی (۱۱) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & |0n_1n_2\rangle\langle 1(n_1+1)(n_2+1)| \to |0(n_1+1)n_2\rangle\langle 1n_1(n_2+1)| \\ & |1(n_1+1)(n_2+1)\rangle\langle 0n_1n_2| \to |1n_1(n_2+1)\rangle\langle 0(n_1+1)n_2| \end{aligned} \tag{۱۳}$$

و در نهایت برای به‌دست آوردن عملگر ترانهاد جزئی نسبت به جزء سوم تبدیلات زیر را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & |0n_1n_2\rangle\langle 1(n_1+1)(n_2+1)| \to |0n_1(n_2+1)\rangle\langle 1(n_1+1)n_2| \\ & |1(n_1+1)(n_2+1)\rangle\langle 0n_1n_2| \to |1(n_1+1)n_2\rangle\langle 0n_1(n_2+1)| \end{aligned} \tag{۱۴}$$

همچنین به‌سادگی می‌توان نشان داد در حالت GHZ، درهم‌تنیدگی بین هر دو جزء دلخواه صفر است. از این رو روابط (۳) تا (۵) به‌شکل زیر تبدیل می‌شوند:

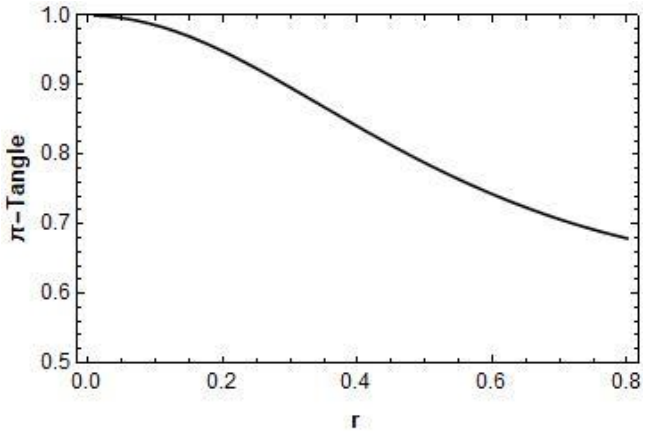
$$\pi^A = (N^{A(BC)})^2 \tag{۱۵}$$

$$\pi^B = (N^{B(AC)})^2 \tag{۱۶}$$

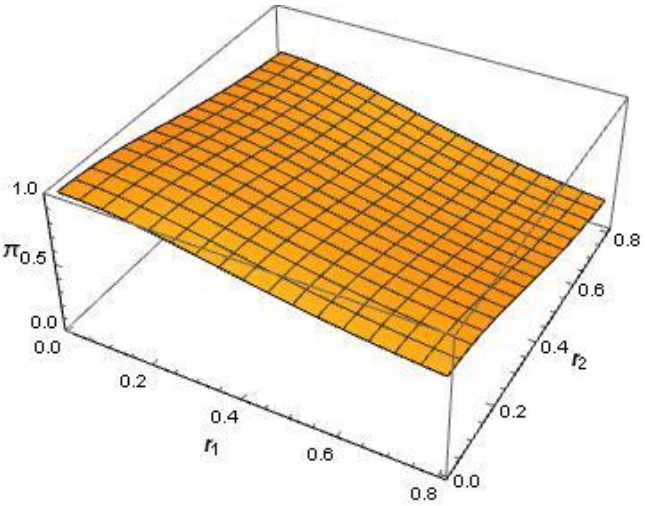
$$\pi^C = (N^{C(AB)})^2 \tag{۱۷}$$

از سوی دیگر از آنجا که ابعاد ماتریس‌های ترانهاد جزئی بی‌نهایت است، مناسب است به‌طور تقریبی تنها عناصر مؤثر را در نظر بگیریم. بررسی عددی ما نشان می‌دهد که با افزایش n، عناصر ماتریسی و ویژه‌مقادیر وابسته به آن به سرعت به سمت صفر میل می‌کنند. لذا در محاسبهٔ درهم‌تنیدگی سامانه، مقادیر n را از ۰ تا ۵ درنظر گرفتیم. شکل ۱ نمودار پای‌تنگل را برحسب r_2 نشان می‌دهد. در رسم نمودار فرض کردیم $r_1 = 0$ است. از این‌رو تنها جزء سوم حالت GHZ شتابدار است و دو جزء دیگر در چارچوب لخت قرار دارند. در ابتدا در $r_2 = 0$ درهم‌تنیدگی بیشینه است سپس با افزایش پارامتر شتاب کاهش پیدا می‌کند. کمینهٔ سه‌پای به ازای $r_2 \to \pi/4$ مقدار ~ 0.68 است. از این رو یک ناظر نالخت درهم‌تنیدگی را کمتر از یک ناظر لخت مشاهده می‌کند. دلیل آن این است که ناظر نالخت در حمام حرارتی ناشی از تابش آنرو قرار دارد. این نمودار در محدودهٔ رسم شده، با نمودار شکل ۲ منبع [۵] مطابقت دارد. یادآوری می‌شود محدودهٔ پارامتر شتاب $r \in [0, \pi/4)$ است.

شکل ۲ نمودار پای‌تنگل را برحسب پارامترهای شتاب r_1 و r_2 نشان می‌دهد. مطابق شکل با افزایش پارامترهای شتاب درهم-تنیدگی کاهش پیدا می‌کند. کاهش درهم‌تنیدگی در این حالت نسبت به حالت اول که فرض کردیم تنها جزء سوم شتابدار است، بیشتر می‌باشد. همچنین کمینهٔ سه‌پای به ازای $r_1 \to \pi/4$ و $r_2 \to \pi/4$ مقدار ~ 0.25 است. موضوع جالب این است که در هر دو حالت درهم‌تنیدگی سامانه حتی در شتاب‌های بی‌نهایت نیز صفر نمی‌شود. از این رو چنانچه یک یا دو جزء از حالت GHZ در یک سیاه‌چاله گرفتار شوند و شتاب آنها به بی‌نهایت میل کند، همچنان مقداری درهم‌تنیدگی باقی می‌ماند.



شکل ۱: نمودار سه‌پای حالت GHZ برحسب پارامتر شتاب با فرض اینکه تنها جزء سوم شتابدار است ($r_1 = 0$).



شکل ۲: نمودار سه‌پای حالت GHZ برحسب پارامترهای شتاب r_1 و r_2.

۴. نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک حالت GHZ تعمیم‌یافته در چارچوب نالخت مورد بررسی قرار گرفت. سپس درهم‌تنیدگی سامانه در حالت حدی، که یک حالت GHZ است، مورد مطالعه قرار گرفت. مطالعهٔ ما نشان می‌دهد از دید یک ناظر نالخت درهم‌تنیدگی به دلیل حمام حرارتی ناشی از تابش آنرو کاهش پیدا می‌کند. چنانچه دو ناظر در چارچوب نالخت باشند درهم‌تنیدگی بیشتر از حالتی کاهش پیدا می‌کند که فقط یک ناظر شتاب‌دار است. همچنین در دو حالت یک جزء یا دو جزء شتاب‌دار، حتی اگر ناظرهای نالخت گرفتار سیاه-چاله شوند و شتاب آن‌ها به بی‌نهایت میل کند هم مقداری درهم-تنیدگی در سامانه باقی می‌ماند و درهم‌تنیدگی هیچگاه صفر نمی-شود.

منابع

[1] S. A. Fulling, Phys. Rev. D. **7**, 2850 – 2862 (1973).

[2] P. C. W. Davies, J. Phys A. **8**, 609–616. (1975).
[3] W. G. Unruh, Phys. Rev. D. **14**, 870–892 (1976).
[4] J. Castineiras, I. P. Costa e Silva and G. E. A. Matsas, Phys. Rev. D. **68**, 084022 (2003).
[5] M. R. Hwang, D. Park, E. Jung, Phys.Rev.A**83**, 012111 (2012).
[6] Y. Dai, Z. Shen and Yu Shi, J. High Energy Phys **71**, (2015).
[7] W. Y. Sun, D. Wang, J. Yang and L. Ye, Quantum Inf. Process. **16**, 90 (2017).

[8] Ariadna J.Torres-Arenasa, Q. Dong, G. H. Sun, W. C. Qiang and S. H. Dong, Phys. Lett. B **789**, 93-105 (2019).

[9] K. L. Kim, M. C. Pak, T. H. Kim, Eur. Phys. J. D **74**, 124 (2020).
[10] K. Kim, M. C. Pak1, O. Song An, U. Gyong Ri1, M.C. Ko1 and N. C. Kim, Phys. Scr. **97**, 075101 (2022).
[11] A. Peres, Physical Review Letters. **77**, 1413 (1996).
[12] K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sanpera and M. Lewenstein, Phys. Rev. A. **58** , 883–92 (1998).
[13] Y. U. Ou and H. Fan, Phys. Rev. A **75**, 062308 (2007).
[14] W. Dür; G. Vidal & J. I. Cirac, Phys. Rev. A. **62**, 062314 (2000).
[15] W. G. Unruh and R. M. Wald, Phys. Rev. D **29**, 1047 (1984).

استفاده از ماتریس پراکندگی در محاسبه ضریب هاماکر در ناحیه بره الکترولیت فراتر از تقریب حجم

علی مرادیان
استادیار دانشگاه کردستان
a.moradian@uok.ac.ir

ئه سرین سیدزاهدی
استادیار دانشگاه کردستان
a.seyedzahedi@uok.ac.ir

چکیده

با استفاده از رهیافت پراکندگی، نیروی کازیمیر واحد سطح یک لایه‌ی الکترولیت بین دو نیم‌فضا از مواد معمولی در این مقاله مطالعه شده است. با توجه به ناکافی بودن شرایط مرزی ماکسول، شرایط مرزی اضافه نیز به کار برده شده است برای نیم‌فضاهای پلی‌استر در فواصل جدایی کوچک، افزایش غلظت منجر به تقویت فشار کازیمیر می‌شود. نشان داده شده است که برای نیم‌فضاهای نقره، نیروی کازیمیر واحد سطح، مقدار یکسانی برای دو غلظت الکترولیت دارد. در فواصل جدایی کوچک برای نیم‌فضای پلی‌استر ضریب هاماکر برای دو غلظت متفاوت، دو مقدار متفاوت دارد، اما برای نیم‌فضای نقره ضریب هاماکر با مقدار یکسانی برای دو غلظت آغاز می‌شود.

کلید واژه ها : برهمکنش کازیمیر، ضریب هاماکر، لایه‌ی غیرموضعی، رهیافت پراکندگی.

Using scattering matrix in calculating Hamaker coefficient for the electrolyte slab region beyond bulk approximation

Moradian, Ali[1]; Seyedzahedi, Asrin[1]

[1] *Department of Physics, Campus of Bijar, University of Kurdistan, Bijar*

Abstract

Applying the scattering approach, the Casimir interaction per unit area across a nonlocal slab of an electrolyte between two semispaces of ordinary materials has been investigated. Since the Maxwell's boundary conditions, are not sufficient, additional boundary conditions are used as well. For polystyrene semispaces at small separations, increasing the concentration results in intensifying the Casimir pressure. It is illustrated that for silver substrates the Casimir pressure has the same amount for two electrolyte concentrations. At small separations for polystyrene semispaces, the Hamaker coefficient has two different magnitudes corresponding to two concentrations, but for silver substrates the Hamaker coefficient starts from the same value for both concentrations

key words: Casimir interaction; Hamaker coefficient; Nonlocal slab; Scattering approach.

مقدمه

نیروی ناشی از افت و خیزهای میدان های الکترومغناطیسی خلأ بین دو صفحه‌ی تخت رسانای ایده آل خنثی در سال ۱۹۴۸ پیشگویی شد[۱]. یکی از روش‌های محاسبه انرژی و نیروی کازیمیر روش پراکندگی بین دو سطح است که توسط یک لایه‌ی نازک از هم جدا شده‌اند[۲]. در روش پراکندگی اثر کازیمیر از

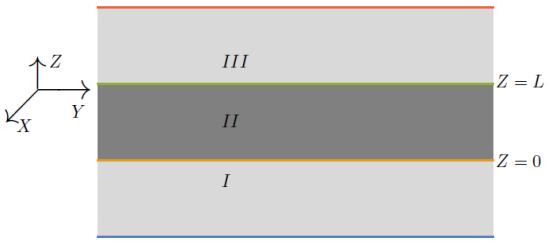
پراکندگی مکرر افت و خیزهای میدان‌های الکترومغناطیسی بین سطوح برهم کنش کننده بدست می‌آید[۳]. با در نظر گرفتن دو نیم‌فضای همگن که توسط یک لایه نازک هوا از هم جدا شده‌اند نتایج لیف شیتز استاندارد بدست آمده است[٤]. اگر بین دو نیم فضا بجای هوا محلولی شامل یون‌های حل نشده باشد می‌توان با استفاده از روش پراکندگی نیروی افت و خیزی لیف شیتز را بدست آورد. در واقع انتظار داریم که یونهای آزاد داخل حلال باعث پوشش بارهای افت و خیزی می‌شوند. و این یعنی یک لایه الکترولیت بین صفحات اثرات غیر موضعی ایجاد می‌کند و باید در محاسبه نیروی لیف شیتز مدهای طولی را نیز لحاظ کرد[۵]. حالتی که دونیم فضا محیطی غیر موضعی باشد در حالیکه لایه میانی ماده‌ای موضعی باشد نیز بررسی شده است در این حالت دو صفحه فلزی توسط یک لایه از دی الکتریک از هم جدا شده‌اند. در واقع الکترونهای آزاد در فلزات هستند که باعث اصلاح نیروی کازیمیر بین صفحات می‌شوند[٦]. نتایج تحقیقات نشان می‌دهد که در حالتی که بین دو نیم فضا محلول الکترولیت باشد تنها سهم فرکانس صفر ماتسوبارا باعث ایجاد اثرات پوششی یونهای آزاد در محاسبات می‌شود و در فرکانس غیر صفر اثرات غیرموضعی ناشی از یونها اهمیتی در محاسبات ندارد[۷]. چون فرکانس پلاسمایی ناشی از حضور یونها همیشه خیلی کوچکتر $k_B T/\hbar$ است (که T دما است)[۸]. تصحیحات غیرموضعی در محاسبه‌ی نیروی کازیمیر بین صفحات فلزی نشان می‌دهد با کاهش فاصله بین صفحات نیروی کازیمیر افزایش می‌یابد[۹]. با استفاده از یک مدل هیدرودینامیکی نشان داده شده است که با افزایش فاصله بین صفحات نیروی کازیمیر ناشی از تصحیحات غیرموضعی کاهش می‌یابد[۱۰].

تصحیحات غیرموضعی ناشی از یک لایه از محلول الکترولیت بین دو نیم فضای دی الکتریک پلی استر در دمای صفر و در دمای غیرصفر در تقریب حجمی برای محاسبه ضریب هاماکر بین دو نیم‌فضا بکار برده شده است[۸]. این تقریب به این علت بکار برده شده است که در ناحیه محدود برهی الکترولیت از رابطه زیر برای مؤلفه‌ی فوریه میدان‌ها استفاده شده است

$$\vec{D}(\vec{k},\omega)=\varepsilon(\vec{k},\omega)\vec{E}(\vec{k},\omega) \qquad (۱)$$

محاسبات نشان می‌دهد که در دمای غیر صفر برای دو غلظت $0.9\ mM$ و $90\ mM$ برای نمک تک ظرفیتی با تقریب خوبی نتایج بدون در نظر گرفتن اثرات غیرموضعی را پوشش می‌دهد. در حالیکه در دمای صفر نتایج متفاوت است و در فاصل کوتاه بین صفحات اثرات غیرموضعی ناشی از حضور یون‌ها باعث کاهش ضریب هاماکر می‌شود.

در این مقاله ما قصد داریم یک لایه غیرموضعی الکترولیت که بین دو نیم‌فضای دی الکتریک از جنس پلی‌استر هست را فراتر از تقریب حجم بررسی کنیم. برای این‌کار معادله‌ی حاکم بر میدان الکتریکی که یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار می‌باشد را به تبعیت از مرجع [۱۱] حل می‌کنیم. میدان را در دو قطبش مجزای TM و TE بررسی می‌کنیم. برای قطبش TM میدان فرودی از محیط دی‌الکتریک به ناحیه بره الکترولیت که حاوی یونهای آزاد می‌باشد به چهار میدان عرضی شامل دو میدان فرودی و دومیدان بازتابی و نیز دو میدان طولی شامل یک میدان فرودی و یک میدان بارتابی در نظر می‌گیریم. ولی برای قطبش TE در ناحیه الکترولیت فقط دو میدان عرضی شامل یک میدان فرودی و یک میدان بازتابی داریم. روی مرز با استفاده از پیوستگی مؤلفه‌های عرضی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و بعلاوه شرایط قیدی حاکم بر میدان‌ها که منتج از معادلات ماکسول می‌باشد ضرایب میدان‌ها را بدون شرایط اضافی برای بدست آوردن ضرایب بازتاب مورد نیاز در ماتریس پراکندگی بدست می‌آوریم.



شکل۱ : پیکربندی‌ای متشکل از دو نیم‌فضا از مواد دی‌الکتریک (نواحی I و III) و بره‌ای از الکترولیت در بین این دو نیم‌فضا (ناحیه‌ی II)

مدل

برای بررسی اثر حضور لایه‌ی الکترولیت در برهمکنش کازیمیر از رهیافت ماتریس پراکندگی بهره می‌بریم. در این روش به محاسبه‌ی مارتیس بازتاب R و نیز ماتریس انتشار $e^{-\kappa L}$ نیاز داریم که بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$R=\begin{pmatrix} r_{ss1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{ss2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{pp1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{pp2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{ll} \end{pmatrix} \qquad (۲)$$

$$e^{-\kappa L}=\begin{pmatrix} e^{iw_1 L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{iw_2 L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{iw_1 L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{iw_{21} L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{iw' L} \end{pmatrix} \qquad (۳)$$

در این روابط عناصر غیرصفر ماتریس بازتاب که معرف ضرایب بازتاب روی مرز هستند با استفاده از میدان‌های الکترومغناطیسی در دو محیط در ادامه تعریف می‌شوند. عناصر غیرقطر ماتریس انتشار w_1 و w_2 معرف مؤلفه‌ی نرمال بردار موج عرضی و w' همین مؤلفه برای بردار موج طولی در لایه‌ی الکترولیت هستند.

میدان دارای قطبش TM در محیط دی‌الکتریک که از مرز $z=L$ به سمت راست گسترش یافته است و از محیط دی الکتریک به لایه‌ی الکترولیت وارد می‌شود عبارت است از

$$E_{1,p}(\vec{r},\omega,u,v)=e^{i(ux+vy)}\Big(A_0 e^{-i\eta(z-L)}\hat{y}\times\vec{k}_0 + A_r e^{i\eta(z-L)}\hat{y}\times\tilde{\vec{k}}_0\Big). \qquad (٤)$$

$\vec{k}_0=(u,v,-\eta)$ و $\tilde{\vec{k}}_0=(u,v,\eta)$ بردارهای موج فرودی و بازتابی و A_0 و A_r دامنه‌های فرودی و بازتابی میدان در این محیط هستند و پایین نویس p معرف قطبش TM است. در محیط غیرموضعی یک تک بردارموج تخت انتشار نمی‌یابد بلکه در چنین محیطی علاوه بر موج عرضی، موج طولی هم انتشار دارد و باید شش موج تخت در این محیط معرفی کرد[۱۱]. بر این اساس در لایه‌ی الکترولیت میدان برای قطبش TM را با توجه به $\vec{k}_1=(u,v,-w_1)$ و $\vec{k}_2=(u,v,-w_2)$ بردارهای موج فرودی عرضی و $\vec{k}_3=(u,v,w_1)$ و $\vec{k}_4=(u,v,w_2)$ بردارهای موج بازتابی عرضی متناظر با آن‌ها و نیز بردار موج طولی فرودی $\vec{k}'=(u,v,-w')$ و بازتابی $\tilde{\vec{k}}'=(u,v,w')$ چنین تعریف می‌کنیم

$$E_{2,p}(\vec{r},\omega,u,v)=e^{i(ux+vy)}\times \Big(A_1 e^{-iw_1(z-L)}\hat{y}\times\vec{k}_1 + A_2 e^{-iw_2(z-L)}\hat{y}\times\vec{k}_2 + A_3 e^{iw_1(z-L)}\hat{y}\times\vec{k}_3 + A_4 e^{iw_2(z-L)}\hat{y}\times\vec{k}_4 + A_1' e^{-iw'(z-L)}\vec{k}' + A_2' e^{iw'(z-L)}\tilde{\vec{k}}'\Big). \qquad (٦)$$

با استفاده از معادله‌ی کرل ماکسول می‌توان از میدان‌های الکتریکی در هر یک از این محیط‌ها، میدان‌های مغناطیسی را نیز بدست آورد.

بر اساس تعریف ضرایب بازتاب از مرز مشترک دی‌الکتریک و لایه الکترولیت $r_{pp1}=A_3/A_1$ ، $r_{pp2}=A_4/A_2$ و $r_{ll}=A_2'/A_1'$ هستند و برای تعیین آن‌ها دامنه‌های میدان‌ها باید مشخص باشند. از اعمال شرایط مرزی پیوستگی روی مؤلفه‌های مماسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در مرز به دو معادله می‌رسیم. با در نظر گرفتن پیوستگی مؤلفه‌ی نرمال بردار جابجایی الکتریکی در مرز نیز یک معادله‌ی دیگر نیز خواهیم داشت که این سه معادله برای تعیین همه‌ی دامنه‌ها کافی نیستند. برای حل این مسأله به چهار معادله‌ی مرزی دیگر نیز نیاز داریم که بصورت مستقیم از معادلات ماکسول نتیجه می‌شوند و به آن‌ها معادلات قیدی می‌گوییم و دستگاه معادلات حاکم بر دامنه‌های میدان‌ها را تکمیل می‌کنند.

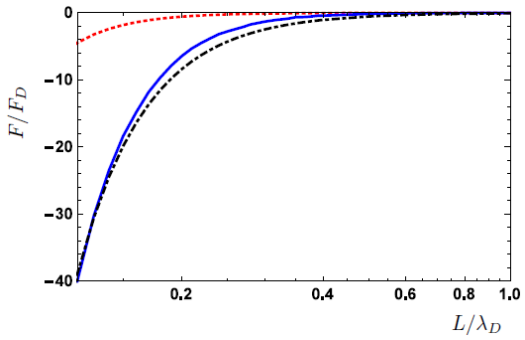
بر اساس مدل نوسانگر لورنتز کلاسیکی تابع پاسخ دی الکتریک در یک محیط غیر موضعی و همین‌طورتابع پاسخ دی الکتریک طولی که از تجزیه‌ی میدان‌های الکتریکی و چگالی جریان یونی به دو بخش عرضی و طولی بدست می‌آید [۵] و نیز با در نظر گرفتن دو معادله‌ی اول ماکسول و معادلات ساخت در محیط غیرموضعی، یک معادله دیفرانسیل انتگرالی برای میدان‌های الکتریکی بدست می‌آید [۱۱] که با تبدیل آن به معادله‌ی دیفرانسیل، معادلات حاکم بر مؤلفه‌ی نرمال بردارهای موج در محیط غیرموضعی بدست می‌آید. یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم که منجر به تعیین مؤلفه‌ی نرمال بردار موج طولی و معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی چهار که حل

آن مؤلفه‌های نرمال بردارهای موج عرضی را در محیط الکترولیت می‌دهد. حال می‌توان ضریب هاماکر را به کمک رابطه‌ی زیر تعیین کرد[۱۲]

$$H(L) = -12\pi L^2\, \mathrm{E}(L), \qquad (۶)$$

در این جا $\mathrm{E}(L)$ انرژی آزاد واحد سطح است که بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mathrm{E}(L) = \frac{kT}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\ln\det\left[1-\mathrm{Re}^{-\kappa L}\,\mathrm{Re}^{-\kappa L}\right] \qquad (۹)$$



شکل۲ : نیروی کازیمیر واحد سطح (مقیاس شده با $F_D = 2\pi k_B T/\lambda_D^3$) بر حسب ضخامت برهی الکترولیت (مقیاس شده با λ_D) بین دو نیم‌فضای پلی-استر برای دو غلظت‌های $0.9\,mM$ و $90\,mM$ در دمای $T = 300K$ با منحنی‌های قرمز (نقطه–نقطه) و آبی (خط ممتد) نمایش داده شده است. منحنی سیاه (خط–نقطه) این نیرو را برای نیم‌فضاهای نقره نمایش می‌دهد.

نتیجه گیری

نیروی کازیمیر واحد سطح را برای پیکربندی شکل ۱ محاسبه کرده‌ایم. محاسبات عددی ما نشان داده‌اند که رفتار این نیرو بین نیم‌فضاهای پلی‌استر برای ضخامت‌های مختلف بره به غلظت الکترولیت بستگی دارد. اما این نیرو بین نیم‌فضاهای نقره‌ای برای دو غلظت مختلف الکترولیت رفتار یکسانی دارد. در فواصل جدایی کوچک دو نیم‌فضا، نیروی کازیمیر حرارتی در شکل ۲ برای نیم فضاها و غلظت‌های مختلف بررسی شده، نشان داده شده است. ضریب هاماکر برای پیکربندی مورد نظر برای دو غلظت مختلف و نیم‌فضاهای نقره و پلی‌استر را نیز محاسبه کرده‌ایم. برای نیم فضاهای پلی‌استر با افزایش غلظت، افزایش معناداری در ضریب هاماکر برای ضخامت‌های کوچک لایه‌ی الکترولیت اتفاق می‌افتد. با افزایش ضخامت این لایه پوشش قابل توجهی در این ضریب اتفاق می‌افتد. در واقع با افزایش غلظت یون‌های الکترولیت، در ضخامت‌های کوچک لایه‌ی الکترولیت طوری رفتار می‌کند که انگار نیم‌فضاها رسانا هستند. جالب اینکه برای نیم فضاهای نقره و ضخامت‌های کوچک لایه‌ی الکترولیت، ضریب هاماکر برای دو غلظت مختلف مقدار مشابهی دارد. با افزایش ضخامت لایه برای غلظت $90\,mM$ ضریب هاماکر به کندی کاهش می‌یابد. این درحالی است که برای غلظت $0.9\,mM$ این ضریب رفتار کاهشی دارد. به نظر می‌رسد که برای نیم‌فضاهای رسانا با غلظت‌های بالا برخلاف غلظت‌های پایین حتی برای ضخامت‌های بزرگتر از طول پوشش دبای هم اثر پوشش محسوس نیست. این رفتار را می‌توان اینگونه توصیف کرد که اثرهای غیرموضعی محلول الکترولیت بر رفتار تضعیف‌گر ناشی از حرکت یون‌های حرارتی (که در مواردی که غیرموضعی بودن محیط نادیده گرفته می‌شود، ظاهر می‌شود[۱۳و۸]) غلبه دارد. به عنوان یکی از نتایج کار ما، افزایش ضخامت لایه‌ی الکترولیت منجر به تقویت اثر پوشش در برهمکنش کازیمیر برای محیط رسانا می‌شود.

مرجع‌ها

[1] H. B. G. Casimir, *proc. k. Ned. Akad. Wet*. **51** (1948) 739.
[2] A. Lambrecht, P. A. Maia Neto, and S. Reynaud, New J. Phys. **8**, 243 (2006).
[3] M.-T. Jaekel and S. Reynaud, J. Phys. I (France) **1**, 1395 (1991).
[4] A. Lambrecht, P. A. M. Neto and S. Reynaud, *New J. phys*. **8**. 243 (2006).
[5] B. Davies and B. W. Ninham, *J. Chem. Phys*. **56**, 5797 (1972).
[6] R. Esquivel and V. B. Svetovoy, *Phys. Rev. A* **69**, 062102 (2004).
[7] L. M. Woods, D. A. R. Dalvit, A. Tkatchenko, P. Rodriguez-Lopez, A. W. Rodriguez, and R. Podgornik, *Rev. Mod. Phys*. **88**, 045003 (2016).
[8] P. A. M. Neto, F. S. Rosa, L. B. Pires, A. B. Marim, A. Canaguier-Durand, R. Guerout, A. Lambrecht, and S. Reynaud, *Eur. Phys. J. D* ***73*** *(2019) 178.*
[9] A. M. Contresas-Reyes and W. L. Mochan, Pys. Rev. A **72**, 034102 (2005).
[10] M. G. Cottam and D. R. Tilley, *Introduction to surface superlatice excitations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).
[11] G. S. Agrawal, D. N. Pattanayak and E. Wolf, *Phys. Rev. B* **10**, 1477 (1974).
[12] I. Bervik, V. N. Marachevsky, K. A. Milton, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 3948.
[13] A. Seyedzahedi and A. Moradian, *Eur. Phys. J. D* **75** (2021) 68.

تعیین جرم تتراکوارک $cq\overline{cq}$ به کمک معادله بته سالپتر

علی اصغر قاسم پور آرانی
دانشجوی دکتری، گروه فیزیک، دانشگاه کاشان
aliasghar.ghasempour۷۲@gmail.com

مجید منعم زاده
استادیار، گروه فیزیک دانشگاه کاشان
monem@kashanu.ac.ir

نرگس تعظیمی
استادیار، گروه فیزیک دانشگاه کاشان
nt_physics@yahoo.com

چکیده

تتراکوارک ها شامل دی کوارک و آنتی دی کوارک هستند. در این مقاله، به بررسی تتراکوارک $cq\overline{cq}$ پرداختیم و آن را به صورت یک سیستم دی کوارک، آنتی دی کوارک در نظر گرفتیم. پتانسیل استفاده شده، پتانسیل هلمن به اضافه جمله اسپینی می باشد و تاثیر اسپین هم در نظر گرفته شده است. به کمک معادله بته سالپتر و با استفاده از روش آنساز، جرم تتراکوارک $cq\overline{cq}$ برای J^{PC} های مختلف محاسبه شده است که با مقالات دیگر تطابق بسیار خوبی دارد و نزدیک به جرم تتراکوارک های X (3872) و Y (3940) می باشد.

کلید واژه ها : تتراکوارک، معادله بته سالپتر، روش آنساز، پتانسیل هلمن

Determining the mass of the tetraquark $cq\overline{cq}$ using the Bethe-Salpeter equation

Ghasempour arany, Aliasghar; Monemzadeh, Majid; Tazimi, Narges

[۱,۲,۳] *Department of Physics, University of kashan*

Abstract

Tetraquarks include diquark and antidiquark. In this article, we investigated the tetraquark $cq\overline{cq}$ and considered it as a diquark, antidiquark system. potential is used, the Hellmann potential is added to the Spin term, and the effect of spin is also taken into account. With the help of Bethe-Salpeter equation and using the method of the ansatz, the mass of the tetraquark $cq\overline{cq}$ has been calculated for different cases J^{PC}, which is in good agreement with other articles and is close to the mass of the tetraquark X (3872) and Y (3940).

key words: Tatraquark, Bethe-Salpeter equation, Ansatz method, Hellman potential

مقدمه

یکی از مسائل مهم در فیزیک هادرونها مطالعه ساختار و ویژگی‌های حالت‌های جدید و ناشناخته است. وجود مزونهای ناشناخته‌ای که طی دهه‌های گذشته به صورت تجربی در LHC و BeLLe آشکارسازی و بررسی شده بودند از جمله مزون‌های X و Y و Z در دو گروه چارمونیوم گونه و باتمونیوم گونه رده بندی می‌شوند و هیچ شباهتی با ساختار معمولی مزونی نداشتند دلیل محکمی بر وجود چند کوارکی های ناشناخته بود [۱]. دی کوارک-ها برای درک مزون‌های غیرمتعارف از اهمیت بالایی برخوردار

هستند که مهمترین آن‌ها تتراکوارک‌ها هستند. در دهه هفتاد، حالت مقیدی از چهار کوارکی‌های ناشناخته شامل دو کوارک و دو پادکوارک به صورت یک سیستم دو مزونی کشف شد که بعدا نام آن را تتراکوارک نامیدند [۲]. بطور کلی حالت های مقید چهار کوارکی می‌توانند به یکی از حالت‌های زیر باشند [۳]:

(۱) حالت دو مزونی $Q\bar{Q}$ ساخته شده از یک مزون Q و یک مزون $\bar{Q}$ دور از هم. (۲) حالت دو مزونی ساخته شده از یک مزون باتمونیوم و یک پیون $\pi^{\pm}$ دور از هم. (۳) حالت مقید چهار کوارکی ساخته شده از دو مزون. (۴) حالت مقید چهارکوارکی ساخته شده از یک دی کوارک و یک آنتی دی کوارک.

برای روشن شدن ساختار این حالت‌های ناشناخته، لازم است که تمامی ویژگی‌های آن‌ها بر اساس اصول دینامیکی مورد بررسی قرار بگیرد. اما بسیاری از فیزیکدانان ذرات، برای مشخص نمودن ساختار آن‌ها از روش ساده‌تر، که نزدیکی جرم آن‌ها به مجموع جرم اجزاء تشکیل دهنده آن‌ها است استفاده می‌کنند [۴]. حالت های چهارکوارکی می‌توانند به صورت مولکولی، تتراکوارک یا ترکیبی از هر دو باشند به همین دلیل ساختار درونی آن‌ها بسیار پیچیده‌تر از مزون‌هایی با ساختار منظم است.

در این مقاله نیز تتراکوارک‌ها را به صورت یک دی کوارک و یک آنتی دی کوارک در نظر گرفتیم و پتانسیل مورد استفاده، پتانسیل هلمن می‌باشد. برای در نظر گرفتن تاثیر اسپین، جمله اسپینی را به انتهای پتانسیل اضافه کردیم و این پتانسیل را در معادله به سالپتر قرار دادیم. برای حل معادلات دیفرانسیل، روش های مختلفی مانند روش سری، روش آنساز، روش NU [۵] و تبدیل لاپلاس وجود دارد که ما با استفاده از روش آنساز، یک تابع موج پیشنهاد می‌دهیم و با جایگذاری آن در معادله به سالپتر[۶]، جرم سیستم‌های تتراکوارکی را بدست می‌آوریم.

معادله به سالپتر

هامیلتونی برهم کنش دو ذره‌ای در سیستم مرکز جرم طبق معادله به سالپتر به صورت زیر است:

$$\left(\sqrt{m_1^2-\nabla}+\sqrt{m_2^2-\nabla}+V(r)-M\right)\psi(r)=0 \qquad (۱)$$

که $\psi(r)=Y_{lm}(r)U_{n,l(r)}$، m_1 و m_2 جرم کوارکهای سازنده، $V(r)$ پتانسیل بین دو ذره، M جرم کل سیستم و $\psi(r)$ تابع موج سیستم دو ذره‌ای است. با جداسازی تابع موج داریم:

$$\sqrt{m_1^2-\nabla}+\sqrt{m_2^2-\nabla}=m_1+m_2-\frac{\nabla^2}{2\mu}-\frac{\nabla^4}{8\eta^3}-\ldots \qquad (۲)$$

که در آن $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ و $\eta=\mu\left(\frac{m_1m_2}{m_1m_2-3\mu^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ می‌باشد و:

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2\mu}-\frac{\nabla^4}{8\eta^3}+V(r)\right)U_{n,l}(r)=E_{n,l}U_{n,l}(r) \qquad (۳)$$

با در نظر گرفتن $U_{n,l}(r)=\frac{R_{n,l}(r)}{r}$ و $P^4=4\mu^2\left(E_{n,l}-V(r)\right)^2$ ، رابطه نهایی معادله به سالپتر بدین شکل می‌شود:

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{2\mu r^2}+\frac{1}{2\tilde{m}}\left(E_{n,l}-V(r)\right)^2-\left(E_{n,l}-V(r)\right)\right)R_{n,l}(r)=0 \qquad (۴)$$

که در رابطه بالا مقدار $\tilde{m}=\frac{m_1m_2\mu}{m_1m_2-3\mu^2}$ می‌باشد.

پتانسیل هلمن به اضافه جمله اسپین

مجموع پتانسیل‌های کولونی و یوکاوا، پتانسیل هلمن [۷] شناخته می‌شود. با اضافه کردن جمله اسپین به آن، شکل کلی آن به صورت زیر می‌شود:

$$V(r)=-\frac{V_0}{r}+V_1\frac{e^{-\delta r}}{r}+A\frac{\tilde{g}(r)}{m_1m_2}S_1.S_2 \qquad (۵)$$

که S_1 و S_2 به ترتیب اسپین‌های کوارک ۱ و کوارک ۲ هستند و مقدار $\tilde{g}(r)=\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-\sigma^2r^2}$ می‌باشد. با استفاده از بسط مک لورن برای $e^{-\sigma^2r^2}$ و $e^{-\delta r}$ داریم:

$$e^{-\sigma^2r^2}=1-\sigma^2r^2+\ldots$$
$$e^{-\delta r}=1-\delta r+\frac{\delta^2r^2}{2}-\ldots \qquad (۶)$$

با جایگذاری این بسط در معادله پتانسیل بالا داریم:

$$V(r)=\frac{1}{r}(V_1-V_0)+r\left(\frac{V_1\delta^2}{2}\right)-k\sigma^2r^2+\left(k-V_1\delta\right) \qquad (۷)$$

که مقدار k برابر است با:

$$k=\frac{A}{m_1m_2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)^3 S_1.S_2 \qquad (۸)$$

که مقدار $S_1.S_2=\frac{1}{2}\left[S(S+1)-S_1(S_1+1)-S_2(S_2+1)\right]$ می‌باشد.

با جایگذاری پتانسیل فوق در رابطه (۴) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\frac{d^2R_{n,l}}{dr^2} &= -\frac{1}{r^2}\left[\frac{\mu(V_1-V_0)^2}{\tilde{m}} - l(l+1)\right] \\ &-\frac{1}{r}\left[\frac{2\mu}{\tilde{m}}(V_1-V_0)(k-V_1\delta-E-\tilde{m})\right] \\ &-r^4\left[\frac{\mu}{\tilde{m}}k^2\sigma^4\right]+r^3\left[\frac{\mu}{\tilde{m}}V_1k\sigma^2\delta^2\right] \\ &-r^2\left[2\frac{\mu}{\tilde{m}}\left(\frac{V_1^2\delta^4}{8}-k\sigma^2\left(k-V_1\delta-\tilde{m}-E\right)\right)\right] \\ &+r\left[\frac{\mu}{\tilde{m}}\left(2k\sigma^2(V_1-V_0)-V_1\delta^2\left(k-V_1\delta-\tilde{m}-E\right)\right)\right] \\ &-\frac{\mu}{\tilde{m}}E^2-2\frac{\mu}{\tilde{m}}\left(\tilde{m}+V_1\delta-k\right)E \\ &-\frac{\mu}{\tilde{m}}\left(-\frac{(k-V_1\delta)^2}{2}+V_1^2\delta^2-V_0V_1\delta^2-\frac{\tilde{m}(k-V_1\delta)}{2}\right)\end{aligned} \tag{۹}$$

برای حل معادله فوق از روش آنساز استفاده می‌کنیم که به صورت $R_n(r)=P_n(r)\exp[g(r)]$ می‌باشد و $\frac{d^2R_{n,l}(r)}{dr^2}$ برابر است با:

$$\frac{d^2R_{n,l}(r)}{dr^2}=\left[g''(r)+g'^2(r)+\frac{P_n''(r)+2P_n'(r)g_n'(r)}{P_n(r)}\right] \tag{۱۰}$$

توابع $P_n(r)$ و $g(r)$ بدین شکل تعریف می شوند که $g(r)$ با توجه به پتانسیل برهمکنش بین کوارک و دی‌کوارک مشخص می‌شود:

$$P_n(r)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(r-a_i^n\right) & n=1,2,3,\ldots \\ 1 & n=0\end{cases} \tag{۱۱}$$

$$g(r)=-\alpha\ln r+\frac{1}{3}\beta r^3+\frac{1}{2}\gamma r^2+\lambda r$$

با قرار دادن توابع $P_n(r)$ و $g(r)$ در رابطه (۱۰) و با در نظر گرفتن $n=l=0$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\frac{d^2R_{n,l}(r)}{dr^2} &= \frac{1}{r^2}\left(\alpha^2+\alpha\right)+\frac{1}{r}\left(-2\alpha\lambda\right)+r^4\left(\beta^2\right)+r^3\left(2\beta\gamma\right) \\ &+r^2\left(\gamma^2+2\beta\lambda\right)+r\left(2\beta-2\alpha\beta+2\gamma\lambda\right)+\left(\lambda^2+\gamma-2\alpha\gamma\right)\end{aligned} \tag{۱۲}$$

با مقایسه‌ی رابطه (۹) با (۱۲) و برابر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف r با یکدیگر داریم:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{g}{2} \\ \beta &= \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{m}}}\frac{k\delta^2}{2} \\ \gamma &= \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{m}}}\frac{V_1\delta^2}{2} \\ \lambda &= \sqrt{\frac{k\mu}{g}}\end{aligned} \tag{۱۳}$$

بعنوان مثال، با برابر قرار دادن ضرایب $\frac{1}{r^2}$ در رابطه (۹) و (۱۲):

$$\alpha^2+\alpha=\frac{\mu(V_1-V_0)^2}{\tilde{m}}-l(l+1) \tag{۱۴}$$

که با حل معادله درجه دوم بالا مقدار α را بدست می‌آوریم:

$$\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\left[\frac{\mu}{\tilde{m}}(V_1-V_0)^2-l(l+1)\right]}}{2}=\frac{g}{2} \tag{۱۵}$$

که مقدار g برابر است با:

$$g=-1\pm\sqrt{1-4\left[\frac{\mu}{\tilde{m}}(V_1-V_0)^2-l(l+1)\right]} \tag{۱۶}$$

در نهایت با انجام محاسبات ریاضی ویژه مقدار انرژی برابر است با:

$$E=-\left(\tilde{m}+V_1\delta-k\right)+\sqrt{\left(\tilde{m}+V_1\delta-k\right)^2-\xi} \tag{۱۷}$$

که مقدار ξ برابر است با:

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{(k-V_1\delta)^2}{2}+V_1^2\delta^2-V_0V_1\delta^2-\frac{\tilde{m}(k-V_1\delta)}{2} \\ &+\frac{k\tilde{m}}{g}+\sqrt{\frac{\tilde{m}}{\mu}}\frac{V_1\delta^2}{2}(1-g)\end{aligned} \tag{۱۸}$$

و مقدار جرم تتراکوارک‌ها از رابطه‌ی $M=m_{q_1q_2}+m_{\bar{q}_1\bar{q}_2}+E_{n,l}$ بدست می‌آید.

برای محاسبه ویژه مقدار انرژی تتراکوارک ها از ضرایب ثابت زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned}&V_0=1.92 \quad , \quad V_1=0.86 \quad , \quad \delta=0.02 \\ &\sigma=1.21 \quad , \quad A_C=0.76\end{aligned} \tag{۱۹}$$

برای محاسبه جرم تتراکوارک $cq\overline{cq}$، مقدار $m_c=1.763Gev$ و $m_q=0.302Gev$ در نظر می‌گیریم که $q=u,d$ می‌باشد. همچنین پتانسیل بین دو کوارک، نصف پتانسیل ناشی از برهمکنش بین دو کوارک- آنتی‌کوارک است $\left(V_{QQ}=\frac{1}{2}V_{Q\bar{Q}}\right)$. با جایگذاری جرم کوارک‌ها و مقادیر فیت شده V_0، V_1، σ، δ و A_C (که مقدار A_C مربوط به ضریب ثابت کوارک c می‌باشد) در رابطه (۱۷) ویژه مقدار انرژی و در ادامه جرم دی‌کوارک‌ها و تتراکوارک‌ها محاسبه می‌شود. در جدول ۱، جرم محاسبه شده برای دی کوارک cq نشان داده شده است که $[cq]$ و $\{cq\}$ به ترتیب مربوط به دی کوارک-هایی با اسپین صفر و یک هستند.

جدول۱ : جرم دی‌کوارک cq برای دو حالت $[cq]$ و $\{cq\}$ مربوط به اسپین صفر و یک (Gev)

حالت	جرم محاسبه شده	جرم [۸]	جرم [۹]
$[cq]$	1.972	1.973	2.120
$\{cq\}$	2.026	2.036	2.168

اولین حالت شناخته شده برای تتراکوارک‌ها، ذره X (3872) می باشد که برای نخستین بار با همکاری Belle در سال ۲۰۰۲ در واپاشی $B^{\pm} \to \pi^{+}\pi^{-} J/\psi$ کشف شد [۱۰]. ذره X (3872) دارای عدد کوانتومی $J^{PC} = 1^{++}$ می‌باشد. دیگر حالت شناخته شده برای تتراکوارک‌ها مربوط به Y و Z هستند. ذره Y (3940) هم با همکاری Belle در واپاشی $B \to Kw\, J/\psi$ کشف شد که دارای عدد کوانتومی $J^{PC} = 2^{++}$ می‌باشد [۱۱].

با توجه به جرم محاسبه شده برای دی کوارک cq در دو حالت اسپین صفر و یک، در جدول ۲، جرم محاسبه شده برای تتراکوارک $cq\overline{cq}$ برای اعداد کوانتومی مختلف J^{PC} نشان داده شده است و مقدار جرم‌های بدست آمده را با سایر مقالات و تتراکوارک‌های X (3872) و Y (3940) مقایسه می‌کنیم.

جدول۲ : جرم تتراکوارک $cq\overline{cq}$ برای دو حالت $[cq]$ و $\{cq\}$ مربوط به اسپین صفر و یک (Gev)

J^{PC}	حالت	جرم محاسبه شده	جرم [۸]	جرم [۹]	آزمایشگاه
0^{++}	$[cq][\overline{cq}]$	3.876	3.812	3.857	
1^{++}	$\left(\begin{matrix}[cq]\{\overline{cq}\}+\\ \{cq\}[\overline{cq}]\end{matrix}\right)\Big/\sqrt{2}$	3.923	3.871	3.899	X (3.872)
1^{+-}	$\left(\begin{matrix}[cq]\{\overline{cq}\}-\\ \{cq\}[\overline{cq}]\end{matrix}\right)\Big/\sqrt{2}$	3.923	3.871	3.899	
0^{++}	$\{cq\}\{\overline{cq}\}$	3.875	3.852	3.729	
1^{+-}	$\{cq\}\{\overline{cq}\}$	3.941	3.890	3.833	
2^{++}	$\{cq\}\{\overline{cq}\}$	3.965	3.968	3.988	Y (3.940)

نتیجه گیری

در این مقاله به حل معادله بته سالپتر برای پتانسیل هلمن پرداختیم. برای بالا بردن دقت کار، پتانسیل مربوط به اسپین ذرات را هم به پتانسیل هلمن اضافه کردیم. در ادامه از روش آنساز کمک گرفته و با حدس زدن درست تابع موج با توجه به فرم پتانسیل، معادلات بسیار ساده‌تر شد و با انجام محاسبات ریاضی، ویژه مقدار انرژی را بدست آوردیم. سیستم تتراکوارک به صورت دی کوارک و آنتی دی کوارک در نظر گرفته شد و مقدار انرژی بدست آمده برای تتراکوارک‌ها در جدول ۲ نشان داده شد.

نتایج این مقاله تطابق بسیار خوبی با نتایج بدست آمده در مقالات [۹ و ۱۰] داشت که درستی روابط و نتایج ما را نشان می‌دهد. همچنین برای دو حالت $([cq]\{\overline{cq}\}+\{cq\}[\overline{cq}])/\sqrt{2}$ با عدد کوانتومی $J^{PC} = 1^{++}$ و $\{cq\}\{\overline{cq}\}$ با عدد کوانتومی $J^{PC} = 2^{++}$ مقدار جرم بدست آمده بسیار نزدیک به دو ذره X (3872) و Y (3940) هستند.

مرجع‌ها

[۱] E. Braaten, C. Langmack and D. H. Smith, *Phys. Rev. D* ۱۱ (۲۰۱۴) ۰۱۴۰۴۴.

[۲] M. Loan, Z.H. Luo and Y.Y. Lam ;" Lowest-lying Tetra-Quark Hadrons in Anisotropic Lattice QCD "; *EPJ. C ۳۷, N. ۳*, (۲۰۰۱) – ۵۷۹ ۵۸۷.

[۳] A. Peters, P. Bicudo, K. Cichy and M. Wagner ; " Investigation of BB four-quark systems using lattice QCD" *; J. Phys. Conf. Ser. ۷۲۴, No. ۱*, (۲۰۱۶) ۰۱۲۰۰ .

[۴] L. Xue-Wen, K. Hong-Wei, D. Yi-Bing and L. Xue-Qian: "Study on the structures of the four-quark states in term of the Born-Oppenheimer approximation"; *Chinese phys. C ۳۹, No. ۸*, (۲۰۱۵) ۰۸۳۱۰۳ .

[۵] N. Tazimi and A. Ghasempour, "Bound State Solutions of Three-Dimensional Klein-Gordon Equation for Two Model Potentials .by NU Method" *Advances in High Energy Physics*, ۲۵۴۱۸۳ (۲۰۲۰) ۱۰.

[۶] S.M. Ikhdair, and R. Sever, Z. *Phys. C* ۵۶, (۱۹۹۲) ۱۵۵ .

[۷] I. Nasserl, M. S. Abdelmonem, *Phys. Scr. ۸۳*, (۲۰۱۱) ۰۵۵۰۰۴.

[۸] D. Ebert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, *Phys. Lett. B ۶۳۴*, (۲۰۰۶) ۲۱۴

[۹] M. V. Carlucci, F. Giannuzzi, G. Nardulli, M. Pellicoro and S. Stramaglia, *Eur. Phys. J. C* ۵۷, (۲۰۰۸) ۵۶۹ .

[۱۰] S. K. Choi et al., Belle Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* ۹۱ (۲۰۰۳) ۲۶۲۰۰۱

[۱۱] K. Abe et al. [Belle Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* ۹۴, (۲۰۰۵) ۱۸۲۰۰۲ .

اثرات نمای لیفشیتز و نمای ناقض آبرمقیاس بر پتانسیل موثر ژئودزیک‌های کلاسیک

حکیمی، همایون؛ صفاری، رضا؛ محمدی‌مظفر، محمدرضا

گروه فیزیک، دانشگاه گیلان

چکیده

در این مقاله مسیرهای کلاسیک ژئودزیک‌های نورگونه و زمان‌گونه را در پس‌زمینه‌های غیرنسبیتی دارای نمای لیفشیتز و نمای ناقض ابرمقیاس مطالعه می‌نماییم. در مجموعه‌ی وسیعی از این هندسه‌ها، برخی از ژئودزیک‌های فیزیکی به مرز فضازمان منتهی نمی‌شوند. به ویژه پتانسیل موثری که تعیین‌کننده رفتار مسیر کلاسیک است، به ازای مقادیر مشخصی از نماهای لیفشیتز و ناقض ابرمقیاس، در نزدیکی مرز فضازمان واگرا می‌شود.

واژه های کلیدی:ژئودزیک، نمای لیفشیتز، نمای ناقض ابرمقیاس

Effects of Lifshitz exponent and hyper-scaling violating exponent on effective potential for classical geodesics

Hakimi, Homayon; Saffari, Reza; Mohammadi Mozaffar, M. Reza

Department of Physics, University of Guilan

Abstract

We study the classical paths of null and time-like geodesics in nonrelativistic backgrounds with nontrivial Lifshitz and hyper-scaling violating exponents. For a large class of such geometries, there exist physical geodesics which do not reach the boundary of the spacetime. In particular, the corresponding effective potential, which governs the behavior of classical path, diverges near the boundary for specific values of Lifshitz and hyper-scaling violating exponents.

***Keywords**: geodesic, Lifshitz exponent, hyper-scaling violating exponent*

مقدمه

شناخت و مطالعه‌ی اندرکنش گرانشی از دیرباز مورد توجه فیزیکدانان بوده است. طی قرن اخیر نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین و تعمیم‌های آن چارچوب بسیار خوبی برای درک بهتر ویژگی‌های این اندرکنش و توصیف رخدادهای ناشی از آن را فراهم آورده است. یکی از راه‌های بررسی میدان گرانشی ناشی از اجرام، مطالعه‌ی مسیر ذرات آزمونی است که در مجاورت آن‌ها حرکت می‌کنند. در واقع بررسی مسیرهای ژئودزیک به ما در فهم میزان خمش، وجود مرز و همچنین ساختار علی فضازمان یاری می‌رساند. در چارچوب نظریات گرانشی نسبیتی مطالعات بسیار زیادی در این زمینه صورت پذیرفته که هر یک در کامل نمودن تصویر فیزیکی ما از جهان پیرامون کمک نموده است. یکی دیگر از رهیافت‌های مورد توجه برای بررسی و مطالعه‌ی گرانش استفاده از چارچوب هولوگرافی است. در این چارچوب فرض بر آن است که هر نظریه‌ی گرانشی متناظر با یک نظریه‌ی میدان در بعدی پایین‌تر بوده و ارتباط مشخصی بین تقارن‌ها، موجودات فیزیکی و مشاهده‌پذیرهای دو نظریه وجود دارد. مثال مشخصی از این دوگانی که به هم ارزی پاددوسیته/همدیس معروف شده است برای اولین بار در [۱] بررسی شد. همچنین مطالعاتی پیرامون نحوه‌ی تعمیم این دوگانی‌ها به نظریات میدان غیرنسبیتی که در تناظر با

فضازمان‌های با گروه تقارنی مجانبی متفاوتی هستند نیز انجام شده است (به عنوان نمونه به [۲] برای مروری بر این مطالعات مراجعه نمایید). یکی از مهم‌ترین نظریات گرانشی دوگان به نظریات میدان دارای تقارن‌های غیرنسبیتی در $d+2$ بعد با متریک زیر داده می‌شود[۳]:

$$ds^2{}_{d+2} = r^{\frac{2\theta}{d}}\left(-\frac{1}{r^{2z}}dt^2 + \frac{1}{r^2}\left(d\vec{x}_d{}^2 + dr^2\right)\right) \qquad (۱)$$

که در آن پارامترهای z و θ به ترتیب نشانگر نمای بحرانی دینامیکی و نمای ناقض ابرمقیاس هستند. نحوه‌ی اثر تبدیلات مقیاس غیرنسبیتی بر این فضازمان به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$t \to \xi^z t, \qquad x_i \to \xi x_i, \qquad r \to \xi r,$$
$$ds \to \xi^{\frac{\theta}{d}} ds.$$

مشاهده می‌شود که پارامتر z نشانگر ناهمسانگردی تبدیل مقیاس بین زمان و مکان است. همچنین پارامتر θ نشانگر مقیاس شدن عنصر طول فضازمانی است. این هندسه به ازای مقادیر غیربدیهی نماهای ذکر شده برای اولین بار به ترتیب در [۴] و [۵] معرفی شده‌اند. شایان ذکر است که با انتخاب $\theta = 0$ و $z = 1$ به متریک نسبیتی پاددوسیته می‌رسیم. به منظور ارضای شرایط انرژی نورگونه این پارامترها باید در نامساوی‌های زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} (z-1)(d+z-\theta) \geq 0, \\ (d-\theta)(d(z-1)-\theta) \geq 0. \end{cases} \qquad (۲)$$

همان‌گونه که در مطالعات پیشین نشان داده شده است، پاره‌ای از کمیت‌ها و سنجه‌های مورد توجه در چارچوب نظریه‌ی میدان متناظر به هندسه‌هایی که به صورت مجانبی مانند متریک (۱) هستند، رفتارهای جالب توجهی از خود بروز می‌دهند (به عنوان نمونه به [۶] و [۷] برای مروری بر این مطالعات مراجعه نمایید). با این وجود برخی از ویژگی‌های هندسی این گونه متریک‌ها، پیچیدگی‌هایی را در ارائه‌ی تصویر کاملی از واژه‌نامه‌ی هولوگرافی مختص آنان ایجاد کرده است. در واقع می‌توان نشان داد که در حد $\theta = 0$ و به ازای مقادیر غیربدیهی نمای بحرانی در نزدیکی مرکز فضازمان نیروی جزرومدی وارد بر یک ذره واگرا می‌شود [۸]. دقت به این نکته حائز اهمیت است که کمیت‌های نرده‌ای ساخته شده از متریک در این حد متناهی هستند. همچنین در این حالت به دلیل وجود یک پتانسیل گرانشی نامحدود ذرات بدون جرم که به صورت غیرشعاعی از مرکز فضازمان شروع به حرکت می‌نمایند توانایی رسیدن به ناحیه‌های نزدیک مرز را ندارند[۹]. به عبارت دیگر سد پتانسیل بی‌نهایت سبب بروز یک ناحیه‌ی ممنوعه برای مسیر ژئودزیک‌های نورگونه‌ی متناظر با این ذرات خواهد بود. این ویژگی سبب بروز دشواری‌هایی در بازسازی هولوگرافی نظریه‌های میدان دوگان به چنین فضازمان‌هایی شده است [۱۰]. در این پژوهش سعی داریم این مطالعه را به ژئودزیک‌های زمان‌گونه و نورگونه متعلق به فضازمان داده شده با متریک (۱) گسترش داده و اثرات گرانشی ناشی از مقدار غیربدیهی نمای ناقض ابرمقیاس را بررسی نماییم. در بخش‌های بعد ضمن محاسبه‌ی معادلات مسیر در مدل گرانشی فوق‌الذکر، رفتار پتانسیل موثر گرانشی را در فضای پارامترها به صورت عددی بررسی خواهیم نمود.

معادلات ژئودزیک و پتانسیل موثر

برای یافتن معادلات ژئودزیک با شروع از متریک (۱) و در نظر گرفتن پارامتر افین λ به لاگرانژی زیر خواهیم رسید:

$$2\mathcal{L} = -\frac{\dot{t}^2}{r^{2z-\frac{2\theta}{d}}} + \frac{1}{r^{2-\frac{2\theta}{d}}}\left(\dot{x}^2 + \dot{r}^2\right) \equiv -\varepsilon, \qquad (۳)$$

که در آن نقطه به معنای مشتق نسبت به پارامتر افین است. همچنین مقادیر $\varepsilon = -1, 0, +1$ به ترتیب نشان دهنده‌ی ژئودزیک‌های زمان‌گونه، نورگونه و فضاگونه هستند. برای به دست آوردن مسیر حرکت از معادله‌ی اویلر لاگرانژ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right) = 0,$$

که در آن q^{μ} نشانگر هر یک از مختصات فضازمان است. از آن‌جا که لاگرانژی رابطه‌ی (۳) مستقل از مختصات t و x^i بوده و درنتیجه چرخه‌ای‌اند، به تعداد $d+1$ ثابت حرکت خواهیم داشت که متناظر با انرژی و تکانه‌ی ذرات مورد بررسی هستند. مقادیر این ثابت‌ها با استفاده از معادله‌ی حرکت به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}}\right) = 0 \rightarrow -\frac{\dot{t}}{r^{2z-\frac{2\theta}{d}}} \equiv E, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) = 0 \rightarrow \frac{\dot{\vec{x}}}{r^{2-\frac{2\theta}{d}}} \equiv \vec{P}. \end{cases} \qquad (۴)$$

بدین ترتیب روابط بالا امکان بازنویسی مشتقات زمان و مکان را برحسب مختصه‌ی شعاعی فراهم می‌آورد. با جای‌گذاری مشتقات زمان و مکان در عبارت (۳)، لاگرانژی صرفا برحسب مختصه‌ی شعاعی و مشتق مرتبه‌ی اول آن قابل بیان است. با ساده‌سازی محاسبات به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$\dot{r}^2 = r^{2+2z-\frac{4\theta}{d}}(E^2 - V_{eff}(r)), \qquad (۵)$$

که در آن پتانسیل موثر شعاعی ناشی از نیروی گرانشی به صورت زیر است:

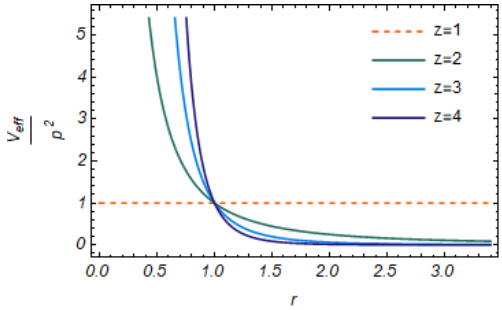
$$V_{eff}(r) = r^{-2z+\frac{4\theta}{d}}\varepsilon + r^{2-2z}\vec{P}^2. \qquad (۶)$$

رابطه‌ی (۵) در تشابه با مکانیک کلاسیک مانند پایستگی انرژی مکانیکی و تقسیم آن به سهم‌های جنبشی و پتانسیل است. بدین ترتیب با توجه به حقیقی بودن انرژی جنبشی، نواحی مجاز حرکت ذره را می‌توان با استفاده از شرط $E^2 \geq V_{eff}(r)$ تعیین نمود. همچنین نقاطی که در آن‌ها نامساوی اخیر نقض گردد، متناظر با نقاط بازگشت ذره هستند. علیرغم آن‌که حل دقیق معادله‌ی حرکت و یافتن مسیر ژئودزیک به ازای پارامترهای موجود لزوما ساده نیست لیکن با تحلیل پتانسیل موثر به صورت عددی می‌توان جنبه‌های عمومی از حرکت ذرات فیزیکی را یافت. در بخش بعد ضمن تشریح این فرایند، به بیان و بررسی نتایج به دست آمده خواهیم پرداخت. شایان ذکر است که مطالعات مشابهی برای حالت $\theta = 0$ در مراجع [۸] و [۹] انجام شده است و لذا تمرکز اصلی ما در این مقاله بر اثرات ناشی از مقدار غیربدیهی نمای ناقض ابرمقیاس است.

نتیجه‌گیری

نمودار پتانسیل موثر به ازای مقادیر متفاوتی از پارامترها در شکل‌های (۳)-(۱) نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که از آن‌جا که رفتار کیفی نمودارها و نتایج فیزیکی منتج از آن‌ها مستقل از بعد نظریه‌ی میدان است، مطالعه‌ی خود را به $d = 4$ محدود کرده‌ایم. شکل (۱) حالت متناظر با ژئودزیک‌های نورگونه غیرشعاعی با $\theta = 0$ را به ازای مقادیر مختلف نمای بحرانی نشان می‌دهد. همان‌گونه که از این شکل مشخص است با وجود متناهی بودن مقدار سد پتانسیل در حالت نسبیتی، افزایش z موجب واگرا شدن پتانسیل در نزدیکی مرز فضازمان خواهد شد. بدین ترتیب ذراتی که از ناحیه‌ی میانی هندسه‌ی گرانشی به سمت مرز حرکت می‌کنند، پس از مواجه با این سد بازتاب یافته و توانایی رسیدن به مرز را نخواهند داشت.

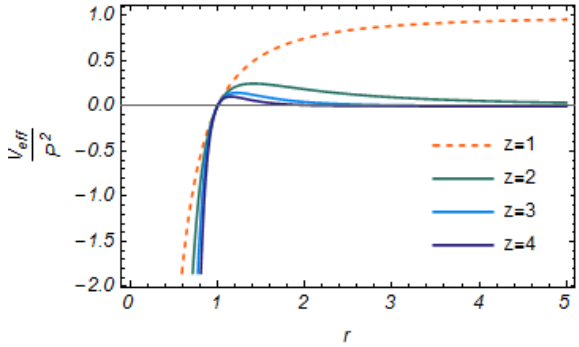
شکل (۲) نشان‌دهنده‌ی پتانسیل موثر برای ژئودزیک‌های زمان‌گونه با $\theta = 0$ به ازای مقادیر مختلفی از نمای بحرانی است. مطابق این شکل مشاهده می‌شود که در این حالت به دلیل وجود قله‌ی متناهی برای سد پتانسیل، همواره ذرات فیزیکی می‌توانند به مرز فضازمان برسند. همچنین وابستگی مقدار بیشینه‌ی پتانسیل موثر به نمای بحرانی به گونه‌ای است که با افزایش مقدار این پارامتر، ارتفاع قله کمتر می‌شود. به عبارت دیگر اثرات غیرنسبیتی احتمال بازتاب ذره به ناحیه‌ی مرکزی فضازمان را کاهش می‌دهد.



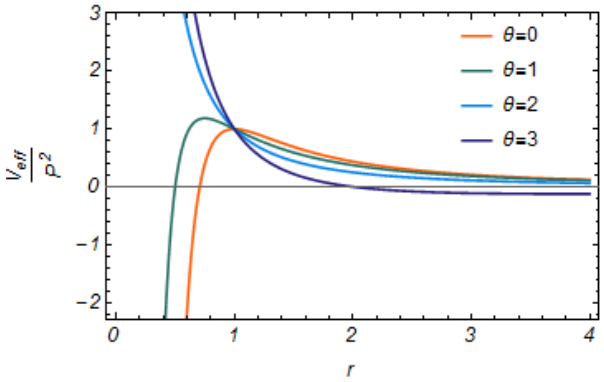
شکل1: پتانسیل موثر بر حسب مختصه‌ی شعاعی به ازای مقادیر مختلف نمای بحرانی برای ژئودزیک‌های نورگونه با $\theta = 0$.

دقت به این نکته ضروری است که از آن‌جا که وابستگی به نمای ناقض ابرمقیاس در متریک (۱) به صورت همدیس به متریک لیفشیتز ظاهر شده است، لذا انتظار داریم شکل (۱) به ازای مقادیر غیربدیهی این پارامتر نیز بدون تغییر باقی بماند. بنابراین ذرات بدون جرمی که روی مسیرهای نورگونه حرکت می‌کنند به ازای $\theta \neq 0$ همچنان توانایی رسیدن به مرز فضازمان را نخواهند داشت. بنابراین بررسی اثرات غیربدیهی ناشی از نمای ناقض ابرمقیاس مستلزم مطالعه‌ی مسیر ذرات زمان‌گونه است.

شکل (۳) این حالت را برای ژئودزیک‌های غیرشعاعی با $z = 2$ به ازای مقادیر مختلف نمای ناقض ابرمقیاس نشان می‌دهد. همان‌گونه که از این شکل مشخص است به ازای مقادیر کوچک θ یک سد پتانسیل با بیشینه‌ی متناهی وجود داشته و لذا ذرات با انرژی‌های مشخصی توانایی رسیدن به مرز فضازمان را دارند. همچنین با افزایش این پارامتر، پتانسیل موثر در نزدیکی مرز فضا زمان واگرا خواهد شد.



شکل۲: پتانسیل موثر بر حسب مختصه‌ی شعاعی به ازای مقادیر مختلف نمای بحرانی برای ژئودزیک‌های زمان‌گونه با $\theta = 0$.



شکل۳: پتانسیل موثر بر حسب مختصه‌ی شعاعی به ازای مقادیر مختلف نمای ناقض ابرمقیاس برای ژئودزیک‌های زمان‌گونه با $z = 2$.

بدین ترتیب در مقایسه با نتایج شکل‌های (۱) و (۲) مشاهده می‌شود که با تنظیم مقادیر غیربدیهی برای این پارامتر، ذرات جرم‌داری که روی ژئودزیک‌های زمان‌گونه حرکت می‌کنند به ناحیه‌ی مرزی دسترسی خواهند داشت به عنوان یکی از جنبه‌های مطالعاتی جالب توجه می‌توان بازسازی هولوگرافی فضازمان‌های متناظر با متریک (۱) را به ازای مقادیر غیربدیهی نمای ناقض ابرمقیاس بررسی نمود. همان‌گونه که از شکل (۳) مشخص است به ازای مقادیر مشخصی از این پارامتر، بازسازی مورد نظر امکان پذیر است.

مرجع‌ها

[1] J. M. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.***38**, 1113 (1999).
[2] M. Taylor,*arXive-Print:* 0812.0530 [hep-th].
[3] X. Dong, et. al.,*JHEP***06**, 041 (2012).
[4] S. Kachru, X. Liu, M. Mulligan, *PRD* **78**, 106005 (2008).
[5] L. Huijse ،S. Sachdev, B. Swingle, *PRB* ***85***, 035121 (2012).
[6] M. Taylor,*Class.Quant.Grav*. **33**, 033001(2016) .
[7] S. Harrison, S.Kachru, H. Wang, *JHEP***02**, 085(2014).
[8] N. Bao, et. al., PRD **86**, 106008 (2012).
[9] C. Keeler, G. Knodel, J. T. Liu, *JHEP***01**, 062 (2014).
[10] S. A. Gentle, C. Keeler, JHEP**03,** 195 (2016).

بررسی تحول دینامیکی زنجیره اسپینی تحت برهمکنش ژیالوشینسکی–موریا درحضور تقارن پاریته–زمان

معین وحیدی
دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده فیزیک دانشگاه شهید باهنر
Moein.vahidi@ phy.uk.ac.ir

فاطمه صادقی
دانشجوی دکتری دانشکده فیزیک دانشگاه شهید باهنر
f.sadeghi@phy.uk.ac.ir

آرش نجمائی
دانشجوی دکتری دانشکده فیزیک دانشگاه اصفهان
Najmaiearash96@gmail.com

مصطفی معتمدی‌فر
عضو هیأت علمی دانشکده فیزیک داشنگاه شهید باهنر کرمان
m.motamedifar@uk.ac.ir

چکیده

توصیف حالت‌های ماده از نقطه نظر ویژگی‌های مربوط به پدیده جایگزیدگی، مسیرهای جالب و جذابی را هم در حوزه فیزیک نظری و هم تجربی باز نموده است. یکی از این ویژگی‌ها حفظ اطلاعات حالت اولیهٔ یک سامانه کوانتومی است که البته از اهمیت فراوانی برخوردار می‌باشد. در همین راستا و در پژوهش حاضر به بررسی و مطالعه رخ‌داد این پدیده در یک زنجیره شبه‌بلور اسپینی می‌پردازیم که منشأ آن تحول دینامیکی این سامانه است. به منظور اعمال شرایط شبه تناوبی زنجیره، از افزونه غیر هرمیتی اوبره آندره استفاده شده است که با برهم‌کنش ژیالوشینسکی–موریا برای توصیف هامیلتونی سامانه بکار می‌رود. این افزونه غیر هرمیتی به صورت یک پتانسیل مختلط دارای تقارن پاریته–زمان یعنی $V(x)=V^*(-x)$ *مد نظر قرار گرفته است. در این زنجیره و در زمان اولیه، حالت کوانتومی ذره قرار گرفته در جایگاه میانی با حالت ذرات دیگر متفاوت است. با استفاده از تابع نمایه تحول دینامیکی سیستم روند گسترش حالت ذره میانی به ذرات دیگر زنجیره بررسی گردیده و از روی آن می‌توان به شرایطی رسید که فازهای جایگزیده و غیر جایگزیده را تعیین می‌نمایند.*

کلید واژه ها *: سامانه‌ها شبه‌بلور ـ جایگزیدگی ـ برهم‌کنش ژیالوشینسکی–موریا ـ تقارن پاریته–زمان*

Exploring the spin chain's evolution under Dzyaloshinskii–Moriya interaction in parity-time symmetry

Vahidi, Moein[1]; Sadeghi, Fatemeh[1]; Najmaei, Arash[2]; Motamedifar, Mostafa[1]

[1] *Fuculty of physics, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman*
[2] *Fuculty of physics, University of Isfahan, Isfahan*

Abstract

In both theoretical and experimental physics, the description of the states of matter from the perspective of the characteristics related to the localization phenomenon has opened up fascinating and alluring avenues. One of these characteristics is preserving the information of a quantum system's initial state, which is of course crucial. In this regard, we investigate and study the occurrence of this phenomenon in a quasi-crystal spin chain, the origin of which is the dynamic evolution of this system, in the present investigation. The non-Hermitian extension of Aubrey-André has been used to accommodate the Dzyaloshinskii-Moriya interaction for the Hamiltonian description of the system in order to apply the quasi-periodic conditions of the chain. This non-Hermitian extension is viewed as a mixed potential with parity-time symmetry, that is, $V(x)=V^*(-x)$*. In this chain and at the beginning, the quantum state of the particle in the middle position is distinct from the quantum states of the other particles. The spread of the intermediate particle state to additional particles has been explored using the system's wave function profile evolutions in order to determine locolized and non-locolized phases.*

key words: *Pseudocrystal systems, Localization, Dzyaloshinskii–Moriya interaction, Parity-time symmetry*

مقدمه

اکتشاف جایگزیدگی ناشی از بی‌نظمی یک موضوع تحقیقاتی دیرینه در فیزیک ماده چگال است که برای اولین بار در سال 1958، به‌نام جایگزیدگی اندرسون توسط فیلیپ اندرسون پیشنهاد شد [1]. او مقاله‌ای مبنی بر گذار فاز مواد عایق به فلز و چگونگی آن منتشر نمود. این کاهش ناگهانی در رسانش، با جایگزیدگی تابع موج همراه بود. در مقایسه با موارد با بی‌نظمی تصادفی، سامانه‌های شبه‌بلوری یک فاز ماده را بین شبکه‌های تناوبی و آمورفی تشکیل می‌دهند، که نظم دارای دوربُرد بوده که متناوب نیست. یک مثال نمونه از یک سامانه شبه‌بلوری یک بُعدی، مدل غیر هرمیتی هامیلتونی اوبره آندره بوده که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. یکی از ویژگی‌های معمول مدل اوبره آندره این است که وقتی دامنه پتانسیل شبه بلوری از یک مقدار بحرانی متناهی فراتر می‌رود، سامانه تحت انتقال فلز–عایق قرار می‌گیرد که توسط ویژگی خود–دوگانگی(self-duality) تعیین می‌شود [2].

می‌دانیم که بسته به انتخاب شرایط مرزی، سامانه‌های فیزیکی به دو دسته بسته یا باز طبقه بندی می‌شوند [3]. از طرفی دیگر، دسته خاصی از سامانه‌ها وجود دارند که دارای ویژگی‌هایی از هر دو نوع سامانه باز و بسته می‌باشد. چنین سامانه‌هایی با محیط اطراف خود ارتباط داشته اما هیچ‌گونه شارش خالص احتمال یا انرژی بین محیط و این سامانه‌ها برقرار نیست. چنین هامیلتونی‌هایی به طور هم زمان با عملگرهای پاریته و وارونی زمان جابه‌جا شده و اصطلاحاً دارای تقارن پاریته–زمان می باشند [3].

وجود تقارن پاریته–زمان در مهندسی سامانه‌های اسپینی نقطه عطفی در کارهای پژوهشی سال‌های اخیر شده است. یکی از مهم‌ترین برهم‌کنش‌های شناخته شده بین ذرات در اینگونه سامانه‌ها، پتانسیل ژیالوشیسکی–موریا[1] (DM) است [4].

در این مقاله ما به طور منحصر به فرد تاثیر این برهم‌کنش را برای یک زنجیره اسپینی یک بُعدی در حضور تقارن پاریته–زمان بررسی می‌کنیم. بنابراین، هدف اصلی کار حاضر بررسی تحول دینامیکی مدل اوبره آندره تحت برهمکنش DM با تقارن پاریته–زمان در ناحیه‌های مختلف جایگزیدگی خواهد بود.

مدل و هامیلتونی

به منظور بررسی پدیده جایگزیدگی، یک زنجیره اسپینی با هامیلتونی

$$H = \vec{D}.\sum_j (\vec{S}_j \times \vec{S}_{j+1}) + \sum_j (\frac{1}{2} + S_j^z)\lambda e^{-i2\pi\alpha j} \qquad (1)$$

درنظر گرفته شده است. در رابطه شماره(1)، $\vec{D}$ قدرت برهمکنش ژیالوشینسکی–موریا می‌باشد که در جهت Z انتخاب می‌گردد. همچنین در این رابطه، عبارت دوم نشان دهنده پتانسیل غیر هرمیتی با تقارن پاریته–زمان است و λ دامنه این پتانسیل می‌باشد. همانطور که می‌دانیم پتانسیلی دارای تقارن پاریته–زمان است که، بخش حقیقی آن زوج و بخش موهومی‌اش فرد باشد، مثلاً تابع $x^2 - ix^3$. به عبارتی دیگر، باید شرط $V(x) = V^*(-x)$ برقرار باشد. همچنین عدد گنگ $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ (عکس نسبت طلایی) به گونه‌ای انتخاب شده است که برابر نسبت دو عدد فیبوناچی بزرگ، $F_{\mu-1}/F_\mu$ است، که شرط شبه‌بلوری سامانه در آن رعایت شده است. با در نظر گرفتن پتانسیل مختلط و همچنین گنگ بودن مقدار عددی α، هامیلتونی مورد استفاده، تحول دینامیکی زنجیره اسپینی را تحت برهم‌کنش DM در یک شبه‌بلور ارائه می‌دهد. برای بررسی تحول دینامیکی سامانه بایستی ابتدا یک حالت اولیه برای سامانه در نظر بگیریم. در این تحقیق، حالت اولیه به صورت $|\psi(0)\rangle = |j_0\rangle = |00...010...00\rangle$ نمایش داده می‌شود که در آن تنها اسپین جایگاه j_0 در حالت $|\uparrow\rangle$

[1] در این پژوهش ما از عبارت اختصاری DM بجای کلمه ژیالوشیسکی–موریا استفاده می‌کنیم.

است. بنابراین در این بخش به بررسی تحول دینامیکی این حالت یعنی زنجیره اسپینی با $S^z_{j_0}=\frac{1}{2}$ که j_0 جایگاه اسپین مرکزی است، می‌پردازیم. اکنون به‌منظور بدست آوردن تحول دینامیکی زنجیره، از روش حل عددی معادله‌ی شرودینگر وابسته به زمان

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle \qquad (2)$$

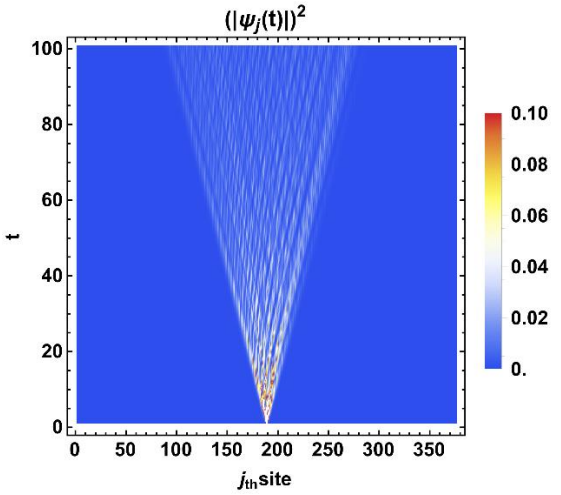
استفاده می‌کنیم. زیرا این روش از نظر سرعت و دقت محاسبات بهترین روش برای کار ما می‌باشد. در این رابطه، H هامیلتونی سامانه و $|\Psi(t)\rangle$ حالت سامانه در هر زمان دلخواه می‌باشد بطوریکه $|\Psi(t)\rangle=\sum_j \psi_j(t)|j\rangle$ و در آن $\psi_j(t)$ نشان دهنده دامنه احتمال حضور جایگاه j ام است. همچنین در این محاسبات مقدار $\hbar=1$ در نظر گرفته می‌شود. حال با استفاده از روش‌های عددی می‌توان معادله ذکر شده را حل کرد. سپس به کمک آن، تحول حالت اولیه‌ی سامانه را در ناحیه‌های مختلف جایگزیدگی بررسی کرد که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

نمایه تحول دینامیکی سیستم

برای مشاهده رفتارهای دینامیکی یک سامانه غیر هرمیتی در فازهای مختلف جایگزیدگی، کمیت نمایه تحول دینامیکی سامانه:

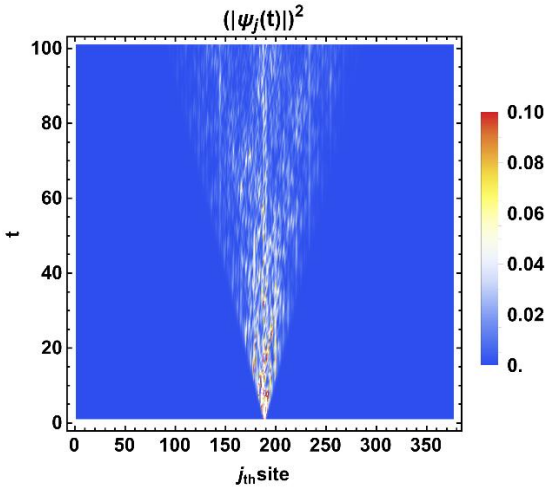
$$P_j(t)=|\psi_j(t)|^2 \qquad (3)$$

را تعریف می‌کنیم. حال اگر این احتمال به دیگر جایگاه‌های سامانه شارش نکند، و تنها جایگاه j_0 ام دارای حالت $|\uparrow\rangle$ باشد آنگاه سامانه در فاز جایگزیده خود قرار خواهد گرفت، به این ترتیب اطلاعات حیاتی حالت اولیه سامانه به شکل کاملاً خوبی در دسترس قرار خواهد گرفت. نتایج محاسبات برای زنجیره اسپینی تحت برهمکنش DM در زمان‌های مختلف t و برای λهای متفاوت در شکل‌های (1)–(3) به نمایش درآمده‌اند. در این محاسبات طول زنجیره $L=377$ (یکی از جملات دنباله‌ی فیبوناچی) و جایگاه مرکزی $j_0=189$ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است، جهت انجام این پژوهش، قدرت برهم‌کنش ژیالوشیسکی–موریا با مقدار عددی $D=1$ در نظر گرفته شده است. همچنین از آنجایی‌که، هدف بررسی احتمال حضور در زمان‌های مختلف است، محور عمودی مربوط به زمان است که با توجه به بهنجارسازی‌های انجام شده، یکاهای انتخاب شده، بدون بُعد در نظر گرفته شده‌اند. شکل(1) نمایه تحول سامانه به ازای $\lambda=0.6$ را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل قابل مشاهده است، در ابتدا ذرهِ جایگاه j_0 دارای اسپین $|\uparrow\rangle$ است. با گذشت زمان، احتمال اینکه حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$ در سایر جایگاه‌ها شارش پیدا کند افزایش می‌یابد، یعنی در زمان‌های طولانی تمامی اطلاعات مربوط به حالت اولیه سامانه از بین می‌رود و حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$، با احتمال یکسان در تمامی جایگاه‌های سامانه می‌تواند وجود داشته باشد. درنتیجه سامانه در ناحیه غیر جایگزیده قرار دارد.

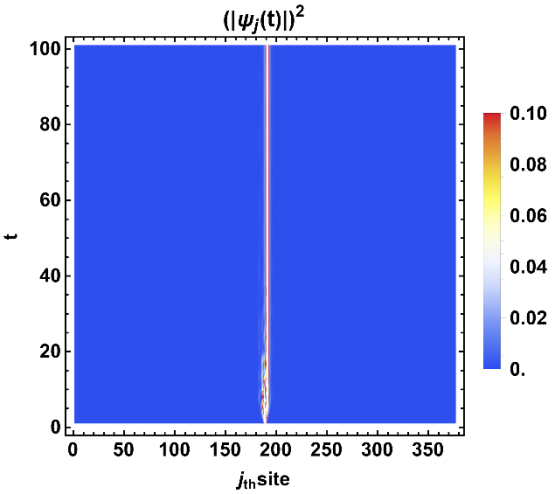


شکل1:نمایه تحول زمانی سامانه برای $\lambda=0.6$. نقاط روشن نشان‌دهنده احتمال حضور حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$ است.

شکل(2) نمایه تحول سامانه به ازای $\lambda=1$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، احتمال اینکه حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$ در نزدیکی جایگاه j_0 باشد نسبت به سایر جایگاه‌ها بیشتر است. این مشاهدات تا زمان‌های نسبتاً طولانی امکان‌پذیر است. اما پس از گذشت زمان‌های طولانی‌تر، بار دیگر اطلاعات حالت اولیه از بین رفته و احتمال شارش حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$ به دیگر جایگاه‌ها تقریباً یکنواخت می‌گردد. به عبارت دیگر می‌توان گفت که سامانه به ازای $\lambda=1$ در آستانه جایگزیدگی قرار می‌گیرد.



شکل2: نمایه تحول زمانی سامانه به ازاء $\lambda = 1$. همانگونه که مشاهده می‌کنید اطلاعات حالت اولیه سامانه برای مدت بیشتری قابل دسترس است و سامانه در آستانه‌ی جایگزیدگی قرار دارد.



شکل3: نمایه تحول سامانه به ازاء $\lambda = 1.5$. با توجه به شکل کاملا مشخص است، در جایگاه‌های نزدیک به جایگاه j_0 احتمال اینکه حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$، باشد بیشترین مقدار را دارد.به عبارتی سامانه در حالت کاملاً جایگزیده قرار دارد.

و درنهایت، شکل(3) نمایه تحول سامانه به ازای $\lambda = 1.5$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود احتمال حضور حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$، تنها در جایگاه‌های مجاورِ جایگاه مرکزی دیده می‌شود. این اتفاق تا زمان‌های بسیار طولانی نیز ادامه دارد. بنابراین می‌توان اطمینان حاصل نمود که سامانه به ازاء این مقدار از λ کاملا جایگزیده شده است.

نتیجه گیری

در این مقاله، ما به بررسی تحول دینامیکی یک زنجیره اسپینی تحت برهم‌کنش DM در یک شبه بلور با پتانسیل غیرهرمیتیِ دارای تقارن پاریته–زمان می‌پردازیم. همانطور که در متن توضیح داده شد، سامانه پیشنهادی در $\lambda = 0.6$ در فاز غیر جایگزیده خود قرار دارد و ذره با احتمال یکسان ممکن است در هریک از جایگاه‌های زنجیره دارای اسپین $|\uparrow\rangle$ باشد. در ادامه با قرار دادن مقدار عددی $\lambda = 1$ احتمال یافت ذره در حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$ در نزدیکی جایگاه j_0 نسبت به سایر جایگاه‌ها بیشتر می‌شود و سامانه در آستانه‌ی جایگزیدگی قرار می‌گیرد. این نتیجه نشان می‌دهد، سامانه به ازاء این دامنه پتانسیل هنوز به فاز جایگزیده گذار نکرده است، سپس با در نظر گرفتن $\lambda = 1.5$ سامانه به ناحیه جایگزیده گذار می‌کند. به گونه‌ای که احتمال اینکه حالت کوانتومی $|\uparrow\rangle$ در جایگاه‌های نزدیک به جایگاه j_0 باشد بیشتر می‌شود. بنابراین به ازای λهای با مقادیر بیشتر از یک، گذار فاز جایگزیدگی اتفاق می‌افتد.

مرجع‌ها

[1] P. W. Anderson;" Absence of diffusion in certain random lattices"; *Physical Review* **109**, (1958) 1492.
[2] Z. Xu and S. Chen;" Dynamical evolution in a one-dimensional incommensurate lattice with PT symmetry"; *Physical Review A***103** (2021) 043325.
[3] C.M. Bender;*" PT symmetry: In quantum and classical physics"*; World Scientific, 2019.
[4] S. Shahsavari, M. Motamedifar and H. Safari;" Exact dynamics of concurrence-based entanglement in a system of four spin-1/2 particles on a triangular ladder structure"; *Physica Scripta***95** (2019) 01

ارائه یک مدل آماری با استفاده از معادله رگرسیون چندگانه برای پیش بینی بهره لیزرپرتوایکس نرم

غزاله غنی مقدم
استادیار دانشگاه حضرت معصومه(س)، قم
gh.ghani@hmu.ac.ir

چکیده

از پلاسماهای لیزری حاصل از برهمکنش لیزر پرتوان دمش با سطح هدف، پرتو ایکس نرم خارج می گردد که کاربردهای بسیاری در صنعت و پزشکی دارد. برای ایجاد بیشینه ضریب بهره لیزر پرتو ایکس نرم خروجی، بایستی پارامترهای لیزر دمش بهینه گردند. بهینه سازی انتشار برای اهداف کاربردی نیازمند شبیه سازی های عددی گسترده بر اساس معادلات هیدرودینامیکی و معادله حالت می باشد که این کار از نظر محاسباتی سخت و پیچیده است. در این پژوهش راه حلی برای این مشکل با استفاده از یک الگوی مبتنی بر یادگیری ماشینی برای پیش بینی مقدار بهره لیزر پرتو ایکس نرم با استفاده از مدل رگرسیون چندگانه ارائه شده است. در یک لیزر دمش دو پالسی، شدت و پهنای پیش پالس و پالس اصلی دمش و اختلاف زمانی میان دو پالس، پارامترهای موثر در تولید پرتو ایکس خروجی هستند. در اینجا با استفاده از معادله رگرسیون چندگانه، وابستگی ضریب بهره به پارامترهای پالس دمش بررسی گردیده و یک مدل آماری برای پیش بینی ضریب بهره لیزر پرتو ایکس نرم بر مبنای خصوصیات پالس دمش بدون نیاز به حل عددی معادلات پیچیده هیدرودینامیکی ارائه شده است.

کلید واژه ها : پلاسماهای لیزری، لیزر پرتو ایکس نرم، معادله رگرسیون چندگانه

Presenting a statistical model using multiple regression equation to predict the gain of soft x-ray laser

Ghani-Moghadam, Ghazaleh

Hazrat-e Masoumeh University, Qom

Abstract

From the laser plasmas produced from the interaction of the high-power laser with the target surface, soft X-ray laser are emitted, which has many applications in industry and medicine. In order to create the maximum efficiency of the output soft X-ray laser, the parameters of the pump laser should be optimize. Emission optimization for practical purposes requires extensive numerical simulations based on hydrodynamic equations and state equations, which is computationally difficult. In this research, a solution to this problem is presented using a machine learning based model to predict the amount of soft X-ray laser with a multiple regression model. In a double-pulse laser, the intensity and width of pre-pulse and main pulse and the time difference between the two pulses are effective parameters in the output X-ray production. In this research, by using the multiple regression equation, the dependence of the gain coefficient on the pump pulse parameters are investigated and a statistical model for predicting the gain coefficient of soft x-ray laser based on the feature of pump pulse is presented without numerical solution of complex hydrodynamic equations.

key words *Laser Plasmas, Soft X-ray Laser, Multiple Regression Equation*

مقدمه

استفاده از ابزارهای الگوریتمی پیشرفته در تجزیه و تحلیل داده ها به بینش های جدیدی در بسیاری از زمینه های علم منجر شده و در دهه گذشته گزارشاتی در زمینه یادگیری ماشینی ارائه و کاربردهای آن در علوم مختلف رایج شده است [۱]. تاثیر یادگیری ماشینی در علم فیزیک نیز اخیرا در چند گزارش دیده شده است [۶–۲]. واژه رگرسیون به معنای بازگشت یکی از ابزارهای تحلیل آماری داده هاست و نشان می دهد که مقدار یک متغیر به متغیر دیگری برمی گردد [۷]. در بسیاری از فعالیت های پژوهشی، پژوهشگران سعی می کنند بین دو یا چند متغیر ارتباطی منطقی برقرار نمایند تا بتوانند از آن در پیش بینی آینده استفاده کنند. در رگرسیون به دنبال برآورد رابطه ریاضی و تحلیل آن هستیم به طوری که با آن بتوان کمیت متغیری مجهول را با استفاده از متغیرهای معلوم تعیین نمود. سپس در همبستگی به دنبال تعیین نوع رابطه و میزان ارتباطی هستیم که متغیرها را به هم ربط می دهد. از آنجایی که میزان ضریب بهره لیزر پرتو ایکس نرم تولید شده از پلاسماهای لیزری به خصوصیات لیزر دمش وابسته است، در این پژوهش با استفاده از معادله رگرسیون چندگانه مدلی برای پیش بینی ضریب بهره ارائه داده شده است. رگرسیون چندگانه روشی برای توصیف مدل رابطه خطی بین چند متغیر مستقل (در اینجا خصوصیات پالس دمش) با یک متغیر وابسته (ضریب بهره) است. در حالت کلی چنین مدلی به همراه خطای تصادفی به صورت زیر نوشته می شود:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon \qquad (۱)$$

در رابطه بالا، متغیرهای x_1 تا x_p نقش متغیرهای مستقل را دارند و متغیر y، متغیر وابسته است. جمله ε خطای مدل رگرسیونی و ضرایب β_1 تا β_p نیز ضرایب مدل رگرسیون برای متغیرهای متناظر محسوب می شوند. همچنین β_0، مقدار ثابت بدون درنظر گرفتن هر یک از متغیرهای مستقل است. ایجاد و برآورد ضریب رگرسیونی در چنین مدلی، رابطه خطی بین متغیرهای مستقل و وابسته را آشکار کرده و امکان پیش گویی بهره را فراهم می آورد.

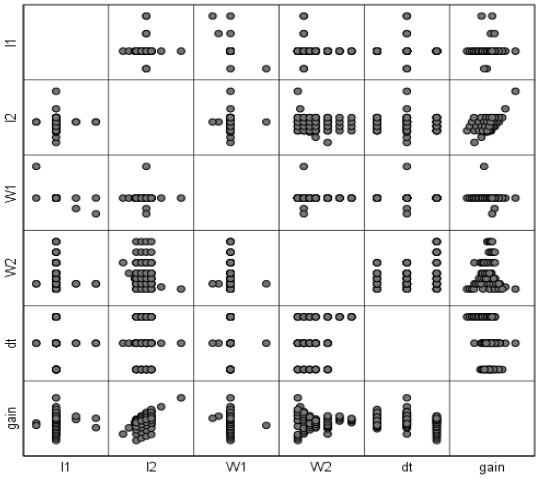
مشخصات لیزر دمش

در مرجع [۸] به منظور بررسی و مطالعه محیط فعال پلاسمایی طی برهمکنش لیزر با پلاسما از کد شبیه سازی هیدرودینامیکی یک بعدی MED103 [۹] استفاده شده است. پلاسمای لیزری با استفاده از روش دمش گذرا تولید شده که این روش شامل دو پالس دمش با تاخیر زمانی چند صد ps است. پالس اول پالسی طولانی با پهنای چند صد ps به هدف جامد برخورد می نماید و پلاسما را با درجه یونش لازم تولید می کند. پالس دوم که پالسی کوتاه با پهنای زمانی چند ps است الکترون های آزاد را به سرعت و در زمانی کوتاه تر از زمان یونش پلاسما، تا چند صد eV گرم می کند. در نتیجه شرایط لازم برای دمش یون های فعال لیزر به وسیله برانگیختگی برخوردی آماده می شود به گونه‌ای که بهره لیزر پرتو ایکس نرم بالا باشد. بنابراین ابتدا یک پیش پالس با شدت‌هایی از مرتبه $۱۰^{۱۳}\ W/cm^{۲}$ و پهناهای متفاوت چند صد ps و در نتیجه با انرژی‌های مختلف و طول موج ۸۰۰ nm به سطح هدف ژرمانیوم با ضخامت ۲۵ μm تابیده می‌شود. سپس پالس اصلی با شدت های مختلف از مرتبه $۱۰^{۱۵}\ W/cm^{۲}$ و پهناهایی از مرتبه چند ps با همان طول موج و اختلاف زمانی ۱۰۰ تا ۲۰۰ پیکوثانیه میان بیشینه‌های دو پالس وارد می‌شود. در این حالت بیشنه بهره لیزر پرتو ایکس نرم در طول موج ۱۹/۶ nm بررسی شده است. در نتیجه عوامل موثر در تولید بیشینه بهره لیزر پرتو ایکس نرم، شدت و پهنای پیش پالس، شدت و پهنای پالس اصلی و اختلاف زمانی میان دو پالس می باشد که به همراه ضریب بهره لیزر پرتو ایکس نرم خروجی از کد به عنوان داده های مورد نیاز برای ایجاد مدل رگرسیونی استفاده می شوند. در اینصورت با ایجاد رابطه رگرسیون می توان برای هر ورودی از پارامترهای موثر در بهره، بدون نیاز به حل معادلات هیدرودینامیکی پیچیده، بهره لیزر پرتو ایکس نرم خروجی را پیش بینی نمود.

مدل رگرسیون چندگانه

همانگونه که در بخش قبل بیان شد، در این پژوهش برای ایجاد رابطه رگرسیونی از داده های مرجع [۸] استفاده می کنیم. به

این منظور و برای تحلیل آماری این داده ها از نرم افزار SPSS استفاده شده است. قبل از تحلیل رگرسیونی، بهتر است با استفاده از نمودار پراکندگی و همچنین محاسبه ضریب همبستگی، وجود رابطه خطی بین هر یک از متغیرهای مستقل با متغیر وابسته مورد بررسی قرار بگیرد. به این منظور نمودارهای پراکندگی ابزار مناسبی هستند.



شکل۱ : نمودار پراکندگی به صورت ماتریسی برای متغیرهای مستقل و و ابسته (I1 و I2 شدت های پیش پالس و پالس اصلی لیزر دمش، W1 و W2 پهنای پیش پالس و پالس اصلی لیزر دمش، dt اختلاف زمانی میان دو پالس و gain ضریب بهره لیزر پرتو ایکس نرم خروجی است)

همانطور که از نمودار پراکندگی مشخص است (شکل۱)، به نظر می رسد رابطه خطی ای بین ضریب بهره و شدت و پهنای پیش پالس وجود ندارد. در حالیکه رابطه خطی بسیار خوبی بین ضریب بهره و شدت پالس اصلی می توان برقرار نمود و همچنین میتوان رابطه نسبتا خوبی بین ضریب بهره و اختلاف زمانی دو پالس ایجاد نمود.

از آنجایی که یکی از شرط های مهم در برآورد پارامترهای رگرسیون خطی، نرمال بودن باقی مانده هاست، در اینجا برای آزمون تصادفی و استقلال باقی مانده ها از آزمون Durbin-Watson استفاده شده است. سپس ضریب همبستگی پیرسون (R) و ضریب تعیین (R Square) مورد بررسی قرار می گیرد. ضریب همبستگی برابر ۰/۶۵۲ و ضریب تعیین برابر ۰/۴۲۵ به دست آمد. در حقیقت این ضرایب، نشانگر همبستگی خطی بین مقدار متغیرهای وابسته و مقدار پیش‌بینی شده توسط مدل است. هر چه این ضرایب به ۱ نزدیکتر باشد، مدل توانسته سهم بیشتری از تغییرات متغیر وابسته را نشان دهد.

جدول۱ : ضرایب مدل رگرسیونی با در نظر گرفتن ۵ متغیر مستقل

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
predictors	B	Std. Error	Beta	T	Sig.
(Constant)	300.521	52.182		5.759	.000
I1	-9.206	10.813	-.085	-.851	.397
I2	15.266	2.170	.572	7.034	.000
W1	-.158	.106	-.148	-1.494	.139
W2	1.560	2.860	.046	.545	.587
dt	-.341	.091	-.314	-3.742	.000

در جدول ۱ برآورد ضرایب و خصوصیات مربوط به آزمون آن ها دیده می شود. در ستون اول ضرایب واقعی متغیرها و مقدار ثابت در مدل آورده شده است. بنابراین مدل رگرسیونی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$gain = 300.521 - 9.206 I_1 + 15.266 I_2 - 0.158 W_1 + 1.560 W_2 - 0.341 dt \qquad (۲)$$

I_1 و I_2 شدت های پیش پالس و پالس اصلی لیزر دمش، W_1 و W_2 پهنای پیش پالس و پالس اصلی لیزر دمش، dt اختلاف زمانی میان دو پالس و gain ضریب بهره لیزر پرتو ایکس نرم خروجی است. این ضرایب واقعی با توجه به واحد اندازه گیری هر یک از متغیرها ایجاد شده اند. بنابراین نمی توان بر اساس بزرگی هر یک از ضرایب، اهمیت متغیر مربوطه در مدل رگرسیونی را تشخیص داد. به این منظور از ستون ضرایب استاندارد استفاده می کنیم. برای مشخص کردن اهمیت هر یک از متغیرها و نقش آنها در مدل رگرسیونی، باید به ستون ضرایب استاندارد شده توجه کرد. برای محاسبه ضرایب استاندارد شده، از داده‌های استاندارد شده استفاده می‌شود. به این معنی که هر مقدار از متغیرهای وابسته و مستقل از میانگین‌شان کم شده و بر انحراف معیار، تقسیم شده است. سپس مدل رگرسیونی را برازش داده و ضرایب محاسبه گردیده اند. از

آنجایی که هیچ یک از متغیرها در این حالت، واحد ندارند، بزرگی یا کوچکی آن‌ها به واحداندازه‌گیری بستگی نخواهد داشت. ستون‌های T و Sig نیز به آزمون فرض ضرایب پرداخته‌اند. هر چه مقدار T بزرگ باشد، فرض صفر بودن ضریب، ضعیف‌تر شده و نقش آن متغیر در مدل‌سازی، بیشتر است. این بزرگی را به کمک مقدار Sig نیز مشخص می‌کنند. در سطح خطای ۰/۰۵، اگر مقدار Sig کوچکتر از ۰/۰۵ باشد، فرض صفر که بیانگر بی‌اثر بودن متغیر در مدل است، رد می‌شود. مقدار کوچکتر از ۰/۰۵، برای Sig، نشانگر ارائه مدل مناسب رگرسیون است. مقدار ۰/۰۵، همان خطای نوع اول یا سطح آزمون در نظر گرفته می‌شود. طبق جدول۱، ضرایب شدت پالس اصلی و اختلاف زمانی میان دو پالس دارای Sig کوچکتر از ۰/۰۵ هستند بنابراین از لحاظ آماری معنی‌دار بوده و باید در مدل لحاظ شوند، درحالیکه شدت و پهنای پیش پالس و پهنای پالس اصلی دارای Sig بزرگتر از ۰/۰۵ هستند و باید از مدل حذف شده و مجدد محاسبات رگرسیونی را اجرا نمود تا به ضرایب صحیح برای متغیرهای معنی‌دار رسید. جدول ۲ ضرایب مدل رگرسیونی را با در نظر گرفتن تنها دو متغیر مستقل شدت پالس اصلی و اختلاف زمانی دو پالس نشان می دهد. در این صورت ضرایب صحیح تر و دقیق تری برای این دو متغیر به دست آمده است. هر چند به دلیل اختلاف اندک این ضرایب با ضرایب قبلی می توان نتیجه گرفت که مدل رگرسیونی که در رابطه ۲ ارائه گردیده، مدلی موفق برای پیش بینی ضریب بهره با استفاده از مشخصات پالس دمش می باشد و به خوبی می تواند ضریب بهره را به عنوان متغیر وابسته توصیف نماید.

جدول۲ : ضرایب مدل رگرسیونی با در نظر گرفتن ۲ متغیر مستقل

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
predictors	B	Std. Error	Beta	T	Sig.
(Constant)	236.268	19.807		11.928	.000
I2	14.997	2.141	.562	7.004	.000
dt	-.325	.087	-.299	-3.731	.000

نتیجه گیری

بهره لیزر پرتو ایکس نرم حاصل از پلاسماهای لیزری به عوامل متعددی از جمله خصوصیات ماده هدف و پارامترهای لیزر دمش وابسته است که با توجه به پیچیدگی طراحی سیستم های آزمایش، این پارامترها برای تولید بهینه لیزر، ابتدا به صورت عددی شبیه سازی می شوند. برای شبیه سازی لیزر پرتو ایکس نرم حل همزمان معادلات هیدرودینامیکی، معادله حالت و معادلات نرخ مورد نیاز است که کاری سخت، پیچیده و وقتگیر است. برای حل این مشکل، در این پژوهش با استفاده از معادله رگرسیون چندگانه، یک مدل برای پیش بینی ضریب بهره لیزر پرتو ایکس نرم خروجی از پلاسماهای لیزری ارائه شده است. در واقع با داشتن خصوصیات یک لیزر دمش دو پالسی شامل شدت و پهنای پیش پالس، شدت و پهنای پالس اصلی و اختلاف زمانی دو پالس می توان با استفاده از این مدل به طور مستقیم و بدون حل عددی معادلات هیدرودینامیکی، بهره لیزر پرتو ایکس نرم خروجی از پلاسمای تولید شده را به طور نسبتاً خوبی پیش گویی نمود.

مرجع‌ها

[۱] M.I. Jordan and T.M. Mitchell, "Machine learning: Trends, perspectives, and Prospects", *Science*, **349**, 255-260, 2015.

[۲] M. Narhi, et al., "Machine learning analysis of extreme events in optical fiber modulation instability", *Nature Commun*. **9**, 1-11, 2018.

[۳] R. Maulik, N.A. Garland, J.W. Burby, X.Z. Tang, and P. Balaprakash, "Neural network representability of fully ionized plasma fluid model closures", *Physics of plasmas*, **27** (7), 072106 (2020).

[٤] H. Huang, B. Xiao, Z. Liu, Z. Wu, Y. Mu, and H. Song, "Applications of deep learning to relativistic hydrodynamics", *Physical Review Research*, **3**, 023256 (2021).

[٥] L. Michaeli, and A. Bahabad, "Genetic algorithm driven spectral shaping of super-continuum radiation in a photonic crystal fiber", *Journal of Optics*, **20**, 055501 (2018).

[٦] G. Ghani-Moghadam, "Prediction of soft X-ray laser gain value generated from laser plasmas by using a multilayer perceptron neural network", Optical and Quantum Electronics, **55**, 683 (2023).

[۷] آذر، عادل و مومنی، منصور ؛ «*آمار و کاربرد آن در مدیریت*» (جلد دوم، تحلیل آماری)؛ انتشارات سمت، ۱۳۸۰.

[۸] G. Ghani-Moghadam, et al., "Parametric study of plasma active medium and gain saturation region in a Ne-like soft X-ray laser", Contributions to Plasma Physics, **61**, e202100042, 2021.

[۹] A. Djaoui, "A user guide for the laser-plasma simulation code: MED103", PAL-TR-96-099, 1996.

Classical Correlation Functions of Liouville Vertex Operators on Riemann Surfaces with Genus g>1

Kuroush Allameh
Department of Physics, Sharif University of Technology, P.O. Box 11155-9161, Tehran, Iran
k.allameh@physics.sharif.edu

Ali Naseh
School of Particles and Accelerators, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box 19395-5531, Tehran, Iran
naseh@ipm.ir

Behrad Taghavi
School of Particles and Accelerators, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box 19395-5531, Tehran, Iran
btaghavi@ipm.ir

Abstract

The classical correlation function of Liouville vertex operators on a Riemann surface with genus g 1 is related to the on-shell value of the Liouville action functional on the same Riemann surface but with the insertion of conical points at the location of those operators. In this work, using the results of [1,2], we study the appropriate classical Liouville action on a Riemann orbisurface using the Schottky global coordinates. We also study the first and second variation formulas for this action on the Schottky deformation space and show that this classical Liouville action is a Kähler potential for a special combination of Weil-Petersson metric and Takhtajan-Zograf metrics which appears in the local index theorem for Riemann orbisurfaces [2].

Key words: Liouville Filed Theory, Correlation function of vertex operators, Schottky uniformization, Takhtajan-Zograf metrics

1. Introduction

Two dimensional Conformal Field Theory has proven to be a useful tool in both physics and mathematics. Arguably, one of the most intriguing applications of CFTs in mathematical physics is to the geometry of surfaces: This is most clear in the Liouville conformal field theory introduced by Polyakov [3], which can be regarded as a quantum theory of geometry in two dimensions [4,5]. Complete conformal metrics $ds^2 = e^{\phi(u,\overline{u})}|du|^2$ on a Riemann surface (RS) X are classical fields of this theory, and the Liouville equation $R_{ds^2} = -2e^{-\phi}\,\partial_{\overline{u}}\,\partial_u\phi = -1$ is the corresponding Euler-Lagrange equation; here R_{ds^2} denotes the Gaussian curvature of the metric. According to the uniformization theorem, the hyperbolic metric on X is the unique classical solution of the theory and one can consider this classical solution as the critical point of a certain functional defined on the space of all smooth conformal metrics on X. In string theory this functional is called the *Liouville action functional* and its critical value — the *classical Liouville action*.

The definition of the classical Liouville action is a non-trivial problem: Since $\phi(u,\overline{u})$ is not a globally defined function on X, but rather a logarithm of the conformal factor of the metric, the "kinetic term" $|\,\partial_u\phi|^2 du \wedge d\overline{u}$ does not yield a (1,1)-form on X and, therefore, can not be integrated over X. When X is a punctured Riemann sphere, one takes advantage of the existence of a single global coordinate on X [6].

However, for the case of the non-zero genus, one has to use a global coordinate, provided by the Schottky uniformization of X [7]. Once the action functional is defined, one can quantize the Liouville field theory (LFT) using the method of functional integration [4,5,8-10]:

$$\langle X\rangle = \int_{\mathcal{CM}(X)} \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2\pi\hbar}S[\phi]}.$$

Here $S[\phi]$ is the Liouville action functional and the integration goes over $\mathcal{CM}(X)$ — the space of all smooth conformal metrics on X. The quantity $\langle X\rangle$ has the meaning of a partition function and as such plays a normalization role only.

Objects of fundamental importance in LFT are given by the correlation functions of Liouville vertex operators $V_a(u) = e^{a\phi(u,\bar{u})}$ with different "charges" a. These correlation functions are essential for calculating the scattering amplitudes of non-critical bosonic strings [3] as well as for many other applications (see e.g. [11,12]). As another example for the importance of these correlation functions, let us point out that the probability of n point particles colliding and forming a BTZ black hole in AdS_3 reduces to the problem of calculating the $2n$-point correlation function of heavy Liouville vertex operator on the Schottky double of the time-symmetric slice [13].

In the so-called "geometric approach" to the quantum Liouville theory, first proposed by Polyakov [14] and later developed by Takhtajan [4,5,8-10], the summation over smooth metrics with the insertion of vertex operators should be equivalent to the summation over metrics with singularities at the insertion points, without the insertion of the vertex operators! In other words, (un-normalized) correlation functions of Liouville vertex operators on the Riemann surface X are defined by

$$(1)\langle V_{a_1}(x_1)\dots V_{a_n}(x_n)\rangle = \int_{\mathcal{CM}_{\boldsymbol{a}}(X)} \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2\pi\hbar}\mathcal{S}_{\boldsymbol{a}}[\phi]},$$

where $\mathcal{CM}_{\boldsymbol{a}}(X)$ is the space of all smooth conformal metrics on $X_{reg} := X\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$ which have conical singularities at the insertion points and $\mathcal{S}_{\boldsymbol{a}}[\phi]$ is the appropriate Liouville action functional that needs to be defined. Note that in the classical limit, the correlation function $\langle V_{a_1}(x_1)\dots V_{a_n}(x_n)\rangle$ is dominated by the exponential of the classical Liouville action $\mathcal{S}_{\boldsymbol{a}}[\varphi]$ where $\varphi := \phi_{classical}$.

Therefore, for the special values of "charges" $a_i\hbar = 1 - \frac{1}{m_i}$, $2 \le m_i \le \infty$, the correlation function $\langle V_{a_1}(x_1)\dots V_{a_n}(x_n)\rangle$ is equivalent to the partition function $\langle O\rangle$ of the LFT on a (possibly punctured) orbifold RS O of type $(g; m_1,\dots,m_{n_e}; n_p)$; here n_e is the number of orbifold points (i.e. $2 \le m_i < \infty$), n_p is the number of punctures (i.e. $m_i = \infty$), and $n = n_e + n_p$ is the total number of marked points. For the special case of punctured Riemann surfaces of type (g, n), the classical Liouville action $\mathcal{S}_{\boldsymbol{a}}[\varphi]$, as well as its first and second variations, was studied by the authors of [1]. Here, we will generalize their results to the case of Riemann orbisurfaces (both compact and with punctures).

2. Preliminaries

Let O be an orbifold RS of type $(g > 1; m_1,\dots,m_{n_e}; n_p)$ by which we mean an "underlying Riemann surface" X of genus g together with a finite set of $n = n_e + n_p$ marked points and the association of an *order of isotropy* $m_i \ge 2$ to each marked point. We denote by $\boldsymbol{m}$ the vector $(m_1,\dots,m_n)$ of orders of isotropy with $2 \le m_1 \le \dots \le m_n$ (see [15-17] for more details). Since O has a non-zero genus, it cannot

be covered with a single chart and, as mentioned in the introduction, the proper definition of the classical Liouville action on O requires working with its planar coverings.

One such planar covering is given by the upper half-plane $\mathbb{H}$ which is the universal cover of O. In this case, O is given by the orbifold quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ where Γ is a cofinite *Fuchsian group* of first kind with signature $(g; m_1, \dots, m_{n_e}; n_p)$. An important property of Γ is that it is isomorphic to the orbifold fundamental group $\pi_1(O)$ and has a standard presentation with $2g$ hyperbolic generators, n_e elliptic generators of orders $m_1, \dots, m_{n_e}$, and n_p parabolic generators (see [2,18,19] and references therein).

Another important planar covering is provided by the *Schottky uniformization* of the underlying RS of O (see e.g. [7,19]). Let the underlying RS X be given by the quotient Ω/Σ where $\Omega \subset \mathbb{C}$ is the so-called *region of discontinuity* and Σ is the *Schottky group* of rank $g > 1$ — i.e. a free, finitely generated, strictly loxodromic, discrete subgroups of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. A Schottky group Σ with a relation-free system of generators $L_1, \dots, L_g$ is called *marked*. Two marked Schottky groups are called *equivalent* if they are related by conjugation with Möbius transformations. The set of equivalence classes of marked Schottky groups of genus g is called the *Schottky space* of genus g and will be denoted by $\mathfrak{S}_g$. Finally, for every marked Schottky group, there exists a notion of *fundamental domain* $\mathcal{D} \subset \Omega$ that is a (connected) region in $\mathbb{C}$ bounded by $2g$ disjoint Jordan curves $C_1, \dots, C_g, C_1^{'}, \dots, C_g^{'}$ with $C_i^{'} = -L_i(C_i)$, $i = 1, \dots, g$.

Consider the covering map $\pi_\Sigma: \Omega \to X$. By inserting punctures/conical points of the same order at the locations corresponding to all pre-images $w_j \in \pi_\Sigma^{-1}(x_i)$ of each marked point $x_i (i = 1, \dots, n)$, we get a planar orbifold RS $\hat{\Omega}$ which covers O — i.e. $O \cong \hat{\Omega}/\Sigma$ [20]. We will also denote the restriction of $\hat{\Omega}$ to the fundamental domain with $\hat{\mathcal{D}}$. Note that since $\mathbb{H}$ is the universal cover of O, the planar orbifold RS $\hat{\Omega}$ itself will admit $\mathbb{H}$ as its universal cover; we denote this covering by $J: \mathbb{H} \to \hat{\Omega}$. The covering map J effectively describes the Fuchsian uniformization of $\hat{\Omega}$ and its behavior near marked points will play an essential role in our study. Finally, following the same method as in [1, Sec. 2.3], we can define the *generalized Schottky space* $\mathfrak{S}_{g,n}(\boldsymbol{m})$ of Riemann orbisurfaces of type $(g; m_1, \dots, m_{n_e}; n_p)$ as a holomorphic fibaration $\jmath: \mathfrak{S}_{g,n}(\boldsymbol{m}) \to \mathfrak{S}_g$ with fibers that are configuration spaces of $n = n_e + n_p$ labeled points.

3. Kähler Potentials for Takhtajan-Zograf Metrics

The Kähler potentials for the i-th elliptic Takhtajan-Zograf (TZ) metric [2], $\omega_{TZ,i}^{ell}$, and j-th cuspidal TZ metric [21,22], $\omega_{TZ,j}^{cusp}$, on $\mathfrak{S}_{g,n}(\boldsymbol{m})$ can be expressed explicitly using formulas provided in references [1,2]. These formulas depend on the first Fourier coefficients of the Fourier expansions of $J: \mathbb{H} \to \hat{\Omega}$ at the i-th orbifold point and j-th puncture, respectively. More specifically, we have $\mathsf{h}_i = |J_1^{(i)}|^{\frac{2}{m_i}} (i = 1, \dots, n_e)$, $\mathsf{h}_j = |J_1^{(j)}|^2 (j = n_e + 1, \dots, n - 1)$, and $\mathsf{h}_n = |J_{-1}^{(n)}|^2$. Now, let $\mathcal{L}_k$ be the k-th *relative dualizing sheaf* on $\mathfrak{S}_{g,n}(\boldsymbol{m})$ (see [1, Sec. 3.2]). It turns out that the quantities $\mathsf{h}_i^{m_i} (i = 1, \dots, n_e)$ and $\mathsf{h}_j (j = n_e + 1, \dots, n)$ determine Hermitian metrics in the holomorphic line bundles $\mathcal{L}_k$, $k = 1, \dots, n$ (see [20,1]).

4. Classical Liouville Action

Let Σ be a marked normalized Schottky group of rank g 1 which uniformizes the underlying RS of O. The classical Liouville action for such a closed RS was defined in [7] as (also see [10])

$$(2)S\ \varphi \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad {}_{\mathcal{D}} \quad {}_{w}\varphi^{\ 2} \quad e^{\varphi}\ dw \quad d\overline{w} \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad {}_{k\ 2}^{\ g} \quad {}_{C_k}\theta_{L_k}{}_{1}\ \varphi$$

where $\mathcal{D}$ is the fundamental domain of the marked Schottky group Σ, $\mathcal{D}$ ${}_{k\ 1}^{\ g}$ C_k C_K' ,

$$\theta_{L_k}{}_{1}\ \varphi \quad \varphi \quad \frac{1}{2}\log L_k^{'\ 2} \quad \log l_k^{\ 2} \left(\frac{L_k^{''}}{L_k^{'}}dw \quad \frac{\overline{L^{''}}_k}{\overline{L^{'}}_k}d\overline{w}\right) fork \quad 2 \quad g$$

and l_k is the lower left-hand element in the matrix representation of L_k. This classical Liouville action is independent of the choice of a fundamental domain $\mathcal{D}$ for Σ and determines a smooth function on $\mathfrak{S}_g$.

In order to define the classical Liouville action on $\mathcal{D}$ Ω, one needs to regularize the area integral in (2) which diverges due to the asymptotic behavior of φ near marked points w_i. We do this in the same way as in genus 0 case (see [6,23]):

$$(3)S_{\boldsymbol{m}}\ \varphi \quad S_{\mathcal{D}_{reg}}\ \varphi \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad {}_{k\ 2}^{\ g} \quad {}_{C_k}\theta_{L_k}{}_{1}\ \varphi$$

Here

$$S_{\mathcal{D}_{reg}}\ \varphi \quad \lim_{\epsilon\ 0} \frac{\sqrt{1}}{2} \quad {}_{\mathcal{D}_\epsilon} \quad {}_{w}\varphi^{\ 2} \quad e^{\varphi}\ dw \quad d\overline{w} \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad {}_{j\ 1}^{\ n_e} \quad 1 \quad \frac{1}{m_j} \quad {}_{C_j^\epsilon}\varphi \quad \frac{d\overline{w}}{\overline{w} \quad \overline{w}_j} \quad \frac{dw}{w \quad w_j}$$

$$2\pi \quad {}_{j\ 1}^{\ n_e} \quad 1 \quad \frac{1}{m_j}\ {}^{2}\log\epsilon \quad 2\pi n_p \quad \epsilon \quad 2\log\ \log\epsilon$$

C_j^ϵ $w \quad w \quad w_i$ ϵ , and $\mathcal{D}_\epsilon$ $\mathcal{D}$ ${}_{i\ 1}^{\ n}$ D_i^ϵ where D_i^ϵ $w \quad w \quad w_i$ ϵ . This regularization provides a "*modular anomaly*" for the Liouville action which means that $S_{\boldsymbol{m}}\ \varphi$ depends on the choice of representatives in Σ w_1 w_n and no longer determines a function on the Schottky space $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ (see [20,1]). The more precise statement is that the regularized Liouville action $S_{\boldsymbol{m}}\ \varphi$ determines a Hermitian metric $e^{S_{\boldsymbol{m}}\ \varphi\ \ \pi}$ in the holomorphic $\mathbb{Q}$-line bundle $\mathcal{L}$ $\mathcal{L}_1^{h_1}$ $\mathcal{L}_n^{h_n}$ over $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ (see [20]). Here, h_i 1 $\frac{1}{m_i^2}$ denotes the *conformal weight* of the Liouville vertex operator corresponding to the i-th marked point.

5. **Results and Discussion**

Let us define H $\mathsf{h}_1^{h_1 m_1}$ $\mathsf{h}_{n_e}^{h_{n_e} m_{n_e}} \mathsf{h}_{n_e\ 1}$ h_n; it follows from the discussion of Sec.3 that H defines a Hermitian metric in the holomorphic $\mathbb{Q}$-line bundle $\mathcal{L}$. Combining this fact with the discussion of Sec.4, we conclude that the combination $\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}$ $S_{\boldsymbol{m}}$ $\pi\log\mathsf{H}$ determines a smooth real-valued function on $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$. This means that exp $\frac{1}{2\pi}\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\ \varphi$ gives the correct classical contribution to the correlation function (1) of heavy Liouville vertex operators and the invariance of the action $\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\ \varphi$ under the permutation of marked points with the same order of isotropy is consistent with the physical requirement of indistinguishability of vertex operators with the same conformal weight.

Theorem ([20]). *Let and be the (1,0) and (0,1) components of the de Rham differential on* $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$. *The following statements hold.*

(i) *The function* $\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\ \varphi$ *on* $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ *satisfies* $\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\quad 2\mathcal{R}$ *where* $\mathcal{R}$ *is a (1,0)-form on* $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$.
(ii) *The function* $\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\ \varphi$ *on* $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ *is a potential for the special combination of Weil-Petersson and Takhtajan-Zograf metrics:*

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\quad 2\sqrt{\ 1}\left(\omega_{WP}\quad \frac{4\pi^2}{3}\omega_{TZ}^{cusp}\quad \frac{\pi}{2}\sum_{i\ 1}^{n_e} m_i h_i \omega_{TZ\ i}^{ell}\right)$$

Some remarks are in order: 1- The (1,0)-form $\mathcal{R}$ is constructed from a combination of so-called "accessory parameters" and "auxiliary parameters" (see [1,6,12,20] for definitions and more details).
2- The symplectic form ω_{TZ}^{cusp} on $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ is defined as the sum $\omega_{TZ\ 1}^{cusp}\qquad \omega_{TZ\ n_p}^{cusp}$. 3- The special combination of WP and TZ metrics in the above theorem, with the overall factor of $\frac{1}{12\pi}$, is precisely the one that appears in the local index theorem for families on orbifold RS for $k\quad 0\ 1$ (see [2, Theorem 2]).

This last remark is consistent with the fact that the *Hodge line bundle* is holomorphically trivial over $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ and suggests that a generalization of Zograf's theorem in [24, Sec.3] is true for the case of orbifold RS. More concretely, we suggest that the function $\mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\ \varphi$ on $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ determines a holomorphic $\mathbb{Q}$-line bundle λ_{Sch} on the moduli space $\mathfrak{M}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$ of Riemann orbisurfaces of type $g\quad 1\ m_1\quad m_{n_e}\ n_p$ with Hermitian metric $\quad_{Sch}$, where $1\ 1\ _{Sch}\quad \exp\ \mathcal{S}_{\boldsymbol{m}}\ 12\pi$ (here 1 is understood as the corresponding section of the trivial line bundle on $\mathfrak{S}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$). The Hermitian $\mathbb{Q}$-line bundle $(\lambda_{Sch}\quad _{Sch})$ is isometrically isomorphic to the Hodge line bundle equipped with *Quillen's metric* over $\mathfrak{M}_{g\ n}\ \boldsymbol{m}$. This is consistent with the expectations from scattering amplitudes of string theory (see e.g. [25]).

Acknowledgements

The authors would like to thank Lorenz Eberhardt, Ruben Hidalgo, Krill Krasnov, Alex Maloney, Leon Takhtajan, Lee-Peng Teo, Tina Torkaman, and Peter Zograf for correspondence. We are especially grateful to Peter Zograf for providing us with an English translation of his paper [24] and to Leon Takhtajan and Lorenz Eberhardt for extremely helpful comments on a draft version of [20]. The research of B.T. and A.N. is supported by Iranian National Science Foundation (INSF) under the Grant No. 4001859.

References

[1] J. Park, L. A. Takhtajan, and L.-P. Teo, *Potentials and Chern forms for Weil-Petersson and Takhtajan-Zograf metrics on moduli spaces*, Advances in Mathematics 305, 856–894 (2017) [arXiv:1508.02102].
[2] L. A. Takhtajan and P. Zograf, *Local index theorem for orbifold Riemann surfaces, Letters in Mathematical Physics* **109** (Dec, 2018) 11191143.
[3] A. M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings, Phys. Lett. B* **103** (1981) 207–210.
[4] L. A. Takhtajan, Liouville theory: quantum geometry of Riemann surfaces, Modern Phys. Lett. A 8 (1993), no. 37, 3529–3535.
[5] L. A. Takhtajan, Topics in quantum geometry of Riemann surfaces: Two-dimensional quantum gravity, 9, 1994. hep-th/9409088.
[6] P. Zograf and L. A. Takhtadzhyan, *On Liouville's equation, accessory parameters, and the geometry of Teichmuller space for Riemann surfaces of genus 0, Mathematics of The Ussr-sbornik* **60** (1988) 143–161.
[7] P. G. Zograf and L. A. Takhtadzhyan, *On Uniformization of Riemann Surfaces and the Weil-Petersson Metric on Teichmuller and Schottky Spaces, Sbornik: Mathematics* **60** (Feb., 1988) 297–313.
[8] L. A. Takhtajan, Liouville theory: Ward identities for generating functional and modular geometry, Modern Phys. Lett. A 9 (1994), no. 25, 2293–2299.

[9] L.A.Takhtajan, Equivalence of geometric h < 1/2 and standard c > 25 approaches to two-dimensional quantum gravity, Modern Phys. Lett. A 11 (1996), no. 2, 93–101.
[10] L.A.Takhtajan, L.-P. Teo: Quantum Liouville theory in the background field formalism. I. Compact Riemann surfaces. Commun. Math. Phys. 268, 135–197 (2006)
[11] L. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories, Lett. Math. Phys. 91:167-197 (2010) [arXiv:0906.3219]
[12] T. Can and P. Wiegmann, Quantum Hall States and Conformal Field Theory on a Singular Surface, J. Phys. A **50** (2017), no. 49 494003, [arXiv:1709.04397].
[13] K. Krasnov, *Lambda less than 0 quantum gravity in (2+1)-dimensions. 2. Black hole creation by point particles, Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 3999–4028, [hep-th/0202117].
[14] A. M. Polyakov, unpublished, Lecture at Steklov Institute, Leningrad (1982).
[15] B. Nasatyr and B. Steer, Orbifold Riemann surfaces and the Yang-Mills-Higgs equations, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 22 no. 4 595–643, [alg-geom/9504015].
[16] K. G. Charles Boyer, Sasakian Geometry. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, USA, 0 ed., 2008.
[17] J. W. Milnor, Dynamics in one complex variable: Introductory lectures, math/9201272.
[18] J. Park and L.-P. Teo, Liouville Action and Holography on Quasi-Fuchsian Deformation Spaces, Communications in Mathematical Physics 362 (Jun, 2018) 717758.
[19] L. R. Ford, Automorphic functions, vol. 85. American Mathematical Soc., 2004.
[20] K. Allameh, A. Naseh, B. Taghavi, Potentials and Chern Forms for Elliptic Takhtajan-Zograf Metrics on Schottky Deformation Spaces, to appear soon.
[21] L. Takhtajan and P. Zograf, *The Selberg zeta function and a new Kähler metric on the moduli space of punctured Riemann surfaces, Journal of Geometry and Physics* **5** (1988), no. 4 551–570.
[22] L. A. Takhtajan and P. Zograf, *A local index theorem for families of ∂-operators on punctured Riemann surfaces and a new Kähler metric on their moduli spaces, Communications in mathematical physics* **137** (1991), no. 2 399–426.
[23] L. Takhtajan and P. Zograf, Hyperbolic 2 spheres with conical singularities, accessory parameters and Kähler metrics on $\mathcal{M}_{0\,n}$, math/0112170.
[24] P. G. Zograf, *The Liouville action on moduli spaces, and uniformization of degenerating Riemann surfaces, Leningr. Math. J.* **1** (1990), no. 4 941–965.
[25] E. Witten, Physics and Geometry, PRE-30537 (1987).

همدوسی تعمیم‌یافته و ساخت حالت کیوتریتی دلخواه

اعظم مانی
دانشگاه تهران – دانشکدگان فنی – دانشکده علوم مهندسی
mani.azam@ut.ac.ir

چکیده

در این مقاله مفهوم همدوسی کوانتومی تعمیم یافته را معرفی کرده‌ایم و سپس در ساختار جدید، حالت‌ها و عملگرهای ناهمدوس را معرفی کرده‌ایم. با در نظر گرفتن یک سیستم کیوتریتی (یک اتم Λ– شکل)، مفاهیم معرفی شده را به نمایش کشیده‌ایم و نشان داده‌ایم که با استفاده از حالت بیش‌همدوس و اِعمال عملگرهای ناهمدوس، می‌توان هر حالت دلخواه کیوتریتی را ساخت و بدین شکل ارتباط بین همدوسی تعمیم یافته و نظریه منبع را تبیین کرده‌ایم.

کلید واژه ها : همدوسی کوانتومی – حالت بیش‌همدوس – ناهمدوس – نظریه منبع

Generalized coherence and construction of arbitrary qutrit state

Mani, Azam[1]

[1] *Department of Engineering Science, Collage of Engineering, University of Tehran, Tehran*

Abstract

We have introduced the concept of generalized quantum coherence, and within the generalized structure, we have defined incoherent states and incoherent operations. Then by considering a qutrit system (a Λ-shapa atom), we have shown that, starting from the maximally coherent state, by applying incoherent operations, any arbitrary qutrit state can be constructed, and in this way we have explained the connection between generalized coherence and source theory of coherence.

key words: Quantum coherence, Maximally coherent state, incoherent, resource theory

مقدمه

همدوسی کوانتومی یکی از مفاهیم اساسی و بنیادی مکانیک کوانتومی است که از ابتدای تولد مکانیک کوانتومی، به آن پرداخته شده است. وقتی یک سیستم کوانتومی در برهمنی از حالت‌های مجاز خود قرار گرفته باشد، حالت سیستم، همدوس گفته می‌شود و وقتی حالت سیستم به صورت توزیع آماری از حالت‌های مجاز باشد، ناهمدوس خوانده می‌شود. به عبارت دیگر اگر ماتریس چگالی یک سیستم قطری باشد، حالت ناهمدوس است و وجود عناصر غیر قطری به معنای وجود همدوسی است. بدیهی است که با این توصیف، همدوسی کوانتومی یک ویژگیِ وابسته به پایه است، مثلا حالت‌های کوانتومی $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ نسبت به پایه‌های $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ همدوس است ولی نسبت به پایه‌های $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ ناهمدوس است. با این که آشنایی با مفهوم همدوسی قدمت طولانی دارد اما اولین تلاش‌ها برای ارایه معیاری برای کمی کردن همدوسی و پرداختن به آن از دیدگاه نظریه منبع، به سال‌های اخیر باز می‌گردد [۲–۱]. در رویکرد نظریه منبع، همدوسی به عنوان یک ویژگی از سیستم‌های کوانتومی معرفی می‌شود که انتظار می‌رود با انجام اَعمال کلاسیکی، قابل به وجود آمدن نباشد. در این راستا اَعمال (عملگرهای) ناهمدوس، اعمالی هستند که نمی‌توانند همدوسی تولید کنند و همچنین حالت بیش‌همدوس، حالتی است که با انجام

اعمالِ ناهمدوس بر روی آن، بتوان هر حالت دلخواهی را تولید کرد [۲]. معیارهای متعددی برای کمی کردن میزان همدوسی یک حالت کوانتومی معرفی شده‌اند ولیکن دسته مهمی از این معیارها بر مبنای فاصله تعریف شده‌اند. نشان داده می‌شود که کمترین فاصله‌ی حالت کوانتومی از مجموعه حالت‌های ناهمدوس، معیار مناسبی برای سنجش میزان همدوسی آن است [۲]:

$$C(\rho) = \min_{\sigma \in I} D(\rho, \sigma) \qquad (۱)$$

که در آن I بیانگر مجموعه حالت‌های ناهمدوس است. به ازای برخی از سنجه‌ها، همچون فاصله‌ی l_1 و آنتروپی نسبی، می‌توان نشان داد که کمینه‌ی فوق به ازای نسخه‌ی کاملا وادوس شده‌ی ρ اتخاذ می‌شود، یعنی

$$C(\rho) = D\big(\rho, \mathcal{D}(\rho)\big) \qquad (۲)$$

که در آن $\mathcal{D}$، عملگر کاملا ناهمدوس کننده است:

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_i \langle i|\rho|i\rangle\, |i\rangle\langle i| \qquad (۳)$$

و طبیعتا به پایه‌ای که هموسی در آن مطالعه می‌شود، بستگی دارد. در واقع می‌توان $\mathcal{D}(\rho)$ را به عنوان حالت سیستم پس از اندازه‌گیری در پایه‌ی $\{|i\rangle\}$، قلمداد کرد. یک اندازه‌گیری که خروجی‌های آن از هم جدا نشده‌اند. با داشتن این عملگر، حالت‌های ناهمدوس آن‌هایی هستند که پس از این اندازگیری تغییری نمی‌کنند، ولی حالت‌های همدوس پس از این اندازه‌گیری، کاملا ناهمدوس می‌شوند. سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا عملا در آزمایشگاه دسترسی به چنین اندازه‌گیریِ دقیقی (یعنی شناختن تک تک $|i\rangle$ها) امکان‌پذیر است؟ یا اصلا آیا همیشه عملِ وادوسی به همین شکل اتفاق می‌افتد؟ به عنوان مثال وقتی یک سیستم دو کیوبیتی را در نظر می‌گیریم، ممکن است ذرات مشابه باشند و تمیز دادن حالت $|01\rangle$ از $|10\rangle$ عملا امکان‌پذیر نباشد. یا ابزار اندازگیری ما به نحوی باشد که اصلا امکان تشخیص برخی از عناصر غیرقطری را نداشته باشیم. در این شرایط حالت‌های ناهمدوس و عملگرهای ناهمدوس به چه صورت تعریف می‌شوند؟ و آیا باز هم می‌توان حالت بیش‌همدوسی داشت که با اِعمال عملگرهای ناهمدوس بر روی آن، بتوان هر حالتِ دلخواهی را ساخت؟

این‌ها سوالاتی هستند که در این مقاله به آن‌ها پرداخته خواهد شد. در بخش بعد همدوسی تعمیم‌یافته را به عنوان تعمیمی از همدوسیِ متعارف، تعریف کرده و سپس به تعریف حالت‌های ناهمدوس و عملگرهای ناهمدوس می‌پردازیم. پس از آن، برای سیستم‌های سه ترازی، حالت بیش‌همدوس را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که ساخت هر حالت دلخواهی با شروع کردن از آن و انجام عملگرهای ناهمدوس امکان‌پذیر است. نهایتا مقاله را با جمع‌بندی و نتیجه‌گیری به پایان می‌رسانیم.

همدوسی تعمیم‌یافته

فرض کنید اندازه‌گیری‌های تصویری $\{P_B\}$ در دسترس است، که $P_B^2 = P_B$ و $\sum_B P_B = I$ و رنکِ عملگرها لزوما برابر با ۱ نیست. در این حالت، عملگر وادوس کننده به صورت

$$\mathfrak{D}(\rho) = \sum_B P_B \rho P_B \qquad (٤)$$

تعریف می‌شود و هر حالت کوانتومی که تحت تاثیر این عمگر تغییر نکند، ناهمدوس خوانده می‌شود. به سادگی دیده می‌شود یک حالت ناهمدوس است اگر و فقط اگر $[\rho\,, P_B] = 0\ \forall B$. با این تعریف، حالت‌های ناهمدوس به شکل بلوک قطری هستند، بلوک‌هایی که با زیر فضای جاروب شده توسط پایه‌های P_B–ها مشخص می‌شوند. به راحتی می‌توان بررسی کرد که فضای حالت‌های ناهمدوس، یک فضای محدب است که آن را با $\mathscr{I}$ نشان می دهیم.

مجددا عملگرهای ناهمدوس را به صورت عملگرهایی تعریف می‌کنیم که مجموعه‌ی $\mathscr{I}$ را به خودش می‌نگارند، یعنی برای حالت‌های ناهمدوس، همدوسی تولید نمی‌کنند. عملگرهای اکیدا ناهمدوس نیز عملگرهایی هستند که تمامی عملگرهای کراوس مربوط به آن‌ها، ناهمدوس هستند.

با این تعاریف، میزان همدوسیِ یک حالت دلخواه را به صورت فاصله‌ی آن از نسخه‌ی وادوس شده‌اش تعریف می‌کنیم:

$$C(\rho) = D(\rho, \mathfrak{D}(\rho)) \qquad (۵)$$

حال سوالاتی که مطرح می‌شود این است که در این رویکرد تعمیم یافته، شکل کلی عملگرهای ناهمدوس به چه صورت است؟ آیا باز هم می‌توان مانند قبل، با شروع کردن از حالت‌های بیش‌همدوس (حالت‌هایی که مقدار همدوسی رابطه (۵) را بیشینه می‌کنند) و استفاده از عملگرهای ناهمدوس، هر حالت دلخواهی را ساخت؟

در ادامه با در نظر گرفتن یک سیستم کیوتریتی سعی می‌کنیم به این سوالات پاسخ دهیم و تعارف ارایه شده در روابط (٤) و (٥) را روشن‌تر سازیم.

حالت‌ها و عملگرهای ناهمدوس

یک اتم Λ–شکل را در نظر بگیرید که ترازهای انرژی‌اش با $\{|1\rangle, |1'\rangle, |2\rangle\}$ نشان داده می‌شوند. در اینجا $|1\rangle$ و $|1'\rangle$ دو تراز انرژی بسیار نزدیک به هم هستند و $|2\rangle$ تراز برانگیخته است که فاصله‌ی قابل ملاحظه‌ای با $|1\rangle$ و $|1'\rangle$ دارد. همچنین فرض کنید اندازه‌گیری که در اختیار است می‌تواند حالت $|2\rangle$ را از $|1\rangle$ و $|1'\rangle$ تمیز دهد اما دو حالت $|1\rangle$ و $|1'\rangle$ را از هم جدا نمی‌کند:

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| + |1'\rangle\langle 1'| \qquad (٦)$$

$$P_2 = |2\rangle\langle 2| \qquad (٧)$$

در این صورت شکل کلی حالت ناهمدوس به صورت

$$\rho_{inc} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \qquad (٨)$$

است و به صورت نمادین می‌توان آن را به شکل

$$\rho_{inc} = \sum_{B=1}^{2} q_B\, \rho_B \otimes |B\rangle\langle B| \qquad (٩)$$

نوشت که بیانگر بلوک $|B\rangle\langle B|$–ام است، ρ_B ماتریس چگالی است که در بلوک B نشسته است و $\{q_B\}$ یک توزیع احتمال است، یعنی برای تطابق روابط (٨) و (٩)، باید

$$q_1 = a + d, \quad q_2 = e = 1 - a - b; \qquad (١٠)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{a+d}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = (1); \qquad (١١)$$

استفاده از نمادگزاری رابطه (٩)، هم بیان ساختارها و انجام محاسبات را راحت‌تر می‌کند و هم در این نمادگزاری، تعمیم مطالب روشن‌تر است.

برای مشخص کردن فرم کلی عملگرهای ناهمدوس، فرض کنید $\Phi\colon \rho \to \sum_m K_m \rho K_m^\dagger$ یک عملگر اکیدا ناهمدوس است، در این صورت باید به ازای هر m، $K_m \mathcal{I} K_m^\dagger \subset \mathcal{I}$، یعنی عمگر کراوسی ناهمدوس است که ساختار بلوکیِ حالت‌های بلوک قطری را خراب نکند. در اینجا خوب است که اشاره کنیم که در تعریف تعمیم یافته، تمام عملگرهای بلوکی یکانی به شکل

$$U = \sum_B U_B \otimes |B\rangle\langle B| \qquad (١٢)$$

ناهمدوس به شمار می‌آیند. در ادامه قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که در مشخص کردن شکل عملگرهای ناهمدوس بسیار کمک کننده است.

قضیه: برای این که عملگر $\Phi\colon \rho \to \sum_m K_m \rho K_m^\dagger$ ناهمدوس باشد، شرط کافی این است که $[P_B, K_m] = 0 \;\; \forall B, m$.

اثبات: برای اثبات باید نشان بدهیم که اگر $[P_B, K_m] = 0$ باشد، در این صورت $\Phi(\rho_{inc}) \in \mathcal{I}$ خواهد بود. مطابق با تعریف، $\rho_{inc} P_B = P_B \rho_{inc}$ و لذا

$$\begin{aligned} \Phi(\rho_{inc}) P_B &= \sum_m K_m \rho_{inc} K_m^\dagger \; P_B \\ &= \sum_m K_m \rho_{inc}\, P_B K_m^\dagger = \sum_m K_m\, P_B \rho_{inc} K_m^\dagger \\ &= \sum_m P_B K_m\, \rho_{inc} K_m^\dagger = P_B \Phi(\rho_{inc}) \end{aligned} \qquad (١٣)$$

یعنی $\Phi(\rho_{inc})$ نیز یک حالت ناهمدوس است.

■

اگر از این قضیه برای سیستم کیوتریتی و اندازه‌گیری‌هایی که در روابط (٦) و (٧) معرفی شدند استفاده کنیم، خواهیم دید که عملگرهای ناهمدوس بایستی به یکی از شکل‌های زیر باشند:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \\ D & C \end{pmatrix} \qquad (١٤)$$

که در آن‌ها A و B و C و D به ترتیب ماتریس‌های ۲×۲، ۲×۱، ۱×۱ و ۱×۲ هستند و بخش‌های خالی بلوک‌های صفر هستند.

پس از معرفی حالت‌ها و عملگرهای ناهمدوس، نوبت به معرفی حالت بیش‌همدوس می‌رسد، یعنی حالتی که تحت تاثیر عملگر وادوس کننده‌ی (٤)، بیشترین میزان تغییرات را خواهد داشت. اگر از سنجه‌ی l_1 برای سنجش فاصله استفاده کنیم، با استفاده از رابطه‌ی (٥) مقدار همدوسی هر حالت کوانتومی به صورت

$$C_{l_1}(\rho) = |\rho - \mathfrak{D}(\rho)|_{l_1} \qquad (١٦)$$

به دست خواهد آمد. این رابطه به ازای حالت

$$|\psi\rangle_{MC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad (١٧)$$

مقدار بیشینه خود را اتخاذ می‌کند. با نوشتن $|\psi\rangle_{MC}$ به صورت زیر، نحوه‌ی تعمیم آن به سایر ابعاد روشن‌تر خواهد بود.

$$|\psi\rangle_{MC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ 1\end{pmatrix} \qquad (۱۸)$$

در ادامه با محاسبات صریح نشان خواهیم داد که با اثر دادن عملگرهای ناهمدوس بر روی این حالت، می‌توان هر حالت دلخواه کیوتریتی را تولید کرد. به عبارت دیگر به دنبال عملگر ناهمدوس $\mathcal{E}(\rho) = \sum_m K_m \rho K_m^\dagger$ هستیم به نحوی که

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle_{MC}\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad (۱۹)$$

و در آن

$$|\psi\rangle_{MC} = \alpha|1\rangle + \alpha'|1'\rangle + \beta|2\rangle \qquad (۲۰)$$

یک حالت دلخواه کیوتریتی است. برای ساخت چنین عملگری، علاوه بر این که درخواست می‌کنیم همه‌ی عملگرهای کراوس ناهمدوس باشند (یعنی به شکل روابط (۱٤) باشند) و شرط نرمال بودن $\sum_m K_m^\dagger K_m = I$ برقرار باشد، درخواست می‌کنیم که K_m–ها به نحوی انتخاب شوند که به ازای همه‌ی عملگرهای کراوس، رابطه

$$K_m|\psi\rangle_{MC} \propto |\psi\rangle \qquad (۲۱)$$

برقرار باشد. این شرط برای ساختن هر حالت دلخواه، منطقی به نظر می‌رسد. از بین عملگرهای رابطه‌ی (۱٤)، عملگرهای $\begin{pmatrix} A & B \\ & \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} & \\ D & C \end{pmatrix}$ بخشی از فضای برداری را به صفر می‌نگارند و لذا برای ساختن حالت‌های دلخواه مناسب به نظر نمی‌رسند و تنها عملگرهای

$$\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & B \\ D & \end{pmatrix} \qquad (۲۲)$$

برای ساخت حالت‌های دلخواه مناسب هستند.

با انجام محاسبات صریح می‌توان بررسی کرد که عملگرهای کراوس

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \; K_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \; K_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix},$$

$$K_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha'}{\sqrt{2}} \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}; \qquad (۲٤)$$

منجر به تحول ناهمدوسی می‌شوند که حالت بیش‌همدوس را به حالت دلبخواه (۲۰) می‌نگارد. با این نتیجه، می‌توان نظریه منبع برای همدوسی کوانتومی را به خوبی برای همدوسی تعمیم یافته نیز مطرح کرد. یعنی حالتی که میزان بیشینه‌ی همدوسی را مطابق با سنجه‌های معرفی شده دارد، همان حالتی است که می‌تواند با به کار بستن عملگرهای رایگان (ناهمدوس) منجر به تولید هر حالت دلبخواه بشود.

جمع‌بندی

در این مقاله مفهوم همدوسی کوانتومی تعمیم یافته معرفی شد. اهمیت موضوع به این لحاظ است که همواره نمی‌توان اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق در اختیار داشت. سعی کردیم ارتباط منطقی بین تعریف همدوسی تعمیم یافته و نظریه‌ی منبعِ همدوسی کوانتومی برقرار کنیم و در این راستا پس از معرفی حالت‌ها و عملگرهای رایگان (ناهمدوس) به معرفی حالت بیش‌همدوس پرداختیم و سپس برای یک سیستم کیوتریتی نشان دادیم که با اِعمال عملگرهای ناهمدوس بر روی حالتِ بیش‌همدوس، می‌توان هر حالت دلخواهی را ساخت و این نتیجه نشان می‌دهد که همدوسیِ تعمیم یافته نیز می‌تواند به عنوان یک منبعِ کوانتومی قلمداد شود. اما این سوال که آیا نتیجه‌ی به دست آمده برای هر سیستم دلخواهی و برای هر اندازه‌گیری دلخواهی نیز صادق است یا خیر، بحثی است که مجال پرداختن به آن در این مقاله نیست و در مرجع [۳] سعی شده است با تعمیم دادن نتایج این مقاله، به آن پرداخته شود.

مرجع‌ها

[1] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **113**, 140401 (2014)
[2] J. Aberg, arXiv:quant-ph/0612146, (2006).
[3] A. Mani, F. Rezazadeh,and V. Karimipour, arXiv:2302.13148.

تبدیلات یکانی در باریکه شکاف

نفیسه غلامی
دانشجوی ارشد فیزیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
nafis.gholami1998@gmail.com

الناز احمدی
دانشجوی ارشد فیزیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
lnazahmadi813@gmail.com

محمد رضا بذرافکن
دانشیار گروه فیزیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
bazrafkan@sci.ikiu.ac.ir

چکیده

در این مقاله عملگر یکانی تبدیل باریکه شکاف اپتیکی بدون اتلاف را استخراج می کنیم. روش معمول استخراج این عملگر کاربرد نمایش جردن – شوینگر برای اندازه حرکت زاویه ای برحسب دو عملگر بوزونی است. در اینجا با استفاده از روش انتگرال گیری در حاصلضرب های مرتب و تنها با فرض داشتن تبدیل عملگرهای بوزونی مدهای ورودی به باریکه شکاف در نمایش هایزنبرگ تبدیل یکانی مطلوب مستقیما برحسب ماتریس تبدیل باریکه شکاف محاسبه می شود.

کلید واژه ها : باریکه شکاف، تبدیل یکانی، نمایش گروه لی،

Unitary transformation in beams splitter

Gholami, Nafiseh[1]; Ahmadi, Elnaz[1]; Bazrafkan, Mohammad reza[1]

[1] *Physics group, Imam Khomeini International University, Qazvin*

Abstract

In this paper, we derive the unitary transformation operator of the lossless optical beam splitter. The usual method of deriving this operator is the application of the Jordan-Schwinger representation for the angular momentum in terms of two bosonic operators. Here, using the method of integration in ordered products and assuming only the transformation of the boson operators of the input modes in abeam splitter in the Heisenberg representation, the desired unitary transformation is calculated directly in terms of the beam splitter transformation matrix.

key words: beam splitter, unitary transformation, Lie group representation

مقدمه

در اپتیک، باریکه شکاف‌های بدون اتلاف با یک ماتریس تبدیل یکانی $[T]_{2\times2}$ که دامنه های مختلط ورودی α_s و خروجی $\bar{\alpha}_r$ را با رابطه خطی زیر

$$\bar{\alpha}_r = \sum_{s=1}^{2} T_{r,s}\alpha_s \qquad r = 1,2 \qquad (۱)$$

به هم مربوط می کند توصیف می‌شوند[۱]. بنابراین باریکه شکاف ها تحقق فیزیکی گروه یکانی $u(2)$ هستند. یک باریکه شکاف همان طور که در توصیف کلاسیک قادر به تبدیل حالت کلاسیکی جفت باریکه ورودی است در توصیف کوانتمی نیز می‌تواند حالت کوانتمی جفت باریکه ورودی را با یک تبدیل یکانی $\hat{U}$ ، متناظر با ماتریس تبدیل مذکور، تغییر دهد. اگر $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ عملگرهای فنای

باریکه های ورودی باشند برای آنکه رابطه کلاسیکی (۱) برای هر جفت حالت همدوس ورودی درست باشد باید

$$\hat{U}_T^\dagger \hat{a}_r \hat{U}_T = \sum_{s=1}^{2} T_{r,s}\hat{a}_s, \quad r=1,2 \qquad (۲)$$

این رابطه مانند رابطه تبدیل عملگرها در نمایش هایزنبرگ تفسیر می‌شود. برای محاسبه تبدیل حالت در نمایش شرودینگر نیاز به شکل صریح عملگر تبدیل $\hat{U}_T$ داریم. استخراج تبدیل یکانی حالت کوانتمی در باریکه شکاف ها معمولا با توجه به این فرض صورت می‌گیرد که گروه یکانی تبدیلات کوانتمی باید نمایشی از گروه یکانی $u(2)$ باشد. با این وجود اغلب درک درست الزام این هم ساختاری ریاضی ساده نیست. با توجه به اینکه هر ماتریس یکانی 2×2 را می توان به شکل زیر نوشت

$$T = \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{r=0}^{3}\theta_r\,[\sigma_r]\right), \qquad \theta_r \in \mathbb{R}, \qquad (۳)$$

که در آن $[\sigma_0]$ ماتریس واحد و بقیه $[\sigma_r]$ ها ماتریس های پائولی هستند، رهیافت تئوری گروه[۲] این است که مولدهای گروه لی تبدیلات یکانی $\{\hat{U}_T\}_{T\in u(2)}$ را چنان بیابیم که جبرهای لی هم ساختار باشند. اگر عملگرهای هرمیتی $\{\hat{J}_t\}_{t=0}^{3}$ را به شکل زیر معرفی کنیم

$$\hat{J}_t \equiv \frac{1}{2}\sum_{r,s}\hat{a}_r\,[\sigma_t]_{r,s}\,\hat{a}_s^\dagger, \qquad t=0,1,2,3 \qquad (٤)$$

از روابط جابجایی ماتریس های پائولی به سادگی می توان نشان داد روابط جابجایی زیر که هم ساختاری جبرهای لی را را تضمین می‌کنند

$$\left[\hat{J}_0,\hat{J}_r\right]=0, \quad \left[\hat{J}_r,\hat{J}_s\right]=i\varepsilon_{r,s,t}\hat{J}_t, \quad r,s=1,2,3$$

برقرار هستند. مولدهای (٤) اگرچه دقیقا روابط جابجاگری مطلوب را برقرار می کنند ولی فرایند معرفی آنها رمزآلود به نظر می‌رسد. در اینجا با استفاده از تکنیک انتگرال گیری در حاصل ضرب های مرتب [۳] روش ساده تری برای بنای تبدیل یکانی حالت ارائه می‌کنیم.

تبدیل حالت های همدوس

ابتدا تنها با استفاده از رابطه تبدیلی (۲) و فرض معکوس پذیری، $\hat{U}_T^\dagger = \hat{U}_{T^\dagger}$، نشان می‌دهیم که حالت های همدوس جفت باریکه ورودی تحت تبدیل با قاعده کلاسیک (۱) تبدیل می‌شوند، یعنی

$$\hat{U}_T\,|\alpha_1,\alpha_2\rangle = |\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2\rangle, \quad \bar{\alpha}_r = \sum_{s=1}^{2} T_{r,s}\alpha_s \qquad (۵)$$

با استفاده از اتحاد [٤]

$$\hat{\rho} = |\alpha_1\rangle_{1\;1}\langle\alpha_1| \otimes |\alpha_2\rangle_{2\;2}\langle\alpha_2|$$
$$= \pi^2 \vdots\delta\left(\hat{a}_1-\alpha_1,\hat{a}_1^\dagger-\alpha_1^*\right)\delta\left(\hat{a}_2-\alpha_2,\hat{a}_2^\dagger-\alpha_2^*\right)\vdots$$

که در آن $\vdots\,\vdots$ به معنی مرتب سازی پاد نرمال است و بسط فوریه توابع دلتای دیراک داریم

$$\hat{\rho} = \int_{\mathbb{C}}\frac{d^2z_1}{\pi}\frac{d^2z_2}{\pi}e^{-\sum_k z_k^*(\hat{a}_k-\alpha_k)}e^{\sum_k z_k\left(\hat{a}_k^\dagger-\alpha_k^*\right)} \qquad (٦)$$

اکنون با استفاده از تبدیل $\hat{U}_T\hat{a}_r\hat{U}_T^\dagger = \sum_s \hat{a}_s T_{s,r}^*$ ، که از فرض $\hat{U}_T^\dagger = \hat{U}_{T^\dagger}$ بدست می‌آید، و تغییر متغیرهای

$$v_\ell \equiv \sum_k T_{\ell,k}z_k, \qquad \bar{\alpha}_k \equiv \sum_\ell T_{k,\ell}\alpha_\ell,$$

و تساوی $\sum_k z_k^*\alpha_k = \sum_k v_k^*\bar{\alpha}_k$ که نتیجه یکانی بودن ماتریس تبدیل(۱) است حالت خروجی را بدست می‌آوریم

$$\hat{U}_T\hat{\rho}\hat{U}_T^\dagger = \int_{\mathbb{C}}\frac{d^2v_1}{\pi}\frac{d^2v_2}{\pi}e^{-\sum_\ell v_\ell^*(\hat{a}_\ell-\bar{\alpha}_\ell)}e^{\sum_{\ell'} v_{\ell'}\left(\hat{a}_{\ell'}^\dagger-\bar{\alpha}_{\ell'}^*\right)}.$$

با مقایسه این نتیجه با (٦) مشاهده می شود که حالت ورودی تحت تبدیل با قاعده کلاسیک (۵) تبدیل می شود

$$\hat{U}_T\,|\alpha_1,\alpha_2\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2|\hat{U}_T^\dagger = |\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2\rangle\langle\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2|.$$

استخراج عملگر تبدیل

در این بخش مستقیما تبدیل یکانی $\hat{U}_T$ متناظر با یک باریکه شکاف با ماتریس تبدیل T را بدست می‌آوریم. روش محاسبه تنها به فرض (۲) و $\hat{U}_T^\dagger = \hat{U}_{T^\dagger}$ متکی است. با استفاده از رابطه بستاری حالت های همدوس {٤} و نتیجه (۵) می‌توان نوشت

$$\hat{U}_T = \hat{U}_T\int_{\mathbb{C}}\frac{d^2\alpha_1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{d^2\alpha_2}{\pi}|\alpha_1,\alpha_2\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2|,$$
$$= \int_{\mathbb{C}}\frac{d^2\alpha_1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{d^2\alpha_2}{\pi}|\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2|,$$

که در آن $\bar{\alpha}_r = \sum_s T_{r,s}\alpha_s$ است. با توجه به تعریف حالت-های همدوس به عنوان انتقال یافته حالت پایه و اتحاد $|0\rangle\langle 0| =: e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}}:$ می‌توان نوشت[٤]

$$|\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2| = e^{-\frac{1}{2}\left(|\bar{\alpha}_1|^2+|\bar{\alpha}_2|^2\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\right)} \times$$
$$e^{\bar{\alpha}_1\hat{a}_1^\dagger+\bar{\alpha}_2\hat{a}_2^\dagger} :e^{-\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)}: e^{\alpha_1^*\hat{a}_1+\alpha_2^*\hat{a}_2}$$

که در آن $::$ به معنی مرتب سازی نرمال است. با توجه به یکانی بودن ماتریس تبدیل T تساوی بالا به شکل زیر نوشته می‌شود

$$|\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2| =: e^{-|\alpha_1|^2+\left(\sum_r \hat{a}_r^\dagger T_{r,1}\right)\alpha_1+\hat{a}_1\alpha_1^*}$$
$$e^{-|\alpha_2|^2+\left(\sum_r \hat{a}_r^\dagger T_{r,2}\right)\alpha_2+\hat{a}_2\alpha_2^*} e^{-\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)} :$$

بنابراین به حاصل ضرب دو انتگرال گوسی زیر می‌رسیم که به سادگی محاسبه می‌شوند

$$\hat{U}_T =: \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\alpha_1}{\pi} e^{-|\alpha_1|^2+\left(\sum_r \hat{a}_r^\dagger T_{r,1}\right)\alpha_1+\hat{a}_1\alpha_1^*} \times$$
$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\alpha_2}{\pi} e^{-|\alpha_2|^2} e^{\left(\sum_r \hat{a}_r^\dagger T_{r,2}\right)\alpha_2+\hat{a}_2\alpha_2^*} e^{-\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)} :$$
$$\Rightarrow \quad \hat{U}_T =: e^{\sum_{r,s}\hat{a}_r^\dagger\left(T_{r,s}-\delta_{r,s}\right)\hat{a}_s} :$$

اکنون با استفاده از اتحاد زیر [۵] که در آن $[\Lambda_{r,s}]$ یک ماتریس مربعی است

$$\exp\left(\sum_{r,s}\hat{a}_r\Lambda_{r,s}\hat{a}_s^\dagger\right) =: \exp\left(\sum_{r,s}\hat{a}_r\left[e^{\Lambda}-1\right]_{r,s}\hat{a}_s^\dagger\right) :$$

و با توجه به اینکه هر ماتریس یکانی 2×2 را می توان به شکل (۳) نوشت عملگر یکانی تبدیل با رابطه زیر مشخص می شود

$$\hat{U}_T = \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{t=0}^{3}\theta_t\sum_{r,s}\hat{a}_r\left[\sigma_t\right]_{r,s}\hat{a}_s^\dagger\right)$$

با تعریف عملگرهای زیر بر فضای هیلبرت میدان دو مدی

$$\hat{J}_t \equiv \frac{1}{2}\sum_{r,s}\hat{a}_r\left[\sigma_t\right]_{r,s}\hat{a}_s^\dagger,$$

مشخص می شود که

$$\hat{U}_T = \exp\left(i\sum_{t=0}^{3}\theta_t\hat{J}_t\right).$$

یعنی $\left\{\hat{J}_t\right\}_{t=0}^{3}$ مولد های گروه لی تبدیلات باریکه شکاف هستند. به این شکل نه تنها عملگر یکانی تبدیل بدست آمده است بلکه مولدهای گروه لی متناظر هم به طور بدیهی مشخص می‌شوند.

نتیجه‌گیری

روش معمول برای پیدا کردن عملگر تبدیل یکانی برای باریکه شکاف بدون اتلاف کاربرد نمایش جردن–شوینگر عملگر اندازه حرکت زاویه ای برحسب دو عملگر بوزونی نظیر مدهای ورودی به باریکه شکاف می باشد . با این وجود این روش نیاز به درک این قضیه دارد که عملگرهای تبدیل بر فضای هیلبرت باریکه های ورودی باید نمایشی از گروه $u(2)$ باشند. در این مقاله بدون استفاده از ریاضیات گروه های لی و نظریه نمایش این گروه ها با ساده‌ترین فرض ها این تبدیل بدست آمد. نکته اصلی کاربرد روش انتگرال گیری درون حاصل ضرب‌های مرتب است که در مسائل مشابه زیادی نیز بکار رفته است.

مرجع‌ها

[[1] *Essential Quantum Optics*, Ulf Leonhard, Cambridge University Press (2010).
[2]U. Leonhard, "Quantum statistics of a lossless beam splitter: SU(2) symmetry in phase space", *Phys. Rev. A* **48** (1993) 3265.
[3] H. Y. Fan, H. L. Lu , Y. Fan, "Newton–Leibniz integration for ket–bra operators in quantum mechanics and derivation of entangled state representations", *Annals of Physics,* **321** (2006) 480-494.
[4] W. Vogel, D.G. Welsh, "*Quantum optics"*, Wiley (2006).
[5] H. Y. Fan ," Permutation operators in Hilbert space gained via IWOP technique" *J. Phys. A: Math. Gen*. **22** (1989) 1193-1200.

پیاده‌سازی شمای (۳,۲) توزیع رمز کوانتمی به وسیله ولگشت کوانتمی

آرش شفائی اردکانی
دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشگاه تهران
ashafaie@ut.ac.ir

دکتر نیره مجد
استادیار دانشگاه تهران
naymajd@ut.ac.ir

چکیده

الگوریتم‌های توزیع رمز کوانتمی دسته‌ای از الگوریتم‌ها هستند که یک حالت کوانتمی را به شکلی بین چند گیرنده تقسیم می‌کنند که استخراج آن حالت تنها با همکاری عده مشخصی از گیرنده‌ها ممکن باشد. در این نوشتار نشان خواهیم داد یک الگوریتم با شمای (۲,۳) توزیع رمز کوانتمی را می‌توان با استفاده از ولگشت‌های کوانتمی پیاده‌سازی کرد.

کلید واژه ها : محاسبات کوانتمی، توزیع رمز کوانتمی، ولگشت‌های تصادفی کوانتمی

Implementing a (3,2) quantum secret sharing schema using quantum walks

Shafaie Ardakani, Arash[1]; Majd, Nayereh[1]

[1] *School of Engineering Science, University of Tehran, Tehran*

Abstract

Quantum secret sharing algorithms are algorithms used to share a quantum state amongst several receivers so that it may only be retrieved via the cooperation of a certain number of said receivers. In this text we will show that a (3,2) quantum secret sharing schema can be implemented using quantum walks.

key words: Quantum computation, Quantum secret sharing, Quantum random walks

مقدمه

الگوریتم‌های توزیع رمز دسته‌ای از الگوریتم‌ها هستند که برای توزیع یک رمز بین n گیرنده به کار می‌روند، به طوری که دسترسی به رمز تنها با همکاری تعداد مشخصی از گیرندگان ممکن باشد. به طور خاص، یک الگوریتم توزیع رمز (m,n) رمز را چنان بین n گیرنده توزیع می‌کنند که رمز را تنها بتوان با همکاری زیرمجموعه‌ای از گیرندگان که اندازه آن از m کم‌تر نباشد استخراج کرد. علاوه بر این، هدف آن است که، به ازای هر زیرمجموعه‌ای با اندازه کم‌تر از m هیچ جزئی از رمز نیز قابل دستیابی نباشد.[1] در الگوریتم‌های توزیع رمز کوانتمی، یک حالت کوانتمی (رمز) $|\Psi\rangle$ چنان بین چندین گیرنده توزیع می‌شود که تنها با هم‌کاری آن‌ها قابل استخراج باشد . [2] [3]

هدف این نوشتار بررسی الگوریتم‌های توزیع رمز کوانتمی از طریق الگوریتم‌هایی بر پایه ولگشت کوانتمی‌ست. به طور خاص، تمرکز بر تشکیل ساختار توزیع رمز معرفی شده در [4]بر اساس ولگشت‌های کوانتمی خواهد بود.

از دید کلاسیک، ولگشت تصادفی فرایندیست روی یک گراف که طی آن یک «ولگرد» از گرهی در گراف حرکت خود را آغاز کرده

و در هر نوبت بر مبنای احتمالاتی به یکی از گره‌های مجاور حرکت می‌کند. از ولگشت‌های تصادفی کلاسیک می‌توان در الگوریتم‌های بسیاری برای تحلیل گراف‌ها و نتورک‌ها، و همچنین الگوریتم‌های برای منظورهای عمومی استفاده کرد. به طور خاص، ساده‌ترین نوع ولگشت تصادفی روی خط انجام می‌شود. طبعا در چنین سیستم‌هایی مکان ولگرد را می‌توان تنها با یک عدد صحیح نمایش داد.

در سیستم‌های کوانتمی می‌توان به روش مشابهی ولگشت‌های کوانتمی را تعریف کرد.[5] به طور دقیق‌تر، ساختار یک دستگاه ولگشت کوانتمی را به صورت رابطه (۱) در نظر می‌گیریم.

$$|\Psi_0\rangle = |s_p\rangle \otimes \bigotimes_{i=1}^{l} |s_c^i\rangle \qquad (۱)$$

در این رابطه حالت کلی سیستم شامل حالت مکان ولگرد ($|s_p\rangle$) و تعدادی حالت «سکه» ($|s_c^i\rangle; i \in [1,l]$) است. سکه‌ها حالات کوانتمی‌ای هستند که، در هر نوبت، عامل تصادفی حرکت هستند. این سکه‌ها تحت عملگر کوانتمی خاصی «انداخته» شده و جهت حرکت ولگرد بر اساس حالت نهایی آن‌ها مشخص می‌شود. در ولگشتی متشکل از l سکه، تبدیل یکانی منتج از انداختن و جابه‌جایی بر اساس سکه m–ام مطابق رابطه (۲) خواهد بود.

$$\begin{aligned}\epsilon_m = &\big(\mathcal{S}_m \otimes_{i=1}^{m-1} \mathbb{I}_i \otimes |0\rangle_m\langle 0| \otimes_{k=m+1}^{M} \mathbb{I}_k \\ &+ \mathcal{S}_m^\dagger \otimes_{i=1}^{m-1} \mathbb{I}_i \\ &\otimes |1\rangle_m\langle 1| \otimes_{k=m+1}^{M} \mathbb{I}_k\big)\big(\mathbb{I}_p \otimes_{i=1}^{m-1} \mathbb{I}_i \\ &\otimes \mathbb{C}_m \otimes_{k=m+1}^{M} \mathbb{I}_k\big)\end{aligned} \qquad (۲)$$

$$\mathcal{S} = \sum_x |x+1\rangle\langle x|, \qquad \mathcal{S}^\dagger = \sum_x |x-1\rangle\langle x| \qquad (۳)$$

در این رابطه $\mathbb{C}_m$ و $\mathcal{S}_m$، به ترتیب، عمل‌گرهای انداختن سکه و جابجایی برای سکه m–ام هستند. عمل‌گرهای جابه‌جایی در چنین دستگاهی عبارت مشابه رابطه (۳) خواهند بود.

در ساده‌ترین حالت، عمل‌گر $\mathbb{C}$ را عمل‌گر هادامار ($\mathbb{H}$) می‌گیریم و ولگشت مربوطه را ولگشت هادامار نام می‌گذاریم. واضح است که در ولگشت هادامار ولگرد در هر قدم با احتمالی برابر به چپ یا راست حرکت می‌کند.

باید توجه کرد که پس از انجام این عملیات در هر نوبت، حالت نمایانگر مکان ولگرد با سکه مذکور درهم‌تنیده خواهد شد، و این تفاوت بنیادی ولگشت کوانتمی با معادل کلاسیک آن است. این درهم‌تنیدگی موجب تفاوت‌هایی در پوشش احتمالاتی و اطلاعاتی خواهد شد که ولگشت‌های کوانتمی را جالب توجه می‌کند.

پیاده سازی الگوریتم توزیع رمز

در پیاده‌سازی شمای توزیع رمز (۲,۳)، الگوریتم پیشنهادی در [4] انتخاب شده. هدف این بخش تولید کدگذاری این الگوریتم از طریق ولگشت‌های کوانتمی است. در کدگذاری این الگوریتم به دنبال ایجاد تناظر بین هر پایه رمز ($|0\rangle, |1\rangle$) با رشته‌ای از کیوبیت‌ها هستیم، به گونه‌ای که فاصله بین تمام حالات متناظر یک پایه لااقل ۳ باشد. اطمینان از وجود این فاصله به منظور حصول اطمینان از آن است که هر دو گیرنده‌ای می‌توانند رمز را، حتی با وجود یک کیوبیت خطا، استخراج کنند.

یک راه ساده برای تولید چنین مجموعه‌حالاتی که قابلیت تشخیص خطا را نیز داشته باشد، استفاده از کد همینگ است.[6] این الگوریتم از کد همینگ کلاسیک [7, 1, 3] استفاده می‌کند که بنا بر ساختارش امکان تصحیح یک کیوبیت خطای ارسال را نیز خواهد داشت. تناظرهای (۵) و (٦) شمای کدگذاری مورد نظر را توصیف می‌کنند.

$$\begin{aligned}|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{8}}(&|0000000\rangle + |1111000\rangle \\ &+ |1100110\rangle + |1010101\rangle \\ &+ |0011110\rangle + |0101101\rangle \\ &+ |0110011\rangle + |1001011\rangle)\end{aligned} \qquad (۵)$$

$$\begin{aligned}|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{8}}(&|0000111\rangle + |1111111\rangle \\ &+ |1100001\rangle + 1010010\rangle \\ &+ |0011001\rangle + |0101010\rangle \\ &+ |0110100\rangle + |1001100\rangle)\end{aligned} \qquad (٦)$$

به منظور ساده‌سازی این روابط، می‌توان آن‌ها را به صورت روابط (۷) و (۸) بازنویسی کرد. در این روابط، هر $|G_{ij}\rangle$ از معکوس کردن کیوبیت‌های i–ام و j–ام $|G_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle)$ به دست می‌آید.

$$|\mathbf{0}\rangle \to \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(|\boldsymbol{G_{00}}\rangle|\mathbf{000}\rangle + |\boldsymbol{G_{12}}\rangle|\mathbf{110}\rangle + |\boldsymbol{G_{13}}\rangle|\mathbf{101}\rangle + |\boldsymbol{G_{23}}\rangle|\mathbf{011}\rangle) \quad (۷)$$

$$|1\rangle \to \frac{1}{2}(|G_{00}\rangle|111\rangle + |G_{12}\rangle|001\rangle + |G_{13}\rangle|010\rangle + |G_{23}\rangle|100\rangle) \quad (۸)$$

هنگامی که این تناظرها ایجاد شوند می‌توان چهار کیوبیت اول را به گیرنده اول، کیوبیت پنجم را به گیرنده دوم، و کیوبیت ششم و هفتم را به گیرنده سوم ارسال کرد. در آن صورت، هر دو گیرنده‌ای می‌توانند با محاسبه بیت پریتی سهم‌های خود حالت اصلی را استخراج نمایند. به عنوان مثال، گیرنده دوم و سوم دو عملگر $CNOT$ را از کیوبیت‌های پنجم و ششم به کیوبیت هفتم اعمال کرده و پس از آن دو عملگر $CNOT$ را از کیوبیت هفتم به کیوبیت‌های پنجم و ششم اعمال می‌کنند. این مسیر معادل اعمال تبدیل $|i,j,k\rangle \to |j\oplus k, i\oplus k, i\oplus j\oplus k\rangle$ به این سه کیوبیت بوده و هم‌ارز تبدیل‌های (۹) و (۱۰) است که در آن‌ها $|\zeta\rangle$ مطابق رابطه (۱۱) تعریف شده باشد.

$$|\mathbf{0}\rangle \to |\boldsymbol{\zeta}\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle \quad (۹)$$

$$|1\rangle \to |\zeta\rangle \otimes |1\rangle \quad (۱۰)$$

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{2}(|G_{00}\rangle|00\rangle + |G_{12}\rangle|11\rangle + |G_{13}\rangle|01\rangle + |G_{23}\rangle|10\rangle) \quad (۱۱)$$

بنابراین رمز $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ تبدیل به $|\zeta\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$ شده و قابل استخراج است.

با توجه به این توضیحات، هدف ما ایجاد تناظرهای توصیف شده با استفاده از ولگشت کوانتمیست. گیریم یک ولگرد کوانتمی خطی داشته باشیم. حالت کوانتمی این ولگرد متشکل از حالت مکان، یک حالت سکه اولیه حاوی رمز کوانتمی به فرم $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$، و سه سکه است که بناست به گیرنده‌ها ارسال شود. این حالت اولیه مطابق رابطه (۱۲) تعریف می‌شود.

$$|\boldsymbol{\Psi_0}\rangle = |\boldsymbol{\phi}\rangle_{c_0}|\mathbf{0}\rangle_p|\mathbf{000}\rangle_{c_{1::3}} \quad (۱۲)$$

ولگرد بر اساس تمام این سکه‌ها حرکت خواهد کرد. سکه اول تحت عملگر $\mathbb{I}$ و سکه‌های گیرنده‌ها تحت عملگر $\mathbb{H}$ انداخته خواهند شد. دو عملگر حرکت رو به راست و چپ را مطابق روابط (۱۳) و (۱٤) تعریف خواهیم کرد.

$$\boldsymbol{S_+} = \sum_{\boldsymbol{i=-5}}^{\mathbf{3}} |\boldsymbol{i+1}\rangle_{\boldsymbol{p}}\langle \boldsymbol{i}|_{\boldsymbol{p}} \quad (۱۳)$$

$$S_- = \sum_{i=-4}^{4} |i\rangle_p\langle i+1|_p \quad (۱٤)$$

به ازای سکه اول، ولگرد تحت عملگر $S_+|0\rangle_{c_0}\langle 0|_{c_0} + S_-|1\rangle_{c_0}\langle 1|_{c_0}$ و به ازای سکه‌های دیگر تحت عملگر $S_+|0\rangle_{c_i}\langle 0|_{c_i} + S_-|1\rangle_c_i\langle 1|_{c_i}$ حرکت خواهد کرد. پس از اجرای این عملیات به حالت رابطه (۱۵) خواهیم رسید. در این رابطه نوتیشن ستاره (*) نشان‌دهنده مجموع تمام جای‌گشت‌های ممکن کیوبیت‌های ذکر شده است؛ به عنوان مثال، در حالت $|001\rangle$ داریم $|001\rangle^* = |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle$.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\Psi_1}\rangle = \boldsymbol{\alpha}|\mathbf{0}\rangle[&|\mathbf{4}\rangle|\mathbf{000}\rangle + |\mathbf{2}\rangle|\mathbf{001}\rangle^* \\ &+ |\mathbf{0}\rangle|\mathbf{011}\rangle^* + |\mathbf{-2}\rangle|\mathbf{111}\rangle] \\ &+ \boldsymbol{\beta}|\mathbf{1}\rangle[|\mathbf{1}\rangle|\mathbf{000}\rangle \\ &+ |\mathbf{-1}\rangle|\mathbf{001}\rangle^* \\ &+ |\mathbf{-3}\rangle|\mathbf{011}\rangle^* \\ &+ |\mathbf{-5}\rangle|\mathbf{111}\rangle]\end{aligned} \quad (۱۵)$$

برای تولید حالت توصیف شده از عملگر تناظر P تعریف شده در روابط (۱٦)، (۱۷)، و (۱۸) و به صورت کنترل‌شده روی بیت اول استفاده می‌کنیم:

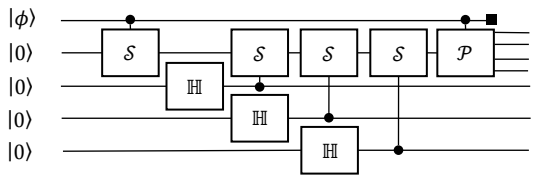
$$\boldsymbol{P} = |\mathbf{0}\rangle_{\boldsymbol{c_0}}\langle \mathbf{0}|_{\boldsymbol{c_0}} \otimes \boldsymbol{P_0} + |\mathbf{1}\rangle_{\boldsymbol{c_0}}\langle \mathbf{1}|_{\boldsymbol{c_0}} \otimes \boldsymbol{P_1} \quad (۱٦)$$

$$P_0 = |000\rangle\langle 4|_p + |110\rangle\langle 2|_p + |101\rangle\langle 0|_p + |011\rangle\langle -2|_p \quad (۱۷)$$

$$P_1 = |111\rangle\langle -5|_p + |001\rangle\langle -3|_p + |010\rangle\langle -1|_p + |100\rangle\langle 1|_p \quad (۱۸)$$

پس از اعمال P روی حالت موجود به نتیجه (۱۹) می‌رسیم که معادل همان حالت مطلوب است.

$$
\begin{aligned}
|\Psi_2\rangle = \alpha[&|000\rangle|G_{00}\rangle + |110\rangle|G_{12}\rangle \\
&+ |101\rangle|G_{13}\rangle \\
&+ |011\rangle|G_{23}\rangle] \\
&+ \beta[|100\rangle|G_{23}\rangle \\
&+ |010\rangle|G_{13}\rangle \\
&+ |001\rangle|G_{12}\rangle \\
&+ |111\rangle|G_{00}\rangle]
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$



شکل ۱: مدار کدگذاری الگوریتم

مدار الگوریتم

با توجه به توضیحات بخش پیشین، مدار کوانتمی توصیف‌کننده عملیات کدگذاری را می‌توان مشابه تصویر (۱) ترسیم کرد. در این مدار $\mathcal{S}$، $\mathcal{P}$ و $\mathbb{H}$، به ترتیب نمایانگر عمل‌گرهای تعریف‌شده در روابط (۳)، (۱۶)، و عمل‌گر هادامار هستند.

نتیجه گیری

همان‌طور که در این نوشتار دیده شد، توانستیم نشان دهیم که می‌توان الگوریتم‌های توزیع رمز کوانتمی را، به طور خاص در حالت شمای (۲, ۳)، بر پایه ول‌گشت‌های کوانتمی پیاده‌سازی کرد. پیاده‌سازی فیزیکی عملیات ول‌گشت به نسبت بسیاری از عملیات کوانتمی دیگر ساده‌تر است، و مفهوم توزیع رمز در بسیاری از کاربردهای امنیتی و، در آینده، در پیاده‌سازی اینترنت کوانتمی نقش مهمی ایفا می‌کند. از این رو، در ادامه پژوهش، می‌توان بر پیاده‌سازی و ساده‌سازی الگوریتم‌های حالت کلی توزیع رمز کوانتمی بر پایه ول‌گشت‌ها تمرکز کرد. به طور خاص، تعمیم الگوریتم تشریح‌شده به طوری که امکان ساختن شماهای توزیع رمز کلی‌تر $(n,m); m \geq \frac{n}{2}$ را داشته باشد قدم بعدی پژوهش در این زمینه خواهد بود.

مرجع‌ها

[1] G. R. BLAKLEY, "Safeguarding cryptographic keys," New York, NY, USA, 1979.

[2] M. Hillery, V. Bužek and A. Berthiaume, "Quantum secret sharing," *Physical Review A,* vol. 59, p. 1829–1834, March 1999.

[3] D. Gottesman, "Theory of quantum secret sharing," *Physical Review A,* vol. 61, p. 042311, March 2000.

[4] R. Bassirian, S. Boreiri and V. Karimipour, "Computing on Quantum Shared Secrets for General Quantum Access Structures," *Bassirian, R., Boreiri, S. & Karimipour, V. Quantum Inf Process (2019) 18: 109. https://doi.org/10.1007/s11128-019-2224-7,* January 2018.

[5] Y. Aharonov, L. Davidovich and N. Zagury, "Quantum random walks," *Physical Review A,* vol. 48, p. 1687–1690, August 1993.

[6] A. R. Calderbank and P. W. Shor, "Good Quantum Error-Correcting Codes Exist," *Phys. Rev. A, Vol. 54, No. 2, pp. 1098-1106, 1996,* December 1995.

[7] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath and J. Watrous, "One-dimensional quantum walks," in *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, New York, NY, USA, 2001.

[8] S. M. Lee, S.-W. Lee, H. Jeong and H. S. Park, "Quantum teleportation of shared quantum secret," *Phys. Rev. Lett. 124, 060501 (2020),* December 2018.

[9] H.-J. Li, J. Li and X. Chen, "Generalized quantum teleportation of shared quantum secret: a coined quantum-walk approach," *Quantum Information Processing,* vol. **21**, November 2022.

برآورد کوانتومی بسامدهای رابی در یک سامانه‌ی اتمی سه ترازی Λ گونه در حضور شفافیت القایی الکترومغناطیسی

حسینی، سید محمد
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه
Sm.hosseiny@urmia.ac.ir

رنگانی جهرمی، حسین
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جهرم
h.ranganijahromi@jahromu.ac.ir

امنیت‌طلب، مهدی
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه
m.amniat-talab@urmia.ac.ir

چکیده

در این مقاله، مسئله‌ی برآورد کوانتومی بسامدهای رابی در یک سامانه‌ی اتمی سه ترازی Λ گونه بطوریکه سامانه شرایط شفافیت القایی الکترومغناطیسی EIT که در آن جذب خطی حذف می‌شود، را برآورده می‌نماید، را مورد بحث قرار خواهیم داد. علاوه بر این، به منظور بهبود روش اندازه‌گیری کوانتومی، ابزار قدرتمند اما در عین حال ساده‌ی سرعت هیلبرت–اشمیت HSS را معرفی و رابطه‌ی آن با اطلاعات فیشر کوانتومی QFI در این سامانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. افزون بر این، نشان داده خواهد شد که با بهره‌گیری از پارامترهای مختلف سامانه می‌توان به یک برآورد کوانتومی بهبود یافته، دست یافت.

کلیدواژه ها: سرعت آماری کوانتومی، اطلاعات فیشر کوانتومی، شفافیت القایی الکترومغناطیسی، سرعت هیلبرت اشمیت.

Quantum estimation of Rabi frequencies in a Λ-type three-level atomic system in the presence of electromagnetically induced transparency

Hosseiny, Seyed Mohammad[1]; Rangani Jahromi, Hossein[2]; Amniat-Talab, Mahdi[1]

[1] *Physics Department, Faculty of Sciences, Urmia University,P.B. 165, Urmia, Iran*
[2] *Physics Department, Faculty of Sciences, Jahrom University, P.B. 74135111, Jahrom, Iran*

Abstract

In this paper, we address the problem of quantum estimation of Rabi frequencies in a three-level Λ-type atomic system that satisfies the conditions of electromagnetically induced transparency (EIT), in which the linear absorption is eliminated. Moreover, in order to improve quantum metrology, a powerful but simple tool, the Hilbert-Schmidt speed (HSS), is introduced and its relation with the quantum Fisher information (QFI) in this system is investigated. Furthermore, it will be shown that by using different parameters of the system, one can achieve an improved quantum estimation.

***keywords**: Quantum statistical speed, quantum Fisher information, electromagnetically induced transparency, Hilbert–Schmidt speed.*

۱. مقدمه

اندازه‌گیری کوانتومی در اپتیک غیرخطی از اهمیت خاصی برخوردار است. بعنوان یکی از فرایندهای مهم اپتیک غیرخطی،

شفافیت القایی الکترومغناطیسی[1] (EIT) توسط هریس و همکاران [۱] در سال ۱۹۹۰ میلادی معرفی شد. بطور کلی، اگر اتم‌ها در یک برهم‌نهی همدوس از حالات اتمی آماده شوند، تحت شرایط خاص ممکن است جذب یا گسیل، حذف شود [۲]، که برای یک میدان پروب محیط بطور موثر شفاف است. این تکنیک حذف جذب روش EIT نامیده می‌شود. بطور معمول، یک گاز چگال در حوالی هر یک از تشدیدهای خود (خطوط طیفی) جذب زیادی را نشان می‌دهد و در همین‌جا پالس‌های لیزری را اعمال می‌کنیم. گذار از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته به جذب نور در بسامد پروب می‌انجامد. هر اتم یک فوتون جذب می‌کند و برانگیخته می‌شود ولی پیش از آنکه بتواند آن‌را دوباره گسیل کند با اتم همسایه برخورد کرده و انرژی‌اش را از دست می‌دهد و در نتیجه محیط برای پالس‌های حول بسامد پروب، مات[2] می‌شود. این مات بودن محیط نسبت به میدان پروب را می‌توان با روش EIT شفاف نمود. با فیلتر کردن مغناطیسی ابتدا اتم‌ها در حالت پایه قرار می‌گیرند سپس گاز توسط پرتوی لیزر دومی موسوم به پرتو تزویج روشن می‌شود. حاصل تزویج دو حالت پایه، یک اثر تداخلی کوانتومی است که گذارحالت پایه به اولین حالت برانگیخته را مسدود و اجازه نمی‌دهد نور در باند باریکی حول پروب جذب شود [۳].

در سامانه‌هایی که شرایط EIT در آن‌ها برقرار است، اندازه گیری کوانتومی می‌تواند بسیار مفید باشد. در این کار، با استفاده از ابزارهای اطلاعات فیشر کوانتومی[3] (QFI) [۴و۵] و سرعت هیلبرت–اشمیت[4] (HSS) [۶و۷] که هر دو سرعت‌های آماری کوانتومی هستند، به مسئله‌ی برآورد بسامدهای رابی متناظر با میدان‌های محرک تشدید در یک سامانه‌ی اتمی سه‌ترازی Λ گونه پرداخته و رابطه‌ی بین آن دو در این سامانه بررسی می‌شود.

ساختار مقاله عبارتست از: در بخش دوم، ابزارهای مورد نیاز معرفی می‌شوند. همچنین، مدل مورد نظر در بخش سوم توصیف می‌گردد. علاوه بر این، بحث و نتایج در بخش چهارم و مهمترین نتایج مستخرج از مقاله، در بخش آخر بیان خواهد شد.

[1] electromagnetically induced transparency (EIT)
[2] opaque
[3] Quantum Fisher information (QFI)
[4] Hilbert-Schmidt speed (HSS)

۲. مفاهیم پایه

هنگام بررسی حساسیت یک حالت کوانتومی نسبت به یک پارامتر نامعلوم، نیاز است اندازه‌گیری‌ها بر روی سامانه‌های مشابه‌ای که تحت تأثیر پارامتر ناشناخته θ می‌باشند انجام گیرد. در این صورت دقتی که می‌توان با آن θ را برآورد نمود توسط کران کرامر–رائو کوانتومی[5] [۸] بیان می‌شود. از این رو، کوچکترین تغییر قابل مشاهده در پارامتر θ توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\delta\theta = \frac{1}{\sqrt{F_\theta}}, \qquad (۱)$$

که در آن F_θ اطلاعات فیشر کوانتومی QFI است و برای حالت خالص می‌توان آن‌را بصورت زیر خلاصه کرد [۹–۱۱]:

$$F_\theta = 4\left(\langle\partial_\theta\psi_\theta|\partial_\theta\psi_\theta\rangle - |\langle\psi_\theta|\partial_\theta\psi_\theta\rangle|^2\right). \qquad (۲)$$

بطوریکه ψ حالت اتمی سامانه است. بر اساس نظریه‌ی برآورد کوانتومی، افزایش QFI نشان دهنده بهبود دقت بهینه برآورد است.

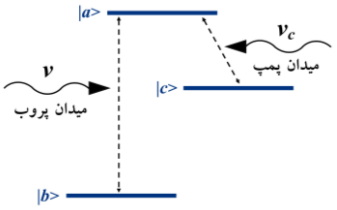
از طرفی، با در نظر گرفتن حالت کوانتومی $\rho(\theta)=|\psi_\theta(t)\rangle\langle\psi_\theta(t)|$، می‌توان سرعت هیلبرت–اشمیت HSS را به صورت زیر تعریف کرد [۶، ۷ و۱۲]:

$$HSS_\theta = \sqrt{\frac{1}{2}Tr\left[\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right]^2}. \qquad (۳)$$

به دلیل شکل پیچیده‌ی عبارات حاصله برای QFI و HSS، از گزارش آن‌ها در این مقاله صرف نظر شده است.

۳. مدل

با توجه به مرجع [۲]، سامانه‌ای را درنظر بگیرید که متشکل از اتم‌های سه ترازی با پیکربندی Λ مانند شکل ۱، هستند. ترازهای $|a\rangle$ و $|b\rangle$ توسط میدان پروب با بسامد ν و تراز بالایی $|a\rangle$ با تراز $|c\rangle$ توسط یک میدان قوی همدوس (میدان پمپ) با بسامد ν_c جفت شده‌اند.



شکل ۱: پیکربندی یک اتم سه ترازی Λ گونه.

[5] Cramér–Rao bound

هامیلتونی سامانه در تقریب موج چرخان که شامل دو بخش غیر اختلالی و اندرکنشی اتم–میدان است، بصورت زیر بیان می‌شود [۲]:

$$H = H_0 + H_1, \tag{۴}$$

$$H_0 = \hbar\omega_a |a\rangle + \hbar\omega_b |b\rangle + \hbar\omega_c |c\rangle, \tag{۵}$$

$$H_1 = -\frac{\hbar}{2}\left(\Omega_{R1} e^{-i\phi} e^{-i\nu t} |a\rangle\langle b| + \Omega_{R2} e^{-i\phi_c} e^{-i\nu_c t} |a\rangle\langle c|\right) + H.c. \tag{۶}$$

در اینجا $\Omega_{R1} e^{-i\phi}$ و $\Omega_{R2} e^{-i\phi_c}$ به ترتیب بسامدهای رابی مختلط متناظر با میدان پروب و پمپ می‌باشند و همچنین ν و ν_c بسامدهای میدان پروب و پمپ هستند. اگر هر یک از اتم‌های ما در حالت اولیه‌ی زیر آماده شوند:

$$|\psi(0)\rangle = c_a(0)|a\rangle + c_b(0)|b\rangle + c_c(0)|c\rangle, \tag{۷}$$

سپس با در نظر گرفتن گذارهای دوقطبی مجاز $|a\rangle \to |b\rangle$ و $|a\rangle \to |c\rangle$، حالت تحول یافته‌ی سامانه‌ی تک کیوبیتی در لحظه‌ی t عبارتست از:

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a\rangle + c_b(t)|b\rangle + c_c(t)|c\rangle, \tag{۸}$$

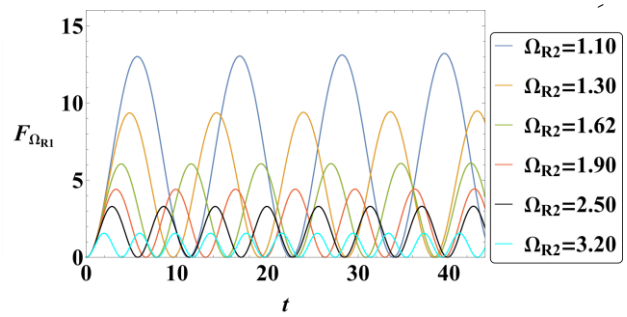
که با صرف نظر از واپاشی اتمی و با در نظر گرفتن اتم‌هایی که بدوا به تراز $|b\rangle$ وارد می‌شوند، ضرایب احتمال بصورت زیر خلاصه می‌شوند [۲]:

$$\begin{aligned} c_a(t) &= -i\frac{\Omega_{R1}}{\Omega}\sin(\frac{\Omega t}{2}), \\ c_b(t) &= \frac{\Omega_{R2}^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_{R1}^2}{\Omega^2}\cos(\frac{\Omega t}{2}), \\ c_c(t) &= -[\frac{\Omega_{R1}\Omega_{R2}}{\Omega^2} - \frac{\Omega_{R1}\Omega_{R2}}{\Omega^2}\cos(\frac{\Omega t}{2})]. \end{aligned} \tag{۹}$$

که Ω_{R1} و Ω_{R2} بسامدهای رابی متناظر با میدان‌های تشدید محرک با گذارهای $|a\rangle \to |b\rangle$ و $|a\rangle \to |c\rangle$ هستند و $\Omega = \sqrt{\Omega_{R1}^2 + \Omega_{R2}^2}$، بطوریکه بسامد رابی توسط رابطه‌ی $\Omega_R = |\wp_{ab}|\mathcal{E}/\hbar$ تعریف می‌شود که در اینجا، $\wp_{ab}$ گشتاور دوقطبی اتمی است و $\mathcal{E}$ دامنه میدان است. مشاهده می‌شود بسامد رابی با دامنه میدان $\mathcal{E}$ و در نتیجه شدت آن رابطه مستقیم دارد.

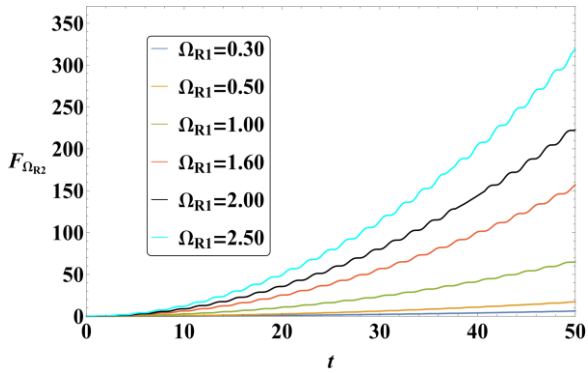
۴. بحث و نتایج

رفتار کیفی اطلاعات فیشر کوانتومی، که با استفاده از حالت ۸ محاسبه شده نسبت به Ω_{R1} برای Ω_{R2}های مختلف در شکل ۲ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش Ω_{R2} که یکی از شروط رخداد EIT می‌باشد، علاوه بر اینکه برآورد کوانتومی Ω_{R1} کاهش می‌یابد، نوسانات در رفتار کیفی برآورد بیشتر شده و دوره‌ی نوسانات نیز کاهش می‌یابد. این بدان معنی است که افزایش بسامد رابی متناظر با میدان قوی (میدان پمپ) منجر به اُفت دقت برآورد بسامد رابی متناظر با میدان پروب Ω_{R1} می‌شود.



شکل۲: تغییرات زمانی اطلاعات فیشر کوانتومی نسبت به Ω_{R1} برای Ω_{R2}های مختلف زمانیکه $\Omega_{R1} = 0.1$.

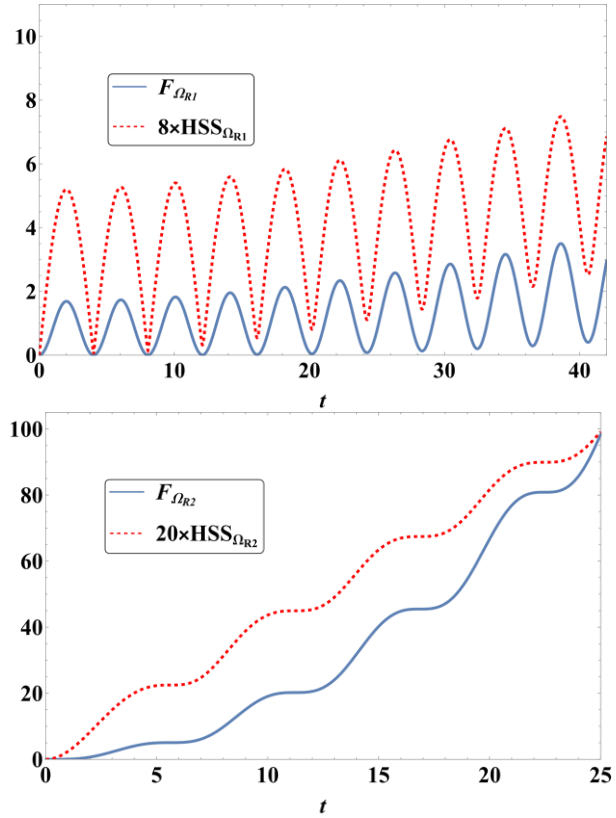
در شکل ۳، رفتار زمانی QFI نسبت به Ω_{R2} برای Ω_{R1}های مختلف نشان داده شده است. به وضوح می‌بینیم که با افزایش بسامد رابی Ω_{R1}، برآورد کوانتومی بسامد Ω_{R2}، افزایش می‌یابد و دقت برآورد بهبود می‌یابد. افزون بر این، در لحظات اولیه، برآورد در بدترین حالت ممکن می‌باشد و با مرور زمان، برآورد بهینه می‌شود. لازم بذکر است که افزایش QFIها در اینجا بیانگر رفتار غیر مارکوفی [۱۳] سامانه در مدل حاضر نیست. بطور کلی، اگر مشتق زمانی QFI (نسبت به یکی از پارامترهای اولیه سامانه) برای برخی از زمان‌ها، مثبت شود آنگاه بیانگر رفتار غیرمارکوفی[۶] است [۱۳]. در اینجا ما QFI را نسبت به بسامدهای رابی که پارامتر محیط هستند، بررسی کرده‌ایم و لذا در مدل حاضر، QFI و HSS شاهدی بر غیر مارکوفی بودن دینامیک سامانه نیستند.



شکل۳: تغییرات زمانی اطلاعات فیشر کوانتومی نسبت به Ω_{R2} برای Ω_{R1}های مختلف زمانیکه $\Omega_{R2} = 6$.

[6] non-Markovian dynamic

به منظور بررسی رابطه‌ی بین دو سرعت کوانتومی HSS و QFI، در شکل ۴ (الف و ب) مقایسه‌ی بین تغییرات زمانی آن‌ها به ترتیب نسبت به Ω_{R1} و Ω_{R2} در شرایط یکسان ترسیم شده است. با بررسی این اشکال متوجه می‌شویم که رفتارهای HSS و QFI کاملا با یکدیگر منطبق هستند به نحوی که نقاط کمینه و بیشینه‌ی آن‌ها هم‌بروزی دارند. پس می‌توان بیان کرد که HSS یک ابزار موثر در بهبود برآورد کوانتومی در این سامانه می‌باشد.



شکل۴: مقایسه بین تغییرات زمانی اطلاعات فیشر کوانتومی و سرعت هیلبرت–اشمیت الف) نسبت به Ω_{R1} زمانیکه $\Omega_{R1}=0.5, \Omega_{R2}=3$. ب) نسبت به Ω_{R2} زمانیکه $\Omega_{R1}=1, \Omega_{R2}=2$.

۵. نتیجه‌گیری

اگر اتم‌های ما در یک برهم‌نهی همدوس از حالات اتمی آماده شوند، تحت شرایط خاص ممکن است جذب یا گسیل، حذف شود، که در شرایط مناسب برای یک میدان پروب، محیط بطور موثر شفاف است. این روش بنام شفافیت القایی الکترومغناطیسی EIT مشهور است. در این کار، برآورد کوانتومی بسامدهای رابی در یک سامانه‌ی اتمی سه ترازی Λ گونه در حضور شفافیت القایی الکترومغناطیسی مورد بررسی قرار گرفت. به منظور بهبود اندازه گیری کوانتومی، ابزار قدرتمند سرعت هیلبرت–اشمیت (HSS) را معرفی کردیم و رفتار آن‌را با رفتار کیفی اطلاعات فیشر کوانتومی (QFI) در این سامانه، مقایسه کردیم. از آنجاییکه تغییرات مشتق زمانی QFI نسبت به یکی از پارامترهای اولیه‌ی سامانه بررسی نشده بود، لذا QFI و HSS شاهدی بر مارکوفی بودن تحول زمانی سامانه در مدل حاضر نیستند. علاوه بر این مشاهده کردیم، افزایش بسامد رابی متناظر با میدان قوی (میدان پمپ) که یکی از شروط رخداد EIT است، منجر به اُفتِ دقت برآورد بسامد رابی متناظر با میدان پروب می‌شود.

مرجع‌ها

[۱] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoğlu. "Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency." *Physical Review Letters* **64**, no. 10 (1990): 1107.
[۲] M. O. Scully, M. S. Zubairy. "*Quantum optics*." (1999): 648-648.
[۳] E. Hecht, M. Reading: Addison-Wesley. " *Optics*." (2002).
[۴] MGA Paris. Quantum estimation for quantum technology. *International Journal of Quantum Information* **7**, (2009):125–137.
[۵] Liu J, Yuan H, Lu X-M, Wang X. Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **53**, (2020): 023001.
[۶] M. Gessner, A. Smerzi, Statistical speed of quantum states: generalized quantum Fisher information and Schatten speed, *Physical Review A*, **97** (2018): 022109.
[۷] H. Rangani Jahromi, and R. Lo Franco. "Hilbert–Schmidt speed as an efficient figure of merit for quantum estimation of phase encoded into the initial state of open n-qubit systems." *Scientific Reports* **11**, no. 1 (2021): 7128.
[۸] S. L. Braunstein, and C. M. Caves. "Statistical distance and the geometry of quantum states." *Physical Review Letters* **72**, no. 22 (1994): 3439.
[۹] S. A. Haine, "Mean-field dynamics and fisher information in matter wave interferometry." *Physical Review Letters* **116**, no. 23 (2016): 230404.
[۱۰] G. Tóth, and I.Apellaniz. "Quantum metrology from a quantum information science perspective." *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47**, no. 42 (2014): 424006.
[۱۱] S. M. Hosseiny, H. Rangani Jahromi, and M. Amniat-Talab. "Monitoring variations of refractive index via Hilbert-Schmidt speed and applying this phenomenon to improve quantum metrology." arXiv preprint arXiv:2210.10106 (2022).
[۱۲] H. Rangani Jahromi, K. Mahdavipour, M. Khazaei Shadfar, and R. Lo Franco. "Witnessing non-Markovian effects of quantum processes through Hilbert-Schmidt speed." *Physical Review A* **102**, no. 2 (2020): 022221.
[۱۳] Xiao-Ming Lu, , X. Wang, and C. P. Sun. "Quantum Fisher information flow and non-Markovian processes of open systems." *Physical Review A* **82**, no. 4 (2010): 042103.

کاوش فاز اولیه کانال دوربری از طریق کیوبیت دوربری‌شده

رنگانی جهرمی، حسین
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه جهرم
h.ranganijahromi@jahromu.ac.ir

حسینی، سید محمد
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ارومیه
Sm.hosseiny@urmia.ac.ir

امنیت‌طلب، مهدی
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه
m.amniat-talab@urmia.ac.ir

چکیده

فاز اولیه می‌تواند حامل اطلاعات رمزنگاری‌شده‌ی مهمی باشد یا اینکه ماهیت فرایندی که حالت اولیه را آماده‌سازی نموده، آشکار سازد؛ از این رو، تخمین هرچه دقیق‌تر آن از اهمیت خاصی برخوردار است. در این مقاله، کاوش فاز اولیه‌ی کانال دوربری، که توسط دو کیوبیت توپولوژیک مایورانا محقق شده است، را با استفاده از دو ابزار ریاضیاتی اطلاعات فیشر کوانتومی (QFI) و سرعت هیلبرت-اشمیت (HSS) که برای حالت کیوبیت دوربری شده محاسبه شده‌اند، مورد تحقیق قرار خواهیم داد.

کلیدواژه ها: سرعت هیلبرت اشمیت، اطلاعات فیشر کوانتومی، دوربری کوانتومی، برآورد فاز کوانتومی.

Probing the initial phase of teleportation channel through teleported qubit

Rangani Jahromi, Hossein[1]; Hosseiny, Seyed Mohammad[2]; Amniat-Talab, Mahdi[2]

[1] *Physics Department, Faculty of Sciences, Jahrom University, P.B. 74135111, Jahrom, Iran*
[2] *Physics Department, Faculty of Sciences, Urmia University,P.B. 165, Urmia, Iran*

Abstract

The initial phase can carry important encrypted information or reveal the nature of the process preparing the initial state; therefore, estimating it more accurately is of special importance. In this paper, we explore the initial phase of a teleportation channel, realized by two topological Majorana qubits, using two mathematical tools, i.e., quantum Fisher information (QFI) and Hilbert-Schmidt speed (HSS) which are calculated for the teleported qubit state.

keywords: *Hilbert–Schmidt speed, quantum Fisher information, quantum teleportation, quantum phase estimation.*

۱. مقدمه

دوربری کوانتومی[1] روشی است که در آن دو بازیگر (آلیس/باب) به عنوان (فرستنده/گیرنده)، یک کانال کلاسیک یا غیر کلاسیک را

[1] Quantum teleportation

به اشتراک می‌گذارند به طوری که آلیس یک حالت کوانتومی ناشناخته که حاوی اطلاعات کوانتومی است را از طریق کانال مورد نظر برای باب ارسال می‌کند [۱و۲]. بِنت و همکارانش[۲] طرح انتقال از راه دور کوانتومی را برای اولین بار پیشنهاد دادند [۳]. در این روش، امکان ارسال یک حالت غیر کلاسیک ناشناخته در فواصل طولانی با استفاده از درهم‌تنیدگی مشترک و ارتباطات موضعی وجود داشت.

برآورد فاز کوانتومی یکی از مهم‌ترین مفاهیم در مطالعات اولیه محاسبات کوانتومی است [۴]. بطور معمول، فاز اولیه می‌تواند حامل اطلاعات رمزنگاری‌شده‌ی مهمی باشد یا اینکه ماهیت فرایندی که حالت اولیه را آماده‌سازی نموده، آشکار سازد؛ از این رو، تخمین هرچه دقیق‌تر آن از اهمیت خاصی برخوردار است. بمنظور برآورد فاز اولیه از ابزار اطلاعات فیشر کوانتومی QFI [۵] بهره می‌گیریم. علاوه بر این، بمنظور بهبود دقت فرآیند اندازه‌گیری کوانتومی، ابزار قدرتمند و بسیار پر کاربرد دیگری بنام سرعت هیلبرت–اشمیت HSS [۶] را معرفی می‌کنیم که یک سرعت آماری کوانتومی است.

در مرجع [۷]، برآورد فاز حالت ورودی یک کانال کوانتومی دلخواه، توسط ابزارهای ریاضی قدرتمند QFI و HSS مورد مطالعه قرار گرفت. اما گاهی اوقات بنا به ملاحظات امنیتی نیاز است اطلاعات حساسی در فاز حالت اولیه منبع دوربری ذخیره و سپس با استفاده از کیوبیت دوربری شده تحت برآورد قرار گیرد. در این کار، کاوش فاز اولیه‌ی کانال دوربری از طریق کیوبیت دوربری شده توسط این دو ابزار صورت می‌گیرد و نشان می‌دهیم که HSS بعنوان یک گزینه‌ی بسیار سودمند در کاوش فاز اولیه کانال، می‌تواند استفاده شود.

۲. مفاهیم پایه

۲.۱ دوربری کوانتومی تک کیوبیتی

در پروتکل استاندارد [۸]، انتقال از راه دور توسط حالت آمیخته دو کیوبیتی $\rho_{\rm ch}$ که نقش کانال یا منبع را ایفا می‌کند، محقق می‌شود و توسط یک کانال کوانتومی واقطبیده تعمیم یافته $\Lambda(\rho_{\rm ch})$ مدل‌بندی می‌شود، که بر روی یک حالت ورودی $\rho_{\rm in}$ که تک کیوبیتی است، اعمال می‌شود. آلیس قصد دارد کیوبیت کدگذاری شده خود را توسط این فرآیند به باب ارسال کند. برای یک حالت تک کیوبیتی خالص دلخواه، حالت ناشناخته‌ی ورودی (اولیه) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$|\psi_{in}\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \qquad (۱)$$

که θ و ϕ دامنه و فاز حالت اولیه‌ی دوربری هستند. در دوربری یک حالت تک کیوبیتی دلخواه (حالت ورودی $\rho_{\rm in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$)، حالت خروجی $\rho_{\rm out}$ از رابطه ذیل بدست می‌آید:

$$\rho_{\rm out} = \Lambda(\rho_{\rm ch})\rho_{\rm in} = \sum_{i=0}^{3}{\rm Tr}(\mathcal{B}_i\rho_{\rm ch})\sigma_i\rho_{\rm in}\sigma_i, \qquad (۲)$$

که $\Lambda(\rho_{\rm ch})$ یک کانال واقطبیده تعمیم یافته است و $\mathcal{B}_i$ حالت بل متناظر با ماتریس پائولی σ_i است و با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{B}_i = (\sigma_0 \otimes \sigma_i)\mathcal{B}_0(\sigma_0 \otimes \sigma_i); \quad i = 1, 2, 3, \qquad (۳)$$

که $\sigma_0 = I, \sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z$ و I ماتریس همانی 2×2 است. علاوه بر این، برای هر دو کیوبیت دلخواه، که هر کدام در پایه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ توصیف می‌شوند، داریم $\mathcal{B}_0 = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|)$.

۲.۲ اطلاعات فیشر کوانتومی

طبق نامساوی کوانتومی کرامر–رائو، حد پایینی دقت تخمین فاز کوانتومی توسط رابطه‌ی زیر بیان می‌شود [۹]:

$$\Delta\varphi_{QCR} = \frac{1}{\sqrt{F_\varphi}}, \qquad (۴)$$

که در آن F_φ اطلاعات فیشر کوانتومی QFI نسبت به پارامتر φ است و می‌توان آن‌را در حالت کلی بصورت زیر بیان نمود [۱۰و۱۱]:

$$F_\varphi = \sum_i \frac{(\partial_\varphi \lambda_i)^2}{\lambda_i} + 4\sum_{i\neq j}\frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i + \lambda_j}\left|\langle\phi_i|\partial_\varphi\phi_j\rangle\right|^2. \qquad (۵)$$

بطوریکه $|\phi_i\rangle$ و λ_i ویژه بردارها و ویژه مقادیر ماتریس چگالی است. بر اساس نظریه‌ی برآورد کوانتومی، افزایش QFI نشان‌دهنده‌ی بهبود دقت بهینه برآورد است.

از طرف دیگر، با در نظر گرفتن حالت کوانتومی $\rho(\varphi)$، می‌توان HSS که یک سرعت آماری کوانتومی است را به صورت زیر تعریف نمود [۶، ۷]:

[2] Bennett et. al.

$$HSS_{\varphi}=\sqrt{\frac{1}{2}Tr\left[\frac{d\rho(\varphi)}{d\varphi}\right]^2}. \qquad (۶)$$

که برای محاسبه نیازی به قطری کردن $d\rho(\varphi)/d\varphi$ ندارد.

۲.۳ دینامیک مارکوفی و غیر مارکوفی

یک فرآیند مارکوفی[3] کلاسیک به عنوان خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی تعریف می‌شود. به طور کلی، فرایند مارکوفی هیچ خاطره‌ای از تاریخچه مقادیر گذشته‌ی متغیر تصادفی ندارد. رفتار غیرمارکوفی[4] [۱۲] ریشه در وجود حافظه کوانتومی سامانه دارد. در اینجا برای مشخص نمودن تحول غیر مارکوفی سامانه کوانتومی با معرفی شار QFI شروع می‌کنیم که به عنوان نرخ تغییرزمانی QFI بصورت I:= ∂F/∂t تعریف می‌شود. وقتی مشتق زمانی QFI نسبت به یکی از پارامترهای اولیه محاسبه شده برای برخی از زمان‌ها، مثبت شود بیانگر رفتار غیرمارکوفی سامانه خواهد بود [۱۳].

۳. مدل

یک کیوبیت توپولوژیک، که با مدهای مایورانا[5] [۱۴] که از لحاظ فضایی جدا از یکدیگر می‌باشند، تحقق یافته و روی یک ابررسانای s-wave قرار دارد، را در نظر بگیرید. مدهای مایورانا در نقاط انتهایی برخی از نانوسیم‌های دارای تعامل اسپین–مدار قوی تولید می‌شوند و تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی در جهت محور سیم قرار دارند. آن‌ها به صورت مستقل از طریق اتصالات تونلی به نانوسیم‌های فلزی متصل هستند به طوری که قدرت‌های تونلینگ با استفاده از ولتاژهای دروازه خارجی قابل کنترل هستند. مطابق [۱۵و۱۶]، سامانه‌ای متشکل از دو کیوبیت توپولوژیک فوق الذکر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید دو کیوبیت مایورانا ابتدا در حالت زیر آماده‌سازی شوند:

$$|\psi_0\rangle=\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)|10\rangle+e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)|01\rangle, \qquad (۷)$$

که در آن ϑ و φ دامنه و فاز اولیه‌ی کانال می‌باشند. سپس عناصر غیر صفر ماتریس چگالی تحول یافته این سامانه که بعنوان کانال دوربری ρ_{ch} مورد استفاده قرار می‌گیرد، با استفاده از روش بیان شده در [۱۵و۱۶]، بصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\rho_{1,1}(t)&=\frac{1}{4}\left(\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\cos(\vartheta)+\alpha_1^2\alpha_2^2+1\right),\\
\rho_{1,4}(t)&=\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 e^{-i\varphi}\sin(\vartheta),\\
\rho_{2,2}(t)&=\frac{1}{4}\left(-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2\right)+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\cos(\vartheta)+1\right),\\
\rho_{3,3}(t)&=\frac{1}{4}\left(\left(\alpha_2^2-\alpha_1^2\right)\cos(\vartheta)-\alpha_1^2\alpha_2^2+1\right),\\
\rho_{4,1}(t)&=\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 e^{i\varphi}\sin(\vartheta),\\
\rho_{4,4}(t)&=\frac{1}{4}\left(-\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\cos(\vartheta)+\alpha_1^2\alpha_2^2+1\right),
\end{aligned} \qquad (۸)$$

که در اینجا فرض می‌کنیم $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$ و داریم:

$$\alpha(t)=e^{-2B^2|\beta|I_Q},\beta\equiv\frac{-4\pi}{\Gamma(Q+1)}\left(\frac{1}{\Gamma_0}\right)^{Q+1}, \qquad (۹)$$

که Γ_0 فرکانس قطع، B ضریب جفت شدگی بین مدهای مایورانا و محیط، و $\Gamma(...)$ بیانگر تابع گاما است. همچنین، اگر محیط را ابر اُهمی $Q>1$ یا زیر اُهمی $Q<1$ در نظر بگیریم، داریم:

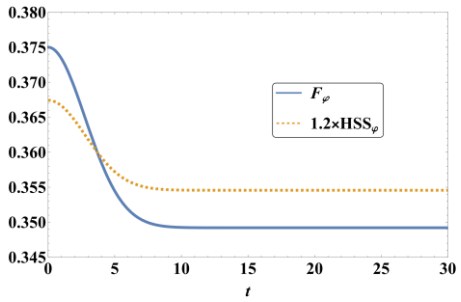
$$I_Q(t)=2\Gamma_0^{Q-1}\Gamma\left(\frac{Q-1}{2}\right)\left(1-{}_1F_1\left(\frac{Q-1}{2};\frac{1}{2};-\frac{t^2\Gamma_0^2}{4}\right)\right). \qquad (۱۰)$$

که در آن ${}_1F_1(...)$ تابع هایپرژئومتریک تعمیم یافته است.

۴. بحث و نتایج

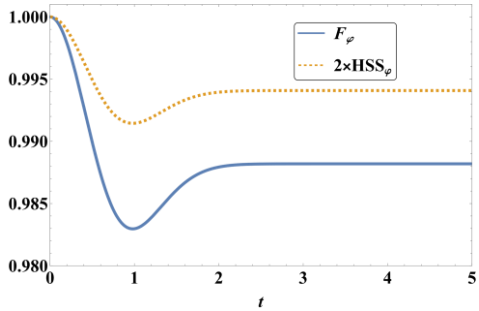
در شکل ۱، با استفاده از حالت کیوبیت دوربری شده (حالت خروجی دوربری)، دینامیک QFI و HSS، که نسبت به فاز اولیه‌ی کانال دوربری محاسبه شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته است، که به وضوح رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند. از آنجاییکه هدف ما برآورد فاز اولیه کانال می‌باشد، همانطور که پیش بینی می‌کنیم، بهترین برآورد در زمان‌های ابتدایی رخ می‌دهد. علاوه بر این، با مرور زمان، برآورد فاز سرکوب می‌شود. این بدان معنی است که با مرور زمان، اطلاعاتی که در فاز اولیه‌ی کانال دوربری، کد شده‌اند در حال کاهش می‌باشد لذا QFI نیز در حال کاهش می‌باشد. این کاهش اطلاعات به دلیل شارش اطلاعات کد شده در سامانه به محیط که ناشی از اثرات واهمدوسی می‌باشد است، زیرا QFI تحت نگاشت‌های کاملا مثبت نمی‌تواند افزایش یابد که این همان تعریف انقباضی[6] (کانتراکتیویتی) است.

[3] Markovian process
[4] non-Markovian dynamic
[5] Majorana modes
[6] contractivity



شکل ۱: مقایسه‌ی بین دینامیک‌های برآورد کوانتومی و سرعت هیلبرت–اشمیت نسبت به فاز اولیه‌ی کانال زمانیکه $\Gamma_0 = 0.5, B = 0.01, Q = 2, \vartheta = \pi/3, \varphi = \pi/2, \theta = \pi/4, \phi = \pi/2$.

در شکل ۲، نیز مقایسه‌ی بین رفتارهای زمانی QFI و HSS را نسبت به فاز اولیه‌ی کانال دوربری بررسی می‌کنیم. در بازه زمانی که مشتق زمانی QFI مثبت شده است (تقریبا بین $1<t<2$) به وضوح دینامیک غیر مارکوفی سامانه قابل مشاهده می‌باشد. از آنجاییکه QFI و HSS رفتارهای کاملا مشابهی دارند و هردو نیز سرعت آماری کوانتومی هستند، از این رو، زمانیکه HSS نسبت به فاز اولیه کانال نیز محاسبه می‌شود می‌تواند رفتار غیر مارکوفی را تشخیص دهد. افزون بر این، HSS می‌تواند زمان مناسب برای برآورد بهینه فاز اولیه کانال را نیز آشکارسازی نماید که بسیار حائز اهمیت است.



شکل ۲: مقایسه‌ی بین دینامیک‌های برآورد کوانتومی و سرعت هیلبرت–اشمیت نسبت به فاز اولیه‌ی کانال زمانیکه $\Gamma_0 = 2.5, B = 0.1, Q = 4, \vartheta = \varphi = \theta = \phi = \pi/2$.

این نتایج شبیه نتایجی می‌باشند که در مرجع [۷] هنگام مقایسه HSS و QFI وقتی هر دو نسبت به فاز حالت ورودی یک کانال کوانتومی دلخواه محاسبه می‌شدند، بدست آمدند.

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت فاز اولیه در سامانه‌های کوانتومی، در این مقاله، دو ابزار اطلاعات فیشر کوانتومی (QFI) و سرعت هیلبرت–اشمیت (HSS) به منظور کاوش فاز اولیه‌ی کانال دوربری توسط کیوبیت دوربری شده مورد پژوهش قرار گرفت. کانال دوربری توسط کیوبیت‌های توپولوژیک که توسط مدهای جدا از هم مایورانا محقق می‌شوند، تامین می‌گردد. نشان داده شد که HSS حالت سامانه دوربری شده وقتی نسبت به فاز اولیه کانال دوربری مورد محاسبه قرار می‌گیرد، می‌تواند هم رفتار غیرمارکوفی سامانه و هم بهترین زمان برای برآورد بهینه فاز مذکور را آشکارسازی نماید. نتایج این مقاله می‌تواند در بهبود فرآیندهای مبتنی بر سنجش از دور کوانتومی نظیر ناوبری، رادار، لیدار، تصویر برداری، طراحی آنتن‌ها و امنیت اطلاعات موثر واقع شود.

مرجع‌ها

[۱] S. Pirandola, J. Eisert, C. Weedbrook, A. Furusawa, and S. L. Braunstein. "Advances in quantum teleportation." *Nature photonics* **9**, no. 10 (2015): 641-652.
[۲] A., Liaqat, M. Ikram, T. Abbas, and I. Ahmad. "Teleportation of atomic external states on the internal degrees of freedom." *Quantum Information Processing* **21**, no. 2 (2022): 55.
[۳] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels." *Physical review letters* **70**, no. 13 (1993): 1895.
[۴] X. Lu, and H. Lin. "Unbiased quantum phase estimation." arXiv preprint arXiv:2210.00231 (2022).
[۵] MGA Paris. Quantum estimation for quantum technology. *International Journal of QuantumInformation* **7**, (2009):125–37.
[۶] M. Gessner, A. Smerzi, Statistical speed of quantum states: generalized quantum Fisher information and Schatten speed, *Physical Review Applied*, **97** (2018): 022109.
[۷] H. Rangani Jahromi, and R. Lo Franco. "Hilbert–Schmidt speed as an efficient figure of merit for quantum estimation of phase encoded into the initial state of open n-qubit systems." *Scientific Reports* **11**, no. 1 (2021): 7128.
[۸] G. Bowen, and S. Bose. "Teleportation as a depolarizing quantum channel, relative entropy, and classical capacity." *Physical Review Letters* **87**, no. 26 (2001): 267901.
[۹] S. L Braunstein, and C. M. Caves. "Statistical distance and the geometry of quantum states." *Physical Review Letters* **72**, no. 22 (1994): 3439.
[۱۰] Giovannetti, Vittorio, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. "Quantum metrology." Physical review letters 96, no. 1 (2006): 010401.
[۱۱] Liu J, Yuan H, Lu X-M, Wang X. Quantum Fisher information matrix and multiparameter estimation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **53**, (2019): 23001.
[۱۲] I. De Vega, and D. Alonso. "Dynamics of non-Markovian open quantum systems." *Reviews of Modern Physics* **89**, no. 1 (2017): 015001.
[۱۳] Xiao-Ming Lu, , X. Wang, and C. P. Sun. "Quantum Fisher information flow and non-Markovian processes of open systems." *Physical Review A* **82**, no. 4 (2010): 042103.
[۱۴] F. Wilczek, "Majorana returns." *Nature Physics* **5**, no. 9 (2009): 614-618.
[۱۵] Shih-Hao Ho, Sung-Po Chao, Chung-Hsien Chou, and Feng-Li Lin. "Decoherence patterns of topological qubits from Majorana modes." *New Journal of Physics* **16**, no. 11 (2014): 113062.
[۱۶] H. Rangani Jahromi. "Remote sensing and faithful quantum teleportation through non-localized qubits." *Physics Letters A* **424** (2022): 127850.

اثرات غلظت آلایش کانال در یک نانو ماسفت دو گیتی با استفاده از روش تابع گرین غیر تعادلی

مرتضی چرمی
دانشگاه صنعتی مالک اشتر
Charmi.phy@gmail.com

علی محمد نیکو
دانشگاه صنعتی مالک اشتر
alinikoo811@gmail.com

چکیده

در این تحقیق اثرات غلظت آلایش کانال نوع p برای یک ماسفت متقارن دو گیتی با طول گیت ۹ نانومتر با استفاده ازفرایند کوانتومی، شبیه سازی می شود. شبیه‌سازی‌ها مبتنی بر حل خودسازگار معادله دو بعدی پواسون و معادله شرودینگر با شرایط مرزی باز، در چارچوب تابع گرین غیرتعادلی برای طیف وسیعی از غلظت‌های الایش کانال هستند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که آلایش بالا،پارامترهای طراح نانو ماسفت را بهبود می بخشد.

کلید واژه ها : نانو ماسفت دو گیتی، تابع گرین غیر تعادلی، غلظت آلایش کانال،

The impacts of channel doping concentration on nano DG-MOSFETs by the non-equilibrium Green's function method

Morteza, charmi[1]; Ali Mohamd, Niku[2]

[1] *Department of Quantum, University of malek Ashtar university of Technology, Isfahan*
[2] *Department of Crystal Growth, , University of malek Ashtar university of Technology, Isfahan*

Abstract

This paper presents the effects of p-type body doping concentration on a symmetric double-gate MOSFET with 9 nm gate length, using full quantum simulation. The simulations are based on self-consistent solution of 2D Poisson equation and Schrödinger equation with open boundary conditions, within the non-equilibrium Green's function formalism for a wide range of channel doping concentrations The simulation results show that the higher body doping improves the nano parameters of the MOSFETs .

key words: double-gate MOSFET, non-equilibrium Green's function, channel doping concentrations

مقدمه

در سال ۱۹٦٥ آقای گوردن مور که یکی از موسسین شرکت معروف اینتل می باشد نظریه ای را اعلام کرد که به ازای هر دو سال تعداد ترانزیستورهای یک چیپ باید دو برابر شود. این نظریه به قانون موردر صنعت نیمرسانا معروف شد [1]. این نظریه عملی شده و ماسفت ها از نظر ابعادی از طول گیت حدود ۱۰ میکرومتردر سال ۱۹٦٥ به طول گیت ٦ نانومتر در سال ۲۰۲۱ کاهش یافته اند.

با ادامه کوچک سازی ابعاد ماسفت در مقیاس نانو، جریانهای نشتی نیز از سورس به درین و از گیت به کانال افزایش می یابند. افزایش جریان های نشتی باعث افزایش ولتاژ آستانه، افزایش میدان الکتریکی داخل ماسفت و افزایش اثرات کانال کوتاه در ترانزیستور می شود. برای جلوگیری از این اثرات پارامترهای متفاوتی [٦-۲] را در نانو ماسفت ها تغییر می دهند از جمله این تغییرات استفاده از آلایش های متفاوت در ناحیه کانال ماسفت می باشد که در این تحقیق به آن پرداخته شده است.

برای شبیه سازی یک نانو ماسفت دو گیتی، معادله دو بعدی پواسون کوپل شده با معادلات ترابرد بالیستیکی (شرودینگر) را با استفاده از روش مشهور تابع گرین غیر تعادلی [۷–۸]، حل می کنیم. حلقه شبیه سازی شامل دو مجموعه شامل حل معادله پواسون برای بدست آوردن پروفایل پتانسیل و حل معادله ترابرد برای بدست آوردن توزیع بار و جریان ماسفت می باشد.

روش حل تابع گرین غیر تعادلی

معادله پواسون را می توان بصورت زیر نوشت

$$\oiint [\varepsilon \vec{E}(x,z)].d\vec{S} = \int_{\Omega} q[p - n + N_D - N_A]\, d\Omega \qquad (۱)$$

که درآن E میدان الکتریکی، p غلظت حفره ها (برای ماسفت فوق العاده باریک کاملا تهی نوع n می توان از p چشمپوشی کرد) n غلظت الکترونها، N_D و N_A غلظت دهنده ها و پذیرنده ها، q بار الکتریکی و ε ثابت دی الکتریک می باشد. برای اتصالات گیت از شرایط مرزی دریکله[1] استفاده می کنیم. پتانسیل در ناحیه گیت، V_G از ولتاژ گیت و تابع کار مواد اتصالی گیت بدست می آید. برای اتصالات سورس و درین شرایط مرزی نویمن[2] را در نظر می گیریم. این شرط مرزی اجازه می دهد که مقدار پتانسیل سورس و درین شناور باشد تا شرایط بار خنثی در ناحیه اتصالات بدست آید. برای سایر مرزهای بدون اتصالات الکترودی از شرط مرزی میدان الکتریکی صفر استفاده می شود.

با حل تابع گرین می توان چگالی الکترونی در داخل افزاره و جریان در ترمینالهای افزاره را بدست آورد. تحت شرایط بالستیکی روش تابع گرین از نظر محاسباتی معادل با حل معادله شرودینگر با شرایط مرزی باز می باشد. ابتدا معادله شرودینگر در راستای z را در یک مش بندی دو بعدی بصورت زیر می نویسیم.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_z^*}\frac{d^2}{dz^2}\psi_i(x,z) - qV(x,z)\psi_i(x,z) = E_i(x)\psi_i(x,z) \qquad (۲)$$

که در آن m_z^* جرم موثر الکترون در راستای z ، $\psi_i(x,z)$ تابع موج و $E_i(x)$ ویژه مقدار انرژی برای زیر نوار[3] i ام می باشد. به دلیل محصور شدگی کوانتومی[4] در راستای z ویژه مقادیر انرژی به ترازهای گسسته انرژی زیر نواری تبدیل می شوند. برای زیرنوار iام می توان تابع گرین تاخیری را برای ترابرد یک بعدی بصورت زیر نوشت.

$$G(E) = [E_i I - H[E_i(x)] - \Sigma]^{-1} \qquad (۳)$$

در عبارت بالا E_i انرژی طولی و جمله سوم رابطه بالا، Σ ماتریس خود– انرژی[5] است. حال یک کمیت جدید را بر حسب ماتریس های خود– انرژی بصورت زیر معرفی می کنیم.

$$\Gamma_s = i(\Sigma_s - \Sigma_s^{+}), \Gamma_D = i(\Sigma_D - \Sigma_D^{+}) \qquad (٤)$$

کمیت بالا میزان تبادل الکترون بین اتصالات سورس و درین را با کانال مشخص می کند. اما در حالت کلی تر این کمیت هر گونه بر همکنش اختلالی (بعلاوه اثرات پراکندگی) در ناحیه فعال را مشخص می کند که آنرا تابع پهن شدگی[6] می نامیم اگرچه ممکن است افزاره خود در یک حالت غیر تعادلی باشد اما الکترونها از منبع تعادلی سورس و درین تزریق می شوند. کمیت دیگری بنام توابع طیفی[7] را برای اتصالات سورس و درین بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$A_s = G\Gamma_s G^{+}, A_D = G\Gamma_D G^{+} \qquad (٥)$$

تابع طیفی مربوط به سورس طبق انرژی فرمی در اتصال سورس پر می شود و تابع طیفی مربوط به درین طبق انرژی فرمی در اتصال درین پر می شود. اندازه همه ماتریسها یکسان و برابر با ماتریس هامیلتونی می باشد. حال با توجه به روابط بالا، ماتریس چگالی الکترونی دو بعدی را می توان مطابق معادله (٦) بدست آورد.

$$n_i(E_l) = \frac{1}{h\,a}\sqrt{\frac{m_y^* k_B T}{2\pi^3}}\left[\Im_{-1/2}(\mu_s - E_l)A_s + \Im_{-1/2}(\mu_D - E_l)A_D\right] \qquad (٦)$$

جملات اول و دوم در رابطه بالا انتگرال های فرمی مرتبه ½ می باشند که برای هر نانوساختار دو بعدی قابل استفاده می شود. برای بدست آوردن چگالی الکترونی کلی باید از معادله بالا روی E_l انتگرال گیری کنیم. سپس روی همه زیر نوارها و همه دره های

[1] Dirichlet Boundary Condition
[2] Neumann Boundary Condition
[3] Subband
[4] Quantum Confinement
[5] Self-Energy
[6] Broadening Function
7 Spectral Function

باند هدایت جمع ببندیم. در نهایت چگالی الکترونی سه بعدی را می توان از حاصلضرب ماتریس چگالی دو بعدی در هر گره طولی شبکه با تابع موج خاص خودش یعنی $|\Psi_i(x,z)|^2$ بدست آورد.

بنابر این، با استفاده از روش تابع گرین و یک پتانسیل فرضی برای هامیلتونی، می توان چگالی حاملها یعنی n را بدست آورد. حال به سراغ معادله پواسون می رویم و با جایگذاری n بدست آمده در آن، می توان یک پتانسیل جدید بدست آورد. حال با بدست آوردن انرژی پتانسیل جدید دوباره آن را در هامیلتونی تابع گرین قرار میدهیم تا چگالی الکترونی جدید n را بدست آوریم و آنقدر این کار را تکرار می کنیم تا به یک جواب دقیق برای هر دو برسیم که به این روش حل خود–سازگاری[8] گویند. حال با داشتن چگالی الکترونی دقیق می توان جریان را بصورت تابعی از ضریب انتقال بدست آورد. ضریب انتقال از سورس به درین را می توان بصورت زیر نوشت.

$$T_{SD} = Trace[\Gamma_S G \Gamma_D G^+] \qquad (۷)$$

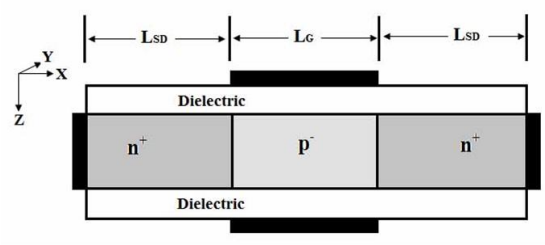
و در نهایت با داشتن ضریب انتقال می توان جریان سورس به درین را بصورت زیر نوشت.

$$I(E_l) = \frac{q}{h^2}\sqrt{\frac{m_y^* k_B T}{2\pi^3}}\left[\mathfrak{I}_{-1/2}(\mu_s - E_l) - \mathfrak{I}_{-1/2}(\mu_D - E_l)\right] T_{SD}(E_l) \qquad (۸)$$

جریان کلی نیز با انتگرال گیری روی E_l و جمع روی همه زیرنوارها و دره ها بدست می آید.

ساختار نانو ماسفت دو گیتی و شرح نتایج

ساختار نانو ماسفت دوگیتی مورد مطالعه بصورت شکل ۱ و مقادیر پارامترهای مورد نظر در جدول ۱ نشان داده شده اند.

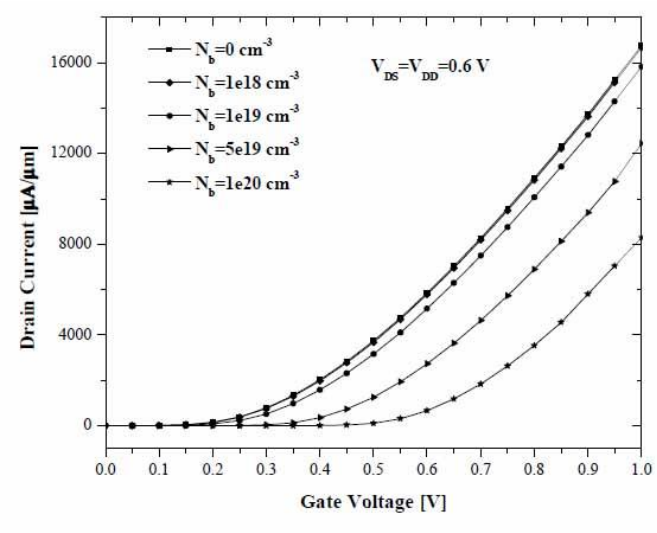


شکل ۱ : ساختار نانو ماسفت دو گیتی

جدول ۱ : مقادیر پارامترهای مربوط به نانو ماسفت دو گیتی

Device parameters	Value
Thickness of body: t_{body} [nm]	2
Equivalent oxide thickness: EOT [nm]	0.5
Source/Drain length: L_{SD} [nm]	7.5
Gate length: L_g [nm]	9
Source/Drain doping concentration: N_{SD} [cm^{-3}]	2×10^{20}
Power supply voltage: V_{dd} [V]	0.6
Gate work function: ϕ [eV]	4.20
Ambient temperature: T [K]	300

شکل ۲ جریان درین برای آلایش های مختلف ناحیه کانال، به عنوان تابعی از ولتاژ گیت را نشان می دهد. مشخص است که با افزایش چگالی آلایش در ناحیه کانال ولتاژ آستانه افزایش و جریان درین کاهش می یابد.

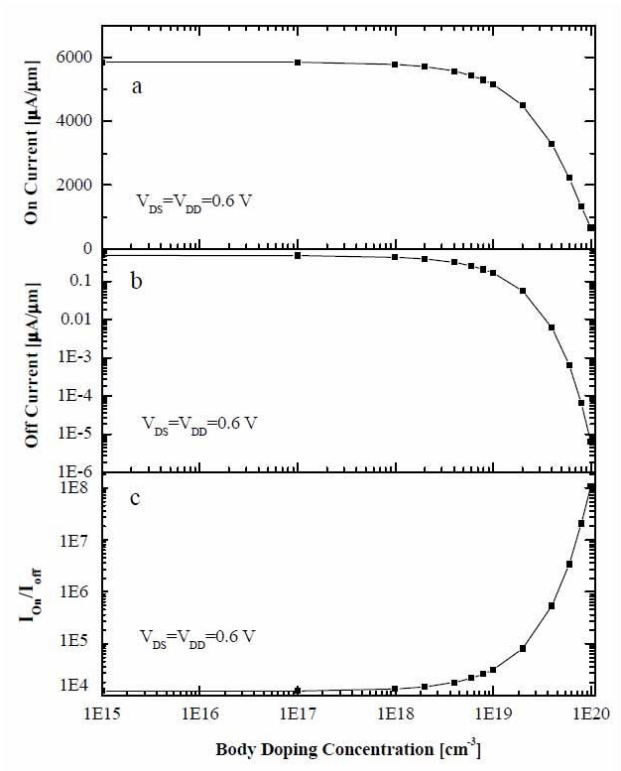


شکل۲ : جریان درین برحسب ولتاژ گیت به ازای ولتاژ درین ثابت

با افزایش آلایش کانال، ارتفاع سد پتانسیل افزایش می یابد، بنابراین جریان روشن کاهش می یابد. برای یک ولتاژ گیت ثابت، غلظت آلایش کانال ارتفاع سد پتانسیل را کنترل می کند. واضح است که با افزایش غلظت آلایش در کانال p، وارونگی الکترون

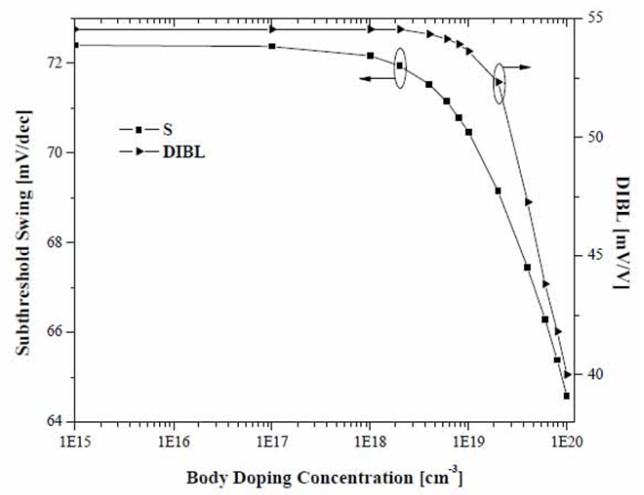
[8] Self-Consistent

ضعیف است. بنابراین جریان روشن کاهش می یابد. کاهش از $N_b= 1\times e^{19}\ cm^{-3}$ به $1\times e^{20}\ cm^{-3}$ چشمگیر است، همانطور که در شکل ٦ (a) نشان داده شده است. در ناحیه زیرآستانه (کوچکتر از ولتاژ آستانه) با افزایش غلظت الایش کانال، جریان زیرآستانه کاهش می یابد و بنابراین جریان خاموش کاهش می یابد و در شکل ٦ (b) نشان داده شده است. در مقیاس لگاریتمی برای $N_b = 1\times e^{20}\ (cm^{-3})$، جریان خاموش به صفر کاهش می یابد که بسیار در طراحی نانو ماسفت ها لازم است که جریان خاموشی صفر شود. شکل ٦ (c) نیز پارامتر مهم جریان روشن به جریان خاموش را نشان می دهد و مشخص است که با افزایش غلظت الایش کانال، این نسبت افزایش می یابد که دارای الایش آستانه مشخص نیز می باشد.



شکل۳ : (a) جریان روشن، (b) جریان خاموش و (c) نسبت این دو پارامتر

دو پارامتر نوسانات زیر آستانه (S) و کاهش سد القایی درین (DIBL) در طراحی نانو ماسفتها بسیار با اهمیت می باشند. در شکل ٤ این دو پارامتر به ازای غلظت کانال رسم شده است. مشخص است که این دو پارامتر در غلظت های بالا کاهشی می باشند که باعث بهبود عملکرد افزاره در مقیاس های زیر ۱۰ نانو متر می باشد.



شکل۳ : پارامتر نوسانات زیر آستانه و پارامتر کاهش سد القایی درین DIBL بر حسب آلایش کانال

نتیجه گیری

با استفاده از جفت شدگی معادله پواسون با تابع گرین غیر تعادلی به روش حل خودسازگار می توان افزاره های در مقیاس نانو را شبیه سازی و طراحی کرد. در افزاره ذکر شده مشخص شده است که با افزایش غلظت الایش کانال، اثرات کانال کوتاه (پارامترهای S و DIBL) بهبود می یابند و از اتصال کوتاه شدن در مقیاس نانو جلوگیری می کند

مرجع‌ها

[1] G. E. Moore, “Cramming more components onto integrated circuits, Electronics”, 38 (1956) 114–117.
[2] A. A. Orouji, H. R. Mashayekhi, M. Charmi, “Design considerations of source and drain regions in nano double gate MOSFETs”, Materials Science in Semiconductor Processing 15 (2012) 572–577
[3] M. Charmi, A. A. Orouji, H. R. Mashayekhi, “Design considerations of underlapped source/drain regions with the Gaussian doping profile in nano-double-gate MOSFETs: A quantum simulation”, Materials Science in Semiconductor Processing 16 (2013) 311–317
[4] M. Charmi, “Impact of channel thickness on the relocation of valleys in nano silicon and germanium DG-MOSFETs with alternative wafer orientation”, Chinese Journal of Physics 54 (2016) 463e470
[5] M. Charmi, A. A. Orouji, H. R. Mashayekhi, The impact of high-k gate dielectric and FIBL on performance of nano DG-MOSFETs with underlapped source/drain regions”, J Comput Electron 13 (2014) 307–312
[6] M. Charmi, “Novel attributes and design considerations of effective oxide thickness in nano DG MOSFETs”, Chin. Phys. B 24 (2015) 047302
[7] S. Datta, “Quantum Transport: Atom to Transistor”, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005)
[8] S. Datta, “Nanoscale device modeling: Green’s function method”, Superlattices Microstruct. 28 (2000) 253–277

تقویت چلاندگی در پرتوهای خروجی یک تقویت‌کننده پارامتری تبهگن با رهیافت حالت‌های همدوس غیرخطی

آزاده نوری
گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد
a.noury@stu.yazd.ac.ir

محمدکاظم توسلی
گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد
mktavassoly@yazd.ac.ir

چکیده

در این مقاله یک تقویت‌کننده پارامتری تبهگن در نظر گرفته شده و پاسخ آن به نور همدوس استاندارد و نور همدوس غیرخطی بررسی و مقایسه شده است. ویژگی‌های غیرکلاسیکی پرتوهای خروجی این سامانه نظیر چلاندگی مرتبه اول و دوم و آمار فوتونی، به‌ویژه با رهیافت حالت همدوس غیرخطی بررسی و با حالت خطی مقایسه شد. طبق محاسبات انجام شده برای هر دو حالت همدوس خطی و غیرخطی، پرتوها دارای چلاندگی مرتبه اول در کوادراتور مکان و چلاندگی مرتبه دوم در کوادراتور تکانه هستند. با این‌که با در نظر گرفتن حالت همدوس غیرخطی چلاندگی به مراتب قوی‌تر می‌شود، آمار فوتونی در هر دو مورد فراپواسونی است.

کلیدواژه‌ها: تقویت‌کننده پارامتری تبهگن، رهیافت حالت همدوس غیرخطی، چلاندگی، آمار فوتونی.

The amplification of squeezing in the output beams from a degenerate parametric amplifier based on the nonlinear coherent state approach

Noury, Azadeh; Tavassoly, Mohammad Kazem

Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd,

Abstract

In this paper a degenerate parametric amplifier has been considered and it's response to the standard coherent light and the nonlinear coherent light has been investigated and compared to each other. The nonclassical properties of the output beams from this system such as the first and the second order squeezing and the photon statistics are particularly investigated based on the nonlinear coherent state approach and compared to the linear coherent state approach. According to the calculations done for both of the linear and the nonlinear coherent states, the beams are squeezed in the first order in position quadrature and are squeezed in the second order in momentum quadrature. While the squeezing gets rather stronger considering the nonlinear coherent state, the photon statistics are super-Poissonian in both cases.

Keywords: Degenerate parametric amplifier, Nonlinear coherent state approach, Squeezing, Photon statistics.
PACS No. (32)

مقدمه

در اپتیک غیرخطی، پاسخ یک محیط غیرخطی نسبت به پرتوهای با شدت بالا مورد بررسی قرار می‌گیرد. این برهم‌کنش‌ها می‌تواند منجر به تولید حالت‌های غیرکلاسیکی تابش الکترومغناطیسی موسوم به حالت‌های چلانده شود [1] که کاربردهای وسیعی در زمینه محاسبات و اطلاعات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی، آشکارسازی فوتون و تقویت بدون نویز دارند. یکی از دلایل اهمیت بالای این حالت‌ها که باعث انجام کارهای نظری و آزمایشگاهی زیادی در این زمینه شده این است که نویزی که به سامانه وارد می‌کنند از حالت همدوس و خلا هم کم‌تر است [2].

یکی از منابع تولید حالت چلانده برهم‌کنش یک لیزر با شدت بالا با تقویت‌کننده پارامتری تبهگن است. این فرایند در مرجع [1] با ورودی حالت همدوس استاندارد به یک محیط اپتیکی (تقویت‌کننده پارامتری تبهگن) انجام شده است. از سوی دیگر، یکی از تعمیم‌های مهم حالت‌های همدوس استاندارد، حالت‌های همدوس غیرخطی است[4,5] . در مرجع [6] نحوه تولید آزمایشگاهی حالت همدوس غیرخطی با تزریق اتم‌های سه‌ترازی به یک مشدد با میدان دومدی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله بر آنیم تا یک حالت همدوس غیرخطی با تابع غیرخطیت خاصی که در مرجع [3] معرفی شده است را جایگزین حالت همدوس در مرجع [1] کنیم و حالت‌های چلانده خروجی‌های آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. پس از محاسبه افت‌وخیز کوادراتورهای مکان و تکانه و تابع همبستگی مرتبه دوم، چلاندگی مرتبه اول و دوم و آمار فوتونی آن‌ها را در دو حالت در نظر گرفته شده مقایسه کرده‌ایم.

توصیف سامانه

در یک تقویت‌کننده پارامتری تبهگن، موج پمپ به صورت یک پرتو همدوس قوی با یک محیط غیرخطی برهم‌کنش کرده و منجر به تولید دو پرتو سیگنال و سرگردان می‌شود. هامیلتونی برهم‌کنش چنین سامانه اپتیکی در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر است:

$$V=\hbar\kappa(a^{\dagger 2}b+a^{2}b^{\dagger}), \qquad (1)$$

که در آن b و a به ترتیب عملگرهای نابودی موج پمپ و سیگنال را نشان می‌دهند، $b^{\dagger}$ و $a^{\dagger}$ همیوغ هرمیتی آن‌ها هستند و κ ثابت جفت‌شدگی وابسته به پذیرفتاری غیرخطی مرتبه دوم است. در تقریب پارامتری، موج پمپ به قدری قوی است که می‌توان به صورت کلاسیکی با آن برخورد کرد $(b=\beta_p e^{-i\varphi})$، بنابراین از رابطه (1) خواهیم داشت:

$$V=\hbar\kappa(a^{\dagger 2}\beta_p e^{-i\varphi}+a^{2}\beta_p e^{i\varphi}), \qquad (2)$$

که در آن φ و β_p به ترتیب فاز و دامنه موج پمپ هستند. با حل معادله حرکت هایزنبرگ داریم:

$$a(t)=a_0\cosh(\Omega_p t)-ia_0^{\dagger}\sinh(\Omega_p t)e^{-i\varphi}, \qquad (3)$$

$$a^{\dagger}(t)=a_0^{\dagger}\cosh(\Omega_p t)+ia_0\sinh(\Omega_p t)e^{i\varphi}, \qquad (4)$$

که در آن $\Omega_p=2\kappa\beta_p$، $a_0=a(t=0)$ و $a_0^{\dagger}=a^{\dagger}(t=0)$ است. کوادراتورهای مکان و تکانه میدان (مرتبه اول) به صورت زیر تعریف می‌شوند [2]:

$$x_1=\frac{a+a^{\dagger}}{2}, \qquad x_2=\frac{a-a^{\dagger}}{2i}. \qquad (5)$$

شرط چلاندگی مرتبه اول را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_{x_i}=\frac{2\langle(\Delta x_i)^2\rangle-\left|\langle[x_1,x_2]\rangle\right|}{\left|\langle[x_1,x_2]\rangle\right|},\ (i=1,2),\ -1\le s_{x_i}<0. \qquad (6)$$

با فرض این که در ابتدا میدان در حالت خلا بوده و فاز پمپ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ باشد، برای حالت خطی داریم:

$$S_{x_1}=\exp[-2\Omega_p t]-1,\ \ S_{x_2}=\exp[2\Omega_p t]-1. \qquad (7)$$

حال اگر به‌جای عملگر نابودی a عملگر نابودی تغییرشکل‌یافته A (حالت همدوس غیرخطی [3]) را قرار دهیم داریم:

$$A=a\sqrt{1+\frac{\chi}{2\omega_a}n_b}\ \rightarrow\ A^{\dagger}=\sqrt{1+\frac{\chi}{2\omega_a}n_b}\ a^{\dagger}, \qquad (8)$$

که در آن $\alpha=\frac{\chi}{2\omega_a}$، ω_a بسامد پرتو سیگنال، $n_b=b^{\dagger}b$ و χ ضریب برهم‌کنش غیرخطی است. با در نظر گرفتن $\varphi=\frac{\pi}{2}$ و با تعمیم رابطه (2) خواهیم داشت:

$$V=\hbar\kappa(A^{\dagger 2}\beta_p e^{-i\varphi}+A^{2}\beta_p e^{i\varphi}). \qquad (9)$$

با حل معادله حرکت هایزنبرگ داریم:

$$A(t)=A_0\cosh[\Omega_p t(1+\alpha n_b)]-A_0^{\dagger}\sinh[\Omega_p t(1+\alpha n_b)], \qquad (10)$$

$$A^{\dagger}(t)=A_0^{\dagger}\cosh[\Omega_p t(1+\alpha n_b)]-A_0\sinh[\Omega_p t(1+\alpha n_b)]. \qquad (11)$$

که در آن $A_0=A(t=0)$ و $A_0^{\dagger}=A^{\dagger}(t=0)$ است. حال کوادراتورهای مکان و تکانه را بر اساس عملگر بوزونی تغییرشکل یافته (حالت همدوس غیرخطی) دوباره تعریف می‌کنیم:

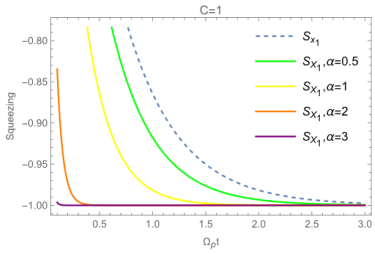
$$X_1=\frac{A+A^{\dagger}}{2}, \qquad X_2=\frac{A-A^{\dagger}}{2i}. \qquad (12)$$

با انجام محاسبات بر اساس رابطه (6) داریم:

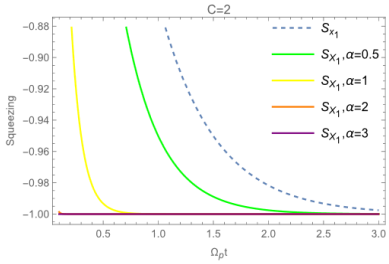
$$s_{X_1}=exp[-2\Omega_p t(1+\alpha\beta_p^{\ 2})]-1, \qquad (13)$$

$$s_{X_2}=exp[2\Omega_p t(1+\alpha\beta_p^{\ 2})]-1. \qquad (14)$$

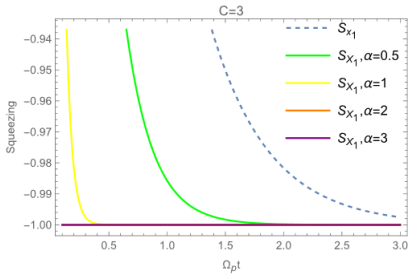
در این جا نیز شرط چلاندگی به صورت $-1 \le S_{X_i} < 0$ (i=1,2) است. در ادامه نمودارهای مربوط را با در نظر گرفتن $\frac{\beta_p}{\alpha} = C$ برای مقادیر مختلف نسبت این دو پارامتر رسم می‌کنیم.



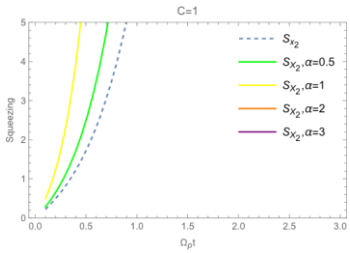
شکل 1: پارامتر چلاندگی مرتبه اول برای کوادراتور مکان در هر دو حالت غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) و خطی (منحنی خط‌چین) به ازای $C=1$.



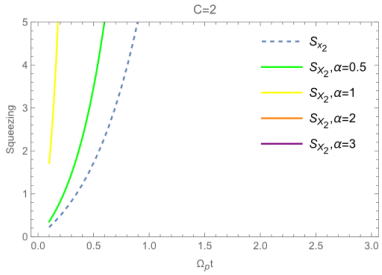
شکل 2: پارامتر چلاندگی مرتبه اول برای کوادراتور مکان در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=2$.



شکل 3: پارامتر چلاندگی مرتبه اول برای کوادراتور مکان در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=3$.



شکل 4: پارامتر چلاندگی مرتبه اول برای کوادراتور تکانه میدان در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=1$.



شکل 5: پارامتر چلاندگی مرتبه اول برای کوادراتور تکانه میدان در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=2$.

شکل‌های 3-1 نشان می‌دهد که چلاندگی مرتبه اول در کوادراتور مکان رخ می‌دهد و با تبدیل حالت خطی به غیرخطی میزان این چلاندگی افزایش یافته است.

چلاندگی مرتبه دوم

برای بررسی چلاندگی مرتبه دوم، کوادراتورهای مکان و تکانه تعمیم‌یافته برای حالت خطی به این صورت تعریف می‌شوند:

$$x_1' = \frac{a^2 + a^{\dagger 2}}{2}, \qquad x_2' = \frac{a^2 - a^{\dagger 2}}{2i}. \tag{15}$$

با انجام محاسبات بر اساس رابطه (6) خواهیم داشت:

$$S_{x_1'} = \cosh(2\Omega_p t) - 1, \quad S_{x_2'} = \mathrm{sech}(2\Omega_p t) - 1. \tag{16}$$

اگر کوادراتورهای مکان و تکانه تعمیم‌یافته را برای حالت غیرخطی به صورت زیر تعریف کنیم:

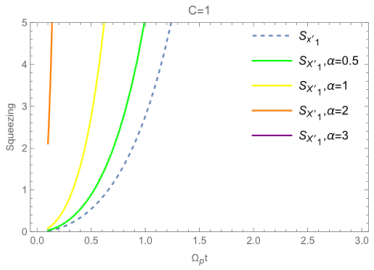
$$X_1' = \frac{A^2 + A^{\dagger 2}}{2}, \qquad X_2' = \frac{A^2 - A^{\dagger 2}}{2i}. \tag{17}$$

با انجام محاسبات بر اساس رابطه (6) خواهیم داشت:

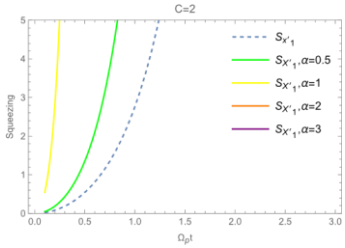
$$S_{X_1'} = \cosh[-2\Omega_p t(1+\alpha\beta_p{}^2)] - 1, \tag{18}$$

$$S_{X_2'} = \mathrm{sech}[2\Omega_p t(1+\alpha\beta_p{}^2)] - 1. \tag{19}$$

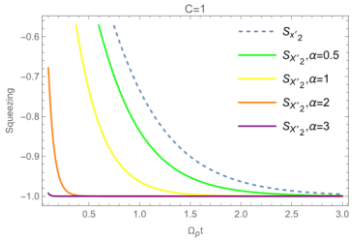
برای مقایسه دو حالت به نمودارهای زیر توجه می‌کنیم:



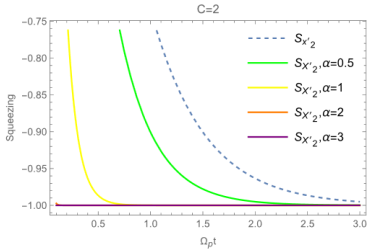
شکل 6: چلاندگی مرتبه دوم برای کوادراتور مکان تعمیم‌یافته در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی، (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=1$.



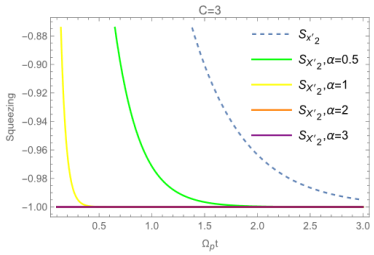
شکل7: چلاندگی مرتبه دوم برای کوادراتور مکان تعمیم‌یافته در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=2$.



شکل8: چلاندگی مرتبه دوم برای کوادراتور تکانه تعمیم‌یافته در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=1$.



شکل9: چلاندگی مرتبه دوم برای کوادراتور تکانه تعمیم‌یافته در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=2$.



شکل 10: چلاندگی مرتبه دوم برای کوادراتور تکانه تعمیم‌یافته در هر دو حالت خطی (منحنی خط‌چین) و غیرخطی (منحنی‌های پیوسته) به ازای $C=3$.

طبق شکل‌های 10–8 چلاندگی مرتبه دوم برای کوادراتور تکانه میدان رخ می‌دهد و با تبدیل عملگر بوزونی به بوزونی تغییرشکل‌یافته، چلاندگی بیش‌تر شده به نحوی که با افزایش مقدار α و C پارامتر چلاندگی به -1 (بیشینه ممکن چلاندگی) نیز نزدیک می‌شود (چلاندگی صد در صد [2]). حالت‌هایی که چلاندگی مرتبه دوم دارند می‌توانند در کاهش نویز خروجی ابزارهای اپتیک غیرخطی موثر باشند[7].

آمار فوتونی

برای بررسی آمار فوتونی تابع $g^2(0)$ برای عملگر نابودی a و عملگر نابودی تغییرشکل‌یافته A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g^2{}_a(0)=\frac{\langle a^{\dagger 2}a^2\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2},\qquad g^2{}_A(0)=\frac{\langle A^{\dagger 2}A^2\rangle}{\langle A^\dagger A\rangle^2}. \tag{20}$$

با انجام محاسبات برای حالت‌های همدوس خطی و غیرخطی به روابط زیر می‌رسیم:

$$g^2{}_a(0)=2+\coth^2[\Omega_p t], \tag{21}$$

$$g^2{}_A(0)=2+\coth^2[\Omega_p t(1+\alpha\beta_p{}^2)]. \tag{22}$$

از آن جا که $\Omega_p t$ و $\Omega_p t(1+\alpha\beta^2)$ همیشه مثبت هستند، بنابراین تابع کتانژانت هایپربولیک بزرگ‌تر از یک می‌شود، در نتیجه هر دو حالت ذکرشده از آمار فوتونی فراپواسونی پیروی می‌کنند.

نتیجه‌گیری: نشان دادیم که برای هر دو حالت خطی و غیرخطی چلاندگی مرتبه اول برای کوادراتور مکان و چلاندگی مرتبه دوم برای تکانه رخ می‌دهد و با افزایش C و α، پارامتر چلاندگی به بیشینه خود نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین وقتی به جای حالت خطی، حالت غیرخطی را در نظر می‌گیریم چلاندگی تقویت می‌شود. از آن جا که $g^2(0)$ در هر دو حالت خطی و غیرخطی بیش‌تر از 1 است حالت‌های مورد مطالعه از آمار فراپواسونی پیروی می‌کنند.

مرجع‌ها

[1] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, San Diego (Academic Press, 2008).

[2] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997).

[3] M. Momeni-Demneh, A. Mahdifar and R. Roknizadeh, Nonlinear optical effects on the atom-field interaction based on the nonlinear coherent statas approach, *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**, 39, 1353-1363 (2022).

[4] M. K. Tavassoly, R. Roknizadeh, The construction of some important classes of generalized coherent states: the nonlinear coherent states method, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**, 37 (2004).

[5] G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria. V. I. Man'ko, f-Oscillators and nonlinear coherent states, *Phys. Scr.* **55,** 528-541 (1996).

[6] B. Deb, G. Gangopadhyay and D. S. Ray, Generation of a class of arbitrary two-mode field states in a cavity, *Phys. Rev. A*, **51**, 2651-2653 (1995).

[7] M. Hillery, Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field, *Phys. Rev. A*, **8**, 36 (1987).

ترابرد کوانتومی در اتصال فرومغناطیس – نرمال – فرومغناطیس بوروفین

حسین گل فشان
دانشجوی کارشناسی ارشد علوم و فناوری نانو دانشگاه کاشان
Hosseingolfeshanu۲۳۸@gmail.com

حسین نیکوفرد
استاد مدعو پژوهشکده نانو دانشگاه کاشان
hossein.nikoofard@gmail.com

نرگس نیکوفرد
استادیار پژوهشکده نانو دانشگاه کاشان
nikoofard@kashanu.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی ترابرد اسپینی و درهای الکترون ها در اتصال فرومغناطیس-نرمال-فرومغناطیس تک لایه بوروفین ۸-pmmn می‌پردازیم. به ناحیه نرمال یک پتانسیل دریچه و به پایانه ها دو میدان تبادلی، از طریق زیرلایه فرومغناطیس، اعمال می شود. با رسم نمودارهای احتمال عبور و قطبش؛ مشاهده می‌شود که اعمال میدان مغناطیسی تبادلی باعث ایجاد قطبش اسپینی در الکترون های عبوری می‌گردد. در این سیستم افزایش بردار موج عرضی باعث افزایش بازه انرژی فرمی با قطبش کامل اسپینی می شود. همچنین اعمال پتانسیل دریچه موجب جداسازی دره ها از یکدیگر شده که این یکی از مزایای تک لایه بوروفین در مقایسه با تک لایه گرافین است. زیرا در گرافین برای شکافت دره ها نیاز به اعمال کرنش در سیستم است. به طور خلاصه، در این سیستم ما می توانیم قطبش اسپینی و دره‌ای را با تغییر انرژی فرمی یا اندازه سد پتانسیل کنترل کنیم. لذا تک لایه بوروفین قابلیت خوبی برای استفاده در ادوات اسپینترونیکی و ولیترونیکی داشته و می تواند به عنوان فیلتر دره و اسپین مفید باشد.

کلید واژه ها :

ترابرد کوانتومی، تک لایه بوروفین، فیلتر اسپینی، نانو الکترونیک

Golfeshan, Hossein; Nikoofard, Hossein; Nikoofard, Narges

Institute of Nanoscience and Nanotechnology, University of Kashan, Kashan

Abstract

In this paper, we investigate the spin and valley transport of electrons in the ferromagnetic-normal-ferromagnetic junction of the ۸-pmmn borophene monolayer. A gate potential is applied to the normal region and two exchange fields are applied to the terminals via the ferromagnetic substrate. By plotting the transmission probability and polarization, we observe exchange magnetic field causes spin polarization in transmitted electrons. In this system, increasing the transverse wave vector increases the Fermi energy range with fully spin polarization. Also, applying the gate potential causes the valleys to be separated from each other, which is one of the advantages of borophene monolayer compared to graphene monolayer. Because in graphene, it is necessary to apply strain to the system to split the valleys. In this system, we can control the spin and valley polarization by changing the Fermi energy or the size of the potential barrier. Therefore, borophene monolayer has a good ability to be used in spintronic and valleytronic devices and can be useful as a valley and spin filter.

key words Quantum transport, Borophene monolayer, Spin filter, Nanoelectronic

مقدمه

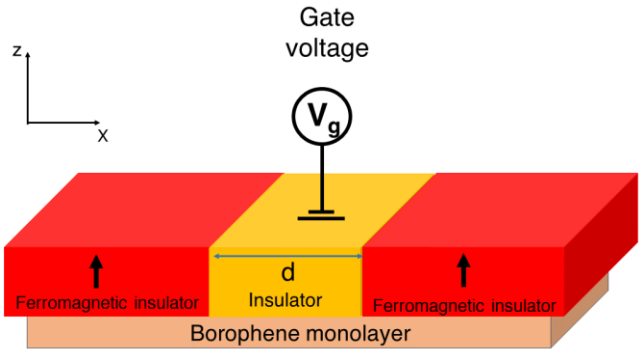
بعد از تهیه موفقیت‌آمیز اولین ماده تک لایه دو بعدی (گرافین)[۱]، مواد گروه IV مانند سیلیسین[۲]، ژرمانین [۳] و استانین[٤]، سنتز و پیش بینی شده‌اند. همچنین دی کالکوژنیدهای فلز واسطه و مواد تک لایه دو بعدی گروه V شامل فسفرین، آرسنین و آنتی مونین نیز در آزمایشگاه و محاسبات تئوری به طور گسترده‌ای مورد تحقیق قرار گرفتند. مواد دو بعدی به دلیل خواص منحصر به فردشان مانند ساختار نواری خطی نزدیک به سطح فرمی، رسانایی الکتریکی و حرارتی بالا، سختی آن‌ها، ویژگی‌های نوری و ترابرد الکترونی حائز اهمیت می‌باشند. لذا برای استفاده در ادوات نانوالکترونیکی، ذخیره انرژی، انتقال اطلاعات و کامپیوترهای کوانتومی مفید خواهند بود. اخیراً مواد تک لایه دو بعدی گروه III شامل بوروفین با فازهای مختلف به طور گسترده مورد توجه قرار گرفته است [٥,٦].

این ماده به علت ناهمسانگردی ساختاری و داشتن مخروط‌های دیراک کج شده خواص مکانیکی، حرارتی، الکترونیکی، نوری و ابررسانایی خوبی از خود نشان داده است. همچنین بوروفین دارای کاربردهای بالقوه‌ای در زمینه باتری‌های یون فلز قلیایی، باتری‌های لیتیومی، ذخیره‌سازی هیدروژن، ابرخازن، حسگر و کاتالیزور در تکامل هیدروژن و تکامل اکسیژن می‌باشد [۷].

با توجه به اهمیت فیزیک کوانتوم در بررسی خواص الکترونی ساختارها در مقیاس اتمی، در مقاله حاضر، به مطالعه ترابرد کوانتومی الکترون ها در بوروفین pmmn-۸ که دارای ۸ اتم در سلول واحد خود است می‌پردازیم. این ماده دارای انعطاف پذیری فوق العاده، هدایت حرارتی شبکه کم، مخروط دیراک ناهمسانگرد و شفافیت عالی است. یک اتصال فرومغناطیس–نرمال– فرومغناطیس از این ماده را به عنوان سیستم مدنظر قرار می‌دهیم که تحت تاثیر اختلال های خارجی از جمله پتانسیل دریچه و میدان مغناطیسی تبادلی قرار می گیرد. با رسم نمودارهای احتمال عبور و قطبش، به بررسی اثرات پهنای سد، بردار موج عرضی و اندازه سد پتانسیل روی قطبش اسپینی و دره ای می‌پردازیم.

مدل و روابط ریاضی

ما یک اتصال فرومغناطیس–نرمال– فرومغناطیس بوروفین را به صورت شکل ۱ در نظر می گیریم که در آن دو میدان مغناطیسی تبادلی به پایانه‌های چپ و راست و یک پتانسیل دریچه به ناحیه مرکزی (کانال) اعمال شده است.



شکل ۱: نمایی از اتصال فرومغناطیس–نرمال–فرومغناطیس بوروفین. دو میدان مغناطیسی تبادلی ناشی از اثر مجاورت یک عایق فرومغناطیسی، در پایانه‌ها اعمال می‌شود برای کنترل ترابرد الکترون، ولتاژ دریچه V_g به ناحیه کانال با طول d اعمال می‌شود.

هامیلتونی این اتصال به صورت زیر می‌باشد[٦]

$$H = \eta\hbar\left(v_x k_x \hat{\sigma}_x + v_y k_y \hat{\sigma}_y + v_t k_y I\right) + e v_g I + \sigma m I \quad (۱)$$

در رابطه فوق سرعت‌های ناهمسانگرد $v_x = ۰.۸٦ v_F$ و $v_y = ۰.٦۹ v_F$ هستند، سرعت کج شدگی $v_t = ۰.۳۲ v_F$ با $v_F = ۱۰^{٦}\, m/s$ است، $\eta = +(-)$ نشان دهنده شاخص دره $k_D(-k_D)$ است. $\hbar$ ثابت پلانک، I ماتریس واحد، $\sigma_{x,y}$ نشان دهنده ماتریس‌های پائولی، e بارالکترون، k_x و k_y بردار موج در جهت x و y هستند. v_g، پتانسیل الکتریکی دریچه، σ اندیس اسپین و m شدت مغناطش در پایانه‌ها را نشان می‌دهد.

ویژه مقادیر انرژی برابر است با

$$E = \eta\hbar v_t k_y + e v_g + \sigma m \pm \sqrt{(\eta\hbar v_x k_x)^{۲} - (i\eta\hbar v_y k_y)^{۲}} \quad (۲)$$

که در آن $(-)+$ باند هدایت (ظرفیت) را نشان می دهد. توابع موج در پایانه چپ، کانال و پایانه راست به ترتیب به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi_L = \psi_L^i + r\psi_L^r$$
$$\psi_M = a\psi_M^i + b\psi_M^r \qquad (۳)$$
$$\psi_R = t\psi_R^t$$

در روابط فوق r ضریب انعکاس، t ضریب عبور و $a\ (b)$ ضریب فرود (انعکاس) در ناحیه کانال هستند. با قرار دادن هامیلتونی و ویژه مقادیر در معادله شرودینگر توابع موج فرودی، بازتابی و عبوری در هر ناحیه عبارتند از:

$$\psi_L^{i(r)} = \left(۱, \eta\frac{\hbar v_x k_x^{i(r)} + i\hbar v_y k_y^{i(r)}}{\varepsilon - \eta\hbar v_t k_y^{i(r)} - \sigma m}\right)^T e^{i(k_x^{i(r)}x + k_y y)}$$
$$\psi_M^{r(i)} = \left(۱, \eta\frac{\hbar v_x q_x^{r(i)} + i\hbar v_y q_y^{r(i)}}{\varepsilon - \eta\hbar v_t k_y^{r}}\right)^T e^{i(q_x^{r(i)}x + k_y y)} \qquad (٤)$$
$$\psi_R^t = \left(۱, \eta\frac{\hbar v_x k_x^t + i\hbar v_y k_y^t}{\varepsilon - \eta\hbar v_t k_y^t - \sigma m}\right)^T e^{i(k_x^t x + k_y y)}$$

برای بدست آوردن ضریب عبور، از شرایط مرزی زیر در ناحیه کانال، استفاده می‌شود:

$$\psi_L(۰) = \psi_M(۰)$$
$$\psi_L(d) = \psi_L(d) \qquad (۵)$$

ضریب عبور برابر است با:

$$t_\eta = \frac{(A_i - A_r)(B_i - B_r)e^{i(q_x^r + q_x^i - k_x^t)d}}{(A_r - B_r)(C_i - B_i)e^{iq_x^i d} + (B_i - A_r)(C_i - B_r)e^{iq_x^r d}} \qquad (۶)$$

که در آن:

$$A_i = \eta\frac{\hbar v_x k_x^i + i\hbar v_y k_y^i}{\varepsilon - \eta\hbar v_t k_y^i - \sigma m}$$
$$A_r = \eta\frac{\hbar v_x k_x^r + i\hbar v_y k_y^r}{\varepsilon - \eta\hbar v_t k_y^r - \sigma m}$$
$$B_i = \eta\frac{\hbar v_x q_x^i + i\hbar v_y q_y^i}{\varepsilon - \eta\hbar v_t q_y^i - ev_g}. \qquad (۷)$$
$$B_r = \eta\frac{\hbar v_x q_x^r + i\hbar v_y q_y^r}{\varepsilon - \eta\hbar v_t q_y^r - ev_g}.$$
$$C_i = \eta\frac{\hbar v_x k_x^i + i\hbar v_y k_y^i}{\varepsilon - \eta\hbar v_t k_y^i - \sigma m}$$

احتمال عبور الکترون وابسته به دره به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$T_\eta = |t_\eta|^۲ \qquad (۸)$$

احتمال عبور وابسته به اسپین برای اسپین بالا و اسپین پایین با فرمول زیر معرفی می‌شود:

$$T^{\uparrow(\downarrow)} = T_k^{\uparrow(\downarrow)} + T_{k'}^{\uparrow(\downarrow)} \qquad (۹)$$

همچنین احتمال عبور وابسته به دره برای دره k و k' با فرمول زیر معرفی می‌شود:

$$T_{k(k')} = T_{k(k')}^{\uparrow} + T_{k(k')}^{\downarrow} \qquad (۱۰)$$

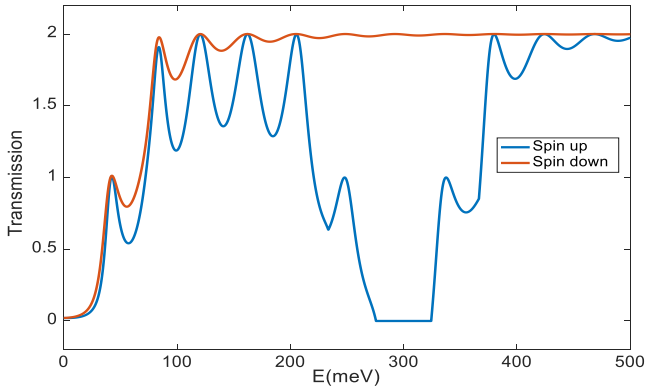
قطبش اسپین بالا و پایین نیز با فرمول‌های زیر معرفی می‌شوند:

$$P_s = \frac{|T^{\uparrow}| - |T^{\downarrow}|}{|T^{\uparrow}| + |T^{\downarrow}|} \qquad (۱۱)$$

$$P_v = \frac{|T_k| - |T_{k'}|}{|T_k| + |T_{k'}|} \qquad (۱۲)$$

نتایج

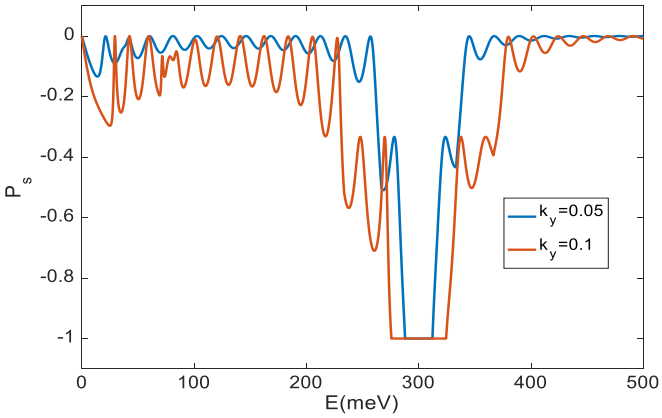
در این بخش به بررسی اثرات میدان تبادلی، بردار موج عرضی و پتانسیل دریچه بر احتمال عبور و قطبش اسپینی و دره‌ای می‌پردازیم. در شکل۲ احتمال عبور وابسته به اسپین برحسب انرژی فرمی به ازای شدت مغناطش ۳۰۰ میلی الکترون ولت، پهنای سد ٤۰ نانومتر در غیاب پتانسیل دریچه رسم شده است.



شکل ۲:احتمال عبور وابسته به اسپین برحسب انرژی فرمی به ازای d=٤۰ nm، ky=۰,۱ nm-۱، شدت مغناطش m=۳۰۰ meV در غیاب پتانسیل دریچه.

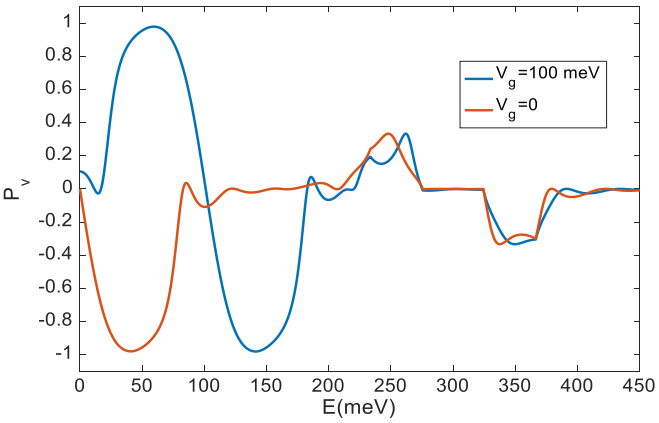
مشاهده می‌شود که احتمال عبور برای اسپین‌های بالا و پایین رفتار نوسانی دارد که ناشی از تداخل ویرانگر و سازنده بین امواج فرودی و بازتابی از سد پتانسیل است. اعمال میدان تبادلی باعث جدا شدن اسپین‌های بالا و پایین می‌گردد. در بازه انرژی ۲۸۰ تا ۳۲۰ میلی الکترون ولت احتمال عبور اسپین بالا صفر اما اسپین پایین صد در صد است. لذا می‌توان با تنظیم انرژی فرمی، قطبش اسپینی را کنترل کرد. لازم به توضیح است که با توجه به معادله ۹ احتمال عبور اسپینی حاصل جمع دره بالا و پایین است لذا حداکثر مقدار آن ۲ شده است.

در شکل ۳ مشاهده می‌شود که با افزایش اندازه بردار موج عرضی دامنه نوسانات شدیدتر و بازه انرژی مربوط به قطبش کامل اسپینی بزرگ‌تر می‌شود. این به نحوی بیانگر کنترل قابلیت فیلتراسیون با تنظیم ky می‌باشد.



شکل ۳: قطبش اسپینی بر حسب انرژی فرمی به ازای بردار موج عرضی $k_y = ۰.۰۵$ nm-۱ و $k_y = ۰.۱$ و به ازای $m = ۳۰۰$meV، $d = ۸۰$nm در غیاب پتاسیل دریچه.

در شکل ۴ قطبش دره‌ای بر حسب انرژی فرمی به ازای دو پتانسیل دریچه متفاوت رسم شده است. قطبش ۱ و ۱- نشان دهنده تفکیک دره‌ها در حضور پتانسیل دریچه است. این نتیجه جالبی است که در بوروفین می توان با اعمال ولتاژ خارجی، دره‌ها را از هم تفکیک نمود. در حالی که در گرافین و سیلیسین چنین امکانی وجود ندارد. نکته قابل توجه دیگر این است که با تغییر ولتاژ می‌توانیم روی قطبش دره‌ای کنترل داشته باشیم.



شکل ٤: الف) قطبش دره‌ای برحسب انرژی فرمی به ازای دو مقدار متفاوت پتانسیل دریچه. در این شکل ky=۰,۱ nm-۱، شدت مغناطش m=۳۰۰ meV ، d=٤۰ nm در غیاب پتانسیل دریچه.

نتیجه گیری

در این مقاله ویژگی‌های ترابرد دره‌ای و اسپینی را در اتصال فرومغناطیس-نرمال-فرومغناطیس بوروفین بررسی کردیم. تک‌لایه بوروفین در حضور سد پتانسیل ناشی از ولتاژ دریچه و میدان مغناطیسی تبادلی حاصل از زیرلایه مغناطیسی قرار دارد. با رسم نمودارهای احتمال عبور و قطبش اسپینی و دره‌ای مشاهده کردیم که اعمال میدان مغناطیسی تبادلی باعث جداشدن اسپین ها و ایجاد قطبش اسپینی در سیستم می‌شود. اندازه بردار موج عرضی روی پهنای ناحیه قطبش کامل تاثیر مستقیم دارد و با بزرگ‌تر شدن بردار موج عرضی، پهنای ناحیه قطبش افزایش پیدا می‌کند. همچنین اعمال پتانسیل دریچه دره ها را از هم تفکیک می‌کند که این از مزایای بوروفین تک‌لایه نسبت به تک‌لایه گرافین است زیرا در گرافین برای جداسازی دره ها از یکدیگر نیاز به اعمال کشش در سیستم است. تغییر انرژی فرمی و یا تغییر اندازه سد پتانسیل دو عاملی هستند که می‌توانیم از طریق آن‌ها قطبش دره‌ای و اسپینی را کنترل کنیم. یافته‌های مذکور بیان می‌کند که تک‌لایه بوروفین دارای قابلیت‌های مناسبی برای استفاده در ادوات اسپینترونیک و ولیترونیک بوده و می‌تواند به عنوان فیلتر دره‌ای و اسپینی مورد استفاده قرار گیرد.

مرجع‌ها

[۱] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, and A. A. Firsov, *Nature (London)* ٤٣٨, ١٩٧ (٢٠٠٥).
[۲] C.-C. Liu, H. Jiang, and Y. Yao, *Phys. Rev. B* ٨٤, ١٩٥٤٣٠ (٢٠١١).
[۳] M. E. Dávila, L. Xian, S. Cahangirov, A. Rubio, and G. Le Lay, *New J. Phys.* ١٦, ٠٩٥٠٠٢ (٢٠١٤).
[٤] F. Zhu,W. Chen, Y. Xu, C. Gao, D. Guan, C. Liu, D. Qian, S.-C. Zhang, and J. Jia, *Nat. Mater.* ١٤, ١٠٢٠ (٢٠١٥).
[٥] Zhou, X. (٢٠٢٠). Valley splitting and anomalous Klein tunneling in borophane-based np and npn junctions. *Physics Letters A*, ٣٨٤(٢٥), ١٢٦٦١٢.
[٦] Zhou, X. (٢٠١٩). Valley-dependent electron retroreflection and anomalous Klein tunneling in an ٨-P m m n borophene-based n− p− n junction. *Physical Review B*, ١٠٠(١٩), ١٩٥١٣٩.
[٧] Yokoyama, T. (٢٠١٣). Controllable valley and spin transport in ferromagnetic silicene junctions. *Physical Review B*, ٨٧(٢٤), ٢٤١٤٠٩.

محاسبه تحلیلی و عددی تابع فیلتر برای شبه توزیع غیر کلاسیکی حالت‌های فوک

اشکان سوری
دانشجو کارشناسی ارشد، دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)
ashkanoori210@yahoo.com

الهه نحوی فرد
هیات علمی، دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)
nahvifard@sci.ikiu.ac.ir

محمد رضا بذرافکن
هیات علمی، دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)
bazrafkan@sci.ikiu.ac.ir

چکیده

تعریف غیرکلاسیکی بودن از طریق تابع گلاوبر – سودارشان، یک مشکل عملیاتی دارد. تابع گلاوبر- سودارشان همیشه تابعی هموار و خوشرفتار نیست و گاه یک تابع تعمیم یافته است، لذا اندازه‌گیری مستقیم و یا غیر مستقیم آن سخت است. برای کاربردی کردن این تعریف، باید بدنبال شرایط بهتری باشیم. برای این کارتابع فیلتر تعریف می‌کنیم. در اینجا برای تابع شبه توزیع غیرکلاسیکی حالت های فوک فیلتر جدیدی معرفی می‌کنیم که فقط به قدر مطلق متغیر خود وابسته است.

کلید واژه ها : ناکلاسیکی حالت، توابع شبه احتمال، تابع گلابر-سودارشان، تابع فیلتر.

Analytical and numerical calculation of filter function for non-classical Fock states quasi-distribution

Soori, Ashkan[1]; Nahvifard, Elahe[1] ; Bazrafkan, Mahammad Reza[1]

[1] *Physics group, Imam Khomeini International University, Qazvin*

Abstract

The definition of non-classicalness through the Glauber-Sudarshan function has an operational problem. The Glauber-Sodarshan function is not always a smooth and well-behaved function, and sometimes it is a generalized function, so it is difficult to measure it directly or indirectly. To apply this definition, we must look for better conditions. We define a filter function for this task. Here, we introduce a new filter for the non-classical quasi probability functions of Fock states, that depends only on the absolute value of its variable.

key words: non-classicality states, quasi probability functions, Glaber-Sodarshan function, filter function

مقدمه

در علم اپتیک کوانتومی و اطلاعات کوانتومی توجه خاص به حالت‌هایی خالص که به حالت‌های همدوس معروف هستند شده-است و جز حالت‌های کلاسیک محسوب می‌شوند که نظیر نوسانگر کلاسیک هستند. نمایش گلاوبر- سودارشان اپراتور چگالی به عنوان یک حالت کوانتومی دلخواه که می‌تواند به شکل ترکیب آماری از حالتهای همدوس نوشته شود[۲و۱].

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P_{cl}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

اگر تابع گلاوبر- سودارشان عملگر چگالی مانند مشخصاتی از تابع توزیع احتمال کلاسیکی باشد آنگاه حالت کوانتومی مشابه کلاسیک دارد و در غیر این صورت حالت غیرکلاسیک خواهدبود. در واقع حاصل تابع گلاوبر- سودارشان ممکن است که مقادیر منفی باشد که اغلب برای حالت‌های غیرکلاسیکی رفتار این تابع دارای تکینگی شدید و اندازگیری غیرممکن است، مثل همبستگی حالت کوانتومی که به یک حالت غیرکلاسیک اشاره دارد.

بنابراین مشکل عمده تعریف ناکلاسیکی تکینگی تابع گلاوبر – سودارشان است و این تکینگی باعث می‌شود که به صورت تجربی نتوان تابع توزیع شبه احتمال گلاوبر – سودارشان را اندازه‌گیری کرد و تنها برای برخی از حالت‌های کوانتومی خاص است که به صورت تقریبی این شبه احتمال بدست می آید.

برای حل این مشکل توابع شبه توزیع ناکلاسیکی معرفی شده‌اند که ضمن همواربودن، منفی پذیری آنها شرط کافی برای ناکلاسیکی بودن حالت است. به علت تکین بودن نمایش گلاوبر برای اغلب حالت‌های غیرکلاسیک فرم منظم شده آن که همان تابع شبه توزیع غیرکلاسیکی است تنها برای حالت‌های خاصی مانند توزیع‌های گاوسی محاسبه شده‌است و محاسبه فرم صریح چنین توابعی می-تواند در آشکارسازی ناکلاسیکی حالات کوانتومی نور به کار آید. در این تحقیق، در اینجا برای تابع شبه توزیع غیرکلاسیکی حالت-های فوک یک تابع فیلتر به صورت تحلیلی و عددی معرفی شده-است.

تعریف حالت غیر کلاسیکی بر اساس رفتار نمایش گلاوبر- سودارشان

نمایش گلاوبر- سودارشان [۳] حالت همدوس $|\alpha_\circ\rangle$ به فرم $P(\alpha)=\delta^{(2)}(\alpha-\alpha_\circ)$ در فضای فاز، در یک نقطه متمرکز است. بنابراین ترکیب آماری-کلاسیک از حالات همدوس دارای این ویژگی است که نمایش گلاوبر-سودارشان آن مانند یک تابع احتمال فیزیکی است. اگر تابع گلوبر سودارشان یک حالت، تابعی باشد که مقادیر منفی بر فضای فاز بگیرد، یا اینکه یک تابع تعمیم یافته‌ی تکین تر از تابع دلتای دیراک باشد، حالت را غیر کلاسیک گوییم. در واقع حالت وقتی کلاسیک محسوب می‌شود که تابع $P(\alpha)$ همه خواص یک تابع چگالی احتمال فیزیکی را داشته باشد. یعنی، وقتی عملگر چگالی برابر ترکیب آماری از حالت های همدوس به فرم $\hat{\rho}=\int d^2\alpha P_{c\ell}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|$ باشد که در آن $P_{c\ell}(\alpha)$ یک تابع حقیقی، مثبت، و بهنجار توزیع احتمال است[۲و۱]. مثلا، خود حالت همدوس با این سنجه کاملا کلاسیکی محسوب می‌شود ولی حالت های فوک (ویژه حالت های انرژی) که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_n(\alpha)=\frac{e^{-|\alpha|^2}}{n!}\left\{\partial_\beta^n\partial_{\beta^*}^n\delta^{(2)}(\alpha-\beta)\right\}_{\beta=0}$$
$$=\frac{e^{-|\alpha|^2}}{n!}\partial_\alpha^n\partial_{\alpha^*}^n\delta^{(2)}(\alpha)$$

این تابع شامل مشتقات مراتب متفاوت از تابع دلتای دیراک است. بنابراین نمایش گلاوبر- سودارشان در این مورد مثبت نیست و همچنین از تابع دلتای دیراک تکین‌تر می‌باشد؛ لذا، حالت‌های تعداد فوتونی، بجز حالت خلا، همگی غیر کلاسیک هستند.

مثال دیگر برای حالت‌های غیر کلاسیک، حالت خلاء چلانده است. غیر کلاسیکی این حالت در ارتباط با پاشندگی کوادراچرهای میدان آشکار می‌شود. مطابق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، $\sigma_X\sigma_Y\geq\frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{X},\hat{Y}\right]\right\rangle\right|=\frac{1}{4}$ و در حالت فرین متقارن $\sigma_X=\frac{1}{2}=\sigma_Y$ اگر یکی از این دو پاشندگی کمتر از مقدار فرین متقارن شود، حالت چلانده خواهد بود. بنابراین اگر پاشندگی σ_X (یا σ_Y) کوچکتر از ۱/۲ باشد ، حتما باید تابع گلاوبر – سودارشان جایی بر فضای فاز منفی باشد و حالت حتما غیرکلاسیک است. تعریف غیرکلاسیکی بودن از طریق تابع گلاوبر – سودارشان ، یک مشکل عملیاتی دارد . تابع گلاوبر- سودارشان همیشه تابعی هموار و خوش‌رفتار نیست و گاه یک تابع تعمیم یافته‌است، لذا اندازه-گیری مستقیم و یا غیر مستقیم آن سخت است. برای کاربردی کردن این تعریف، باید بدنبال شرایط بهتری باشیم. برای این کارتابع فیلتر تعریف می‌کنیم.

با شروع از تابع مشخصه نرمال [۵و۴] $\Phi(\beta)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{i|\beta|x_j\left[\frac{\pi}{2}-\arg\beta\right]}e^{\frac{|\beta|^2}{2}}$، تابع مشخصه فیلتر شده

$\Omega(\beta;w)=\Omega(\beta)\Phi(\beta)$ را معرفی می‌کنیم[٦]. ساده ترین مثال از تابع فیلتری تابع مثلثی دو بعدی زیر است

$$\Omega(\beta;w)=tri\left(\frac{\beta_r}{w}\right)tri\left(\frac{\beta_i}{w}\right),\qquad \beta=\beta_r+i\beta_i,$$

که در آن تابع مثلثی یک بعدی هم به شکل آشنای زیر تعریف می-شود

$$tri(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>0.\end{cases} \tag{۱}$$

چون $\Omega(\beta;w)\le 1$ و تنها داخل مربع $|\beta_r|<w\ \&\ |\beta_i|<w$ ، تابع فیلتر $\Omega(\beta;w)$ غیر صفر است لذا

$$\int d^2\beta e^{+|\beta|^2}|\Omega(\beta;w)|^2<\infty,$$

این رابطه تمام شروط لازم [٦] را دارد.

بنابراین شبه توزیع غیرکلاسیکی منظم شده $P_\Omega(\alpha)$ نظیر با منفی بودن خود می‌تواند هر غیرکلاسیکی نمایش گلاوبر- سودارشان را تشخیص دهد. این مثال نشان می دهد که فیلترهایی وجود دارند که مستقل از حالت ، غیر کلاسیکی آن را تشخیص می‌دهند. فیلتر هایی همچون مثال بالا که در حوزه کرانداری غیر صفر و خارج آن همه جا صفر هستند ،اگرچه قابل کابرد هستند ولی بخشی از اطلاعات موجود در تابع مشخصه نرمال را از بین می‌برند. با چنین فیلترهایی نمی توان از تابع مشخصه فیلتر شده به‌طور معکوس، تابع مشخصه نرمال را در همه نقاط صفحه مختلط به‌دست آورد.

تابع شبه توزیع غیرکلاسیکی برای حالت های فوک

اگرچه تابع ویگنر برای حالت های فوک منفی پذیر است و از این رو خود یک شبه توزیع غیرکلاسیکی محسوب می‌شود ولی در اینجا کلاس بزرگتری از شبه توزیع‌ها را با منفی پذیری خود غیرکلاسیکی بودن این حالات را نشان می‌دهند می‌سازیم. ابتدا تابع مشخصه نرمال را برای $\{|n\rangle\}$ ها می‌یابیم. برای این کار از تابع مولد این مجموعه یعنی از حالت های همدوس کمک می‌گیریم

$$|\alpha\rangle=e^{-\frac{\alpha\alpha^*}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$$\hat\rho=|\alpha\rangle\langle\alpha|=e^{-\alpha\alpha^*}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}|m\rangle\langle n|,$$

بنابراین از رابطه فوق می‌توانیم عملگ تصویرگر $|n\rangle\langle n|$ را بیابیم

$$|n\rangle\langle n|=\frac{1}{n!}\partial_\alpha^n\partial_{\alpha^*}^n\left(e^{\alpha\alpha^*}|\alpha\rangle\langle\alpha|\right)_{\alpha=\alpha^*=0}.$$

از اینجا تابع مشخصه نرمال به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left\{|n\rangle\langle n|:\hat D(\xi):\right\}\\ &=\frac{1}{n!}\partial_\alpha^n\partial_{\alpha^*}^n\left(e^{\alpha\alpha^*}\langle\alpha|:\hat D(\xi):|\alpha\rangle\right)_{\alpha=\alpha^*=0},\\ &=\frac{1}{n!}\partial_\alpha^n\partial_{\alpha^*}^n\left(e^{\alpha\alpha^*}e^{\xi\alpha^*-\xi^*\alpha}\right)\Big|_{\alpha=\alpha^*=0}.\end{aligned}$$

مشتق‌گیری ها را نسبت به α^*,α انجام می‌دهیم :

$$\partial_{\alpha^*}^n\left\{e^{\alpha\alpha^*}e^{(\alpha^*\xi-\alpha\xi^*)}\right\}=e^{\alpha^*\xi}(\alpha+\xi)^n e^{(\alpha^*-\xi^*)\alpha},$$

$$\partial_\alpha^n\,\partial_{\alpha^*}^n\left\{e^{\alpha\alpha^*}e^{(\alpha^*\xi-\alpha\xi^*)}\right\}=e^{\alpha^*\xi}\,\partial_\alpha^n\left\{(\alpha+\xi)^n e^{(\alpha^*-\xi^*)\alpha}\right\},$$

مشتق عبارت داخل کروشه را عبارت آخر را از قاعده ی لایب نیتز بدست می‌آوریم و بعد از محاسبه نتیجه برای $\alpha=0=\alpha^*$ داریم :

$$\Phi(\beta)=\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{m![(n-m)!]^2}\left(-|\beta|^2\right)^{n-m},$$

که با توجه به تعریف چند جمله‌ای های لاگر $L_n(x)$ یعنی :

$$L_n(x)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\frac{n!\,x^{n-s}}{(n-s)!(n-s)!s!},$$

$$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=-x+1,$$

$$L_2(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1,\cdots$$

تابع مشخصه‌ی حالت‌های فوک به را به شکل کوتاه $\Phi(\xi)=L_n\left(|\xi|^2\right)$ نوشت. اکنون می توان هر تابع فیلتر $\Omega(\xi)$ را انتخاب کرده و شبه توزیع $P_\Omega(\alpha)$ را برای حالت های فوک محاسبه کرد

$$P_\Omega(\alpha;w)=\int\frac{d^2\xi}{\pi^2}e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\Omega(\xi,w)L_n\left(|\xi|^2\right).$$

از آنجا که $L_n\left(|\xi|^2\right)$ دارای تقارن چرخشی در صفحه مختلط است، به شرطی که تابع فیلتر نیز چنین باشد، تابع شبه توزیع غیرکلاسیکی $P_\Omega(\alpha;w)$ نیز این ویژگی را خواهدداشت. بنابراین

بجای فیلتر مثلثی دو بعدی (۱) فیلتر جدیدی به شکل زیر معرفی می کنیم که فقط به قدر مطلق متغیر خود وابسته است :

$$\Omega(\xi,w)=\frac{3}{\pi w^2}\left(1-\frac{|\xi|}{w}\right),$$
$$|\xi|\le w,\quad \&\quad \Omega(\xi,w)=0,\quad |\xi|>w.$$

به سادگی می‌توان دید که این فیلتر نیز همه شرایط فیلتر غیر-کلاسیکی را برآورده می‌کند. آنگاه

$$P_\Omega(\alpha;w)=$$
$$\frac{3}{\pi^3 w^2}\int\limits_{|\xi|\le w} d^2\xi e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\left(1-\frac{|\xi|}{w}\right)L_n\left(|\xi|^2\right)=P_\Omega(|\alpha|;w),$$

که در آن انتگرال بر روی قرص $|\xi|\le w$ انجام می‌شود. بااستفاده از مختصات قطبی در صفحه مختلط داریم

$$P_\Omega(|\alpha|;w)=$$
$$\frac{3}{\pi^3 w^2}\int\limits_{|\xi|\le w} rdrd\varphi e^{-2i|\alpha|r\sin(\varphi)}\left(1-\frac{r}{w}\right)L_n\left(r^2\right).$$

انتگرال زاویه‌ای را می توان با استفاده از تعریف انتگرالی تابع بسل نوع اول به شکل

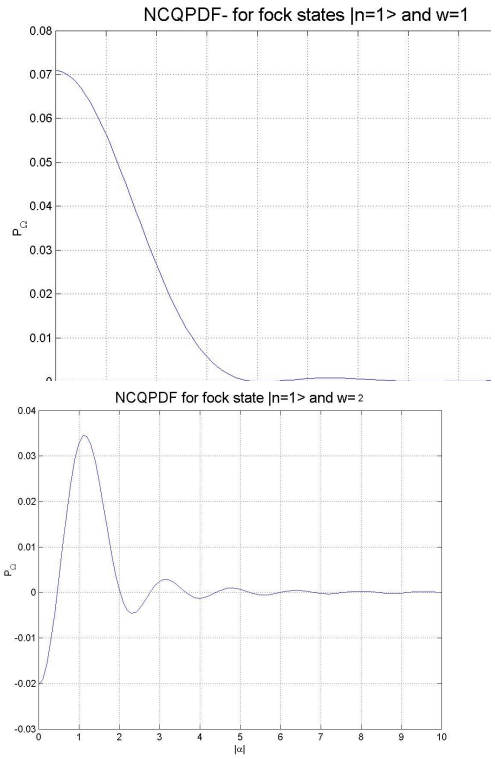
$$J_\circ(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi}d\varphi,$$

محاسبه کرد و نتیجه زیر را که تنها برحسب یک انتگرال تک متغیره است بدست آورد

$$P_\Omega(|\alpha|;w)=$$
$$\frac{6}{\pi^2 w^2}\int\limits_0^{w} drJ_\circ(2|\alpha|r)r\left(1-\frac{r}{w}\right)L_n\left(r^2\right).$$

در نمودارهای (۱) برای دوعرض $w=1,2$ شبه توزیع غیر کلاسیکی رسم شده است.

در اینجا هم با افزایش عرض w شبه توزیع $P_\Omega(\alpha;w)$ که در ابتدا مثبت است منفی پذیر خواهد شد. ظهور صفرهای اضافه در شبه توزیع غیر کلاسیکی به علت نوع تابع فیلتر است.



نمودار ۱: شبه توزیع غیرکلاسیکی برای دو عرض $w=1,2$

نتیجه گیری

علیراغم تکینگی‌های احتمالی نمایش گلابر- سودارشان تابع مشخصه نرمال حالت و فرم های فیلتر شده مناسبی از آن قابل محاسبه عددی می‌باشد. فیلتر جدیدی معرفی شده فقط به قدر مطلق متغیر خود وابسته است. و این فیلتر نیز همه شرایط فیلتر غیر کلاسیکی را برآورده می‌کند.

مرجع‌ها

[1] E. C. G. Sudarshan, "Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams", *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 277.
[2] R. J. Glauber, "Coherent and Incoherent States of the Radiation Field",*Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
[3] W.P. Schleich', *Quantum Optics in phase space*", WILEY- VCH, (2001).
[4] T. Kiesel, W. Vogel, B. Hage, J. DiGuglielmo, A. Samblowski, and R. Schnabel," Experimental test of nonclassicality criteria for phase-diffused squeezed states", *Phys. Rev. A.* **79**, (2009) 022122.
[5] T. Kiesel, W. Vogel, V. Parigi, A. Zavatta, and M. Bellini, "Experimental determination of a nonclassical Glauber-Sudarshan P function"*Phys. Rev. A.* **78** (2008) 021804(R).
[6] T.Kiesel and W. Vogel; "Nonclassicality filters and quasiprobabilities"; *Physical Review A.* **82** (2010) 032107.

BTZ BLACK HOLE AS A SOLUTION OF GENERALIZED SUPERGRAVITY EQUATIONS

Ali Eghbali
Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran
eghbali978@gmail.com

Simin Ghasemi-Sorkhabi
Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran
s.ghassemi.s@gmail.com

Adel Rezaei-Aghdam
Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran
rezaei-a@azaruniv.ac.ir

Abstract

This paper is devoted to a study of solutions of generalized supergravity equations in dimension three. Our candidate is the metric of BTZ black hole. It is shown that only the cases of $J=0, M=0$ *and* $J=0, M\neq 0$ *of the metric satisfy the generalized supergravity equations. In the former case, we obtain a family of solutions including the field strength, dilaton field together with an appropriate vector field* I *, while in the latter case we are dealing with two cases of solutions.*

Key words: String theory, Generalized supergravity equations, BTZ black hole

1. Introduction

Supergravity is a modern field theory that combines the principles of supersymmetry and general relativity. 10-dimensional supergravity theory describes the dynamics of massless string excitations and arises in string theory as low-energy effective theory. It has been recently found new string backgrounds which satisfy a more general set of motion equations of the ordinary supergravity. This set of the equations, which are a generalization of the type IIB supergravity equations, are called the generalized supergravity equations (GSE). Notice that the main difference between the ordinary supergravity and GSE is the absence of a scalar dilaton. The GSE were found in [1] in order to investigate the integrable deformations of the $AdS_5\times S^5$ type II superstring sigma model [2-5], which are closely related to non-Abelian T-duality transformations [6-9]. This generalized system in string theory includes extra vector fields as well as the standard component fields of the type IIB supergravity. So far, the corresponding classical action has not been discovered, and only the equations of motion are presented. Tseytlin and Wulff in [10] showed that the GSE can be reproduced by solving the kappa-symmetry constraints. In fact, the result obtained by them shows that kappa-symmetry of the Green–Schwarz action requires the background supergravity fields to satisfy the GSE.

Let us give a brief introduction to the GSE. In the absence of the R-R fields, the set of GSE in D dimensions take the following form [1]:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}H_{\mu\rho\sigma}H_{\nu}^{\ \rho\sigma}+\left(\nabla_{\mu}X_{\nu}+\nabla_{\nu}X_{\mu}\right)=0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\nabla^{\lambda}H_{\lambda\mu\nu}-X^{\lambda}H_{\lambda\mu\nu}-\nabla_{\mu}X_{\nu}+\nabla_{\nu}X_{\mu}=0, \tag{2}$$

$$R-\frac{1}{12}H^2+4\nabla_{\mu}X^{\mu}-4X_{\mu}X^{\mu}+2\Lambda=0, \qquad X_{\mu}=I_{\mu}+Z_{\mu}, \tag{3}$$

where $R_{\mu\nu}$ and R are the respective Ricci tensor and Gauss curvature that are calculated from the metric $G_{\mu\nu}$, and Λ is the cosmological constant. Here, the D-dimensional indices $\mu,\ \nu,\ldots$ of coordinates x^{μ} are raised or lowered with the metric $G_{\mu\nu}$. The covariant derivative ∇_{μ} is the conventional Levi–Civita

connection associated with $G_{\mu\nu}$. A vector field $I = I^{\mu}\partial_{\mu}$ and a one-form $Z = Z_{\mu}dx^{\mu}$ are defined so as to satisfy

$$\mathfrak{L}_I G_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

$$\mathfrak{L}_I B_{\mu\nu} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla_{\mu} Z_{\nu} - \nabla_{\nu} Z_{\mu} + I^{\lambda} H_{\lambda\mu\nu} = 0, \tag{6}$$

$$I^{\lambda} Z_{\lambda} = 0, \tag{7}$$

where $\mathfrak{L}$ stands for the Lie derivative. The field strength $H_{\mu\nu\rho}$ corresponding to anti-symmetry tensor field B is defined as

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu} B_{\nu\rho} + \partial_{\nu} B_{\rho\mu} + \partial_{\rho} B_{\mu\nu}. \tag{8}$$

The conventional dilaton is included in Z_{μ} as follows:

$$Z_{\mu} = \partial_{\mu}\Phi + B_{\nu\mu} I^{\nu}, \tag{9}$$

where Φ is a scalar dilaton field hiding inside Z_{μ}. Note that the equations of motion in formulae (1)-(7) reduce to the conventional supergravity ones if one sets $I^{\mu} = 0$. As mentioned above, in Ref. [1], it has been shown that the GSE are related to non-Abelian T-duality transformations. In addition, one may refer to the paper [11] in which a solution of standard supergravity with a linear dilaton has been mapped to a solution of the GSE by performing a formal T-duality transformation along a direction. These results indicate that solutions of standard supergravity and the GSE should be treated on an equal footing in the context of string theory, because the T-duality is a symmetry of string theory. Here, in the present work, we obtain some new solutions for the GSE including special cases of the BTZ metric, the field strength H and dilaton field Φ together with an appropriate vector field I. In this way, we obtain a family of solutions for the $J = 0, M = 0$ case of the BTZ metric, while for the case of $J = 0, M \neq 0$ we obtain two families of solutions. Indeed, by choosing the vector field I from our point of view, the cases of $J \neq 0, M \neq 0$ and $J \neq 0, M = 0$ don't solve the GSE.

2. BTZ metric as a solution for the GSE

In what follows that we shall show that the BTZ metric with $J = 0, M = 0$ and also $J = 0, M \neq 0$ can be considered as solutions of the GSE. It should be noted that the cases of $J \neq 0, M \neq 0$ and $J \neq 0, M = 0$ don't solve the GSE. Before we proceed any further, let us introduce the metric of BTZ black hole.

2.1. BTZ metric

The BTZ black hole discovered by Banados, Teitelboim and Zanelli [12] is a 2+1-dimensional solution of Einstein's equations with a negative cosmological constant, mass, angular momentum and charge. The BTZ black hole is asymptotically anti-de Sitter rather than asymptotically flat, and has no curvature singularity at the origin. The line element for the black hole solutions is given by

$$ds^2 = (M - \frac{r^2}{l^2})\, dt^2 - J dt d\varphi + r^2 d\varphi^2 + (\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2})^{-1} dr^2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{10}$$

where the radius l is related to the cosmological constant by $l = (-\Lambda)^{-1/2}$. The constants of motion M and J are the mass and angular momentum of the BTZ black hole, respectively. The line element (10) describes a black hole solution with outer and inner horizons at $r = r_+$ and $r = r_-$, respectively,

$$r_{\pm} = l\left(\frac{M}{2}\right)^{1/2}\left\{1 \pm \left(1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2\right)\right\}^{1/2}, \tag{11}$$

where the mass and angular momentum are related to $r = r_{\pm}$ by $M = (r_+^2 + r_-^2)/l^2$ and $J = 2r_+r_-/l^2$. The solutions with $-1 < M < 0,\ J = 0$ describe point particle sources with naked conical singularities at $r = 0$. The metric with $J = 0, M = -1$ may be recognized as that of ordinary anti-de Sitter space; it is separated by a mass gap from the $J = 0, M = 0$. The vacuum state which is regarded as empty space, is obtained by letting the horizon size go to zero. This amounts to letting $M \to 0$, which requires $J \to 0$. We have to notice that the metric for the $J = 0, M = 0$ black hole is not the same as AdS_3 metric which has negative mass $M = -1$.

2.2. Solution with J = 0, M = 0

Below we discuss the solutions of equations (1)-(7) and possessing the BTZ metric with $J = 0, M = 0$. As we will show, our solutions are, in general, given by a family. Before proceeding to do this, let us first write down the BTZ metric with $J = 0, M = 0$. Using relation (10), it is given by

$$ds^2 = -\frac{r^2}{l^2}dt^2 + r^2 d\varphi^2 + \frac{l^2}{r^2}dr^2. \tag{12}$$

According to equation (4), the vector field I is a Killing vector or a linear combination of the Killing vectors corresponding to metric (12). The Killing vectors K_a of the metric can be derived by solving Killing equations. They are then read off

$$\begin{aligned} &K_1 = \frac{2}{l^2}(r\varphi\partial_r - t\phi\partial_t) + \frac{l^4 - r^2t^2 - r^2\varphi^2 l^2}{r^2 l^4}\partial_\varphi, \quad K_2 = t\partial_t - r\partial_r + \varphi\partial_\varphi, \quad K_3 = \partial_\varphi, \\ &K_4 = \frac{l^4 + r^2t^2 + r^2\varphi^2 l^2}{2r^2}\partial_t - rt\partial_r + t\varphi\partial_\varphi, \quad K_5 = l^2\varphi\partial_t + t\partial_\varphi, \quad K_6 = -l^2\partial_t, \end{aligned} \tag{13}$$

Here we apply the Killing vectors (13) to construct an appropriate vector field as follows:

$$I = \alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_6 K_6, \tag{14}$$

that can be a suitable candidate for solving the equations (1)-(7). It should be noted the fact that the BTZ solutions must be single-valued in the angular direction, but this is not the case for all values of parameters α_i. Therefore, we choose solutions that do not have this problem.

By considering the field strength H and dilaton field Φ as

$$H_{rt\varphi} = -\frac{2r}{l}, \qquad \Phi = C_0, \tag{15}$$

for some arbitrary constant C_0, we solve the GSE (1)-(7) with the metric (12). The equations are then satisfied if the vector field I is obtained to be

$$I = -\alpha_6 l^2 \partial_t + \alpha_3 \partial_\varphi, \tag{16}$$

in addition, the constants Λ and l are related as $\Lambda = 2/l^2$.

2.3. Solutions with J = 0, M ≠ 0

The BTZ metric with $J = 0, M \neq 0$ is simply found by using the formula (10), giving us

$$ds^2 = \left(M - \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + r^2 d\varphi^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - M\right)^{-1} dr^2. \tag{17}$$

Now, one may obtain the corresponding Killing vectors to construct the vector field I similar to that of (14). Our solutions are classified into two special cases. In both cases of solutions, the anti-symmetry tensor field B is considered to be

$$B = -\frac{r^2}{l}\, dt \wedge d\varphi. \tag{18}$$

The corresponding field strength is simply calculated to be $H = -2r/l\ dr \wedge dt \wedge d\varphi$. Here, the forms of our solutions including the metric (17) and field B (18) are given by the following two cases A and B:

Case A: In this case, the GSE (1)-(7) are fulfilled with the metric (17) if the dilaton field Φ, the vector field I and cosmological constant Λ can now be expressed in the following forms

$$\Phi = C_0, \qquad I = -\alpha_6 l^2 \partial_t, \qquad \Lambda = \frac{2}{l^2} + 2Ml^4 \alpha_6^{\ 2}. \tag{19}$$

Case B: In this case of solutions, the dilaton field Φ, the vector field I and cosmological constant Λ are read off

$$\Phi = C_0 - l\alpha_1 Mt, \qquad I = \alpha_1 \partial_\varphi, \qquad \Lambda = \frac{2}{l^2} + 2Ml^2 \alpha_1^{\ 2}. \tag{20}$$

3. Conclusions

In this work we have obtained some new solutions for the GSE with the special cases of the BTZ metric. We have concluded that the cases of $J \neq 0, M \neq 0$ and $J \neq 0, M = 0$ of the metric don't solve the GSE. For the $J = 0, M = 0$ case, we have obtained a family of solutions including the field strength H, dilaton field Φ and a vector field I as was presented in equations (15) and (16). Furthermore, we have found two families of solutions for the case of $J = 0, M \neq 0$. Our results show that the solutions are single-valued in the angular direction.

References

[1] G. Arutyunov, S. Frolov, B. Hoare, R. Roiban, and A. A. Tseytlin, "Scale invariance of the η-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring, T-duality and modified type-II equations"; *Nucl. Phys. B* **903**, (2016) 262, arXiv:1511.05795 [hep-th].
[2] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, "An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action"; *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 051601 arXiv:1309.5850.
[3] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, "Derivation of the action and symmetries of the q-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring"; *J. High Energy Phys.* **10** (2014) 132, arXiv:1406.6286.
[4] I. Kawaguchi, T. Matsumoto and K. Yoshida, "Jordanian deformations of the $AdS_5 \times S^5$ superstring"; *J. High Energy Phys.* **04** (2014) 153, arXiv:1401.4855.
[5] R. Borsato and L. Wulff, "Target space supergeometry of η and λ-deformed strings"; *J. High Energy Phys.* **10** (2016) 045, arXiv:1608.03570.
[6] D. Orlando, S. Reffert, J. I. Sakamoto and K. Yoshida, "Generalized type IIB supergravity equations and non-Abelian classical r-matrices"; *J. Phys. A* **49** (2016) 445403, arXiv:1607.00795.
[7] B. Hoare and A. A. Tseytlin, "Homogeneous Yang-Baxter deformations as non-abelian duals of the AdS_5 σ-model"; *J. Phys. A* **49** (2016) 494001, arXiv:1609.02550.
[8] M. Hong, Y. Kim and E. O. Colgain, "On non-Abelian T-duality for non-semisimple groups" *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) 1025, arXiv:1801.09567.
[9] R. Borsato and L. Wulff, "Non-abelian T-duality and Yang-Baxter deformations of Green-Schwarz strings"; *J. High Energy Phys.* **08** (2018) 027 arXiv:1806.04083.
[10] L. Wulff and A. A. Tseytlin, "k-symmetry of superstring σ-model and generalized 10d supergravity equations"; *J. High Energy Phys.* **06** (2016) 174 arXiv:1605.04884.
[11] B. Hoare and A. A. Tseytlin, "Type IIB supergravity solution for the T-dual of the eta-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring"; *J. High Energy Phys.* **10** (2015) 060, arXiv:1508.01150 [hep-th].
[12] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, "Black hole in three-dimensional spacetime"; *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849.

ساخت مکانیک بر رویه‌های غوطه‌ور

مهدی دهقانی
استادیار گروه فیزیک دانشکده علوم پایه دانشگاه شهرکرد
dehghani@sku.ac.ir

زهرا قهرمان
دانشجوی دکترای فیزیک ذرات و میدان‌های دانشکده فیزیک دانشگاه کاشان
z.ghahreman@grad.kashanu.ac.ir

مجید منعم‌زاده
دانشیار گروه فیزیک ذرات و میدان‌های دانشکده فیزیک دانشگاه کاشان
monem@kashanu.ac.ir

چکیده

نشان می‌دهیم که چگونه با دیدگاه قیدی و روش غوطه‌وری همتافته می‌توان بر روی رویه‌هایی در فضای پیکربندی و فضای فاز مکانیک کلاسیک و کوانتمی ساخت. مکانیک کلاسیک را به صورت دستگاه قیدی نوع اول می‌سازیم تا مکانیک کوانتمی منتج از آن، به روش کانونی، یک نظریه پیمانه‌ای شود. این کار با فرآیند نوع اول‌سازی یک جفت عمومی قید نوع دوم در ساختار رشته‌ای انجام می‌پذیرد.

کلید واژه ها : نظریه پیمانه‌ای، غوطه‌وری، مکانیک کوانتمی، هم‌تافته، متغیر وس زومینو.

Construction of Mechanics on Embedded Surfaces

Dehghani, Mehdi[1]; Ghahreman, Zahra[2]; Monemzadeh, Majid[2]

[1] *Department of Physics, Faculty of Science, Shahrekord University P. O. Box 115, Shahrekord, Iran*
[2] *Department of Physics, University of Kashan, Kashan, Iran*

Abstract

We show how the classical and quantum mechanics can be built on procedures in the configuration space and the phase space with the constrained and the symplectic embedding method. We construct classical mechanics in the form of a first class, so that quantum mechanics resulting from it becomes a quantum theory by gauge symmetry. It is done by the process of first-classization of a general pair of second class constraints in a chain structure.
key words: Gauge Theory, Embedding, Quantum Mechanics, Symplectic, Wess-Zumino Variable.

مقدمه

از دیدگاه ریاضی در نظریه‌های کوانتمی درجه‌های آزادی پیمانه‌ای به بازبهنجارش و کنترل بی‌نهایت‌های فرابنفش کمک می‌کنند. درجه آزادی پیمانه‌ای فقط هم وسیله‌ی بازبهنجارش نیست؛ بلکه خودش نشانه یا روش وارد کردن برهمکنشی جدید است. اگر در یک مکانیک کوانتمی تقارن پیمانه‌ای داشتید، کوانتمی کردن ذره‌ی آن برهمکنش منجر به نظریه میدان سازگار فیزیکی خواهد شد. مثال واضحی که داریم مکانیک کلاسیک برای فوتون‌ها یا همان نظریه ماکسول است. در معادلات ماکسول برای تطبیق و تناظر مدل با واقعیت فیزیکی تثبیت پیمانه انجام می‌دهید؛ حتی

نشان می‌دهید با انتخاب پیمانه‌های گوناگون ولی به شرط تثبیت کامل نتایج نظری و تجربی موافق هستند. بدون تثبیت پیمانه‌ی کلاسیکی و با کوانتش چشمه‌های نظریه ماکسول به الکترودینامیک کوانتمی با رفتارهای مناسب و قابل تطبیق با واقعیت در انرژی‌های بالا، می‌رسید. مثال ناواضح ساختن نظریه میدان کوانتمی برهمکنش‌های قوی است، که ابتدا به ساکن ساخته می‌شود. یعنی نظریه میدان پیمانه‌ای کوانتمی را پیشنهاد می‌دهید و بعد، اگر نیاز داشتید، مثلا بخواهید صرفا ذره‌ای در آن را بررسی کنید یا دیدگاه آلترناتیوی کسب کنید، به عقب برمی‌گردید، یعنی به مکانیک کوانتمی پیمانه‌ای و مکانیک کلاسیک پیمانه‌ای رجوع می‌کنید[۱]. این مکانیک کلاسیک، در مقابل کوانتمی، درجه آزادی غیر فیزیکی و صرفا تقارن اضافه‌ای دارد. ولی در مقابل کوانتمی کردن آسان و شکل کوانتمی آن جنبه‌ی فیزیکی دارد و آن هم ورود برهمکنشی جدید در آن به صورت جفت شدگی کمینه است.

ورود درجه آزادی اضافه در مکانیک کلاسیک یا کوانتمی را با دیدگاه توپولوژیک می‌توانیم به عنوان افزایش بعد فضای در دسترس و یا غوطه‌وری خمینه‌ی اولیه در فضایی بزرگتر تصور کنیم[۲]. در این مقاله می‌خواهیم به این تصور (به معنای عامیانه آن) کمی دقت ریاضی ببخشیم. در ریاضیات و توپولوژی عموما خمینه‌ها و فضاهای مورد بررسی و کاربرد، موجوداتی مجرد و انتزاعی هستند؛ هرچند که این انتزاع از واقعیتی فیزیکی نشات گرفته باشند ولی در این مساله خاص با فضایی که واقعیت فیزیکی در آن حضور دارد شروع می‌کنیم و فرآیند غوطه‌وری و جنبه و نتیجه فیزیکی آن را نشان می‌دهیم.

از فضای فاز به غوطه‌وری

دستگاه فیزیکی که برای غوطه‌وری انتخاب می‌کنیم ساده‌ترین شکل ممکن را دارد. یک ذره در فضای سه‌بعدی که مقید است بر روی یک رویه زندگی کند. این ذره لزوما غیرنسبیتی نیست و حتی ممکن است پتانسیلی بر آن اعمال شود. مقید بودن به معنای عامیانه را به زبان ریاضی از طریق مفهوم قیدهای دیراک و بررسی دستگاه فیزیکی در فضاهای هندسی فاز، مماس و هم‌مماس[۱] می‌توانیم بیان کنیم. برای مقدمه می‌گوییم دینامیک دستگاه با هامیلتونی بندادی و ساختار فضای فاز، که خودش از مجموعه‌ی دو قید نوع دوم به‌دست می‌آید، نتیجه می‌شود. این موجودات در زیر خلاصه شده‌اند،

$$H_c,\Phi,\{\ ,\ \}_{P.B} \to H_c,\Psi,\{\ ,\ \}_{D.B} \qquad (۱)$$

و به طور اجمالی می‌گویند برای بررسی دستگاه فیزیکی که با هامیلتونی H_c و قید اولیه‌ی Φ داده می‌شود، ساختار پواسونی $\{\ ,\ \}_{P.B}$ قید ثانویه‌ی Ψ را تولید می‌کند و این قید که با قید اولیه یک زوج نوع دوم می‌سازد ساختار پواسونی $\{\ ,\ \}_{D.B}$ را در فضای فاز کاهش یافته القا می‌کند. این ساختار در این فضا همراه با هامیلتونی کانونی دینامیک دستگاه را معرفی می‌کند. فضای فاز کاهش یافته منجر به فضای پیکربندی محدودی برای دستگاه می‌شود که همان حضور ذره بر روی رویه‌ی معرفی شونده با Φ است. ما می‌خواهیم کل فضای $\mathbb{R}^3$ برای ذره‌ی پیمانه‌ای شده قابل دسترس باشد. بنابراین تلاش می‌کنیم با روشی درجه آزادی که با دو قید نوع دوم Φ و Ψ حذف می‌شود را برگردانیم. این کار را با نوع اول سازی این قیدها انجام می‌دهیم. روش نوع اول‌سازی ما روش غوطه‌وری همتافته است.

به این منظور ابتدا دستگاه معرفی شده در (۱) را در فرمول‌بندی فدیف–جکیو تحلیل قیدی می‌کنیم [۳] و سپس در همان مسیر آن را نوع اول یا پیمانه‌ای می‌کنیم[٤].

در رهیافت فدیف جکیو به دستگاهی با قیود اولیه یک لاگرانژی تکین رتبه اول به صورت زیر اختصاص داده می‌شود.

$$L^{(0)} = \dot{q}_i p_i - V^{(0)}, V^{(0)} = H_c + \lambda\Phi \qquad (۲)$$

مدهای صفر این لاگرانژی قیدها را تولید می‌کند و در نهایت دینامیک دستگاه از یک معادله اویلر لاگرانژ یا معادل آن قانون دوم نیوتن که نیرویش منفی گرادیان پتانسیل $V^{(0)}$ است به‌دست می‌آید. اثر قیود در لاگرانژی نهایی، تا مرحله‌ای که دیگر تکین نباشد، ورود پیدا می‌کند. از طرفی تکرار فرایند لاگرانژی‌های تکین که

[۱] Cotangent

همانا ورود قیدهای جدید است از درجات آزادی دستگاه می‌کاهد. کاهش درجات آزادی به خصوص مبین نوع دوم بودن دستگاه است.

در روش غوطه‌وری همتافته ما فضای اولیه را در فضایی بزرگتر غوطه‌ور می‌کنیم و از دیگر سو این غوطه‌وری دستگاه را به دستگاهی نوع اول تبدیل می‌کند. مختصه‌ی فضایی جدید در فضای بزگتر که به داخل هامیلتونی راه می‌یابد متغیر بوزونی وس–زومینو است. ما فرایند غوطه‌وری را برای غوطه‌وری یک رویه انجام می‌دهیم و بنابراین در دیدگاه معمول قیدی با یک رشته‌ی دو قیدی نوع دوم سروکار داریم و در نگاه غوطه‌ورسازی نیز تنها یک متغیر وس–زومینو و آن هم به شکل بوزونی نیاز داریم. بوزونی بودن آن هم به این خاطر است که ما در حال ساختن یک نظریه پیمانه‌ای و نه ابرمتقارن هستیم.

در فرایند غوطه‌وری ما به لاگرانژی (۲) یک جمله تکانه–سرعت وس زومینو اضافه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(0)} &= \dot{q}_i p_i + X(q_i, p_i)\dot{\theta} - \tilde{V}^{(0)} \\ \tilde{V}^{(0)} &= H_c + \lambda\Phi + G(q_i, p_i, \theta) \end{aligned} \qquad (۳)$$

و تقاضا می‌کنیم تا دو فرم همتافته‌ی آن

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{IJ}^{(0)} &= \frac{\partial \tilde{A}_J}{\partial \tilde{\xi}_I} - (I \leftrightarrow J) \\ \tilde{A}_J &:= (p_i, o_i, 0, X), \tilde{\xi}_I := (q_i, p_i, \lambda, \theta) \\ \tilde{V}^{(0)} &= H_c + \lambda\Phi + G(q_i, p_i, \theta) \end{aligned} \qquad (٤)$$

تکین باشد تا دستگاه نوع اول شود. این تقاضا منجر به معادلاتی برای تابع مولد برهمکنش‌های وس–زومینو با متغیرهای اولیه $G(q_i, p_i, \theta)$ و تکانه‌ی وس زومینو $X(q_i, p_i)$ می‌شود. اما شرط‌هایی که به این معادلات منجر می‌شوند یکی هم‌ارزی قیدهای مدل پیمانه‌ای شده با قیدهای اولیه‌ی مدل ابتدایی و دیگری عدم تولید قید ثانویه‌ی Ψ است. بیایید قیدها و هامیلتونی مربوط به لاگرانژی (۳) را حساب کنیم.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= p_\lambda, \tilde{\Phi}_2 = \pi - X \\ \tilde{H}_c &= H_c + G + \lambda\Phi \end{aligned} \qquad (۵)$$

این مجموعه منجر به قیدهای ثانویه‌ی

$$\chi_1 = \Phi, \chi_2 = -\{X, H_c + G + \lambda\Phi\}_{P.B} - \frac{\partial G}{\partial \theta} \qquad (٦)$$

می‌شود. حضور χ_1 خوب و χ_2 نامطلوب است. متحد با صفر شدن عنصر نامطلوب به معادله‌ای برای دو تابع مجهول می‌شود. از طرفی قید $\tilde{\Phi}_2$ در (۵) می‌گوید انتخاب مناسب $X(q_i, p_i) = -\Phi$ همراه با (٦) دستگاه ما را از پیشروی یکی از دو رشته‌ی قیدی می‌رهاند و در نهایت دستگاهی پیمانه‌ای با سه قید نوع اول $\tilde{\Phi}_1$، $\tilde{\Phi}_2$ و χ_1 ایجاد می‌کند. که قید اول مربوط به ضریب نامعین لاگرانژ مدل اولیه است و عدم تعیین آن را می‌گوید. دومی همان تکانه‌ی متغیر وس زومینو است که مقدار صفر برای آن به دست آمده است. و در نهایت سومی همانا قید رویه‌ی غوطه‌ور در فضای فاز است که به صورت یک قید نوع اول یا درجه آزادی پیمانه‌ای ظاهر شده است. مطابق این قیدها، هامیلتونی $\tilde{H}_c$ تحت وردش‌های زیر که با تابع دلخواه زمانی $\varepsilon(t)$ تولید می‌شود، ناورداست.

$$\delta q_i = \varepsilon(t)\nabla_{p_i}\Phi, \delta p_i = \varepsilon(t)\nabla_{q_i}\Phi, \delta\theta = \varepsilon(t), \delta\lambda = 0 \qquad (۷)$$

اما معادله‌ی منتج از (٦) برای تابع مولد که برهمکنش‌های وس زومینو را با درجات آزادی اولیه تولید می‌کند به صورت زیر در می‌آید.

$$\{\Phi, H_c + G\}_{P.B} + \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \qquad (۸)$$

با انتخاب $G = \sum_{n=1} g^{(n)}(q_i, p_i)\theta^n$ و صدق دادن آن در معادله‌ی (۸) به حل زیر یرای مولدک‌ها به صورت زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= \frac{1}{n+1}\{\Phi, g^{(n)}\}_{P.B}, n = 1, 2, \ldots \\ g^{(1)} &= \{\Phi, H_c\}_{P.B}. \end{aligned} \qquad (۹)$$

این نتیجه برای معادله (۸) همراه با انتخاب مناسب $X(q_i, p_i) = -\Phi$ برای تکانه وس زومینو حاصل محاسبات ما برای غوطه‌وری یک دستگاه نوع دوم در فضایی بزرگتر برای پیمانه‌ای شدن آن است. پیش از این مردم معمولا جملات اضافه شده به هامیلتونی را از مرتبه‌ی توان ۲ برای متغیر وس زومینو اضافه شده به هامیلتونی غوطه‌ور به‌دست آورده‌اند (مثالهای معروف مدل سیگمای غیرخطی و مدل شوینگر کایرال در [٤] را ببینید). ولی ما در (۹) نشان داده‌ایم که این مطلب عمومی نیست و برهمکنش‌های مرتبه بالاتر نیز با انتخاب قید اولیه‌ی غوطه‌وری و هامیلتونی بندادی دستگاه ممکن است رخ بدهد.

به عنوان یک مثال ساده تصور کنید که می‌خواهیم هامیلتونی معادل با یک ذره در پتانسیل وابسته به مکان را که دارای رابطه‌ی

پاشندگی (انرژی ثابت برحسب تکانه‌ها) به صورت زیر را حساب کنیم.

$$H_c = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \upsilon(\vec{q}), \Phi = \vec{a}.\vec{p} + b \qquad (۱۰)$$

ماشین (۸) و (۹) این نتیجه را به ما می‌دهد.

$$\tilde{H}_c = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \exp(-\vec{a}_\theta.\nabla)\upsilon(\vec{q}) + \lambda(\vec{a}.\vec{p} + b)$$
$$\vec{a}_\theta = \theta\vec{a} \qquad (۱۱)$$

به عنوان مثال این روش با توجه به حل بالا کمک می‌کند تا هامیلتونی‌های پیمانه‌ای شده برای ذرات کلاسیک با رابطه انرژی خاص به‌دست بیاوریم.

نتیجه گیری و پیشنهاد

مثال اخیر نشان می‌دهد که حتی در شکل کلاسیکی (در مقابل نسبیتی) هامیلتونی پیمانه‌ای شده با ورود متغیر وس زومینو دارای جملات نابدیهی با تثانهایی بیشتر از ۲ است. وضعیت با هامیلتونی‌های نسبیتی متنوع‌تر هم می‌شود و بسط تابع مولد یک بسط نامتناهی خواهد بود. مثال‌های جالب‌تری که حتی در شکل کلاسیکی هم قابل بررسی و کاربرد هستند ساختن مکانیک کلاسیک و کوانتمی بر روی رویه‌های مشخصی مثل رویه موبیوس غوطه‌ور در فضای سه یعدی است.

مرجع‌ها

[۱] G.K. Savvidy; "*Yang-Mills quantum mechanics*"; Phys Lett B **26**, 325.

[۲] P.C. Schuster, R.L.Jaffe, "*Quantum mechanics on manifolds embedded in Euclidean space*"; Annals Phys. 307 (2003), 132.

[۳] L. Fadeev, R. Jackiw, "*Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems*"; Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1692.

[۴] E.M.C. Abreu, etal, , "*Obtaining gauge invariant actions via symplectic embedding formalism*"; *Annalen Phys.* 524 (2012) 434.

Geometric Quantum Mechanics

Seyed Ebrahim Akrami
Mathematics Department, Semnan University, Semnan, Iran
akramisa@semnan.ac.ir

Abstract

We introduce observables and the counterpart of Schrödinger equation over a symplectic manifold. We show that there exist periodic solutions for this equation whose frequencies are their energy over Planck's constant and moreover they are stationary orbits.

Key words: Symplectic manifold. Schrodinger equation. Stationary state.

1. Introduction

It is well-known among mathematical physicists that a complex Hilbert space can be regarded as a special symplectic manifold and that Schrödinger equation associated to a quantum Hamiltonian is nothing other than the Hamilton equation for the associated expectation-value function as a function over this special symplectic manifold.

In this paper, we extend this fact to over a general symplectic manifold. We introduce observables and the counterpart of Schrödinger equation over a symplectic manifold. The later is nothing other than the Hamilton equation of an observable Hamiltonian. We show that there exist periodic solutions for Hamilton equation whose frequencies are their energy over Planck's constant and moreover they are stationary orbits.

In 1997, Ashtekar and Schilling extended the above program by regarding a complex Hilbert space as a Kähler manifold and reformulated quantum mechanics from Hilbert space to over this special Kähler manifold. We have also extended their work to a general Kähler manifold but for the lack of space we postpone it to future publishing, inshallah.

2 Definition of QHDS

Definition 1 *A* ***quantum Hamiltonian system (QHS)*** *is a Hamiltonian dynamical system over a Poisson manifold M whose Hamiltonian is of the following form*

$$H = \sum_n E_n |u_n|^2 \tag{2.1}$$

for some sequence

$$E_1 < E_2 < E_3 < \cdots \tag{2.2}$$

in the range of H, called ***eigenvalues*** *such that for any sequence c_n of complex numbers,*

$$\sum_n |c_n|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_n E_n |c_n|^2 < \infty, \tag{2.3}$$

there exist some compactly-supported differentiable complex-valued functions $u_n : M \to \mathbb{C}$, *called* ***eigenfunctions,*** *satisfying*

$$i\hbar\{u_n, H\} = E_n u_n \tag{2.4}$$

and moreover, there exist states $\xi_n \in M$, *called* ***eigenstates,*** *such that*

$$u_n(\xi_m) = \delta_{mn}. \tag{2.5}$$

Proposition 1

$$i\hbar\{u, H\} = Eu \tag{2.6}$$

then E *is real,* $|u|$ *is conservation law for* H *and for any orbit* $\xi(t)$ *of* H *we have*

$$u(\xi(t)) = u(\xi(0))e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \tag{2.7}$$

Conversely, if (2.7) holds for all orbits then u *is an eigenvector for* H *with real eigenvalue* E.

3 Motivation from quantum mechanics

In this section we translate quantum mechanics from the language of complex-Hilbert-linear-space states, Hermitian-linear-operator Hamiltonian and Schroc equation dynamics into the language of real symplectic-(more generally Poisso manifold state, real-function Hamiltonian and Hamilton-equation dynamics. It is known that the canonical symplectic form of $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ can be translated to the symplectic form $\Omega(v, w) := -2\mathrm{Im}<v, w>$ over $\mathbb{C}^N$.

Theorem 2 *Consider a separable Hilbert space* $\mathcal{H}$. *We regard* $\mathcal{H}$ *as a real symplectic manifold, under the following symplectic form*

$$\Omega(v, w) := -2\hbar\mathrm{Im}<v, w>. \tag{3.1}$$

To each Hermitian linear operator A *over* $\mathcal{H}$ *we associate the real function*

$$<A>(\psi) := <\psi|A|\psi>, \qquad \forall\psi \in \mathcal{H}, \tag{3.2}$$

called expectation-value function. Here we have used the Dirac bra-ket notation, i.e. $<\psi|A|\psi> = <\psi, A\psi>$. *The associated Hamiltonian vector field is nothing other than* A *itself over* $i\hbar$

$$X_{<A>} = -\frac{i}{\hbar}A. \tag{3.3}$$

The Poisson bracket of two functions $<A>$ *and* $<B>$, *where* A *and* B *are two Hermitian operators, satisfies in*

$$\{<A>, <B>\} = <[A, B]>. \tag{3.4}$$

The Schrodinger equation

$$i\hbar\dot{\psi} = \mathbb{H}\psi \tag{3.5}$$

for a given Hamiltonian operator $\mathbb{H}$ *is nothing other than the Hamilton equation*

$$\dot{\psi} = X_{<\mathbb{H}>}\psi \tag{3.6}$$

for the Hamiltonian $<\mathbb{H}>$ *function over* $(\mathcal{H}, \Omega)$.

For the proof see [1, 5]. We call $\mathcal{H}$ equipped with the canonical symplectic from Ω, as **canonical Hilbert-symplectic manifold**.

Theorem 3 *Let $\mathcal{H}$ be a complex Hilbert space and $\{\psi_n\}$ be an orthonormal basis for $\mathcal{H}$. We construct* ***coordinate function***

$$u_n(\psi) := <\psi_n, \psi>. \tag{3.7}$$

which is nothing other than the bra $<\psi_n|$ in the Dirac notation. Then for any Hermitian linear operator A, whose eigenvectors are ψ_n, i.e. $A\psi_n = a_n\psi_n$, we have

$$\boxed{<A> = \sum_n a_n|u_n|^2}, \tag{3.8}$$

$$\boxed{i\hbar\{<A>, u_n\} = a_n u_n}, \tag{3.9}$$

$$u_n(\psi_m) = \delta_{mn}, \qquad <A>(\psi_n) = a_n \tag{3.10}$$

and for any sequence c_n of complex numbers,

$$\sum_n |c_n|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_n a_n|c_n|^2 < \infty. \tag{3.11}$$

4 Qualitative Study of a QHS

Definition 2 *Consider a quantum Hamiltonian H with eigenvalues and eigen functions E_n and u_n.*
i) A ***stationary state*** *of H is a state $\xi \in M$ for which there exists an index m such that if $a_n \neq a_m$ then $u_n(\xi) = 0$ and moreover $u_m(\xi) \neq 0$.*
ii) The ***average-value function*** *of H is the function*

$$\mathbb{C}H\mathbb{D}(\xi) := \frac{H(\xi)}{\sum_n |u_n(\xi)|^2} = \frac{\sum_n a_n|u_n(\xi)|^2}{\sum_n |u_n(\xi)|^2} \tag{4.1}$$

with the domain including all ξ such that not all $u_n(\xi)$'s vanish simultaneously.

For an stationary state ξ as in the above, if $\xi(t)$ is the orbit of H with the initial condition $\xi(0) = \xi$, then for any index n such that $E_n \neq E_m$, we have

$$u_n(\xi(t)) = 0 \tag{4.2}$$

and $u_m(\xi(t)) = e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} u_m(\xi) \neq 0$. Thus when $E_n \neq E_m$ the wave u_n is off over the orbit $\xi(t)$ and when $E_n = E_m$ at lest one of waves u_n for example u_m is on over $\xi(t)$.

Theorem 4 *A state ξ is stationary state of E if and only if it is a stationary point (critical point) of the average-value function $\mathbb{C}H\mathbb{D}$.*

The proof uses the Hilbert space machinery, since the author does not know any direct proof of this assertion. This is an instance of showing that quantum mechanics is a machinery for studying classical mechanics by embedding the classical states in a Hilbert space and use the huge capacity which is avail-

able in a Hilbert space. To start, we introduce a bridge between QHDS and standard quantum mechanics. Namely, for each quantum function over phase space M we assign a complex Hilbert space and a Hermitian linear operator with the same eigenvalues and we recover also the Schrodinger equation.

Theorem 5 *For any quantum function $f = \sum_n a_n |u_n|^2$ with stationary states ξ_n over phase space M we associate a complex Hilbert space $\mathcal{H}$ and a Hermitian linear operator $\tilde{f}$ such that a_n are eigenvalues of $\tilde{f}$ and corresponding eigenvectors ψ_n form an orthonormal basis of $\mathcal{H}$ and we assign the map*

$$\Phi : M \to \mathcal{H}, \qquad \Phi(\xi) := \sum_n u_n(\xi)\psi_n \tag{4.3}$$

which satisfies in

$$i\hbar\{\Phi, f\} = \tilde{f}\Phi, \tag{4.4}$$

$$f = <\Phi|\tilde{f}|\Phi>, \tag{4.5}$$

and

$$\Phi(\xi_n) = \psi_n. \tag{4.6}$$

Moreover, if $f = H$ is the Hamiltonian of the system then the solutions $\xi(t)$ of the Hamilton equation for this Hamiltonian are mapped to the solutions $\psi(t) = \Phi(\xi(t))$ of the Schrodinger equation for the Hamiltonian operator $\tilde{H}$. is inconsistent with the other conditions defining a quantum Hamiltonian and the assumption of existence of stationary states.

I

Discussion. In this paper we proposed the PDE (5.4) which is going to resolve the probability from the standard quantum theory. Our main task is to solve this highly nonlinear PDE for unknown $\Phi : M \to \mathcal{H}$ and for given Hilbert space $\mathcal{H}$, Hermitian operator A and symplectic manifold M and to check if the solution Φ produces a quantum function which satisfies in the principles of DQM.

References

[1] Abraham, R., Marsden, J.E., and Ratiu, T.S.: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, third edition. Springer (2002)

[2] Hall, B.C,: Quantum Theory for Mathematicians. Springer (2013)

[3] Heslot, A.: Quantum mechanics as a classical theory. Phys. Rev. D V.31 N.6 (1985)

[4] Morgan, P.: An algebraic approach to Koopman classical mechanics. Ann. Phys (2020). https://doi.org/10.1016/j.aop.2020.168090

[5] Marsden, J.E., and Ratiu, T.S.: Introduction to Mechanics and Symmetry, second edition. TAM, volume 17, Springer (1999)

ناوردایی همیوغ باری در الکترودینامیک کوانتومی با نقض لورنتس در ابعاد مختلف

معصومه قاسم‌خانی
دانشیار، دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی
m_ghasemkhani@sbu.ac.ir

زینا حق‌گویان
دانشجوی دکتری، دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی
z_haghgooyan@sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، مدل الکترودینامیک کوانتومی (QED) در چارچوب نسبیت خیلی خاص در ابعاد مختلف فضا–زمان در نظر می‌گیریم. ابتدا به بررسی تقارن همیوغ باری کنش در سطح کلاسیکی پرداخته و نشان می‌دهیم که این کنش تحت تبدیل همیوغ باری (C) ناورداست. سپس به منظور بررسی اختلالی تقارن همیوغ باری در حد حلقه (کوانتومی)، روی نمودارهای تک– حلقه با تعداد فرد پای فوتونی متمرکز خواهیم شد. برای این منظور، با استفاده از رهیافت کنش مؤثر، شکل کلی توابع فرد–نقطه‌ای فوتون را در ابعاد مختلف ۲،۳ و ٤ بدست آورده و دامنه توابع یک و سه– نقطه‌ای فوتون را محاسبه می‌کنیم. نتایج ما نشان می‌دهد دامنه کل توابع یک و سه–نقطه‌ای مستقل از بعد فضا–زمان صفر بوده و بنابراین تقارن همیوغ باری، در حد کوانتومی نیز حفظ می‌شود.

کلید واژه ها : ناوردایی همیوغ باری، الکترودینامیک کوانتومی(QED)، نقض تقارن لورنتس، توابع فرد– نقطه‌ای فوتون

Charge-conjugation invariance of the Lorentz violating QED in various dimensions

Masoumeh Ghasemkhani, Zina Haghgouyan

Department of Physics, Shahid Beheshti University, 1983969411, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, we consider electrodynamics (QED) in very special relativity (VSR) framework in various dimensions. First, we examine the charge-conjugation symmetry of the action at classical level and show that the action in this framework is charge-conjugation invariant. Then, in order to investigate perturbatively the preservation of charge-conjugation symmetry at loop (quantum) level, we shall focus on one-loop graphs with odd number of photon's external lines. To this end, we use the effective action approach to obtain the general form of the photon's odd-point function in d=2,3,4 and study the amplitude of the one and three-point function of the photon. Our results show that the total amplitude of the one and three-point functions independently of the space-time dimension vanishes and hence the charge-conjugation symmetry is preserved at quantum level too.

key words : charge-conjugation invariance, QED, violation of Lorentz symmetry, photon's odd-point functions.

مقدمه

تقارن لورنتس یک تقارن بنیادی در نسبیت عام انیشتین و مدل استاندارد ذرات بنیادی است. این دو نظریه به ترتیب در توصیف کلاسیکی گرانش و فیزیک ذرات و نیروهای بنیادی (به جزء نیروی گرانش) بسیار موفق بوده‌اند. هر چند در مقیاس انرژی پلانک، برای وحدت بخشیدن تمام نیروها از جمله گرانش یک نظریه بنیادی‌تری مورد نیاز هست که به تقارن لورنتس احترام نمی‌گزارد. به بیان دیگر می‌توان نظریه نسبیت عام و مدل استاندارد را به نوعی کنش مؤثر آن نظریه در انرژی‌های پایین فرض کرد[۱]. تحقیقات نظری گسترده‌ای در خصوص مدل‌هایی با نقض تقارن لورنتس صورت گرفته است. از طرف دیگر بررسی نقض ناوردایی لورنتس از لحاظ آزمایشگاهی نیز مورد توجه قرار گرفته است. یکی از مدل‌های نقض تقارن لورنتس، مدل نسبیت خیلی خاص(VSR) کوهن و گلاشو می‌باشد [۲,۳]. در مدل VSR، طبیعت به جای تقارن لورنتس، تحت زیرگروه‌های گروه لورنتس ناورداست. بزرگترین زیر گروه این مدل در ٤ بعد SIM(۲) می‌باشند که دارای چهار

مولد $T_1 = K_x + J_y$، $T_2 = K_y - J_x$، J_z و K_z هستند. J_i و K_i مولدهای خیز و دوران در سه بعد فضایی می‌باشند. در این چارچوب تقارن پاریته (P)، وارونی زمان (T)، تقارن مرکب همیوغ بار–پاریته (CP) و یا همیوغ بار– وارونی زمان (CT) نقض خواهد شد، اما تحت تبدیل گسسته C ناورداست. این زیر گروه هیچ بردار یا تانسور ناوردایی ندارد اما جهت چهار–بردار نورگونه n^μ تحت تبدیل SIM(۲) حفظ شده و به صورت یک فاز تبدیل می‌یابد. با توجه به این ویژگی به راحتی می‌توان دید کسرهایی که به صورت $(\frac{n.p}{n.q})$ هستند، تحت تبدیل SIM(۲) ناوردا بوده و در نتیجه جملات غیر موضعی وارد مدل می‌شوند[۲]. وجود این جملات غیر موضعی در فرمول بندی نظریه میدان در چارچوب VSR اولاً سبب تصحیح رأس‌های برهم کنشی قبلی شده و ثانیاً رأس‌های برهم کنشی جدیدی نیز ایجاد می‌کند. کارهای متعددی در زمینه بررسی نظریه میدان‌های کوانتومی در چارچوب نسبیت خیلی خاص در ابعاد مختلف فضا–زمان انجام شده است [۴،۵]. کنش VSR-QED در سطح کلاسیکی در d بعد ناورداست اما آیا این ناوردایی در سطح کوانتومی نیز در ابعاد مختلف فضا–زمان حفظ می‌شود یا خیر؟ بررسی ناوردایی C در نظریه VSR-QED در سه بعد به صورت اختلالی در [۶] مطالعه شده و نشان دادند ناوردایی تحت C در حد کوانتومی برقرار هست. در [۷] نیز به دو روش اختلالی و غیر اختلالی ناوردایی همیوغ باری در نظریه VSR-QED بررسی شده است. آنها نشان دادند که در چهار بعد نیز همانند سه بعد ناوردایی همیوغ بار در سطح کوانتومی در این مدل برقرار است. در این مقاله، هدف ما بررسی این ناوردایی در سطح کوانتومی در d بعد به روش اختلالی است. هر چند که مشابه [۷] به راحتی به روش غیر اختلالی نیز می‌توان نشان داد که ناوردایی همیوغ بار در سطح کوانتومی در هر بعد فضا–زمان(d=۲،۳،۴) برقرار است. به عبارت دیگر چون همیوغ بار یک تبدیل داخلی می‌باشد انتظار داریم که این تقارن مستقل از بعد فضا–زمان باشد. ابتدا مدل برهم کنشی میدان دیراک با فوتون در VSR-QED را معرفی کرده و کنش مربوطه را تحت تبدیل همیوغ بار در سطح کلاسیکی در d بعد بررسی می‌کنیم. سپس با معرفی کنش مؤثر فوتون به بررسی اختلالی ناوردایی C می‌پردازیم. برای این منظور، دامنه توابع فرد– نقطه‌ای فوتون در حد تک–حلقه را در (d=۲،۳،۴) به ازای تعداد یک و سه پای خارجی فوتون محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که دامنه هر دو دقیقاً صفر می‌باشد. از آنجایی که محاسبات توابع سه نقطه‌ای فوتون در ابعاد ۲ و ۴ مشابه می‌باشد و فقط تفاوت در ضریب مقدار رد ماتریس‌های دیراک می‌باشد، در یک بخش مجزا این محاسبات را انجام می‌دهیم و در بخش دیگر به محاسبات توابع سه نقطه‌ای فوتون در ۳ بعد می‌پردازیم که به علت حضور تانسور لوی چیتا ناشی از رد تعداد فرد ماتریس‌های گاما متفاوت از ۲ و ۴ بعد می‌باشد. به هر حال پس از محاسبه خواهیم دید که سهم این توابع فرد نقطه‌ای صفر خواهند شد. همانطور که انتظار داشتیم ناورداری همیوغ باری مستقل از بعد فضا–زمان در سطح کوانتومی نیز مشابه سطح کلاسیکی برقرار است.

معرفی مدل و قوانین فاینمن

فرض کنید میدان فرمیونی ψ به جرم m_e با میدان پیمانه‌ای خارجی A_μ در بزرگترین زیر گروه نسبیت خیلی خاص(VSR) برهم کنش دارد. در این چارچوب، این کنش در d بعد به صورت زیر داده می‌شود [۴]:

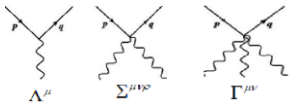
$$S_F = \int d^d x \ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_e)\psi, \qquad (۱)$$

که در آن γ^μ ماتریس‌های دیراک و ∇_μ مشتق هموردای VSR می‌باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_\mu \equiv D_\mu + \frac{m^2}{2}\frac{n_\mu}{n.D}, \qquad (۲)$$

که در آن $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ مشتق هموردای معمولی در نظریه الکترودینامیک کوانتومی است. در حد غیر برهم کنشی (آزاد)، مشتق هموردای VSR در رابطه (۲) به $\tilde{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{2}\frac{m^2}{n.\partial}n_\mu$ تقلیل می‌یابد. در این مدل انتشارگر آزاد میدان فرمیونی $S(\tilde{p}) = \frac{i(\tilde{p}\!\!\!/ + m_e)}{\tilde{p}^2 - m_e^2}$ است. این کنش تحت تبدیلات پیمانه‌ای آبلی بسیار کوچک $\delta\psi = i\Lambda\psi, \quad \delta A_\mu = \tilde{\partial}_\mu \Lambda$ زیر ناورداست که Λ پارامتر تبدیل پیمانه‌ای است[۶]. اگر چه کنش (۱) تحت تبدیلات لورنتس ناوردا نبوده، اما تقارن VSR را حفظ می‌کند. قوانین فاینمن مربوط

به رأس‌های برهم‌کنشی بدست آمده با استفاده از کنش (۱) در شکل (۱) ارائه شده است. عبارات صریح Λ^{μ} ,$\Sigma^{\mu\nu\rho}$,$\Gamma^{\mu\nu}$ در [٦] آمده است.



شکل ۱– قوانین فاینمن در مدل VSR-QED

بررسی تبدیل همیوغ بار در سطح کلاسیکی در d بعد

با نوشتن بسط اختلالی همگرای کمیت $\frac{1}{n.D}$ بر حسب توانی از e و بدست آوردن ضرایب بسط آن، ناوردایی همیوغ بار (C) بخش‌های آزاد و برهم کنشی را بررسی می‌کنیم. میدان های ψ و $\bar{\psi}$ تحت عملگر همیوغ بار به صورت زیر تبدیل می‌یابند:

$$\psi^{c} = C\bar{\psi}^{t}; \qquad \bar{\psi}^{c} = -\psi^{t}C^{-1}, \tag{۳}$$

که نماد t، به معنای ترانهاده میدان فرمیونی است. با استفاده از اتحاد $C^{-1}\gamma^{\mu}C = -(\gamma^{\mu})^{t}$ و نیز رابطه پاد جابه‌جایی فرمیون‌ها، همچنین با استفاده از رابطه $\frac{1}{n.D} = \int_{0}^{\infty} ds\, e^{-s(n.D)}$ و نیز انتگرال‌گیری جزء به جزء برای جمله غیر موضعی کنش و رابطه همیوغ باری فوتون $A_{\mu}^{C} = -A_{\mu}$، ناوردایی همیوغ بار جملات آزاد و برهمکنشی کنش کل در سطح کلاسیکی به راحتی اثبات می‌شود. ازآنجایی که تقارن همیوغ باری یک تقارن داخلی است، ربطی به مختصات ندارد، با رفتن به چارچوب نسبیت خیلی خاص، این تقارن از بین نمی‌رود. برای بررسی حفظ تقارن همیوغ باری در سطح حلقه، به سراغ محاسبات کوانتومی در حد تک حلقه می‌رویم. در بخش بعد، ابتدا کنش مؤثر فوتون در چارچوب این مدل را معرفی کرده و سپس صحت این قضیه را در چارچوب VSR بررسی خواهیم کرد.

رهیافت کنش مؤثر

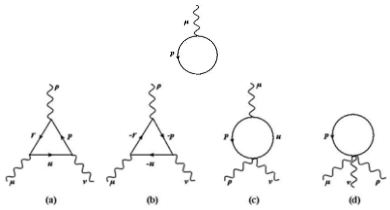
با انتگرال‌گیری روی میدان‌های فرمیونی فرم کلی کنش مؤثر فوتون در d بعد بدست می‌آید:

$$\Gamma[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^{d}x_{1}\ldots\int d^{d}x_{n}\; \Gamma_{\mu_{1}\ldots\mu_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n})\; A_{\mu_{1}}(x_{1})\ldots A_{\mu_{n}}(x_{n}). \tag{۴}$$

که در آن $\Gamma_{\mu_{1}\ldots\mu_{n}}(x_{1},\ldots,x_{n})$ تابع n–نقطه‌ای فوتون نام دارد. در این مقاله تمرکز اصلی ما بر روی محاسبه توابع فرد–نقطه‌ای فوتون در چارچوب VSR خواهد بود. بنابراین در ادامه محاسبات در حد تک–حلقه را در ۲،۳،٤ بعدی انجام می‌دهیم.

بررسی اختلالی ناوردایی همیوغ باری در حد کوانتومی

در این بخش، توابع فرد– نقطه‌ای فوتون را در حد تک–حلقه در ابعاد d=۲،۳،٤ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از رهیافت ماتریس پراکندگی نمودارهای فاینمن توابع فرد نقطه‌ای فوتون در شکل (۲) رسم شده‌اند.



شکل ۲– نمودار فاینمن توابع ۱و۳–نقطه‌ای فوتون در حد تک–حلقه

محاسبات کوانتومی در حد تک حلقه

با توجه به نمودار تابع تک نقطه‌ای فوتون در شکل (۲) به راحتی می‌توان نشان داد که سهم این نمودار برابر صفر است. با نوشتن عبارت فاینمن نمودار تک نقطه‌ای فوتون داریم:

$$\Pi^{\mu} = -\int \frac{d^{d}p}{(2\pi)^{d}} \frac{1}{\left(\tilde{p}^{2} - m_{e}^{2}\right)} Tr\left\{-ie[\gamma^{\mu} + \frac{m^{2}}{2}\frac{\not{p}\, n^{\mu}}{(n.p)^{2}}](\tilde{\not{p}} + m_{e})\right\}. \tag{۵}$$

که در آن d بعد فضا–زمان را نشان می‌دهد. با توجه به این که $n^{2} = 0$ است. محاسبه نشان می‌دهد که سهم جملات $m^{2,4}$ از بین می‌روند و به عبارت مشابه نظریه الکترودینامیک کوانتومی معمولی برای نمودار یک– نقطه‌ای می‌رسیم:

$$\Pi^{\mu} = ie\int \frac{d^{2}p}{(2\pi)^{2}} \frac{p^{\mu}}{\left(p^{2} - (m^{2} + m_{e}^{2})\right)} = 0 \tag{۶}$$

در نتیجه این نمودار سهمی در کنش مؤثر ندارد. در بخش بعد، به محاسبه تابع سه–نقطه‌ای فوتون می‌پردازیم. به علت تشابه محاسبات ابعاد ۲و٤ را در یک بخش و ۳ بعد را در یک بخش مجزا بررسی می‌کنیم.

تابع سه–نقطه‌ای فوتون در ابعاد ۲و٤

با استفاده از قوانین فاینمن مجموع دامنه دو نمودار مثلثی a , b در شکل (۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(a+b)} = -e^{2}\int \frac{d^{d}p}{(2\pi)^{d}} \frac{1}{(u^{2}-\mu^{2})(p^{2}-\mu^{2})(r^{2}-\mu^{2})}\left(\delta^{\nu}_{\alpha} + \frac{m^{2}}{2}\frac{n_{\alpha}\, n^{\nu}}{n.u\;\; n.p}\right)$$
$$\times\left(\delta^{\rho}_{\beta} + \frac{m^{2}}{2}\frac{n_{\beta}\, n^{\rho}}{n.p\;\; n.r}\right)\left(\delta^{\mu}_{\lambda} + \frac{m^{2}}{2}\frac{n_{\lambda}\, n^{\mu}}{n.r\;\; n.u}\right)(\boldsymbol{M}^{\alpha\beta\lambda} + \boldsymbol{N}^{\beta\alpha\lambda}), \tag{۷}$$

که در آن $u = p - k$ و d نشاندهنده بعد فضا–زمان است. تانسورهای $\boldsymbol{M}^{\alpha\beta\lambda}$ و $\boldsymbol{N}^{\beta\alpha\lambda}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{M}^{\alpha\beta\lambda} = Tr\left[(\not{u}+m_e)\gamma^\alpha(\not{p}+m_e)\gamma^\beta(\not{p}+m_e)\gamma^\lambda\right],$$
$$\boldsymbol{N}^{\beta\alpha\lambda} = -\mathrm{Tr}\left[(\not{p}-m_e)\gamma^\beta(\not{p}-m_e)\gamma^\alpha(\not{u}-m_e)\gamma^\lambda\right]. \qquad (۸)$$

با استفاده از رابطه چرخشی رد ماتریس‌های دیراک، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{N}^{\beta\alpha\lambda} = -\boldsymbol{M}^{\alpha\beta\lambda}, \qquad (۹)$$

در نتیجه مجموع دامنه دو نمودار مثلثی مشابه نظریه الکترودینامیک معمولی قبل از انتگرال‌گیری صفر می‌شود:

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(a+b)} = 0. \qquad (۱۰)$$

با استفاده از قوانین فاینمن ذکر شده، دامنه نمودار c به صورت زیر می باشد:

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(c)} = -\frac{m^2}{2}e^2 n^\nu n^\rho \int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p^2-\mu^2)(u^2-\mu^2)}\left(\frac{1}{n.(u+q)}+\frac{1}{n.(u+s)}\right)\left\{\frac{1}{n.p\ n.u}\right.$$
$$\left.\times Tr[\gamma^\mu(\not{u}+m_e)\not{n}(\not{p}+m_e)]+\frac{m^2}{2}\frac{n^\mu}{(n.p\ n.u)^2}Tr[\not{n}(\not{u}+m_e)\not{n}(\not{p}+m_e)]\right\}, \qquad (۱۱)$$

که در آن از صفر بودن اندازه چهار– بردار نورگونه استفاده شده است. با کمی محاسبه به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(c)} = \Theta^{\mu\nu\rho}_i(J^+_i + J^-_i) + (\Psi_j)^{\mu\nu\rho}_\sigma(J^{\sigma+}_j - J^{\sigma-}_j), \qquad i = 1,2,5,6; \quad j = 3,4, \qquad (۱۲)$$

که در آن عبارات تانسوری $\Theta^{\mu\nu\rho}_i$ و $(\Psi_j)^{\mu\nu\rho}_\sigma$ برحسب تکانه‌های k,q و بردار نور گونه ثابت هستند. انتگرال‌های $\boldsymbol{J}^{\pm}_{i=1,2,5,6}$ و $\boldsymbol{J}^{\sigma\pm}_{j=3,4}$ نیز به صورت زیر می‌باشند:

$$(J^{\pm}_1, J^{\sigma\pm}_2, J^{\pm}_5) = \int_0^1 dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{(1,p^\sigma,p^2)}{(p^2\pm 2x(p.k)-\Phi^2)^2}\frac{1}{n.p}, \qquad \Phi^2 = \mu^2 - x\ k^2.$$
$$(J^{\pm}_3, J^{\sigma\pm}_4, J^{\pm}_6) = \int_0^1 dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{(1,p^\sigma,p^2)}{(p^2\pm 2p.(q-xk)-\Omega^2)^2}\frac{1}{n.p}, \qquad \Omega^2 = \mu^2 - x\ k^2 + 2x\ k.q - q^2. \qquad (۱۳)$$

با بکارگیری نسخه مندلستام–لیبرندت می‌توان نشان داد که در انتگرال‌های (۱۳)، رابطه زیر برقرار است[۸]:

$$\boldsymbol{J}^{\pm}_i = -\boldsymbol{J}^{\mp}_i, \qquad \boldsymbol{J}^{\sigma\pm}_j = \boldsymbol{J}^{\sigma\mp}_j. \qquad (۱۴)$$

با قرار دادن نتیجه بالا در رابطه (۱۳)، مقدار کل دامنه نمودار (c) برابر است با:

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(c)} = 0. \qquad (۱۵)$$

حال دامنه متناظر با نمودار (d) با توجه به شکل (۲) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(d)} = -\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{-ie^2m^2}{2}Tr\left[\frac{i(\not{p}+m_e)}{p^2-\mu^2}\not{n}\frac{n^\mu n^\nu n^\rho}{(n.p)^2}\left[\left(\frac{1}{n.(p+k)}+\frac{1}{n.(p+q)}\right)\frac{1}{n.(p+k+q)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{n.(p+k)}+\frac{1}{n.(p+s)}\right)\frac{1}{n.(p+k+s)}+\left(\frac{1}{n.(p+q)}+\frac{1}{n.(p+s)}\right)\frac{1}{n.(p+q+s)}\right]\right]. \qquad (۱۶)$$

با اعمال ردگیری و انجام ساده سازی‌های لازم با استفاده از رابطه پایستگی انرژی–تکانه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(d)} = \frac{d}{2}e^2m^2n^\mu n^\nu n^\rho\left\{-4\left(\frac{1}{n.k\ n.q}+\frac{1}{n.s\ n.k}+\frac{1}{n.s\ n.q}\right)\boldsymbol{I}\right.$$
$$\left.+\frac{\boldsymbol{H}^{(-)}_2+\boldsymbol{H}^{(+)}_2}{n.(s+k)\ n.(s+q)}+\frac{\boldsymbol{H}^{(-)}_2+\boldsymbol{H}^{(+)}_2}{n.(q+k)\ n.(q+s)}+\frac{\boldsymbol{H}^{(-)}_1+\boldsymbol{H}^{(+)}_1}{n.(k+q)\ n.(k+s)}\right\}, \qquad (۱۷)$$

که $\boldsymbol{I}$ و $\boldsymbol{H}^{(\pm)}_i$ برابرند با:

$$\boldsymbol{I} \equiv \int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p^2-\mu^2)(n.p)} = 0, \quad \boldsymbol{H}^{(\pm)}_i = \int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{((p\pm q_i)^2-\mu^2)(n.p)}, \qquad i = 1,2,3. \qquad (۱۸)$$

اما به کمک نسخه مندلستام–لیبرندت، می‌توان نشان داد:

$$\boldsymbol{H}^{(-)}_i = -\boldsymbol{H}^{(+)}_i. \qquad (۱۹)$$

سرانجام با قرار دادن رابطه (۱۹) در عبارت (۱۷) دامنه این نمودار نیز صفر بدست می‌آید.

$$\Pi^{\mu\nu\rho}_{(d)} = 0. \qquad (۲۰)$$

با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده در روابط (۱۰)، (۱۵) و (۲۰)، نتیجه می‌گیریم دامنه کل مربوط به تابع سه–نقطه‌ای فوتون در VSR-QED ۲و۴ بعدی صفر است.

$$\Pi^{\mu\nu\rho} = \Pi^{\mu\nu\rho}_{(a+b)} + \Pi^{\mu\nu\rho}_{(c)} + \Pi^{\mu\nu\rho}_{(d)} = 0. \qquad (۲۱)$$

صفر شدن دامنه کل تابع سه–نقطه‌ای نشان می‌دهد که تقارن همیوغ باری در این بخش حفظ شده است.

تابع سه–نقطه‌ای فوتون در ۳ بعد

به طور مشابه با استفاده از قوانین فاینمن شکل(۱) مجموع دامنه دو نمودار مثلثی a , b به صورت رابطه (۷) داده می‌شود. با محاسبه مشابه بخش قبل، همچنان $\boldsymbol{N}^{\beta\alpha\lambda} = -\boldsymbol{M}^{\alpha\beta\lambda}$است. لذا سهم $\Pi^{\mu\nu\rho}_{(a+b)} = 0$ قبل از انتگرال‌گیری صفر خواهد شد. به طور مشابه دامنه نمودار c با رابطه (۱۱) داده می‌شود. در اینجا عبارات تانسوری $\Theta^{\mu\nu\rho}_i$ و $(\Psi_j)^{\mu\nu\rho}_\sigma$ متفاوت از این عبارات در ۲ و ٤ بعد بوده و علاوه بر تکانه ها و بردار ثابت نورگونه متناسب با تانسور لوی چیتا نیز می‌باشد. زیرا رد ماتریسهای فرد دیراک در اینجا غیر صفر می‌باشد. درنتیجه ملاحظه می‌کنیم که در d=۳ نیز دامنه نمودار c صفر می‌شود. دامنه متناظر با نمودار (d) نیز با رابطه (۱٦) داده شده است. با محاسبه به مشابه رابطه (۱۷) می‌رسیم که به جای ضریب $\frac{d}{2}$ یک قرار می‌گیرد. دامنه $\Pi^{\mu\nu\rho}_{(d)} = 0$ نیز صفر بدست می‌آید. با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده نتیجه می‌گیریم دامنه کل مربوط به تابع سه–نقطه ای فوتون در VSR-QED ۳ بعدی صفر است. در واقع، در روش اختلالی تنها تفاوت محاسباتی در ابعاد مختلف فضا–زمان در محاسبه رد ماتریس های دیراک می‌باشد. رد تعداد فردی از ماتریس های دیراک در ۳ بعد بر خلاف

۲و٤ بعد صفر نمی‌باشد. همچنین ضریب عددی که در رد تعداد زوجی از ماتریس های دیراک ظاهر می‌شود در ابعاد ۳ و ۲و٤ متفاوت هست. اما با وجود این تفاوت‌ها، هم چنان نتایج اختلالی مربوط به دامنه کل توابع فرد–نقطه‌ای یکسان به دست آمده و صفر می‌باشد.

نتیجه گیری

در این مقاله، به بررسی تقارن همیوغ باری در نظریه الکترودینامیک کوانتومی با نقض تقارن لورنتس در چارچوب نسبیت خیلی خاص در ابعاد مختلف فضا–زمان پرداختیم. ابتدا کنش این مدل را در سطح کلاسیکی در d بعد تحت تبدیل همیوغ بار بررسی کرده و نشان دادیم که تقارن همیوغ باری برقرار هست. سپس به مطالعه این تقارن در حد حلقه (کوانتومی) پرداختیم. برای این منظور، ابتدا ساختار کلی کنش مؤثر فوتون را به شکل یک سری به دست آوردیم. در ادامه با تمرکز بر جملات با تعداد فرد پای خارجی فوتون، به محاسبه دقیق توابع یک و سه– نقطه‌ای فوتون در d=۲,۳,٤ در حد تک–حلقه پرداختیم. مقدار دامنه تابع تک–نقطه‌ای که فقط شامل یک نمودار حلقه بود در d بعد صفر شد. نمودارهای توابع سه– نقطه‌ای هم به طور مجزا در دو بخش ۲و ٤ بعد و ۳ بعد محاسبه شد. ملاحظه کردیم که مجموع دامنه دو نمودار مثلثی و نیز هر کدام از نمودارهای نشأت گرفته از نسبیت خیلی خاص هم در ۲و ٤ بعد و هم در ۳ بعد صفر شدند. تنها تفاوت محاسبات در ابعاد زوج و فرد فضا–زمان در رد ماتریس‌های دیراک است که در بعد دو و چهار مشابه بوده و فقط با یک ضریب متفاوتند. اما در ۳ بعد رد ماتریسهای فرد گاما نیز برحسب تانسور لوی چیتا ظاهر شد. اما در نهایت پس از محاسبات ملاحظه کردیم که این سهم حذف شده و تابع سه نقطه‌ای فوتون در همه ابعاد محاسبه شده صفر شد و همان طور که انتظار داشتیم تقارن همیوغ باری مستقل از ابعاد فضا–زمان بوده و در سطح کوانتومی نیز مانند سطح کلاسیکی حفظ شد. پس همان طور که تقارن همیوغ باری در الکترودینامیک کوانتومی با تقارن فضا–زمانی لورنتس در حد کوانتومی به طور کامل حفظ می شود، در الکترودینامیک کوانتومی با نقض تقارن لورنتس در چارچوب نسبیت خیلی خاص نیز حفظ شده و ناهنجاری همیوغ باری در ابعاد مختلف رخ نمی‌دهد.

مراجع

[۱] S. Weinberg, “Effective Field Theory, Past and Future”, PoS CD ۰۹, ۰۰۱ (۲۰۰۹).

[۲] A. G. Cohen and S. L. Glashow, “Very special relativity”, Phys. Rev. Lett ۹۷(۲۰۰٦) ۰۲۱٦۰۱.

[۳] A. G. Cohen and S. L. Glashow, “A Lorentz Violating Origin of Neutrino Mass?”, hep-ph/۰٦۰٥۰۳٦.

[٤] S. Cheon, C. Lee and S.J Lee, “SIM(۲)-invariant Modifications of Electrodynamics Theory”, Phys. Lett. B ٦۷۹(۲۰۰۹) ۷۳.

[٥] J. Alfaro and A.Soto, “Schwinger model a la Very Special Relativity”, Phys. Lett. B ۷۹۷(۲۰۱۹) ۱۳٤۹۲۳

[٦] R. Bufalo, M. Ghasemkhani, Z. Haghgouyan, A. Soto, “Induced Maxwell-Chern-Simons Effective Action in Very Special Relativity”, Eur. Phys. J. C ۸۰(۲۰۲۰) ۱۱۲۹.

[۷] قاسم‌خانی، معصومه؛ حق‌گویان، زینا؛ « مطالعه ناوردایی همیوغ باری در الکترودینامیک کوانتومی با تقارن (۲) SIM »؛ *مجلهٔ فیزیک*، سال **۱٤۰۱**، پذیرفته شده برای انتشار در مجله.

[۸] J. Alfaro, “Mandelstam-Leibbrandt prescription”, Phys. Rev. D ۹۳ (۲۰۱٦) ٦, ۰٦٥۰۳۳.

نظریه کوانتمی میرایی: رهیافت عملگر چگالی بدون تقریب موج چرخان

الله‌کرم مرعشی نسب
گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد
a.marashi2020@gmail.com

محمدکاظم توسلی
گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد
mktavassoly@yazd.ac.ir

چکیده

در این مقاله برهم‌کنش میدان (و نیز یک اتم دوترازی) را با یک ذخیره‌ساز (محیط اتلاف‌گر) در نظر می‌گیریم. ذخیره‌ساز شامل تعداد زیادی نوسانگر هماهنگ است و نقش اتلاف میدان یا اتم را ایفا می‌کند. تاکنون، در این رهیافت میرایی، که به معادله مستر یا لیندبلاد می‌انجامد، تقریب موج چرخان لحاظ شده است و از جملات پادچرخان در هامیلتونی برهم‌کنش صرف‌نظر شده است. هدف ما در این مقاله بدست آوردن معادله مستر در غیاب تقریب موج چرخان است (بدیهی است از همان رهیافت عملگر چگالی استفاده می‌کنیم). شایان ذکر است که مساله را برای دو محیط اتلاف‌گر چلانده و حرارتی محاسبه می‌کنیم و در نهایت با یک مثال ساده میرایی اتمی بحث را به پایان می‌بریم.

کلیدواژه‌ها :میرایی میدان، میرایی اتمی، معادله مستر تعمیم‌یافته، برهم‌کنش اتم–میدان.

Theory of damping: density operator approach without rotating wave approximation

Marashinasab, Allahkaram; Tavassoly, Mohamad Kazem
Optic and Laser Group, Faculty of Science, Yazd University

Abstract

In this paper, we consider the field (and also a two-level atom) interacting with a reservoir (dissipative environment). The reservoir contains a large number of oscillators and plays the role of damping. So far, in this damping approach,which leads to the master or Lindblad equations, the rotatingwave approximation (RWA) terms are taken into account, i.e. the counter rotating terms are ignored. Our aim is now to obtain the master equation beyond RWA (obviously we choose the density operator approach). Note that, we consider the squeezed and thermal reservoirs. Finally, we apply our approach to a simple atomic damping example.

Keywords: Field damping, Atomic damping, Generalized master equation, Atom- field interaction.
PACS NO.: 32

مقدمه

نقش مهم میرایی در سامانه‌های مختلف اپتیک کوانتمی تحت عنوان سامانه‌های کوانتومی باز مطرح می‌شود، بدین معنا که سامانه به طور اجتناب‌ناپذیری با محیط پیرامونش برهم‌کنش می‌کند[1].

میرایی را با رهیافت عملگر چگالی و به روش هایزنبرگ بررسی می‌کنیم.سامانه یک میدان تک‌مد (یا یک اتم دوترازی) است که با ذخیره‌ساز (محیط) برهم‌کنش می‌کند و معادلات تحول زمانی عملگرچگالی میدان (اتم) را بدست می‌آوریم. این معادلات به میرایی ونویز وابسته هستند. با یک هامیلتونی، البته بدون تقریب

موج چرخان (RWA)، شروع می‌کنیم. سپس تحول زمانی عملگر چگالی را بدست می‌آوریم. عملگر چگالی وابسته به محیط – سامانه است، اما با ردگیری روی درجات آزادی ذخیره‌ساز، معادلات حاکم بر تحول زمانی عملگر چگالی اتمی و عملگر چگالی میدان را برای دو محیط متفاوت، ذخیره‌سازهای چلانده و گرمایی بدست می‌آوریم. روابط نهایی را به گونه‌ای می‌نویسیم که نقش جملات پادچرخان کاملا" آشکار شود. اهمیت چنین پژوهش‌هایی در این واقعیت عینی نهفته است که تقریب RWA، فقط در مورد برهم‌کنش‌های ضعیف صحیح است. بویژه در برهم‌کنش‌های اتم–میدان قوی که امروزه در کیوبیت‌های ابررسانا به سادگی قابل دسترس و اتفاقا بسیار هم پرکاربرد است، این تقریب اساسا" صحیح نیست.

نظریه کلی میرایی بدون تقریب موج چرخان

سامانه‌ای شامل یک میدان تک‌مد و محیط را با بی‌نهایت نوسانگر هماهنگ (با مدهای فونونی) در نظر می‌گیریم. هامیلتونی کل این برهم‌کنش در تصویر برهم‌کنش به شکل $H = H_0 + H_1$ بیان می‌شود که در آن هامیلتونی آزاد سامانه به شکل زیر توصیف می‌شود:

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \sum_k \hbar\nu_k b^\dagger_k b_k \ , \qquad (۱)$$

هامیلتونی برهم‌کنش بین میدان و محیط بدون تقریب RWA به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_1 = \hbar\sum_k g_k (b_k{}^\dagger a + a_k{}^\dagger b_k) + \hbar\sum_k g_k (b_k{}^\dagger a^\dagger + a b_k), \quad (۲)$$

که در آن a، $a^\dagger$، b، $b^\dagger$، ω و $g_{k'}$ به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق میدان، عملگر نابودی و خلق مربوط به مدهای فونونی محیط، بسامد میدان و جفت‌شدگی بین مد k–ام میدان و محیط هستند. حال، تحول زمانی عملگر میدان را از روش هایزنبرگ بدست می‌آوریم $\dot{a} = \frac{i}{\hbar}[H,a]$. با توجه به این رابطه و هامیلتونی (۲) به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$\dot{a} = -i\omega a - i\sum_{k'} g_{k'} b_{k'} - i\sum_{k'} g_{k'} b^\dagger_{k'} . \qquad (۳)$$

همچنین برای عملگرهای محیط داریم: $\dot{b}_k = \frac{i}{\hbar}[H, b_k]$. به کمک این رابطه و با استفاده از هامیلتونی (۱)، می‌توانیم رابطه زیر را برای عملگر نابودی متناظر با ذخیره‌ساز بدست آوریم:

$$b_k(t) = b_k(0)e^{-i\nu_k t} - i\int_0^t g_k(a(t') + a^\dagger(t'))e^{-i\nu_k(t-t')}dt'. \quad (٤)$$

به کمک رابطه (٤) به آسانی $b_k^\dagger$ بدست می‌آید. آن‌ها را در رابطه (۳) جایگذاری می‌کنیم و با فرض $\tilde{a}(t) = a(t)e^{i\omega t}$ تحول زمانی $\tilde{a}(t)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم که بوضوح به میرایی و نوفه وابسته است[2]:

$$\tilde{a}(t) = F'_{\tilde{a}}(t) + F''_{\tilde{a}}(t) - \frac{1}{2}C'\tilde{a}^\dagger(t) - \frac{1}{2}C'\tilde{a}(t) + \frac{1}{2}C''\tilde{a}^\dagger(t) + \frac{1}{2}C''\tilde{a}(t), \qquad (۵)$$

که در آن عبارت‌های زیر را برای عملگرهای نوفه و میرایی تعریف کرده‌ایم:

$$F'_{\tilde{a}}(t) = -i\sum_{k'} g_{k'} b_{k'}(0)e^{-i(\nu_{k'}-\omega)t},$$

$$F''_{\tilde{a}}(t) = -i\sum_{k''} g_{k''} b_{k''}{}^\dagger(0)e^{i[\nu_{k''}+\omega]t},$$

$$C' = -\sum_{k'}\int_0^t g_{k'}^2 e^{-i\nu_{k'}(t-t')}e^{i\omega(t+t')}dt',$$

$$C'' = \sum_{k'}\int_0^t g_{k''}^2 e^{i(\nu_{k''}+\omega)(t-t')}dt' . \qquad (۶)$$

عملگر چگالی کل، مربوط به سامانه–ذخیره‌ساز را با ρ_{SR} نشان می‌دهیم. عملگر چگالی کاهش‌یافته سامانه، ρ_S با ردگیری روی درجات آزادی محیط بر اساس رابطه زیر به‌دست می‌آید[3]:

$$\dot{\rho}_s(t) = -\frac{i}{\hbar}Tr_R[V(t), \rho_{SR}(t_i)] - \frac{i}{\hbar^2}Tr_R\int_{t_i}^t [V(t),[V(t'),\rho_{SR}(t')]]dt' . \qquad (۷)$$

در ادامه با در نظر گرفتن یک سامانه اتمی، برهم‌کنش آن را با دو محیط حرارتی و چلانده، به عنوان منابع اتلاف، بررسی و معادلات تحول زمانی سامانه را در هر مورد به طور جداگانه به دست می‌آوریم. با توجه به بزرگ بودن حجم محاسبات در این مقاله فقط به ارائه نتایج اکتفا می‌کنیم.

تحول زمانی عملگر چگالی اتمی برای محیط‌های حرارتی وچلانده

سامانه را یک اتم دوترازی در نظر می‌گیریم.با در نظر گرفتن جملات پادچرخان (بدون تقریب RWA) هامیلتونی برهم‌کنش در تصویر برهم‌کنش اتم–ذخیره‌ساز به صورت زیر نوشته می‌شود[4]:

$$V(t)=\hbar\sum_k g_k\left(b_k^\dagger\sigma_- e^{-i(\omega-\nu_k)t}+b_k\sigma_+ e^{i(\omega-\nu_k)t}+b_k\sigma_- e^{-i(\omega+\nu_k)t}+b_k^\dagger\sigma_+ e^{i(\omega+\nu_k)t}\right). \qquad (۸)$$

حال اگر رابطه (۸) را در رابطه (۷) جایگذاری کنیم، با ردگیری روی میدان و پس از محاسباتی طولانی معادله حاکم بر تحول زمانی عملگر چگالی اتمی برای حالت‌های حرارتی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot\rho_{atom}(t)=\dot\rho_{at}^{RWA}+\dot\rho_{at}^{WRWA}, \qquad (۹)$$

که در آن بخش‌های مربوط به تحول زمانی عملگر چگالی اتمی در تقریب RWA [1] و بدون تقریب (WRWA) به ترتیب به شکل زیر بدست آمده‌اند:

$$\dot\rho_{atom}^{RWA}(t)=-n_{th}\frac{\Gamma}{2}(\rho_{at}\sigma_-\sigma_+-\sigma_+\rho_{at}\sigma_-)-(n_{th}+1)\frac{\Gamma}{2}(\rho_{at}\sigma_+\sigma_--\sigma_-\rho_{at}\sigma_+),$$

$$\dot\rho_{at}^{WRWA}=-n_{th}\frac{\Gamma}{2}(\rho_{at}\sigma_+\sigma_--2\sigma_-\rho_{at}\sigma_--\sigma_-\rho_{at}\sigma_+)-(n_{th}+1)\frac{\Gamma}{2}(\rho_{at}\sigma_-\sigma_+-2\sigma_-\rho_{at}\sigma_--\sigma_+\rho_{at}\sigma_-)+H.C. \qquad (۱۰)$$

که در آن n_{th} متوسط تعداد فوتون‌های حرارتی است. بخش اول عبارت معادله (۱۰) دقیقا در مرجع [1] بدست آمده است.

به همین شکل برای محیط چلانده نیز تحول زمانی عملگر چگالی اتم شامل دو جمله به صورت زیر است:

$$\dot\rho_{atom}(t)=\dot\rho_{atom}^{RWA}(t)+\dot\rho_{atom}^{WRWA}, \qquad (۱۱)$$

که در آن داریم:

$$\dot\rho_{atom}^{RWA}(t)=\frac{\Gamma}{2}\cosh^2 r(-\sigma_+\sigma_-\rho_{at}+\sigma_-\rho_{at}\sigma_+)+\frac{\Gamma}{2}\sinh^2 r(-\sigma_-\sigma_+\rho_{at}+\sigma_+\rho_{at}\sigma_-)-\Gamma\sinh r\cosh r\, e^{(-i\theta)}\sigma_-\rho_{at}\sigma_-+H.C \qquad (۱۲)$$

$$\dot\rho_{atom}^{WRWA}=\frac{\Gamma}{2}\cosh^2 r\,(2\sigma_-\rho_{at}\sigma_-+\sigma_+\rho_{at}\sigma_--\rho_{at}\sigma_-\sigma_+)+\frac{\Gamma}{2}\sinh^2 r\,(2\sigma_-\rho_{at}\sigma_-+\sigma_-\rho_{at}\sigma_+-\sigma_+\sigma_-\rho_{at})+\frac{\Gamma}{2}\sinh r\cosh r\, e^{(-i\theta)}(\sigma_-\rho_{at}\sigma_++\sigma_+\rho_{at}\sigma_--\rho_{at}\sigma_-\sigma_+-\sigma_+\sigma_-\rho_{at})+H.C. \qquad (۱۳)$$

بخش اول عبارت معادله (۱۳) دقیقا در مرجع [1] بدست آمده است.

حال سامانه برهم‌کنشی میدان–محیط در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن جملات پادچرخان (بدون تقریب RWA) هامیلتونی برهم-کنش در تصویر برهم‌کنش را با رابطه زیربیان می‌کنیم[5]:

$$V(t)=\hbar\sum_k g_k\left(b_k^\dagger a e^{-i(\omega-\nu_k)t}+a_k^\dagger b_k e^{i(\omega-\nu_k)t}+b_k^\dagger a^\dagger e^{i(\omega+\nu_k)t}+a b_k e^{-i(\omega+\nu_k)t}\right). \qquad (۱٤)$$

حال اگر رابطه (۱٤) را در رابطه (۷) جایگذاری کنیم، با ردگیری روی ذخیره‌ساز، و پس از محاسباتی طولانی معادله حاکم بر تحول زمانی عملگر چگالی میدان برای ذخیره‌ساز چلانده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot\rho_F(t)=\dot\rho_F^{RWA}(t)+\dot\rho_F^{WRWA},$$

که در آن،

$$\dot\rho_F^{RWA}(t)=-\frac{C}{2}\sinh^2 r(aa^\dagger\rho-a^\dagger\rho a)-\frac{C}{2}\cosh^2 r(a^\dagger a\rho-a\rho a^\dagger)+\frac{C}{2}\sinh r\cosh r\, e^{-i\theta}(aa\rho-2a\rho a+\rho aa)+H.C,$$

$$\dot{\rho}_F^{WRWA} = -\frac{C}{2}\sinh^2 r(-a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a + a^2\rho - 2a\rho a + \rho a^2) - \frac{C}{2}\cosh^2 r(-a^\dagger\rho a + \rho a a^\dagger + \rho a a^\dagger + a^{\dagger 2}\rho - 2a^\dagger\rho a^\dagger + \rho a^{\dagger 2}) + \frac{C}{2}\sinh r\cosh r\, e^{-i\theta}(2aa^\dagger\rho - 2a\rho a^\dagger - 2a^\dagger\rho a + \rho a^\dagger a + a^\dagger a\rho + a^{\dagger 2}\rho - 2a^\dagger\rho a^\dagger + \rho a^{\dagger 2}) + H.C. \quad (۱۵)$$

بخش اول عبارت معادله (۱۵) دقیقا در مرجع [1] بدست آمده است. به همین طریق، برای میرایی میدان در محیط گرمایی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\dot{\rho}_F(t) = \dot{\rho}_F^{RWA}(t) + \dot{\rho}_F^{WRWA}, \quad (۱۶)$$

که در آن،

$$\dot{\rho}_F^{RWA}(t) = -\frac{C}{2}n_{th}(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho a a^\dagger) - \frac{C}{2}(n_{th}+1)(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a).$$

$$\dot{\rho}_F^{WRWA} = -\frac{C}{2}n_{th}(-a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a + a^2\rho - 2a\rho a + \rho a^2) - \frac{C}{2}(n_{th}+1)(-a^\dagger\rho a + \rho a a^\dagger + a^{\dagger 2}\rho - 2a^\dagger\rho a^\dagger + a^2\rho) + \mathrm{H.C.} \quad (۱۷)$$

بخش اول عبارت معادله (۱۷) دقیقا در مرجع [1] بدست آمده است. نتایج به‌دست آمده در تمام روابط (۱۰) و (۱۳) و (۱۵) و (۱۷)، به وضوح نشان می‌دهند که جملات توصیف‌کننده $\dot{\rho}_F^{WRWA}$ از بخش جملات پادچرخان هامیلتونی‌های سامانه‌های در نظر گرفته شده ناشی شده‌اند.

به عنوان نمونه‌ای از کاربرد رهیافت ارائه شده در این مقاله، معادلات حرکت برای مقادیر چشمداشتی عملگرهای اتمی σ_x، σ_y، σ_z به صورت زیر برای هر دوحالت چلانده و حرارتی حاصل می‌شود [1]:

$$\langle\dot{\sigma}_x\rangle_{ss} = \langle\dot{\sigma}_x\rangle_{th} = \mathrm{Tr}(\dot{\rho}_{at}\sigma_x) = 0, \quad (۱۸)$$

$$\langle\dot{\sigma}_y\rangle_{ss} = -2\Gamma\cosh^2 r\langle\sigma_y\rangle - 2\Gamma\langle\sigma_y\rangle - 2\Gamma e^{-i\theta}\sinh r\cosh r\langle\sigma_y\rangle - 2\Gamma e^{i\theta}\sinh r\cosh r\langle\sigma_y\rangle, \quad (۱۹)$$

$$\langle\dot{\sigma}_y\rangle_{th} = -2(n_{th}+1)\langle\sigma_y\rangle - 2n_{th}\Gamma\langle\sigma_y\rangle, \quad (۲۰)$$

$$\langle\dot{\sigma}_z\rangle_{ss} = \Gamma\cosh^2 r\langle\sigma_z\rangle - \Gamma\sinh^2 r\langle\sigma_z\rangle - \Gamma e^{-i\theta}\sinh r\cosh r\langle\sigma_z\rangle - \Gamma e^{i\theta}\sinh r\cosh r\langle\sigma_z\rangle, \quad (۲۱)$$

$$\langle\dot{\sigma}_z\rangle_{th} = \Gamma(n_{th}+1)\langle\sigma_z\rangle + n_{th}\Gamma\langle\sigma_z\rangle, \quad (۲۱)$$

نتیجه‌گیری

در این پژوهش برهم‌کنش میرای یک سامانه شامل یک اتم دو-ترازی (و سپس یک میدان تک‌مد) با محیط که نقش میرایی را بازی می‌کند را بدون اعمال تقریب موج چرخان (با در نظر گرفتن جملات پادچرخان) در هامیلتونی برهم‌کنش سامانه‌ها با محیط، بررسی کردیم. محیط را شامل بی‌نهایت نوسانگر هماهنگ در نظر گرفتیم. معادلات تحول زمانی عملگر چگالی اتم و میدان و به تعبیری معادله مستر یا لیندبلاد تعمیم‌یافته را در حضور ذخیره‌سازهای حرارتی و چلانده به‌دست آوردیم. با توجه به تغییرات بزرگی که در معادلات عمگر چگالی مشاهده می‌شود انتظار می‌رود که بخش عملگر چگالی که برآمده از جملات پادچرخان است تغییرات و اصلاحات عمده‌ای در نتایج پیشین ایجاد کند. به عنوان یک نمونه به مثالی که در مرجع [4] حل شده و ما نیز اقدام به حل آن نمودیم اشاره می‌کنیم. گذشته از تغییراتی که در هر سه عملگر اتمی مشاهده کردیم، در یکی آنها به یک مقدار ثابت رسیدیم که بسیار تامل برانگیز است.

مراجع

[1]M. Lax,Quantum Noise. IV. Quantum Theory of Noise Sources, Phys. Rev. 145, 110(1966).
[2] Quantum Optics, Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy (Cambridge University, 1998).
[3]W. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (Wiley, New York 1974).
[4]Angel Rivas, Angel Rivas ,Susana F. Huelga, Open Quantum Systems, An Introduction (Springer, 2012)

وابستگی نوسانات سطح وزیکول لیپیدی به دما

سمانه قنبری کاشان*
دانشجوی دکتری پژوهشکده علوم و فناوری نانو، دانشگاه کاشان
ghanbari.samaneh@gmail.com

نرگس نیکوفرد
استاد پژوهشکده علوم و فناوری نانو، دانشگاه کاشان
nikoofard@kashanu.ac.ir

چکیده

غشاهای بیولوژیکی در زندگی همه جا وجود دارند و پوششی را تشکیل می‌دهند که از طریق آن سلول‌ها و اندامک‌ها با محیط اطراف خود برهمکنش می‌کنند در مورد غشاهای بسته، لایه‌های دولایه لیپیدی که عمدتاً از مولکول‌های فسفولیپیدی تشکیل شده‌اند، اغلب وزیکول‌های بسته را تشکیل می‌دهند که می‌توان یک وزیکول لیپیدی را به عنوان مدل ساده شده آن در نظر گرفت. این غشاها به شدت به حرارت حساس هستند و بنابراین تجزیه و تحلیل کمی افزایش نوسانات وزیکول‌های لیپیدی در اثر افزایش دما که منجر به پارگی این غشاها می شوند حائز اهمیت است. در این تحقیق مروری بر نظریات گذشته در مورد وابستگی نوسانات گرمایی به اندازه وزیکول و دما شده است و همزمان با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی درشت‌دانه، تأثیر افزایش دما روی پایداری وزیکول‌های چندلیپیدی بررسی شد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نظریه همخوانی ندارد که نشان می‌دهد سیستم شبیه‌سازی شده خارج از تعادل است.

کلید واژه‌ها: وزیکول لیپیدی، دما، شبیه‌سازی، نوسانات سطح، تعادل، غشاهای بیولوژیکی.

Temperature dependence of lipid vesicle surface fluctuations

Ghanbari-Kashan, Samaneh*; Nikoofard, Narges

Institute of Nanoscience and Nanotechnology, University of Kashan, Kashan

Abstract

Biological membranes are ubiquitous in life and form the covering through which cells and organelles interact with their surroundings. In the case of closed membranes, lipid bilayers composed primarily of phospholipid molecules often form closed vesicles that can considered a lipid vesicle as its simplified model. These membranes are highly sensitive to heat, and therefore, it is important to quantitatively analyze the increase in fluctuations of lipid vesicles due to the increase in temperature, which lead to the rupture of these membranes. In this research, the past theories about the dependence of thermal fluctuations on vesicle size and temperature have been reviewed, and at the same time, using coarse-grained molecular dynamics simulation, the effect of temperature increase on the stability of polylipid vesicles has been investigated. The simulation results do not agree with the theory, which shows that the simulated system is out of equilibrium.

key words: *Lipid vesicle, Temperature, Simulation, Surface fluctuations, Equilibrium, Biological membranes.*

مقدمه

بیش از صد سال است که فیزیولوژیست‌ها به خوبی می‌دانند که گلبول‌های قرمز سوسو می‌زنند که نشان‌دهنده نوسانات غشاهای بیولوژیکی است. در واقع غشاهای بیولوژیکی در زندگی همه جا وجود دارند و پوششی را تشکیل می‌دهند که از طریق آن سلول‌ها و اندامک‌ها با محیط اطراف خود برهمکنش می‌کنند. به طور قابل توجهی این غشاها به صورت بسته و باز در دماهای فیزیولوژیکی موج می‌زنند. این نوسانات حرارتی طیف گسترده‌ای از پدیده‌های بیوفیزیکی را تحت تأثیر قرار می‌دهد که این خود می‌تواند از حرکت جمعی گرمایی مولکول‌های لیپید ناشی شود [۱ و ۲].

در مورد غشاهای بسته، لایه‌های دولایه لیپیدی که عمدتاً از مولکول‌های فسفولیپیدی تشکیل شده‌اند، اغلب وزیکول‌های بسته

را تشکیل می‌دهند. نوسانات حرارتی یک وزیکول می‌تواند تغییر شکل وزیکول، تشکیل حفره در وزیکول، شروع واپاشی و در تهایت پارگی غشای فسفولیپیدی را منجر شود در نتیجه ارزیابی نوسانات حرارتی غشاها مسئله بسیار مهمی هستند چون می‌توان از آنها به اطلاعاتی در مورد نحوه واپاشی غشای یک ویروس در دمای بالا دست یافت.

در مقیاس طول مزوسکوپی برای ارزیابی نظری نوسانات حرارتی یک غشا، یک هامیلتونی موثر از غشا در نظر گرفته شد که برای وزیکول‌های بسته یا مورد ساده‌تر دولایه‌های لیپیدی باز مسطح، انرژی الاستیک تغییر شکل غشا توسط رابطه زیر داده می‌شود [۲]:

$$F = F_S + F_B + F_G \qquad (۱)$$

جمله اول F_S انرژی مرتبط با حفظ سطح است و جمله دوم و سوم مربوط به دلیل تشکیل انحنا است که به ترتیب F_B انرژی خمشی است و F_G انرژی انحنای گاوسی است.

برای سطوح بسته، تا مادامی که شکل ساختاری آن یکسان باشد تغییری در انرژی انحنای گاوسی ایجاد نمی‌شود به همین دلیل انرژی گاوسی را می‌توان نادیده گرفت. پس برای انرژی آزاد می‌توان دو جمله انرژی سطح و انرژی خمشی را به صورت زیر در نظر گرفت.

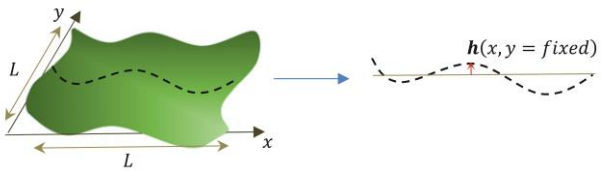
$$F_S = \sigma \times \Delta A \qquad (۲)$$

$$F_B = K \times \Delta A \qquad (۳)$$

در روابط فوق، ΔA تغییرات سطح ، σ تنش سطحی و K ضریب خمش است.

نظریه

با افزایش دما، انبساط گرمایی باعث ایجاد تنش در سطح غشا می‌شود. جهت تعیین افت و خیزهای غشا در اثر حرکت جمعی گرمایی مولکول‌های لیپید، غشای تخت را در نظر می‌گیریم. مکان غشا را با $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$ نشان می‌دهیم، که $\mathbf{x} = (x, y)$ مکان در صفحه‌ی تخت مرجع دو بعدی و $h(\mathbf{x})$ ارتفاع افت وخیز نسبت به صفحه مرجع است [۲]. (شکل ۱)



شکل ۱ : نوسانات یک غشا مسطح در ناحیه $L \times L$ با ارتفاع موج دار $h(\mathbf{x})$ [۲].

برای محاسبه میانگین ارتفاع افت وخیزها از تبدیلات فوریه زیر استفاده می‌شود:

$$h(\mathbf{q}) = \int d^2\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{q}.\mathbf{x}} h(\mathbf{x}) \qquad (٤)$$

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^2}\sum_q e^{-i\mathbf{q}.\mathbf{x}} h(\mathbf{q}) \qquad (٥)$$

با فرض شرایط مرزی متناوب، می‌توان میانگین ارتفاع نوسانات غشا را بدست آورد:

$$< h^2 >= \frac{1}{L^4}\sum_{\mathbf{q}} < |h(\mathbf{q})|^2 > \qquad (٦)$$

از طرفی به دلیل نوسانات حرارتی، سطح افزایش می‌یابد در نتیجه ΔA که با هارمونیک گرادیان دو بعدی $h(x)$ ارزیابی می‌شود با فرض شرایط مرزی متناوب به دست می‌آید :

$$\Delta A = \frac{1}{2}\int d^2x \left(\nabla_x^2 h(x)\right)^2 = \frac{1}{2L^2}\sum_q q^2 \langle |h(q)|^2 \rangle \qquad (٧)$$

پس رابطه انرژی آزاد از مجموع انرژی سطح و انرژی خمشی طبق روابط ۲ و ۳ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = \frac{1}{2L^2}\sum_q \left(\sigma q^2 + Kq^4\right)|h(q)|^2 \qquad (٨)$$

با استفاده از قضیه همپاری برای هر مد q داریم:

$$\frac{1}{2L^2}\left(\sigma q^2 + Kq^4\right)\langle |h(q)|^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T \qquad (٩)$$

در نتیجه:

$$< |h(\mathbf{q})|^2 >= \frac{k_B T L^2}{\sigma q^2 + Kq^4} \qquad (١٠)$$

که با توجه به رابطه ٦ میانگین توان دوم نوسانات غشا از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$< h^2 >= \frac{1}{L^2}\sum_q \frac{k_B T}{\sigma q^2 + Kq^4} \qquad (١١)$$

به طور کلی ارزیابی رابطه ۱۱ به صورت تحلیلی برای یک غشای مربعی دشوار است. بنابراین، ما آن را با یک دیسک دایره‌ای با همان ناحیه بدون تغییر خواص فیزیکی جایگزین می‌کنیم. با استفاده از رابطه ۱۲ مجموع فوق با انتگرال زیر تقریب می‌شود:

$$\sum_q = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int 2\pi q dq \qquad (۱۲)$$

در نتیجه داریم:

$$\langle h^2 \rangle \approx \frac{k_B T}{2\pi} \int_{q_m}^{q_M} dq \frac{q}{\sigma q^2 + K q^4} \qquad (۱۳)$$

که در آن $q_m \approx \frac{\pi}{L}$ و $q_M \approx \frac{\pi}{a}$ که در اینجا برای یک غشای وزیکولی a قطر یک مولکول لیپید و L قطر وزیکول است. برای غشای وزیکولی مورد مطالعه تنش سطحی σ نداریم در نتیجه با صرف نظر از آن در رابطه ۸ مقدار انتگرال به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\langle h^2 \rangle \approx \frac{k_B T}{2\pi^3 K}\left(L^2 - a^2\right) \qquad (۱٤)$$

و همچنین طبق رابطه ۱۰ و ۱۲ افزایش مساحت سطح غشا ناشی از نوسانات نیز با رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\sum_q q^2 \frac{k_B T}{\sigma q^2 + K q^4} \approx \frac{k_B T L^2}{4\pi} \int_{q_m}^{q_M} dq \frac{q^3}{\sigma q^2 + K q^4} \qquad (۱٥)$$

که در صورت تنش سطحی صفر داریم:

$$\Delta A \approx \frac{k_B T L^2}{4\pi K} \ln\left(\frac{L}{a}\right) \qquad (۱٦)$$

روش شبیه‌سازی

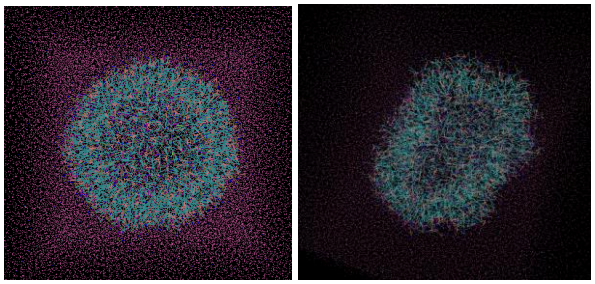
شبیه‌سازی‌های کامپیوتری برای مطالعه روی حرکت‌های درون مولکولی بسیار مناسب هستند. از مهمترین روش‌های شبیه‌سازی، دینامیک مولکولی (MD) است در این گزارش، شبیه‌سازی دینامیک مولکولی وزیکول لیپیدی به منظور یافتن نوسانات و افزایش سطح وزیکول در دمای بالا صورت گرفت.

با استفاده از سایت CHARMM-GUI دو وزیکول به شعاع ٦۰ و ۸۰ آنگستروم شامل ۷ نوع فسفولیپید (DPPE ۱۷/۱٪، DPPC ۵/۷٪، DPPS ۵/۷٪، POPC ۸/٦٪، POPE ۲۵/۷٪، POPS ۸/٦ ٪ و POSM ۲۸/٦٪) انتخاب شدند. لازم به ذکر است شعاع وزیکول‌ها و نوع فسفولیپیدها و مقدار درصد آنها براساس ساختار پوشش لیپیدی ویروس کووید-۱۹ انتخاب شده است [۳]. شبیه‌سازی درشت‌دانه توسط نرم‌افزار NAMD و با استفاده از میدان نیروی مارتینی مربوط به وزیکول‌هایی که صرفاً از لیپید هستند و دانه‌های آب را غیرقطبی در نظر گرفته است، انجام شد. هر دو وزیکول ٦۰ و ۸۰ آنگستروم با لایه آب به ضخامت ۲۰ آنگستروم پوشش داده شدند و به ترتیب در جعبه شبیه‌سازی به اندازه ۲۰۷ و ۲۷۰ آنگستروم به همراه ذرات یون سدیم و کلر در دمای ۳۰۳/۱۵ کلوین (۳۰ درجه سلسیوس) قرار داده شدند. با افزایش دما به ۸۰ درجه سلسیوس شبیه‌سازی برای ۱۰۰۰۰۰۰ گام (۱۰نانوثانیه) انجام شد. سپس موقعیت ذرات در فواصل زمانی ۵۰۰ گام (یک فریم) ذخیره و برای یافتن کمیت‌های مورد نظر تحلیل شدند.

برای اندازه‌گیری شعاع میانگین، مجذور نوسانات و افزایش سطح وزیکول لیپیدی، ابتدا وزیکول به ۱۰۰ قطعه تقسیم‌بندی شد (۱۰ قطعه در راستای θ و ۱۰ قطعه در راستای φ) و مرکز جرم وزیکول، شعاع و مختصات θ و φ تک‌تک ذرات محاسبه گردید. سپس ذرات با θ و φ مربوط به هر قطعه مشخص شدند و شعاع میانگین، مجذور نوسانات و افزایش سطح برای هر قطعه محاسبه شدند.

بحث و نتایج

شبیه‌سازی‌ها نوسانات و تغییرات شدیدی در ساختار وزیکول مطابق شکل ۲ را نشان می‌دهند.

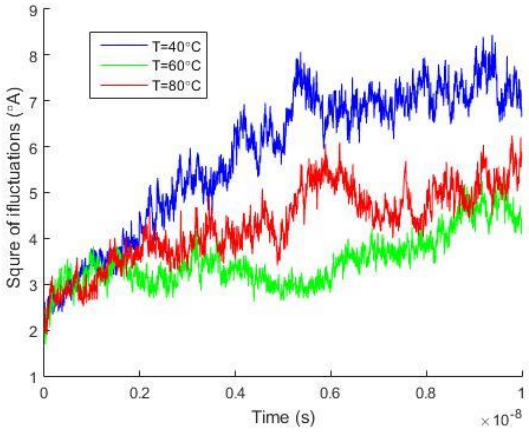


شکل ۲ : نوسانات در شکل و شعاع وزیکول در اثر افزایش دما.

در شکل ۲ مشاهده می‌شود با گذشت زمان و با افزایش دما، شکل و شعاع وزیکول دچار نوسان می‌شوند و این نوسانات به

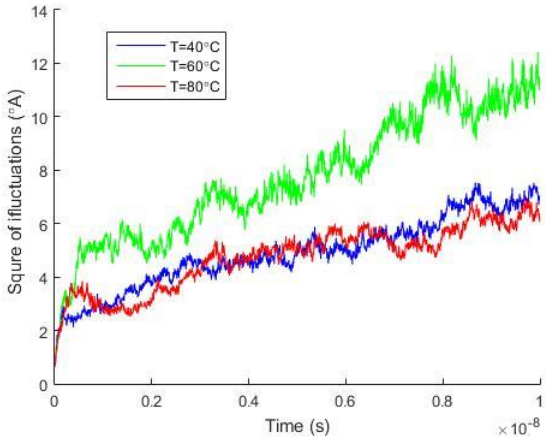
گونه‌ای است که باعث تغییر شکل وزیکول شده که با ادامه روند شبیه‌سازی امکان دارد بتوان نوسانات شدیدتر و واپاشی وزیکول را دید.

شکل ۳ مربع نوسانات وزیکول بر حسب زمان برای وزیکول با شعاع ٦٠ آنگستروم را نشان می‌دهد. نوسانات با زمان افزایش می‌یابد که میانگین مجذور دامنه نوسانات برای دماهای ٤٠، ٦٠ و ٨٠ درجه سلسیوس به ترتیب ٥/٨٣٧٨، ٣/٥١٨٥ و ٤/٣٠٨٠ آنگستروم است.



شکل ۳ : مربع نوسانات وزیکول بر حسب زمان برای وزیکول ٦٠ آنگستروم در دماهای ٤٠، ٦٠ و ٨٠ درجه سلسیوس.

همچنین شکل ٤ مربع نوسانات وزیکول بر حسب زمان برای وزیکول با شعاع ٨٠ آنگستروم را نشان می‌دهد. نوسانات با زمان افزایش می‌یابد که میانگین مجذور دامنه نوسانات برای دماهای ٤٠، ٦٠ و ٨٠ درجه سلسیوس به ترتیب ٤/٨٩٣٩، ٧/٧١٩٦ و ٤/٧٣٧٦ آنگستروم است.



شکل ٤ : مربع نوسانات وزیکول بر حسب زمان برای وزیکول ٨٠ آنگستروم در دماهای ٤٠، ٦٠ و ٨٠ درجه سلسیوس.

همان‌طور که در شکل ۳ و ٤ مشاهده شد نوسانات هر دو وزیکول به شعاع ٦٠ و ٨٠ آنگستروم با افزایش دما متفاوت است که این به دلیل عدم تعادلی بودن نوسانات است.

نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر مروری بر نظریات گذشته در مورد وابستگی نوسانات گرمایی به اندازه سیستم و دما شده است. همزمان شبیه‌سازی وزیکول چندلیپیدی برای دو وزیکول به شعاع ٦٠ و ٨٠ آنگستروم در دمای بالا صورت گرفته است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نظریه همخوانی ندارد که این نشان می‌دهد سیستم شبیه‌سازی شده خارج از تعادل است و لازم است شبیه‌سازی در مدت زمان بیشتری انجام شود.

مرجع‌ها

[1] F. Ahmadpoor, P. Sharma; “Thermal fluctuations of vesicles and nonlinear curvature elasticity—Implications for size-dependent renormalized bending rigidity and vesicle size distribution”; *Soft Matter*, 12, No. **9**, (2016) 2523-2536.
[2] Sung, W. (2018). *Statistical Physics for Biological Matter*. Springer.
[3] H. Woo, S.J. Park, Y. K. Choi, T. Park, M. Tanveer, Y. Cao, and et al; “Developing a fully glycosylated full-length SARS-CoV-2 spike protein model in a viral membrane”; *The journal of physical chemistry B* 124, No. **33**, (2020) 7128-7137.