



انجمن فیزیک ریاضی

دفترچه‌ی مقالات چهارمین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی

۱۹ و ۲۰ مهر ماه ۱۴۰۲

حامیان کنفرانس



معاونت پژوهش و فناوری
دانشگاه صنعتی شریف



معاونت علمی، فناوری و اقتصاد دانش‌بنیان ریاست جمهوری
سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی

برگزارکنندگان



QIS@Sharif

انجمن فیزیک ریاضی



سخنرانان مدعو

معرفی طرحواره‌هایی بمنظور تبادل درهم‌تنیدگی، دوربری کوانتومی و تکرارگر

کوانتومی

محمد کاظم توسلی

دانشگاه یزد

چکیده

با مروری بر چندین پروتکل در زمینه فرآیندهای اطلاعات کوانتومی مانند تبادل درهم‌تنیدگی، دوربری کوانتومی و نهایتاً تکرارگرهای کوانتومی به تبیین ارتباط تنگاتنگ دو مبحث اپتیک کوانتومی و پردازش اطلاعات کوانتومی خواهیم پرداخت. برای معرفی هر کدام از فرآیندهای ذکر شده، به تناسب، از کیوبیت‌ها و مدارهای ابررسانا (که دارای مزیت‌های بالقوه خاص خود هستند)، و کاواک‌های اپتیکی و اپتومکانیکی و بعضاً درگاههای کوانتومی مناسب استفاده خواهیم کرد. با توجه به مدل‌های ارائه شده، هامیلتونی‌های مناسب را معرفی و دینامیک حالت‌های کوانتومی را برای نیل به اهداف پروتکل‌های طراحی شده، بررسی و تجزیه و تحلیل می‌کنیم. در همه موارد، کمیت‌های فیزیکی مرتبط مانند میزان درهم‌تنیدگی، احتمال موفقیت و هماندهی که موید میزان موفقیت مدل‌های ارائه شده در تولید و انتقال درهم‌تنیدگی در فواصل نزدیک (برای بهره‌برداری در کامپیوترهای کوانتومی) یا دور (برای بهره‌برداری در رمزنگاری کوانتومی) است، محاسبه و ارائه می‌گردد. در مواردی سعی خواهیم کرد اثرات برخی منشاءهای اتلاف روی عملکرد پروتکل‌ها را نیز به صورت عددی و تحلیلی بررسی کنیم.

محاسبات کوانتومی نوری

محمد رضایی

دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

نور کوانتومی در مقایسه با منابع کوانتومی دیگر نقش بی نظیری در علم و مهندسی اطلاعات کوانتومی دارد، آنچنان که حوزه های متنوعی از پردازش اطلاعات کوانتومی مانند ارتباطات کوانتومی و تصویربرداری کوانتومی را منحصرا شکل میدهد. بر این اساس و همچنین با توجه به نقش کلیدی که محاسبات در علم و فناوری اطلاعات دارد، محاسبات کوانتومی نوری مورد توجه قابل توجهی قرار گرفته است و امید است که در نهایت یک سیستم پردازش اطلاعات تمام کوانتومی نوری را ممکن کند. نکته قابل تأمل در مورد نور کوانتومی این است که بستر های متنوعی جهت کد گذاری اطلاعات کوانتومی فراهم میکند مانند قطبش، تصویر و رنگ. مشخصا، تصویر فوتون فضای وسیعی است که میتوان بر آن اطلاعات کوانتومی کد گذاری کرد. چگونگی کد کردن اطلاعات کوانتومی بر روی تصویر یک فوتون و متعاقبا اعمال گیت های کوانتومی بر آن چالشی است که در این سخنرانی به آن پرداخته میشود.

الگوی درهمتنیدگی بلندبرد در کدهای کوانتومی توپولوژیکی

محمد حسین زارعی

دانشگاه شیراز

چکیده

درهمتنیدگی به عنوان مهمترین و متمایزکننده ترین ویژگی سیستم های کوانتومی، نقش مهمی در شناسایی و درک فازهای کوانتومی مواد دارد. از جمله، نشان داده شده است که فازهای کوانتومی توپولوژیکی توسط درهمتنیدگی بلند برد در حالت های کوانتومی متناظر شناسایی می شوند که مهمترین معیار در دسته بندی این فازها به حساب می آید، به گونه ای که انتظار می رود فازهای توپولوژیکی مختلف به وسیله الگوهای درهمتنیدگی متمایزی توصیف شوند. در این سخنرانی با الهام از روش بازبهنجارش درهمتنیدگی، روشی برای یافتن الگوی درهمتنیدگی در حالت های توپولوژیکی معرفی می شود. سپس به وسیله این روش، کد کوانتومی چنبره و نیز کد توپولوژیکی رنگ را بررسی کرده و نشان می دهیم که حالت های توپولوژیکی متناظر با این کدها با دو الگوی متمایز از درهمتنیدگی بین لایه هایی یک بعدی توصیف می شوند.

مکانیک کوانتومی، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و ایرادهای وارد بر فرمولبندی آن

شهریار سلیمی

دانشگاه کردستان

چکیده

در دهه های اخیر در ارتباط با جنبه های مختلف مکانیک کوانتومی تحقیقات بسیاری صورت گرفته و اهمیت این شاخه از علم فیزیک به اندازه ای است که تاکنون جوایزه نوبل متعددی به دانشمندانی که در این حوزه کار کرده اند تعلق گرفته است. در این سخنرانی نخست به معرفی مکانیک کوانتومی و سپس به یکی از اصل های مهم آن، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، پرداخته و ایرادهای وارد بر فرمولبندی آن را مورد مطالعه قرار می دهیم.

زمان همدوسی نقص تهی جای بور و ابرقش فعال در شبکه نیتريد بور لانه زنبوری

فاطمه طریقی تابش

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

چکیده

نقص‌های اسپینی نوری فعال در شبکه نیتريد بور لانه زنبوری (hBN)، بسترهای امیدوارکننده‌ای جهت کاربردهای اطلاعات کوانتومی مانند کیوبیت‌ها برای محاسبات کوانتومی و حسگرهای دو بعدی انعطاف‌پذیر در دمای اتاق فراهم می‌کنند. زمان همدوسی مهم‌ترین ویژگی یک کیوبیت است که دانستن مقدار و کنترل آن برای فناوری‌های کوانتومی ضروری است. از این رو، ابتدا واهمدوسی اسپین الکترون تهی-جای بور (V_B) را با در نظر گرفتن برهمکنش‌های فوق‌ریز دوقطبی در شبکه hBN بررسی می‌کنیم. براساس مطالعه نظری ما، زمان همدوسی اسپین الکترون V_B در دمای اتاق تقریباً ۳۰ میکروثانیه است که به نتایج گزارش شده تجربی نزدیک می‌باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که می‌توان با به کار گرفتن اسپین الکترون V_B جهت قطبیده کردن حمام اسپین هسته‌ای اطرافش و آماده سازی سامانه با تعداد اسپین‌های زیاد استفاده کرد. به منظور بررسی ابرقش شبکه بزرگ hBN که در آن حل‌های عددی دقیق دور از دسترس هستند، تقریب $Holstein-Primakoff$ را به کار می‌گیریم. نتایج ما نشان می‌دهند که درجه بالایی از قش در شبکه‌های اسپینی هسته‌ای بور و نیتروژن حتی در حضور یک حمام کاملاً حرارتی قابل دستیابی است. این پژوهش اولین گام را به سوی تحقق شبیه‌ساز کوانتومی دو بعدی براساس اسپین‌های هسته‌ای طبیعی ارائه می‌کند و می‌تواند برای افزایش زمان همدوسی مراکز V_B نیز مفید باشد.

شبیه‌سازی کوانتومی: خلق پدیده‌های جدید

سحر علیپور

دانشگاه آلتو

چکیده

می‌دانیم که با در اختیار داشتن منابع کلاسیکی کافی می‌توان سیستم‌های کوانتومی را بر روی کامپیوترهای کلاسیکی شبیه‌سازی کرد؛ یعنی به‌وسیله‌ی قانون‌های فیزیک کلاسیک و بر روی سیستم‌های کلاسیکی. هم‌چنین، همان‌طور که فاینمن پیش‌بینی کرده‌بود، می‌دانیم که با در اختیار داشتن منابع کوانتومی می‌توان سیستم‌های کوانتومی را بسیار بهینه‌تر از روش‌های کلاسیکی شبیه‌سازی نمود. اما در این‌جا می‌توان سوال دیگری مطرح کرد: همان‌طور که با منابع کلاسیکی می‌توان فیزیکی فراتر و گسترده‌تر از فیزیک کلاسیک، یعنی فیزیک کوانتومی را شبیه‌سازی کرد، آیا در اختیار داشتن منابع کوانتومی به ما امکان شبیه‌سازی فیزیکی فراتر و گسترده‌تر از فیزیک کوانتومی را می‌دهد؟ در این سخنرانی تلاش می‌کنیم که با ارائه‌ی مثال‌هایی ساده، شواهدی برای پاسخ به این سوال بیابیم و چشم‌اندازی را که این پاسخ فراهم می‌کند ترسیم نماییم.

تخمین کوانتومی با استفاده از ولگشتهای کوانتومی

عنابستانی مصطفی

دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

بسیاری از کمیتهای مهم در تئوری اطلاعات و محاسبات کوانتومی مثل درهم تنیدگی، خلوص حالات آمیخته و ... کمیتهای غیر خطی هستند و با اندازه گیری مستقیم قابل اندازه گیری نیستند. بنا براین اندازه گیری این کمیتهای معمولاً نیازمند اندازه گیری غیر مستقیم هستند که در بسیاری از مواقع منجر به حل مسائل بهینه سازی میشوند. تئوری تخمین پارامترهای کوانتومی به این پرسش پاسخ میدهد که برای تخمین هر چه دقیقتر پارامترهای یک سیستم کوانتومی از چه پایه هایی برای اندازه گیری استفاده شود و اساساً حد نهایی دقت تخمین این پارامترها چقدر است.

از سوی دیگر ولگشتهای کوانتومی به عنوان یکی از پروتکل های مهم در اطلاعات و محاسبات کوانتومی مطرح است که طیف وسیعی از مسائل را شامل میشود. محاسبات کوانتومی بر پایه ولگشتهای کوانتومی، الگوریتمهای جستجوی کوانتومی بر پایه ولگشتهای کوانتومی، بررسی فازهای توپولوژیکی سیستمهای کوانتومی و شبیه سازی معادله دیراک فقط برخی از کاربردهای این پروتکل است.

در این ارائه راجع به این موضوع صحبت خواهیم کرد که چگونه با استفاده از فرمالیزم ابر عملگری در ولگشتهای کوانتومی میتوان استفاده کرد و حل دقیق و تحلیلی برای ماتریس فیشر و ماتریس خم اولمن یافت که در تخمین کوانتومی چند پارامتری مورد استفاده قرار می گیرند. همچنین تاثیرات تغییر فاز توپولوژیکی بر ماتریس فیشر بحث خواهد شد.

تداخل سنج های غیرخطی کوانتومی: مزایا و کاربردها

Quantum nonlinear interferometers: advantages and applications

حمیدرضا محمدی

دانشگاه اصفهان

چکیده

علم اطلاعات کوانتومی از دیدگاه انفورماتیک به جهان هستی می نگرد. از نقطه نظر این علم، صرف این که بتوانیم اطلاعاتی کسب کنیم که بتواند بین دو حالت فیزیکی همپوشان، تمایز قائل شود، تداخل کوانتومی بین این حالت ها از بین می رود. به بیان دیگر تداخل کوانتومی بین دو حالت وقتی رخ می دهد که تمییز پذیر نباشند. بر این اساس تداخل سنج های کوانتومی برای اندازه گیری دقیق طراحی می شوند. دقت این اندازه گیری توسط حد نوفه ی ضربه ای محدود می شود. با استفاده از منابع غیرخطی در طراحی تداخل سنج می توانیم بر این محدودیت فائق آییم. از جمله ی کاربردهای تداخل سنجی می توان به تصویربرداری کوانتومی، طیف سنجی کوانتومی، اندازه گیری های فوق دقیق و... نام برد. در این سخنرانی ضمن اشاره به مباحث نظری مربوطه به زیرساخت های آزمایشگاهی مورد نیاز برای پیاده سازی چیدمان های تصویربرداری کوانتومی و طیف سنجی کوانتومی اشاره خواهیم کرد.

Recent advancements and challenges for variational quantum algorithms

علی حامد موسویان

مرکز تحقیقاتی فن‌آوری‌های کوانتومی ایران

چکیده

Variational Quantum Algorithms (VQA) are considered to be one of the most promising quantum algorithms in the NISQ-era. On one hand they can be applied to a wide-range of optimization problems, and on the other hand they are flexible enough that small models can be implemented on available hardware. That is why VQA has been proposed for a wide variety of problems, including but not limited to dynamical simulation, ground state preparation, machine learning classifiers and generative models, etc. However, despite their immediate appeal, VQAs are prone to a variety of different pitfalls. For example, the optimizer can get stuck in local minima, or the gradients can be exponentially small, a phenomena also known as barren plateaus, requiring an exponentially long optimization procedure.

In this short exploratory talk I will first discuss how VQA can be applied to a range of different problems. Then I will summarize the results about their known limitation.

سخنرانان شرکت کننده

برطرف کردن خطا با اطلاعات جزئی از نوفه

احمدوند، ناهید^۱؛ معمارزاده، لاله^۲

^۱دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

^۲دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چکیده

در این مقاله روشی به منظور تصحیح خطا در مقدار چشم‌داشتی یک مشاهده‌پذیر هنگامی که اطلاع کاملی از نوفه اثر کرده روی سیستم نداریم، ارائه می‌کنیم. یک سیستم دو کیوبیتی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که نوفه اثر کرده روی یکی از کیوبیت‌ها را می‌دانیم و همچنین می‌دانیم همبستگی خاصی بین نوفه اثر کرده روی دو کیوبیت وجود دارد ولی از مقدار دقیق این همبستگی اطلاعی نداریم. به منظور ارائه ایده اصلی این روش، فرض می‌کنیم روی یکی از کیوبیت‌ها کانال بیت‌برگردان اثر می‌کند. نشان می‌دهیم که برای دسته‌ای از مشاهده‌پذیرها علی‌رغم داشتن دانش جزئی از نوفه روش ما به منظور برطرف کردن خطای ایجاد شده در مقدار چشم‌داشتی، کارآمد است. همچنین کارآمدی این روش در مورد سایر مشاهده‌پذیرها بحث می‌شود.

واژه‌های کلیدی: دکانونولوشن نوفه، تصحیح خطا، کانال کوانتومی.

Noise deconvolution with partial knowledge about the noise

Ahmadvand, Nahid¹; Memarzadeh, Laleh²

¹ Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran,

² Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

We present a method for noise deconvolution when our knowledge about the noise is not complete. We consider a two-qubit system and assume that the noise on one of the qubits is known and there is correlation in noise without knowing the exact degree of correlation. To present the main idea, we focus on the case where one of the qubits experiences bit-flip noise. We show that for a class of observables despite partial knowledge about the noise, our method for noise deconvolution is completely successful.

Keywords: Noise deconvolution, Error correction, Quantum channel.

مقدمه

کیوبیت کمکی برای تصحیح خطا استفاده نمود که کل فرآیند را پرهزینه‌تر می‌کند. روش متعارف دیگر استفاده از روش تصحیح خطا با استفاد از بازخورد دریافتی از محیط است [۲]. در این روش به کیوبیت‌های کمکی نیاز نیست و از این رو نسبت به روش قبل مزیت دارد اما دسترسی کلی یا جزئی به اطلاعات محیط لازم است. یک روش پیشنهادی دیگر که اخیراً معرفی شده است [۳]، روش دکانونولوشن نوفه^۱ است که برای تصحیح مقدار چشم‌داشتی‌های

در راه پیاده‌سازی پروتوکل‌های کوانتومی و توسعه تکنولوژی کوانتومی، طراحی تکنیک‌هایی برای مقابله با نوفه ضروری است. در این مسیر از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود که یکی از مهم‌ترین آن‌ها استفاده از کدهای تصحیح خطای کوانتومی است [۱]. در این روش علاوه بر تعداد کیوبیت‌هایی که پردازش یا تبادل اطلاعات به واسطه آن‌ها رخ می‌دهد، باید از تعداد دیگری کیوبیت به عنوان

که نوفه اثر کرده روی سیستم را بدانیم. اما شناخت نوفه نیاز به توموگرافی نوفه و صرف منابع دارد. در این مقاله فرض می‌کنیم یک سیستم دو کیوبیتی داریم که نوفه اثر کرده روی کیوبیت اول را می‌دانیم و همچنین می‌دانیم همبستگی خاصی بین نوفه اثر کرده روی دو کیوبیت وجود دارد و بررسی خواهیم کرد تحت چه شرایطی این دانش جزئی می‌تواند به برطرف کردن اثر نوفه روی مقدار چشم‌داشتی مشاهده‌پذیری مثل A کمک کند.

به طور خاص فرض می‌کنیم نوفه اثر کرده روی کیوبیت اول (N_1) با کانال پائولی توصیف شود:

$$N_1(\rho) = \sum_{i=0}^3 p_i \sigma_i \rho \sigma_i, \quad (2)$$

که در آن $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=0}^3 p_i = 1$ می‌باشد و $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$ و $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$ و $\sigma_3 = \sigma_z$ عملگرهای پائولی هستند.

در این صورت نوفه اثر کرده روی هر دو کیوبیت عبارتست از:

$$\mathcal{N}(\rho) = (1 - \mu)\mathcal{N}^{UC}(\rho) + \mu\mathcal{N}^{CC}(\rho), \quad (3)$$

که در آن

$$\mathcal{N}^{UC}(\rho) := N_1 \otimes N_1 = \sum_{i,j=0}^3 p_i p_j (\sigma_i \otimes \sigma_j) \rho (\sigma_i \otimes \sigma_j),$$

$$\mathcal{N}^{CC}(\rho) := \sum_{i=0}^3 p_i (\sigma_i \otimes \sigma_i) \rho (\sigma_i \otimes \sigma_i). \quad (4)$$

همچنین $\mu \in [0,1]$ می‌باشد و میزان همبستگی در نوفه را مشخص می‌کند ولی مقدار دقیق آن را نمی‌دانیم. برای سهولت محاسبات لازم است با فرم برداری شده عملگرها کار کنیم. به این منظور یک پایه برای فضای عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت دوکیوبیتی به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

$$\{\sigma_{\alpha_1} \otimes \sigma_{\alpha_2} \mid \alpha_1, \alpha_2 = 0,1,2,3\} \quad (5)$$

در این نمایش، هر عملگر (از جمله مشاهده‌پذیر A)

$$A = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (6)$$

به صورت زیر به یک بردار $|A\rangle\rangle$ تبدیل می‌شود:

$$|A\rangle\rangle = \bigoplus_{i=1}^3 |a_i\rangle\rangle, \quad (7)$$

$$|a_i\rangle\rangle := [a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}]^T.$$

بنابراین در نمایش برداری داریم:

$$|\mathcal{N}(\rho)\rangle\rangle = \Gamma_{\mathcal{N}}|\rho\rangle\rangle. \quad (8)$$

مشاهده‌پذیرها در حضور نوفه به کار می‌رود. برای استفاده از این روش لازم است نوفه‌ای که روی سیستم اثر می‌کند را بشناسیم و همین‌طور نگاشت منسوب به این نوفه باید به لحاظ ریاضیاتی وارون‌پذیر باشد. در تایید موفقیت این روش شواهدی بر پایه شبیه‌سازی و همچنین شواهد تجربی وجود دارد [۳]. این روش همچنین برای سیستم‌هایی که نوفه همبسته دارند تعمیم داده شده است و برای این دسته از نوفه‌ها کارکرد آن سنجیده و گزارش شده است [۴]. در این مقاله هدف آنست که پس از بیان ایده کلی این روش جدید، حالتی را بررسی کنیم که بجای شناخت کامل نوفه تنها اطلاعات جزئی از آن را داریم و شرایط لازم برای کارآمدی این روش را بدست بیاوریم.

روش دکانولوشن نوفه

فرض کنید یک سیستم کوانتومی با حالت اولیه ρ داریم و می‌خواهیم تخمینی از مقدار چشم‌داشتی مشاهده‌پذیری مثل O روی آن بدست بیاوریم، یعنی $\langle O \rangle_\rho = \text{Tr}[O\rho]$. اما ممکن است به دلیل برهم‌کنش با محیط بیرونی، نوفه روی سیستم اثر کند. این نوفه را با $\mathcal{N}$ نشان می‌دهیم که یک نگاشت کاملاً مثبت رد نگه دار است، حالت سیستم برابر با $\mathcal{N}(\rho)$ و آنچه در عمل بدست می‌آوریم $\langle O \rangle_{\mathcal{N}(\rho)}$ است که طبیعتاً برابر با $\langle O \rangle_\rho$ نمی‌باشد. در روش دکانولوشن نوفه ایده اصلی آن است که به جای اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر O ، مشاهده‌پذیر $\mathcal{N}^{*-1}(O)$ (منظور از $*$ الحاقی نگاشت است) اندازه‌گیری شود زیرا طبق رابطه زیر داریم:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N}^{*-1}(O) \rangle_{\mathcal{N}(\rho)} &= \text{Tr}[\mathcal{N}^{*-1}(O)\mathcal{N}(\rho)] \\ &= \text{Tr}[O\mathcal{N}^{-1}(\mathcal{N}(\rho))] = \text{Tr}[O\rho] = \langle O \rangle_\rho. \end{aligned} \quad (1)$$

نشان داده می‌شود که هرچند $\mathcal{N}^{*-1}$ الزاماً یک نگاشت مثبت رد نگه دار نیست اما اگر O مشاهده‌پذیر باشد آنگاه $\mathcal{N}^{*-1}(O)$ نیز مشاهده‌پذیر است [۳].

دانش جزئی از نوفه

روش شرح داده‌شده در بخش قبل، روش کارآمدی برای برطرف کردن اثر نوفه روی مقدار چشم‌داشتی مشاهده‌پذیر است به شرط آن

که در آن $\Gamma_{\mathcal{N}}$ ماتریس تبدیل پائولی^۲ متناسب به نگاشت $\mathcal{N}$ می باشد. مولفه های این ماتریس برای نگاشتی مثل Φ عبارتند از:

$$(\Gamma_{\Phi})_{mn,kl} = \frac{1}{4} \text{Tr}[\sigma_m \otimes \sigma_n \Phi(\sigma_k \otimes \sigma_l)] \quad (9)$$

اگر حالت اولیه سیستم را با ρ_{in} ، حالت نهایی سیستم را در وضعیت ایده آل (که نوفه نداریم) با $\rho_{\text{out}}^{\text{ideal}}$ (طبیعتاً اگر عملی روی سیستم اثر نکند $\rho_{\text{out}}^{\text{ideal}} = \rho_{\text{in}}$ خواهد بود)، در وضعیت واقعی (که نوفه روی سیستم اثر می کند) با $\rho_{\text{out}}^{\text{exp}} = \mathcal{N}(\rho_{\text{in}})$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\langle A \rangle_{\text{ideal}} = \text{Tr}[A \rho_{\text{out}}^{\text{ideal}}] = \langle \langle A | \rho_{\text{in}} \rangle \rangle, \quad (10)$$

$$\langle A \rangle_{\text{exp}} = \text{Tr}[A \rho_{\text{out}}^{\text{exp}}] = \langle \langle A | \rho_{\text{out}}^{\text{exp}} \rangle \rangle = \langle \langle A | \Gamma_{\mathcal{N}} | \rho_{\text{in}} \rangle \rangle$$

حال با توجه به عدم اطلاع کامل از نوفه، حدس می زنیم نوفه اعمالی با کانال $\tilde{\mathcal{N}}$ توصیف می شود، آنگاه مشاهده پذیری که باید اندازه گیری کنیم عبارتست از $\tilde{\mathcal{N}}^{*-1}(A)$ و بنابراین مقدار چشم داشتی که سعی کرده ایم اثر خطا در آن را از بین ببریم عبارتست از:

$$\langle A \rangle_{ND} = \text{Tr}[A \rho_{ND}] = \langle \langle A | \rho_{ND} \rangle \rangle = \langle \langle A | \Gamma_{\tilde{\mathcal{N}}}^{-1} \Gamma_{\mathcal{N}} | \rho_{\text{in}} \rangle \rangle. \quad (11)$$

می توان اثبات کرد که ماتریس تبدیل پائولی منسوب به وارون یک نگاشت $(\Gamma_{\tilde{\mathcal{N}}}^{-1})$ با وارون ماتریس تبدیل پائولی منسوب به همان نگاشت $(\Gamma_{\tilde{\mathcal{N}}}^{-1})$ برابر است. حال تعریف می کنیم:

$$\Delta A_{ND} := |\langle A \rangle_{\text{ideal}} - \langle A \rangle_{ND}| = |\langle \langle A | (id - \Gamma_{\tilde{\mathcal{N}}}^{-1} \Gamma_{\mathcal{N}}) | \rho_{\text{in}} \rangle \rangle|, \quad (12)$$

$$\Delta A_{\text{exp}} := |\langle A \rangle_{\text{ideal}} - \langle A \rangle_{\text{exp}}| = |\langle \langle A | (id - \Gamma_{\mathcal{N}}) | \rho_{\text{in}} \rangle \rangle|. \quad (13)$$

برای آن دست از مشاهده پذیرهای A که برایشان نامساوی $\Delta A_{ND} \leq \Delta A_{\text{exp}}$ برقرار است می توان اثر نوفه را روی مقدار چشم داشتی کم کرد و حدس ما از نوفه کارآمد بوده است. اگر ΔA_{ND} صفر باشد، اثر نوفه روی مقدار چشم داشتی به طور کامل از بین رفته است.

کانال بیت برگردان

فرض می کنیم دانش جزئی ما از نوفه بیانگر آن است که نوفه ای که روی کیوبیت اول اثر می کند با کانال بیت برگردان یعنی:

$$\mathcal{N}_{BF} = (1-p)\rho + p \sigma_x \rho \sigma_x, \quad (\Gamma_{\mathcal{N}_{BF}})_{i,j} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\sigma_i \mathcal{N}_{BF}(\sigma_j)] \quad (14)$$

توصیف می شود. پس در روابط (4) خواهیم داشت:

$$p_0 = 1-p, p_1 = p, p_2 = p_3 = 0 \quad (15)$$

با چنین انتخابی، خواهیم داشت:

$$\mathcal{N}^{UC} = \mathcal{N}_{BF} \otimes \mathcal{N}_{BF}, \Gamma_{\mathcal{N}^{UC}} = \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \otimes \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}}. \quad (16)$$

شکل صریح ماتریس $\Gamma_{\mathcal{N}^{UC}}$ و $\Gamma_{\mathcal{N}_{BF}}$ برابر است با

$$\Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} = \text{diag}(1, 1, 1-2p, 1-2p), \quad (17)$$

$$\Gamma_{\mathcal{N}^{UC}} = \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \oplus \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \oplus (1-2p)(\Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \oplus \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}}).$$

پس $\Gamma_{\mathcal{N}^{UC}}$ یک ماتریس 16×16 بلوکه قطری است.

بطور مشابه برای ماتریس تبدیل پائولی متناسب به $\mathcal{N}^{CC}$ و $\mathcal{N}$ خواهیم داشت:

$$\Gamma_{\mathcal{N}^{CC}} = \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \oplus \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \oplus \Omega \oplus \Omega, \quad (18)$$

$$\Omega := \text{diag}(1-2p, 1-2p, 1, 1). \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{N}} &= (1-\mu)\Gamma_{\mathcal{N}^{UC}} + \mu\Gamma_{\mathcal{N}^{CC}} \\ &= \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \oplus \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \oplus (1-\mu)(1-2p)\Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} \\ &\quad + \mu\Omega \oplus (1-\mu)(1-2p)\Gamma_{\mathcal{N}_{BF}} + \mu\Omega. \end{aligned} \quad (20)$$

حال $\tilde{\mathcal{N}}$ را برترتیب برابر با $\mathcal{N}^{UC}$ و $\mathcal{N}^{CC}$ قرار می دهیم و عبارت

$id - \Gamma_{\tilde{\mathcal{N}}}^{-1} \Gamma_{\mathcal{N}}$ موجود در رابطه (12) را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} id - \Gamma_{\tilde{\mathcal{N}}}^{-1} \Gamma_{\mathcal{N}} &= 0 \oplus 0 \oplus V \oplus V, \\ V &:= \mu id - \frac{\mu}{1-2p} \Gamma_{\mathcal{N}^{UC}}^{-1} \Omega. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} id - \Gamma_{\tilde{\mathcal{N}}}^{-1} \Gamma_{\mathcal{N}} &= 0 \oplus 0 \oplus W \oplus W, \\ W &:= (1-\mu) id - (1-\mu)(1-2p)\Omega^{-1} \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}}. \end{aligned} \quad (22)$$

برای ρ_{in} با توجه به روابط (6) و (7) چنین بسطی می نویسیم:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{in}} &= \sum_{i,j=0}^3 C_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j = \bigoplus_{i=1}^3 |C_i\rangle\rangle, \\ |C_i\rangle\rangle &:= [C_{i0}, C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}]^T. \end{aligned} \quad (23)$$

حال با جایگذاری روابط (6) و (21) تا (23) در رابطه (12) داریم:

$$\Delta A_{ND}^{UC} = |\langle \langle a_2 | V | C_2 \rangle \rangle + \langle \langle a_3 | V | C_3 \rangle \rangle|. \quad (24)$$

$$\Delta A_{ND}^{CC} = |\langle \langle a_2 | W | C_2 \rangle \rangle + \langle \langle a_3 | W | C_3 \rangle \rangle|. \quad (25)$$

بالانویس های UC و CC به ترتیب برای حالت $\mathcal{N}^{UC}$ و $\mathcal{N}^{CC}$

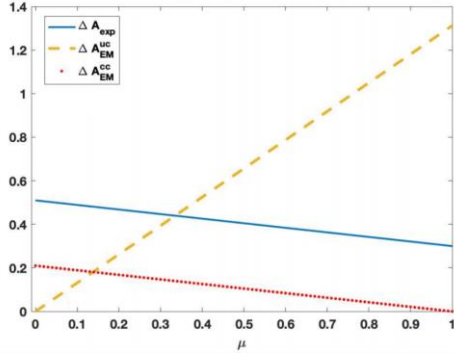
$\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}^{CC}$ می باشند. حال ΔA_{exp} را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta A_{\text{exp}} &= |\langle \langle a_0 | (id - \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}}) | C_0 \rangle \rangle + \langle \langle a_1 | (id - \Gamma_{\mathcal{N}_{BF}}) | C_1 \rangle \rangle \\ &\quad + \langle \langle a_2 | (id + \Omega W - \Omega) | C_2 \rangle \rangle + \langle \langle a_3 | (id + \Omega W - \Omega) | C_3 \rangle \rangle|. \end{aligned} \quad (26)$$

روابط (6) و (23) را در روابط (24) تا (26) جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta A_{\text{exp}} &= |2p(\sum_{i=0}^1 \sum_{j=2}^3 a_{ij} C_{ij} + \sum_{i=2}^3 \sum_{j=0}^1 a_{ij} C_{ij}) + \\ &\quad 4p(1-p)(1-\mu) \sum_{i,j=2}^3 a_{ij} C_{ij}|, \end{aligned}$$

روابط (32) بر حسب μ به ازای $p = 0.3$ و $x = 1$ رسم شده است.



شکل 1: نمودار مربوط به کمیت‌های ΔA_{ND}^{CC} و ΔA_{ND}^{UC} و ΔA_{exp} در روابط (32) به ازای $p = 0.3$ و $x = 1$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌کنید بطور کلی حدس $\mathcal{N}^{CC}$ برای $\tilde{\mathcal{N}}$ ، حدسی مناسب ولی در بازه‌ای حدس $\mathcal{N}^{UC}$ بهتر است.

نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی برطرف کردن اثر نوفه بر مقدار چشم‌داشتی در یک سیستم دو کیوبیتی پرداختیم با این قید که بر خلاف کارهای قبلی، اطلاع ما از نوفه جزئی باشد. با تمرکز بر حالتی که بدانیم نوفه روی یک کیوبیت از نوع بیت‌برگردان است، فرمالیسم دکانولوشن نوفه را با دو حدس از نوفه پیش بردیم و نشان دادیم، برای دسته خاصی از مشاهده‌پذیرها، علی‌رغم اطلاع ناقص از نوفه، می‌توان همچنان مقدار چشم‌داشتی را تصحیح کرد. همچنین در مثالی نشان دادیم که برای سایر مشاهده‌پذیرها در صورت اطلاع از فرم کلی حالت بدون توموگرافی برای آگاهی پیدا کردن از پارامتر مجهول، می‌توان مقدار چشم‌داشتی را تصحیح و به عدد ایده‌آل نزدیک کرد. نتایج حاضر در حالت کلی‌تر قابل استنتاج است که در آینده به آن خواهیم پرداخت.

مرجع‌ها

- [1] Emanuel Knill and Raymond Laflamme, "Theory of quantum error correcting codes", Physical Review A 55, 900–911 (1997).
- [2] C. Ahn, A. C. Doherty, A. J. Landahl, "Continuous quantum error correction via quantum feedback control", Phys. Rev. A 65, 042301 (2002).
- [3] Stefano Mangini, Lorenzo Maccone, and Chiara Macchiavello, "Qubit noise deconvolution", EPJ Quantum Technology 9, 29 (2022).
- [4] Simone Roncallo, Lorenzo Maccone, and Chiara Macchiavello, "Multiqubit noise deconvolution and characterization", Phys. Rev. A 107, 022419 (2023).

$$\Delta A_{ND}^{UC} = \frac{4p(1-p)\mu}{(1-2p)^2} \left| \sum_{i,j=2}^3 a_{ij} C_{ij} \right|, \quad \Delta A_{ND}^{CC} = \frac{(1-2p)^2(1-\mu)}{\mu} \Delta A_{ND}^{UC}. \quad (27)$$

روابط (27) نشان می‌دهند که مقادیر این سه کمیت نه تنها به مشاهده‌پذیر بلکه به حالت اولیه سیستم ρ_{in} و میزان همبستگی نوفه μ نیز بستگی دارند. حال اگر مشاهده‌پذیر A به شکل رابطه زیر باشد:

$$A = \sum_{i=0}^3 [a_{0i} (id \otimes \sigma_i) + a_{i0} (\sigma_i \otimes id)] + a_{11} (\sigma_1 \otimes \sigma_1) + \sum_{i=2}^3 [a_{1i} (\sigma_1 \otimes \sigma_i) + a_{i1} (\sigma_i \otimes \sigma_1)]. \quad (28)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\Delta A_{exp} = 2p \left| \sum_{i=0}^1 \sum_{j=2}^3 a_{ij} C_{ij} + \sum_{i=2}^3 \sum_{j=0}^1 a_{ij} C_{ij} \right|, \quad \Delta A_{ND}^{UC} = \Delta A_{ND}^{CC} = 0. \quad (29)$$

پس برای مشاهده‌پذیری به شکل رابطه (28) همواره نامساوی $\Delta A_{ND} \leq \Delta A_{exp}$ (به ازای $\tilde{\mathcal{N}}$ برابر با $\mathcal{N}^{CC}$ و $\mathcal{N}^{UC}$) برقرار است، و می‌توان مقدار چشم‌داشتی این مشاهده‌پذیر را مستقل از مقدار μ و حالت اولیه ρ_{in} به روش دکانولوشن نوفه، تصحیح کرد. حال اگر مشاهده‌پذیر به شکل رابطه (30) نباشد نیز همچنان می‌توان اثر نوفه را تخفیف داد. برای مثال مشاهده‌پذیر و ρ_{in} را نظر می‌گیریم:

$$A = id \otimes \left(\sum_{i=2}^3 \sigma_i \right) + \left(\sum_{i=2}^3 \sigma_i \right) \otimes id + \sum_{i,j=2}^3 \sigma_i \otimes \sigma_j. \quad (30)$$

$$\rho_{in} = \frac{1}{4} [id \otimes id + x(\sigma_2 \otimes id + id \otimes \sigma_3) + \sigma_2 \otimes \sigma_3]. \quad (31)$$

که در آن $0 \leq x \leq 1$ و عددی حقیقی است. با جایگذاری روابط (30) و (31) در روابط (27) خواهیم داشت:

$$\Delta A_{exp} = p[(1-p)(1-\mu) + x], \quad \Delta A_{ND}^{UC} = \frac{\mu p(1-p)}{(1-2p)^2}, \quad \Delta A_{ND}^{CC} = p(1-p)(1-\mu). \quad (32)$$

همانطور که در روابط (32) دیده می‌شود، ΔA_{exp} همواره از ΔA_{ND}^{CC} بزرگتر است. بنابراین تصحیح مقدار چشم‌داشتی با نگاشت $\mathcal{N}^{CC}$ باعث تصحیح این مقدار می‌شود. همچنین بسته به مقدار μ تصحیح $\mathcal{N}^{UC}$ از تصحیح $\mathcal{N}^{CC}$ هم می‌تواند بهتر عمل کند. رفتار سه کمیت

مطالعه خواص آنتروپی درهم‌تنیدگی در مدل نوسانگر هماهنگ کوانتومی جفت شده با در نظر گرفتن تعداد نوسانگرها و تقسیم‌بندی‌های متفاوت

بگلری، ایوب^۱؛ اقبالی فام، فقیهه^۱

^۱ دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

چکیده

در این مقاله، آنتروپی درهم‌تنیدگی برای حالت پایه‌ی هامیلتونی نوسانگر هماهنگ کوانتومی جفت‌شده برای دو گراف خطی و ستاره بررسی می‌شود. سپس خواص آنتروپی درهم‌تنیدگی با توجه به افزایش تعداد نوسانگرها در چندین نوع تقسیم‌بندی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. واژه‌های کلیدی: آنتروپی درهم‌تنیدگی، مدل نوسانگر هماهنگ کوانتومی جفت شده

Studying the properties of the entanglement entropy in the coupled quantum harmonic oscillator model by considering the number of the oscillators and different partitions.

Beglari, Ayoub¹; Eghbalifam, Faghiheh²

¹ Faculty of Physics, Urmia university of Technology, Urmia

Abstract

In this paper, the entanglement entropy is investigated for the ground state of the Hamiltonian of the coupled quantum harmonic oscillator in two graphs, including the Path graph, and the Star graph. Then, the properties of the entanglement entropy are studied according to the increase in the number of oscillators in some kinds of partitions.

Keywords: Entanglement entropy; Coupled quantum harmonic oscillator model.

PACS No. 3

مقدمه

سیستم است که تاکنون در مدل‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است [3-7]. یکی از مدل‌هایی که آنتروپی درهم‌تنیدگی برای آن مطالعه شده، مدل نوسانگر هماهنگ است که در آن با در نظر گرفتن شبکه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ کوانتومی، می‌توان آنتروپی درهم‌تنیدگی را در حالت پایه مدل نوسانگر هماهنگ بین بخشی از گره‌ها با بقیه‌ی گره‌های شبکه بدست آورد [8 و 9].

با توجه به این که حالت پایه مدل نوسانگر هماهنگ کوانتومی یک حالت گاوسی است و اجرای پروسه‌های اطلاعات کوانتومی از جمله مخابره از راه دور کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و محاسبات کوانتومی با موفقیت تجربی زیاد با استفاده از حالات

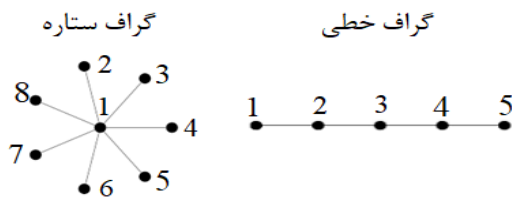
نقش قطعی و مهم درهم‌تنیدگی در مطالعه سیستم‌های بس-ذره‌ای کوانتومی، آن را به موضوعی بسیار جذاب برای تعداد زیادی از تحقیقات اخیر تبدیل کرده است. سنجه‌های درهم‌تنیدگی گوناگونی به منظور محاسبه میزان درهم‌تنیدگی بین ذرات، توسط محققان معرفی و مورد استفاده قرار گرفته است [1 و 2]. برخی از این سنجه‌ها میزان درهم‌تنیدگی مابین دویبخش از سیستم را می-سنجند که آنتروپی درهم‌تنیدگی یکی از آنها است. آنتروپی درهم‌تنیدگی همان آنتروپی فون نویمان ماتریس چگالی کاهش‌یافته

$$V = I + 2cL = \begin{pmatrix} A_{m \times m} & B_{m \times (N-m)} \\ (B^T)_{(N-m) \times m} & C_{(N-m) \times (N-m)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

که N تعداد کل رئوس و m تعداد رئوس موجود در یکی از زیرمجموعه ها است. آنتروپی درهم تنیدگی بین دو بخش با m و $N-m$ راس از رابطه زیر بدست می آید [9]

$$S(\rho) = \sum_i \frac{v_i + 1}{2} \log \frac{v_i + 1}{2} - \frac{v_i - 1}{2} \log \frac{v_i - 1}{2} \quad (5)$$

که در آن $v_i = \left(\frac{1}{1 - d_i^2} \right)^{1/2}$ و d_i ها مقادیر تجزیه تکین (SVD) ماتریس $\tilde{B}$ ، یعنی عناصر قطری ماتریس $\tilde{B} = U \tilde{B} V^\dagger$ است. $D_{m \times (N-m)}$ ماتریس $\tilde{B}$ هم با تبدیل $\tilde{B} = D_A^{-1/2} \hat{B} D_C^{-1/2}$ بدست آمده که در آن $\hat{B} = U_A^\dagger B U_C$ و $D_C = U_C^\dagger C U_C$ ، $D_A = U_A^\dagger A U_A$ است.



شکل 1: گراف خطی و گراف ستاره به ترتیب از راست به چپ

ویژگی های آنتروپی درهم تنیدگی در برخی گراف های خاص با توجه به تعداد رئوس و نوع تقسیم بندی

در این بخش از پژوهش می خواهیم ببینیم آنتروپی درهم تنیدگی با افزایش تعداد رئوس چگونه تغییر می کند. با توجه به اینکه رفتار آنتروپی در مقابل افزایش تعداد رئوس ممکن است به نوع تقسیم بندی در گراف هم بستگی داشته باشد، تغییرات آنتروپی بر حسب ثابت کوپلاژ c را برای تعداد مختلف رئوس و در چند نوع تقسیم بندی برای گراف خطی و گراف ستاره بررسی می کنیم. نمونه ای از گراف خطی و گراف ستاره در شکل 1 داده شده است.

(الف) گراف خطی

در شکل 2- (a) تغییرات آنتروپی در گراف خطی بر حسب ثابت کوپلاژ و برای تعداد نوسانگرهای مختلف در بازه $N = 4, \dots, 8$ برای تقسیم بندی که در آن راس 1 در یک بخش و بقیه رئوس در بخش دیگر هستند، رسم شده است.

گاوسی امکان پذیر است، مطالعه ای این مدل از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در این مقاله ما می خواهیم با در نظر گرفتن حالت پایه مدل نوسانگر هماهنگ کوانتومی، برخی ویژگی ها و رفتارهای آنتروپی درهم تنیدگی را در تقسیم بندی های خاص و با توجه به تعداد نوسانگرها برای دو نوع گراف معروف بررسی کنیم.

مدل نوسانگر هماهنگ کوانتومی جفت شده

در این مدل رئوس شبکه به عنوان نوسانگرهای کوانتومی یکسان در نظر گرفته می شود. هامیلتونی شبکه کوانتومی مطابق زیر است [9]

$$H = \frac{1}{2} (P^T P + X^T (I + 2cL) X)$$

که I ماتریس واحد $N \times N$ و c ثابت کوپلاژ بین نوسانگرهای متصل است. $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ و $P^T = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ به ترتیب عملگرهای متناظر با مکان و تکانه خطی رئوس هستند که در رابطه $[X, P^T] = i\hbar I$ که در اینجا ما فرض می کنیم $\hbar = 1$ است و ماتریس $I + 2cL$ ماتریس پتانسیل نامیده می شود که در آن L ماتریس لاپلاسین است که به صورت $L_{ij} = \kappa_i \delta_{ij} - A_{ij}$ تعریف می شود که در آن κ_i تعداد رئوسی است که به راس i وصل هستند و A ماتریس همسایگی شبکه است. تابع موج حالت پایه هامیلتونی ذکر شده به شکل زیر است

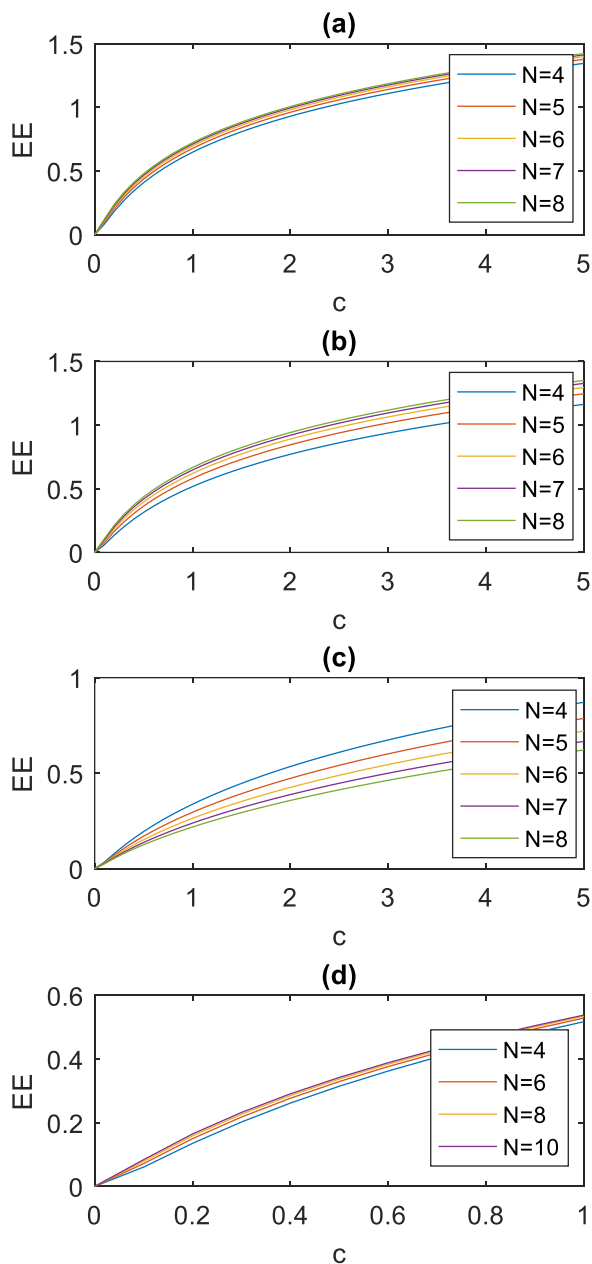
$$\psi(X) = \frac{(\det(I + 2cL))^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{N}{4}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (X^T (I + 2cL) X)\right) \quad (2)$$

آنتروپی درهم تنیدگی در مدل نوسانگر هماهنگ کوانتومی جفت شده

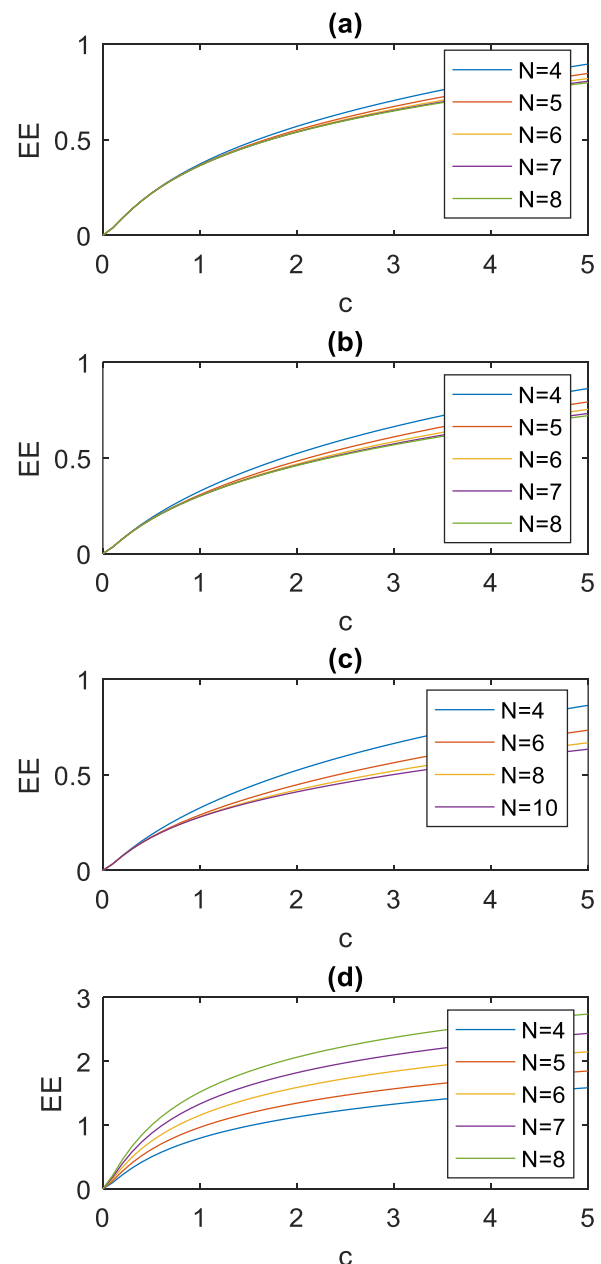
آنتروپی درهم تنیدگی برای یک حالت خالص مرکب $|\psi_{AB}\rangle \in H_A \otimes H_B$ به صورت آنتروپی فون نویمان ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_A یا ρ_B تعریف می شود

$$S = -\text{Tr}(\rho_A \log(\rho_A)) = -\text{Tr}(\rho_B \log(\rho_B)) \quad (3)$$

که میزان درهم تنیدگی بین زیرسیستم های A و B را اندازه می گیرد. برای محاسبه آنتروپی درهم تنیدگی بین دو بخش از نوسانگرها در شبکه، ابتدا ماتریس پتانسیل متناسب با این دو بخش به صورت زیر تقسیم بندی می شود [9]



شکل 3: نمودار آنتروپی درهم‌تنیدگی (EE) بر حسب ثابت کوپلاژ c در گراف ستاره. (a): در تقسیم‌بندی راس مرکزی با بقیه رئوس، (b): راس مرکزی و راس یکی از بازوها در یک دسته و بقیه رئوس در دسته بعدی، (c): در تقسیم‌بندی راس یک بازو با بقیه رئوس و (d): نیم از رئوس در یک دسته و نیم دیگر در دسته دوم قرار دارند.



شکل 2: نمودار آنتروپی درهم‌تنیدگی (EE) بر حسب ثابت کوپلاژ c در گراف خطی. (a): در تقسیم‌بندی راس 1 با بقیه رئوس، (b): در تقسیم‌بندی دو راس کناری با بقیه رئوس، (c): نیم از رئوس مجاور کناری در یک دسته و نیم دیگر در دسته دوم و (d): رئوس غیرمجاور هم در یک دسته و بقیه رئوس در دسته دوم قرار دارند.

شده است. این بار آنتروپی با افزایش تعداد ذرات کاهش می یابد. زیرا با افزایش تعداد ذرات همبستگی بین راس یک بازو با بقیه بازوها کاهش می یابد. در 3- (d) نمودار آنتروپی در حالتی است که نیمی از رئوس در یک بخش و نیمی دیگر در بخش دیگر باشند (راس مرکزی همراه رئوس نیمی از بازوها در یک دسته و بقیه بازوها در دسته دیگر قرار می گیرند). در این حالت آنتروپی با افزایش تعداد ذرات افزایش می یابد ولی تغییرات بسیار کوچک است.

نتیجه گیری

با در نظر گرفتن دو نوع گراف خطی و ستاره، تغییرات آنتروپی با افزایش تعداد ذرات برای برخی تقسیم بندی های گراف ها با رسم نمودار بررسی شد. در مورد گراف خطی، وقتی رئوس غیرمجاور هم در یک دسته و بقیه رئوس در دسته دیگر قرار دارند، آنتروپی با افزایش تعداد ذرات افزایش می یابد. در بقیه حالات بررسی شده، آنتروپی با افزایش ذرات کاهش می یابد. نتایج برای گراف ستاره نشان داد که در حالتی که راس یک بازو در یک دسته و بقیه رئوس در دسته دیگر باشند، با افزایش تعداد ذرات آنتروپی کاهش پیدا می کند ولی در بقیه حالات بررسی شده، آنتروپی با افزایش تعداد ذرات، افزایش پیدا می کند.

مرجع ها

- [1] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight; "Quantifying entanglement"; *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2275-2279.
- [2] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki; "Quantum entanglement"; *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865-942.
- [3] A. Kitaev and J. Preskill; "Topological entanglement entropy"; *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 110404.
- [4] M. Cramer, J. Eisert, M. B. Plenio, and J. Dreissig; "Entanglement-area law for general bosonic harmonic lattice systems"; *Phys. Rev. A* **73** (2006) 012309.
- [5] M. Coppola, E. Tiritto, D. Karevski and M. Collura; "Growth of entanglement entropy under local projective measurements"; *Phys. Rev. B* **105** (2022) 094303.
- [6] H. B. Kwon, and M. C. Cha; "Relation of entanglement entropy and particle number fluctuations in one-dimensional Hubbard model"; *J. Korean Phys. Soc.* **82** (2023) 194-198.
- [7] C. Fischbacher, and R. Schulte; "Lower bound to the entanglement entropy of the XXZ spin ring"; *Ann. Henri Poincare* (2023).
- [8] A. Cardillo, F. Galve, D. Zueco, and J. Gomez-Gardenes; "Information sharing in quantum complex networks"; *Phys. Rev. A* **87** (2013) 052312.
- [9] M. A. Jafarizadeh, S. Nami and F. Eghbalifam; "Entanglement entropy in the quantum networks of a coupled quantum harmonic oscillator"; *J. Stat. Mech.* **P05018** (2015).

همان گونه که از نمودار مشخص است، آنتروپی با افزایش تعداد ذرات، کاهش می یابد. درواقع با افزایش تعداد ذرات، همبستگی بین ذره اول با بقیه ذرات کمتر و کمتر می شود. در شکل 2- (b) تغییرات آنتروپی برای تقسیم بندی که در آن راس 1 و 2 در یک بخش و بقیه رئوس در بخش دیگر هستند، رسم شده است. باز هم آنتروپی با افزایش تعداد ذرات کاهش می یابد. در 2- (c) نمودار آنتروپی برای گراف خطی با تعداد رئوس زوج در حالتی است که نیمی از رئوس مجاور کناری در یک بخش و نیمی دیگر در بخش دیگر باشند. در این حالت هم مشابه دو حالت قبلی، آنتروپی با افزایش تعداد ذرات کاهش می یابد. در هر سه این حالات، با افزایش تعداد ذرات، همبستگی دسته انتخابی با دسته بعدی کمتر می شود و بنابراین آنتروپی کاهش می یابد. در 2- (d) نمودار تغییرات آنتروپی برای حالتی است که در آن رئوس غیرمجاور هم در یک دسته و بقیه رئوس در دسته دیگر باشند، رسم شده است (به طور مثال در $N=6$ ، رئوس 1، 3 و 5 در یک دسته و بقیه رئوس در دسته دیگر هستند). در این حالت، با افزایش تعداد رئوس، تعداد اتصالات بین دو دسته افزایش یافته و همبستگی بین رئوس دو دسته بیشتر و بیشتر می شود. بنابراین آنتروپی درهم-تیدگی هم افزایش می یابد.

(ب) گراف ستاره

در شکل 3- (a) تغییرات آنتروپی درگراف ستاره بر حسب ثابت کوپلاژ c و برای تعداد نوسانگرهای مختلف برای تقسیم بندی که در آن راس مرکزی گراف ستاره در یک بخش و بقیه رئوس در بخش دیگر هستند، رسم شده است. در این حالت، آنتروپی با افزایش تعداد ذرات، افزایش می یابد. درواقع با افزایش تعداد ذرات، تعداد بازوهای چسبیده به راس مرکزی بیشتر می شود، بنابراین تعداد لینک بین دو بخشی که آنتروپی بین آن ها محاسبه می شود، بیشتر می شود و در نتیجه آنتروپی افزایش می یابد. در شکل 3- (b) تغییرات آنتروپی برای تقسیم بندی که در آن راس 1 و 2 در یک بخش و بقیه رئوس در بخش دیگر هستند، رسم شده است. باز هم آنتروپی با افزایش تعداد ذرات افزایش می یابد. در 3- (c) تغییرات آنتروپی برای تقسیم بندی که در آن راس یکی از بازوها در یک بخش و بقیه رئوس در بخش دیگر هستند، رسم

محاسبه ساختار الکترونی مولکولی با کامپیوتر کوانتومی

نائیج، حمیدرضا^۱؛ محمودی، عرفان^۲؛ داودی یگانه، حسین^۲؛ اکبری، محسن*^{۲,۳}

^۱ دانشکده شیمی، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

^۲ مرکز تحقیقات فناوریهای کوانتومی ایران، تهران، ایران

^۳ آزمایشگاه اپتیک کوانتومی، دانشکده فیزیک، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش، ما الگوریتم *Variational Quantum Eigensolver (VQE)* را به عنوان یک الگوریتم ترکیبی کوانتوم-کلاسیک برای محاسبه انرژی حالت پایه مولکول‌هایی مانند H_3^+ ، OH^- ، HF و BH_3 که در آن تعداد کیوبیت‌ها روند افزایشی دارد، پیاده‌سازی می‌کنیم. برای این منظور، از نگاشت پاریته برای تبدیل فرمیون به کیوبیت و *UCCSD* برای ساخت یک *ansatz* استفاده می‌کنیم. نتایج حاصل از الگوریتم کوانتومی را با رویکردهای شیمی محاسباتی از جمله *FCI* به عنوان انرژی معیار محاسباتی و *UHF* به عنوان یک روش محاسباتی رایج مقایسه می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که مطابقت خوبی بین انرژی حالت پایه مولکولی به دست آمده از الگوریتم *VQE* و روش محاسباتی *FCI* وجود دارد. علاوه بر این، دقت انرژی‌های حالت پایه به دست آمده از *VQE* در این پژوهش بالاتر از مقادیر گزارش شده قبلی است.

واژه‌های کلیدی: کامپیوتر کوانتومی، الگوریتم کوانتومی وردشی، انرژی حالت پایه مولکولی

Molecular Electronic Structure Calculation via a Quantum Computer

Naeij, Hamid Reza¹; Mahmoudi, Erfan²; Davoodi Yeganeh, Hossein² and Akbari, Mohsen*^{2, 3}

¹Department of Chemistry, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

²Iranian Quantum Technologies Research Center (IQTEC), Tehran, Iran

³Quantum Optics Lab, Department of Physics, Kharazmi University, Tehran, Iran

Abstract

We implement the *Variational Quantum Eigensolver (VQE)* algorithm, as a hybrid quantum-classical algorithm to calculate the ground state energy of the molecules such as H_3^+ , OH^- , HF and BH_3 in which the number of qubits has an increasing trend. We use the parity transformation for fermion to qubit encoding and the Unitary Coupled Cluster for Single and Double excitations (*UCCSD*) to construct an *ansatz*. We compare our quantum simulation results with the computational chemistry approaches including Full Configuration Interaction (*FCI*), as benchmark energy and Unrestricted Hartree-Fock (*UHF*), as a common computational method. Our results show that there is a good agreement between ground state energies obtained from *VQE* and *FCI*. Moreover, the accuracy of the energies obtained from *VQE* in our work is higher than the previously reported values.

Keywords: quantum computer, variational quantum algorithm, *ansatz*, molecular ground state energy

* Corresponding Author: mohsen.akbari@khu.ac.ir

1-Introduction

One of the most important applications of a quantum computer is electronic structure calculation of molecular systems which is the heart of computational chemistry. The fundamental goal of molecular electronic structure problems is to solve the ground state energy of many-body molecules. Knowledge of the molecular ground state properties allows researchers to obtain information about stable structures of the molecules, properties of the molecules and the mechanism and kinetics of the reactions [1].

The electronic structure calculation is a computational challenge due to the presence of electron-electron correlations in the molecular Hamiltonian. Consequently, the problem of the ground state energy can be solved by approximate approaches. In the weak interaction between electrons, the Hartree-Fock (HF) method can be used, which is a mean-field approximation. When the interaction between electrons becomes strong, one can use classical methods such as Configuration Interaction (CI) to obtain more accurate results. Furthermore, the Full Configuration Interaction (FCI) is a linear variational approach that can give a numerically exact solution for the ground state energy of the molecules without any truncation of the CI method. For this reason, FCI provides benchmark results against which other approaches can be compared [2].

In recent years, Variational Quantum Algorithms (VQAs) have been developed as a leading strategy to gain quantum advantage in Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ) era computers. In this regard, the Variational Quantum Eigensolver (VQE) algorithm was developed in 2014 to estimate the molecular ground state properties on NISQ era computer [3]. Nowadays, VQE has attracted much attention in quantum computing due to their

relatively low circuit depth and robustness against noise which has led to successful studies for the simulation of small molecules on available quantum hardware and simulators [4,5].

Here, we implement VQE to calculate the ground state energy of molecules such as Trihydrogen Cation (H_3^+), Hydroxide ion (OH^-), Hydrofluoric Acid (HF) and Trihydridoboron, also known as Borane (BH_3). Moreover, we use computational chemistry approaches such as Unrestricted HF (UHF) and FCI to find the ground state energy. Consequently, the results of the ground state energy obtained from VQE are compared to FCI methods, as benchmark energy. It is important to note, we have implemented the Python-based software package on local clusters for our VQE simulation.

2-VQE Algorithm

VQE is the most promising quantum algorithm in chemistry which is implemented on the NISQ devices. VQE estimates the ground state energy of the molecules using the Rayleigh-Ritz variational principle which is defined as

$$\langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle \geq E_g \quad (1)$$

where E_g is the minimum eigenvalue of Hamiltonian (H) and $\psi(\theta)$ is the ansatz for the ground state energy which is prepared by applying the parametrized gate $U(\theta)$ on the initial state ψ_0 . This principle states that one can find the ground state energy and wave function by optimizing the parameters θ for a particular geometric configuration which minimizes the expectation value of H .

The steps of the VQE are as follows [6]:

1) The second-quantized H for the molecular systems should be obtained based on the

computational basis. Then, fermion to qubit transformation for the second-quantized H should be performed.

2) Based on a good classical approximation to the ground state of H such as HF functions, an ansatz state $\psi(\theta)$ would be prepared by implementing unitary gates $U(\theta)$ on a quantum circuit as $|\psi(\theta)\rangle = U(\theta)|\psi_0\rangle$. The gates that operate on the qubits can be any parametrized gates such as single qubit rotations $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ and $R_z(\theta)$ or non-parametrized gates such as X, Y, Z, CNOT.

3) The expectation value of Hamiltonian $\langle H \rangle = \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle$ which includes tensor products of Pauli operators should be measured for the prepared ansatz $\psi(\theta)$. This step is often called Hamiltonian averaging. The state preparation and measurement steps are repeated many times to estimate the expectation value of Hamiltonian.

4) The final step is optimization. In this step, the parameters θ in ansatz $\psi(\theta)$ are updated iteratively to minimize H . We assume this procedure converges after n iterations. Therefore, the variational ground state energy and wave function would be obtained.

It is worth noting that fermion to qubit mapping, state preparation and measurement steps are performed on a quantum computer and the steps of second-quantized H and optimization would be performed on a classical computer. For this reason, VQE is a hybrid quantum-classical algorithm.

Briefly, in VQE, the energy and parameters obtained from the quantum computer are input to a classical computer which outputs new parameters and are then fed back to the quantum circuit. This process is repeated until the energy converges. A schematic of VQE is given in Figure (1).

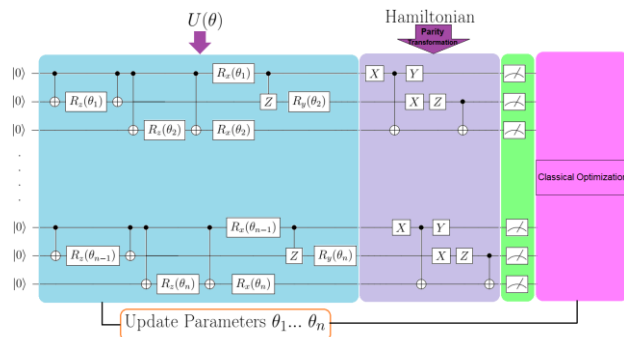


Figure 1: A schematic of VQE to estimate the molecular ground state energy.

3-Results

In this section, we report the results obtained from the implementation of the VQE algorithm to calculate ground state energy of H_3^+ , OH^- , HF and BH_3 molecules.

As an example, for HF molecule we start by considering the 1s orbital for hydrogen atom and 1s, 2s, 2p_x, 2p_y and 2p_z orbitals for fluorine atom. This leads to 12 molecular orbitals considering spin. Consequently, the calculation of the Hamiltonian of the HF molecule requires the consideration of 12 spin-orbitals (12 qubit). In other words, each qubit typically denotes the population of a spin orbital. Therefore, the number of qubits for H_3^+ , OH^- , HF and BH_3 molecules are 6, 12, 12 and 16, respectively. We reduced the number of qubits considering Z2 symmetry. In this work, we chose a two-qubit reduction, which leads to a reduction in the complexity of the operation and especially useful for NISQ-era computers. The molecular orbitals are calculated from the UHF method in the STO-3G basis functions. To transform fermion to qubit, we have used the parity transformation approach. Moreover, we have used Unitary Coupled Cluster for Single and Double excitations (UCCSD) ansatz in our calculations which is a well-known chemically inspired ansatz in which a Hartree-Fock initial state is used as a starting point for the ansatz. The classical optimization

process is performed using the Limited-memory BFGS Bound (L-BFGS-B) optimizer. Consequently, the ground state energies of the molecules are obtained from VQE implementation on Python-based software package on local clusters.

We have calculated the electronic ground state energy of H_3^+ , OH^- , HF and BH_3 molecules in various bond lengths using VQE, UHF and FCI methods. The potential energy curves of the molecules as a function of bond length (Å) are plotted in Figure (2). In Figure (3), the ground state energies of studied molecules obtained from VQE and UHF are compared to the FCI results. By analyzing the errors based on logarithms, we conclude that there is a good agreement between molecular ground state energy obtained from VQE and FCI approach, especially in the equilibrium bond length of the molecules.

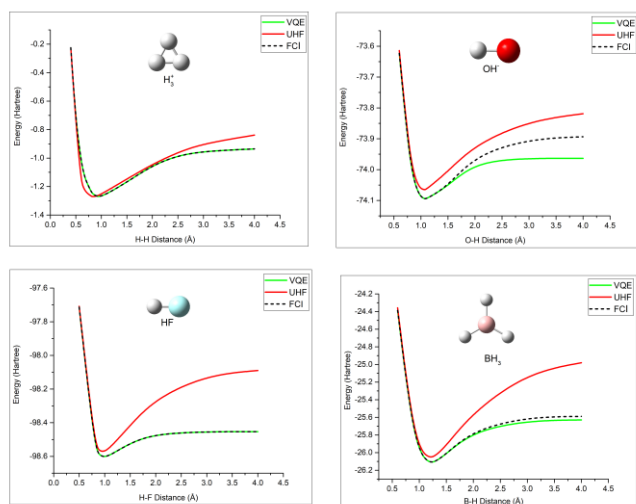


Figure 2: Potential energy curves of a) H_3^+ b) OH^- c) HF and d) BH_3 molecules as a function of bond length (Å) obtained from VQE, UHF and FCI approaches.

Since we did not use a significant reduction of qubits, the average accuracy for the VQE results in our study ($\approx 10^{-7}$) is higher than the values reported by others ($\approx 10^{-3}$) [4-6].

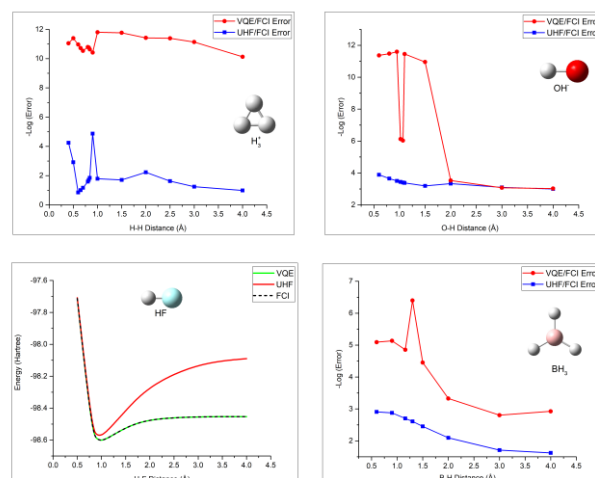


Figure 3: Error in the ground state energy calculation of a) H_3^+ , b) OH^- c) HF and d) BH_3 molecules as a function of bond length (Å) obtained from VQE and UHF in comparison to FCI energies as benchmark energy.

4-Conclusion

We have used the VQE algorithm to calculate the ground state energy of some molecules such as H^+ , OH^- , HF and BH_3 . Moreover, we obtained the ground state energies based on the UHF and FCI methods. Our results show that there is a good agreement between ground state energies obtained from VQE in comparison to the UHF. This work has been done with the aim of benchmarking the VQE algorithm to calculate the ground state energy for a new set of molecules that can be good candidates for molecular simulation on a real quantum computer.

References

- [1] P. Hoggan, "Electronic Structure Methods with Applications to Experimental Chemistry", Academic Press. (2014)
- [2] A. Szabo and N. S. Ostlund, "Modern Quantum Chemistry", Dover Publications. (1996)
- [3] A. Peruzzo, et al., "A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor", *Nature Communication*, 5, (2014) 4211
- [4] A. Kandala, et al., "Hardware efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets", *Nature*, 549, (2017) 242
- [5] Y. Nam, et al., "Ground-state energy estimation of the water molecule on a trapped-ion quantum computer", *npj Quantum Information*, 6, (2020) 1
- [6] C. Hempel, et al., "Quantum chemistry calculations on a trapped-ion quantum simulator", *Physical Review X*, 8, (2018) 031022

تشخیص ناهمخوانی کوانتومی از طریق شبکه عصبی پیچشی

تقدمی، نرجس^۱؛ مانی، اعظم^۲؛ فهیم، علی^۲؛ باکویی، علی^۱؛ سلامی، محمدصادق^۳

^۱دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، خیابان جلال آل احمد، تهران

^۲دانشکده علوم مهندسی، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، خیابان ۱۶ آذر، تهران

^۳دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف، خیابان آزادی، تهران

چکیده

ناهمخوانی کوانتومی نوعی همبستگی کوانتومی است که به صورت اختلاف بین اطلاعات متقابل کوانتومی دو سیستم و اطلاعات متقابل کلاسیکی آنها، تعریف می‌شود. این کمیت معیاری از کوانتومی بودن همبستگی‌های بین دو سیستم است بطوریکه حتی سیستم‌های غیردرهم‌تنیده نیز می‌توانند ناهمخوانی کوانتومی داشته باشند. با توجه به این که برای محاسبه‌ی اطلاعات متقابل کلاسیک، نیاز به انجام یک بهینه‌سازی بر روی تمام اندازه‌گیری‌های یک بخش از سیستم هست، محاسبه‌ی ناهمخوانی کوانتومی به صورت تحلیلی کار ساده‌ای نیست و حل تحلیلی فقط برای حالت‌های خاصی از سیستم‌های دو بخشی در دسترس است. حتی فراتر از آن، تشخیص این که یک حالت ناهمخوانی کوانتومی دارد یا خیر، نیز مساله ساده‌ای نیست. در این مقاله ما یک شبکه عصبی پیچشی طراحی کردیم که قادر است حالت‌هایی که دیسکورد غیرصفر دارند را با دقت ۹۴ درصد غربال کند.

واژه های کلیدی: ناهمخوانی کوانتومی، شبکه عصبی پیچشی.

Detection of Quantum Discord through Convolution Neural Network

Taghadomi, Narjes¹; Mani, Azam²; Fahim, Ali²; Bakouei, Ali¹; Salami, M.Sadegh³

¹ Department of Physics, Tarbiat Modares University, Tehran,

² Department of Engineering Science, College of Engineering, University of Tehran

³ Department of Computer Engineering, Sharif University of Technology, Tehran,

Abstract

Quantum discord is a type of correlation that is defined as the difference between the quantum mutual information of two parties, and their classical mutual information. Due to the optimization which is present in the definition of quantum discord, it is not a simple task to calculate it analytically, and even to distinguish between the discordant and non-discordant states. Using the machine learning algorithms, we have designed a convolution neural network that is able to sift the states which have non-zero discord with 94% accuracy.

Keywords: Quantum Discord, Convolution Neural Network.

مقدمه

سیستم‌های هوش مصنوعی عمدتاً بر مبنای الگوریتم‌های یادگیری ماشینی متکی هستند که به رایانه‌ها اجازه می‌دهند از داده‌ها یاد بگیرند و عملکرد خود را در طول زمان بهبود بخشند. یادگیری ماشین، کاربردهای متعددی در زمینه محاسبات و اطلاعات کوانتومی دارد به طوری که از آن برای حل مسائل مختلف مربوط

هوش مصنوعی شاخه‌ای از علوم و مهندسی کامپیوتر است که هدف آن ایجاد سیستم‌ها و الگوریتم‌هایی است که می‌توانند وظایفی را انجام دهند که عموماً به هوش انسانی نیاز دارند. این

می‌شود [5]. اولین فرم اطلاعات متقابل کوانتومی، کل اطلاعات مشترک که بین دو زیرسیستم A و B در حالت ρ_{AB} می‌باشد بصورت:

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (1)$$

که $S(\rho_A)$ ، $S(\rho_B)$ و $S(\rho_{AB})$ آنتروپی‌های فون نویمان برای حالت‌های تقلیل یافته $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$ ، $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB})$ و ρ_{AB} کلی می‌باشد.

تعریف دیگری از اطلاعات متقابل نیز هست که براساس هم ارزی کوانتومی قضیه بیز اینگونه بیان می‌شود:

$$J(B|A) = S(\rho_B) - \min_{\{\Pi_a\}} S(\rho_{B|A}). \quad (2)$$

که در اینجا $S(\rho_{B|A}) = \sum_a p_a S(\rho_{B|a})$ مقدار میانگین آنتروپی شرطی سیستم B است، هنگامی که احتمال خروجی a بصورت $p_a = Tr(\Pi_a \rho_{AB} \Pi_a^\dagger)$ است و $\rho_{B|a} = \Pi_a \rho_{AB} \Pi_a^\dagger / p_a$ مربوط به چگالی کاهش یافته زیرسیستم B است. معادله (2) بیانگر میزان اطلاعات بدست آمده از زیرسیستم B است که بعد از اندازه‌گیری زیرسیستم A در مجموعه پایه‌های متعامد $\{\Pi_a\}$ بدست می‌آید. از این تعبیر برای میزان همبستگی‌های کلاسیک بین دو زیر سیستم استفاده می‌شود [5].

ناهمخوانی کوانتومی بصورت تفاوت بین دو مقدار $I(\rho_{AB})$ و $J(B|A)$ تعریف می‌شود که میزان همبستگی کوانتومی بین دو زیرسیستم A و B را نشان می‌دهد:

$$QD(B|A) \equiv I(\rho_{AB}) - J(B|A) = S(\rho_A) - S(\rho_{AB}) + \min_{\{\Pi_a\}} S(\rho_{B|A}). \quad (3)$$

لازم به ذکر است که اطلاعات بدست آمده از B که با اندازه‌گیری روی A حاصل شده لزوماً با اطلاعات بدست آمده از A که با اندازه‌گیری روی B انجام پذیرفته، یکسان نمی‌باشد $(QD(B|A) \neq QD(A|B))$.

در معادله (3) که تعریف ناهمخوانی کوانتومی برای یک سیستم دویخشی (ρ_{AB}) است، محاسبه مقدار آنتروپی‌ها برای کل سیستم و زیرسیستم‌ها $(S(\rho_A), S(\rho_{AB}))$ کار راحتی است ولی محاسبه کمینه مقدار آنتروپی شرطی، کار دشواری است. برای ماتریس چگالی‌های عام، حل تحلیلی هنوز وجود ندارد ولی برای ماتریس

به پردازش اطلاعات کوانتومی، شبیه‌سازی کوانتومی و کنترل کوانتومی مانند توموگرافی کوانتومی، تصحیح خطای کوانتومی و طراحی مدارهای کوانتومی، استفاده می‌شود [۱]. نوع جدیدی از شبکه عصبی مصنوعی، شبکه عصبی پیچشی^۱ است که اغلب در علوم و کاربردهای کوانتومی نیز استفاده می‌شود. یک شبکه عصبی پیچشی از دنباله‌ای از لایه‌ها ساخته شده است که فیلترهایی (کرل) نیز به آن گفته می‌شود را به منظور استخراج مشخصه‌ها بر روی داده‌های ورودی اعمال می‌کنند. این لایه‌ها از یادگیری نظارت شده برای تنظیم وزن شبکه استفاده می‌کنند تا تفاوت بین خروجی‌های پیش‌بینی شده و واقعی را به حد مطلوب کاهش دهند.

در نظریه اطلاعات کوانتومی، شناخت کامل هر سیستم دو ذره‌ای کوانتومی بسیار حائز اهمیت است و این یک واقعیت بسیار ضروری است که بتوانیم ویژگی‌های هر سیستم دو ذره‌ای دلخواه مانند درهم‌تنیده بودن، همبستگی کلاسیکی و یا کوانتومی داشتن ... را تشخیص داده یا تخمین بزنیم. ناهمخوانی کوانتومی یکی از همبستگی‌های غیرکلاسیکی است و در حوزه‌های مختلف فناوری کوانتومی مانند انتقال از راه دور کوانتومی [1]، توزیع کلید کوانتومی [2]، ترمودینامیک کوانتومی [3] و بسیاری از حوزه‌های دیگر، نقش ایفا می‌کند.

در این مقاله یک شبکه عصبی پیچشی با کرل‌هایی که مفاهیم فیزیکی را در بر دارند، طراحی می‌کنیم. این شبکه قادر است حالت‌های دو کیوبیتی دارای دیسکورد را از حالت‌های بدون دیسکورد جدا کند و بازده آن، حدود ۹۴ درصد است. ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش بعدی به طور خلاصه مفهوم ناهمخوانی کوانتومی را مرور می‌کنیم، سپس طراحی شبکه عصبی و کرل‌ها را بیان خواهیم کرد و در نهایت پس از ارایه نتایج، مقاله را با یک نتیجه‌گیری به پایان می‌رسانیم.

ناهمخوانی کوانتومی

ناهمخوانی کوانتومی از تفاوت بین دو تعریف کلاسیکی اطلاعات متقابل که طبق قضیه بیز^۲ با هم معادل هستند، تعریف

¹Neural Network Convolution(CNN)

²Bayes' theorem

می شود، ویژگی هایی مانند تکانه، اسپین، مکان و... به عنوان مقدار چشم داشتی عملگر در ازای آن حالت کوانتومی، به دست می آید. در اعمال شبکه ی پیچشی بر روی یک سیستم دوبخشی، در هر لایه پیچشی، کرنل به عنوان عملگر مشاهده پذیر رفتار می کند و اگر مراحل اسکن را با دوگام انجام دهیم، خروجی بصورت مقدار چشم داشتی عملگرهای یک زیرسیستم خواهد بود [9]. در هر لایه پیچشی، بایاس و تابع فعال سازی در شبکه استفاده نمی شود.

اگر زیر سیستم ها به ترتیب دارای ابعاد d_A و d_B باشند، ماتریس چگالی سیستم بصورت $\rho_{AB} = \sum_{ij,kl} \rho_{ij,kl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|$ و عملگرهای مشاهده پذیر به صورت $O = O^{(A)} \otimes O^{(B)}$ نظر گرفته می شوند. در شبکه نیز $O^{(1)T}$ و $O^{(2)T}$ با گام های متناسب با ابعاد زیرسیستم ها، بعنوان کرنل های لایه اول و دوم پیچشی بکار برده می شوند. خروجی اولین لایه پیچشی بدین صورت است:

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \rho \otimes O^{(B)T} \\ &= \left(\sum_{ij,kl} \rho_{ij,kl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l| \right) * O^{(B)T} \\ &= \sum_{ij,kl} \rho_{ij,kl} |i\rangle\langle j| \otimes (|k\rangle\langle l| * O^{(B)T}) \\ &= \sum_{ij} \sum_{kl} \rho_{ij,kl} \langle l| O^{(B)} |k\rangle |i\rangle\langle j| \\ &= Tr_B(\rho \cdot I^{(A)} \otimes O^{(B)}) \end{aligned} \quad (4)$$

همانطور که از معادله (4) مشاهده می شود، با اعمال کرنل هرمیتی با بعد زیرسیستم B، کرنل روی زیرسیستم B اعمال شود و خروجی لایه اول پیچشی، رد جزئی از آن است:

$$\begin{aligned} C^{(2)} &= \rho * O^{(A)T} \\ &= (\rho * O^{(B)T}) * O^{(A)T} \\ &= Tr_B(\rho * O^{(B)T}) * O^{(A)T} \\ &= Tr[\rho \cdot (O^{(A)} \otimes O^{(B)})] \\ &= \langle O^{(A)} \otimes O^{(B)} \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

خروجی لایه دوم بصورت مقدار چشم داشتی عملگرهای مشاهده پذیر O برای حالت دو بخشی ρ_{AB} است (شکل ۲).

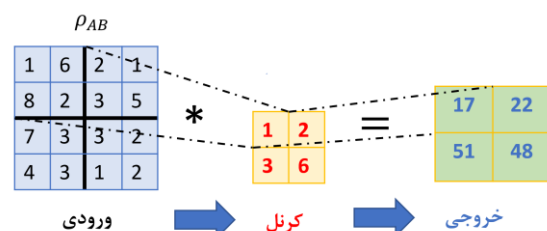
چگالی های خاصی که عمومیت بیشتری در مسائل فیزیکی دارند و تعداد پارامترهای کمتری نسبت به ماتریس چگالی های عام دارند، حل های تحلیلی انجام شده است. به عنوان نمونه، محاسبه تحلیلی ناهمخوانی کوانتومی برای ماتریس چگالی هایی به فرم X (که همه عناصرشان بجز قطر اصلی و فرعی صفر هستند) انجام شده است. علاوه بر این، با استفاده از شبکه های عصبی معمولی، تشخیص ناهمخوانی کوانتومی فقط برای ماتریس چگالی هایی که فرم خاص X و تنها عناصر حقیقی داشته اند انجام شده است [6-8].

ما در این مقاله، با طراحی شبکه عصبی پیچشی و به کمک آن، راه حلی برای تشخیص ناهمخوانی کوانتومی صفر از غیر صفر برای ماتریس چگالی هایی با فرم عام ارائه می دهیم.

شبکه عصبی پیچشی

در شبکه عصبی پیچشی، ویژگی هایی از داده ها توسط کرنل ها استخراج می شوند و پارامترهای آموزش پذیر شبکه مانند شبکه های عصبی ساده، با داده هایی برچسب زده شده آموزش دیده و برای ورودی های بدون برچسب خروجی، قادر به پیش بینی حالت برچسب متناظر خواهند شد.

کرنل ها در این شبکه، داده های ورودی را اسکن کرده و عناصر کرنل یک به یک در عناصر ماتریس چگالی ضرب شده و در نهایت در هر مرحله از اسکن کرنل، مقادیر ضرب شده با هم جمع می شوند و سپس قسمت بعدی ماتریس اسکن می شود (شکل 1).



شکل 1: نمونه ای از اعمال کرنل در شبکه پیچشی بدون در نظر گرفتن تابع فعال سازی و بایاس

مشابه عملکرد کرنل ها در استخراج ویژگی های کوانتومی را در عملگرهای مشاهده پذیر هم شاهد هستیم. هنگامی که این عملگرها روی ماتریس چگالی اعمال می شوند و رد محاسبه

$$\rho_{non_QD} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes |n_i^B\rangle\langle n_i^B| \quad (6)$$

که p_i احتمال کلاسیکی حالت $|n_i^B\rangle\langle n_i^B|$ است، تولید شد. ماتریس های ρ_{non_QD} ، ماتریس چگالی هایی هستند که مقدار ناهمخوانی کوانتومی کاملاً صفر دارند. کرنل ها بصورت ماتریس های هرمیتی مقدار اولیه دهی شدند و ابعاد آنها متناسب با ابعاد زیرسیستم ها بود. کرنل ها را می توان مجموعه ای از عملگرهای

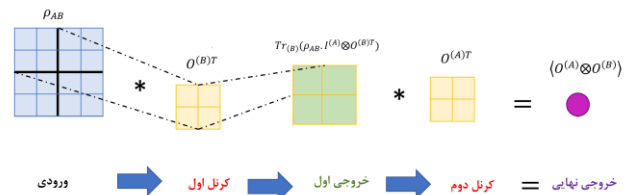
پائولی و واحد، به صورت $O = \sum_{i=0}^3 c_i \sigma_i$ در نظر گرفت و نتیجه نهایی براساس ویژگی های کوانتومی استخراج شده در شبکه تشخیص داده می شود. خروجی نهایی با دقت اعتبارسنجی 94٪ وجود همبستگی کوانتومی در سیستم را تشخیص می دهد.

نتیجه گیری

در این مقاله، با طراحی یک شبکه عصبی پیچشی توانستیم وجود ناهمخوانی کوانتومی در یک سیستم دو کیوبیتی را برای هر حالت دلخواه تشخیص دهیم. برای این منظور با برچسب گذاری حالت هایی که مقدار ناهمخوانی کوانتومی صفر دارند؛ یادگیری ماشین صورت گرفته است. این شبکه عصبی طراحی شده قادر است با دقت اعتبارسنجی 94٪ وجود همبستگی کوانتومی در سیستم را تشخیص دهد.

مرجع ها

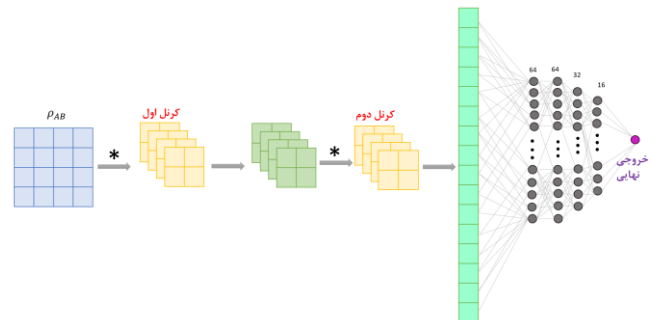
- [1] A. Bera, T. Das and et al. ; "Quantum discord and its allies: a review of recent progress"; *Reports on Progress in Physics* **81**, No. 2 (2017).
- [2] S. Pirandola; "Quantum discord as a resource for quantum cryptography"; *Scientific Reports* **4**, No. 6956 (2014).
- [3] N. Behzadi, E. Soltani & E. Faizi; "Thermodynamic Cost of Creating Global Quantum Discord and Local Quantum Uncertainty"; *International Journal of Theoretical Physics* **57**, (2018) 3207–3214.
- [4] H. Ollivier, W. H. Zurek; "Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations"; *Physical Review Letters* **88**, No.1(2002) 017901.
- [5] L. Henderson, V. Vedral; "Classical, quantum and total correlations"; *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 6899–6905.
- [6] S. Luo; "Quantum discord for two-qubit systems"; *Phys. Rev. A* **77**, 042303 (2008).
- [7] M. Ali, A.R.P. Rau, G. Alber; "Quantum discord for two-qubit X states"; *Phys. Rev. A* **81**, 042105 (2010).
- [8] A. Maldonado-Trapp, A. Hu, L. Roa; "Analytical solutions and criteria for the quantum discord of two-qubit X-states"; *Quantum Inf. Process.* **14**(6); (2015) 1947–1958
- [9] Z.Q. Lian, Y.Y. Zhou, L.J. Wang, Q. Chen; "Finding efficient observable operators in entanglement detection via convolutional neural network"; arXiv preprint arXiv:2205.13376 (2022)



شکل 2: وجود دو لایه پیچشی بدون بایاس و تابع فعال سازی، کرنل اول $O^{(B)T}$ ، کرنل دوم $O^{(A)T}$ و خروجی مقدار چشم داشتی عملگر O است.

نتایج

شبکه عصبی پیچشی پیشنهادی ما به صورت، دو لایه پیچشی است که هیچ گونه تابع فعال سازی و بایاس در آن استفاده نشده است. در هر لایه پیچشی چهار کرنل متناسب با چهار مشاهده پذیر کوانتومی (ماتریس های واحد و پائولی) اعمال شده است. خروجی حاصل از این دو لایه 16 عدد است که برابر با مقادیر چشم داشتی ناشی از 16 نوع اعمال کرنل ها یا عملگرهای مشاهده پذیر است. این خروجی، نقش ورودی را برای یک شبکه عصبی ساده کاملاً متصل با چهار لایه پنهان، را بازی خواهد کرد. در این شبکه کاملاً متصل، تعداد گره های لایه ها به ترتیب 64، 64، 32 و 16 خواهد بود و تابع فعال سازی بین لایه ها خطی بوده و در لایه آخر سیگموئید است.



شکل 3: ساختار شبکه عصبی پیچشی پیشنهاد شده، همراه با یک شبکه کاملاً متصل. ورودی ماتریس چگالی دو کیوبیتی است که تحت دو کرنل مقادیر چشم داشتی را به شبکه عصبی ساده می فرستد تا خروجی شبکه عصبی ساده ناهمخوانی کوانتومی را دسته بندی نماید.

در این شبکه 18000 ماتریس چگالی مورد بررسی قرار گرفت که 80 درصد از این داده ها در آموزش شبکه استفاده شد. داده های ورودی، ماتریس چگالی هایی بودند که تصادفی تولید شدند، همچنین تعدادی ماتریس چگالی با ساختار

تأثیر جریان‌های حالت پایای غیرتعادلی در شارژ باتری‌های کوانتومی

حاتمی کمین^۱، فرزانه^۱؛ ابوعلی، زهرا^۱؛ سلیمی، شهریار^۱

^۱گروه فیزیک، دانشگاه کردستان، سنندج

چکیده

در این مقاله، تحلیلی از دسترس‌پذیری یا حداکثر کار قابل استخراج از باتری‌های کوانتومی در حضور جریان‌های حالت پایای شارژ و/یا گرما ارائه می‌شود. باتری‌های کوانتومی به‌عنوان سامانه‌های کوانتومی باز بدون برهمکنش (سامانه‌های مزوسکوپی) مدل‌سازی می‌شوند که با اتصال قوی به دو مخزن حرارتی و ذره‌ای در چارچوب نظریه تابع گرین غیرتعادلی در یک رژیم حالت پایا متصل شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که باتری را می‌توان آشکارا با یک جریان شارژ حالت پایا در مقایسه با جریان گرما بویژه در یک رژیم بدون تشدید شارژ کرد. این سبب می‌شود که به طور قابل اعتمادی به عملکرد بهینه باتری‌های کوانتومی در رژیم شارژ با بایاس بالا دسترسی داشته باشیم.

واژه‌های کلیدی: باتری کوانتومی، حالت پایا، تشدید، نظریه تابع گرین غیرتعادلی.

The impact of non-equilibrium steady-state currents in the quantum battery charging

Hatami Kamin, Farzaneh¹; Abuali, Zahra¹; Salimi, Shahriar¹

¹ Department of Physics, University of Kurdistan, Sanandaj,

Abstract

In this paper, an analysis of the availability and maximum extractable work of quantum batteries in the presence of charge and/or heat steady-state currents is presented. Quantum batteries are modeled as non-interacting open quantum systems (mesoscopic systems) strongly coupled to two thermal and particle reservoirs within the framework of non-equilibrium Green function theory in a steady-state regime. The results display that the battery can be charged manifestly by a steady-state charge current compared to heat one, especially, in an off-resonant transport regime. This allows us to reliably access the performance of the quantum batteries in the high bias-charging regime.

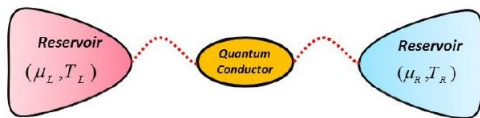
Keywords: Quantum battery, Steady-state, Resonant, Non-equilibrium Green function theory.

PACS No.

مقدمه

سامانه‌های ناخالصی کوانتومی غیرتعادلی منجر شده است [3]. ناخالصی‌های کوانتومی معمولاً به عنوان نقاط کوانتومی شناخته می‌شوند و مطالعه حالت‌های پایای غیرتعادلی نشان داده است که برخلاف حالت‌های تعادلی، آنها به طور مداوم انرژی را به محیط اطراف خود پراکنده می‌کنند. امروزه، باتری‌های کوانتومی یک حوزه تحقیقاتی حیاتی را نشان می‌دهند که مربوط به طراحی پروتکل‌های ذخیره انرژی بهینه برای انتقال به دستگاه‌های کوانتومی

در دهه‌های اخیر، انتقال کوانتومی مورد توجه زیادی قرار گرفته است [1 و 2]. در سطح اتمی، یک گرادیان دما (پتانسیل شیمیایی) باعث می‌شود حامل‌های بار در مواد از مخزن گرم (پتانسیل بالا) به مخزن سرد (پتانسیل پایین) پراکنده شوند. تا کنون انتقال کوانتومی به پیشرفت‌های نظری و تجربی بسیاری در



شکل ۱: یک سامانه مزوسکوپی، متشکل از یک رسانای کوانتومی (باتری کوانتومی) متصل به دو مخزن، چپ L و راست R، در تعادل محلی خود.

با تراز انرژی ϵ_{QB} و عملگرهای خلق فانی $\hat{d}^\dagger$ و $\hat{d}$ الکترون در باتری. ϵ_α انرژی و $\hat{c}_{\alpha,k}$ و $\hat{c}_{\alpha,k}^\dagger$ به ترتیب عملگرهای فنا و خلق فرمیونی مد k از مخزن $\alpha = L, R$ هستند. سامانه مرکزی بوسیله هامیلتونی زیر با مخازن برهمکنش می‌کند

$$H_{int} = -\sum_{\alpha=L,R} v_\alpha (\hat{c}_{\alpha,0}^\dagger \hat{d} + \hat{d}^\dagger \hat{c}_{\alpha,0}) \quad (2)$$

که در آن v_α قدرت برهمکنش بین باتری کوانتومی و مخزن α است. الکترون‌های موجود در مخازن توسط تابع توزیع تعادلی فرمی دیراک (FD) $f_\alpha^{eq}(\omega; \mu_\alpha, T_\alpha) = [e^{\beta_\alpha(\hbar\omega - \mu_\alpha)} + 1]^{-1}$ توصیف می‌شوند. بوسیله اعمال گرادیان دمایی $\Delta T = T_L - T_R$ و ولتاژ بایاس $\Delta\mu = \mu_L - \mu_R$ گرما و الکترون بین مخازن انتقال می‌یابند. در طی یک دوره زمانی طولانی، سامانه به یک حالت پایای غیرتعادلی با میانگین نرخ جریان شارژ کوانتومی غیر برهمکنشی و جریان انرژی می‌رسد. فرمولبندی لانداور-بوتاگر رژیم حالت پایای غیرتعادلی را با احتمال انتقال زیر توصیف می‌کند

$$\tau(\omega) = G^r(\omega) \Gamma_L(\omega) G^a(\omega) \Gamma_R(\omega), \quad (3)$$

که می‌توان آن را از تابع گرین عقب‌افتاده $G^r(\omega) = [\omega - \epsilon_{QB} - \Sigma_L^r(\omega) - \Sigma_R^r(\omega)]^{-1}$ و تابع گرین پیشرفته $G^a(\omega) = [G^r(\omega)]^*$ باتری کوانتومی و به اصطلاح خود انرژی‌های مخزن که از رابطه پراکندگی انرژی مخزن استفاده می‌کنند به دست آورد [5]. هر مخزن با یک تابع طیفی $\Gamma_\alpha(\omega) = -2\text{Im}(\Sigma_\alpha^r(\omega))$ مرتبط است. مطالعات اخیر نشان داده‌اند یک فرآیند استخراج غیر یکانی می‌تواند حداکثر کار را از طریق در دسترس بودن یا انرژی فراهم کند [6]. از نظر ترمودینامیکی، یک سامانه دلخواه $\hat{\rho}$ که با محیط خود در تعادل نیست، می‌تواند کار و گرما را با محیط اطراف خود مبادله کند. به این ترتیب، حداکثر کار موجود به اصطلاح دسترس‌پذیری یا انرژی است که در اینجا به صورت زیر تعریف می‌شود

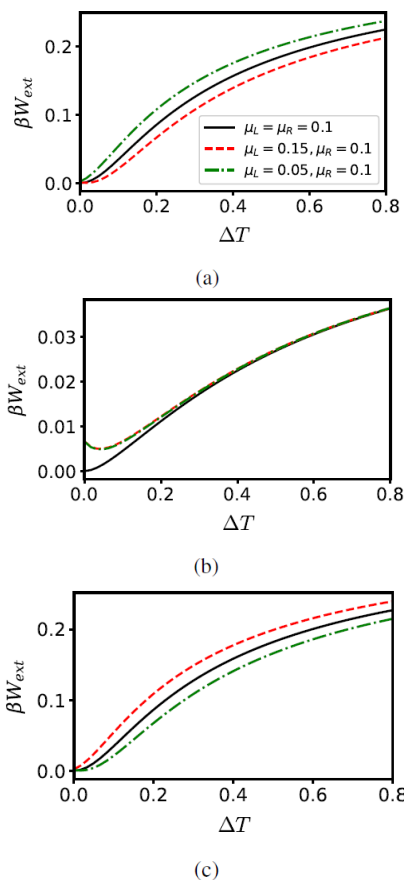
است. به طور معمول، سامانه کوانتومی، که یک باتری یا شارژر است، با محیط خارجی برهمکنش دارد، که منجر به واهمدوسی و تخریب منابع کوانتومی می‌شود. در چنین شرایطی، حالت پایای یک سامانه کوانتومی باز، کاندید مناسبی به منظور تامین منبع کوانتومی مورد نیاز است. بنابراین می‌توان باتری‌های کوانتومی طراحی کرد که در حضور اثرات محیطی فرسوده نشوند. این ملاحظات مسیر جدیدی را به سوی استفاده از مدل‌های ناخالصی کوانتومی برای مطالعه فرایند شارژ باتری کوانتومی می‌گشاید. چنین تبدیل‌هایی در بسیاری از سامانه‌های مزوسکوپی یا نانومقیاس حالت پایا از طریق جریان حالت پایای ذرات میکروسکوپی مانند الکترون‌ها و فوتون‌ها انجام می‌شوند [4]. در این مقاله، مدلی را برای انتقال بار و حرارت بر اساس فرمولبندی تابع گرین غیرتعادلی ارائه می‌کنیم. ابتدا، فرآیند شارژ یک باتری کوانتومی را از طریق یک مجموعه انتقال متشکل از یک باتری کوانتومی در تماس با یک جفت مخزن الکترونی و در تعادل محلی بررسی می‌کنیم. سرانجام، یک فرآیند شارژ بایاس بهینه از باتری‌های کوانتومی را با اعمال اختلاف پتانسیل شیمیایی، و در نتیجه جریان شارژ، در یک رژیم انتقال خاص پیشنهاد می‌دهیم.

کار قابل استخراج از سامانه‌های غیرتعادلی

در شروع، یک مدل ساده از باتری کوانتومی به عنوان یک نقطه کوانتومی تک تراز متصل به دو مخزن الکترونی یک بعدی چپ L و راست R در تعادل محلی در نظر می‌گیریم (شکل ۱). مخزن‌ها توسط ماتریس چگالی $\hat{\rho}_i = Z_i^{-1} e^{-\beta_i(\hat{H}_i - \mu_i \hat{N}_i)} (i = L, R)$ و به ترتیب در دو دمای معکوس مختلف $\beta_R = \frac{1}{kT_R}$ و $\beta_L = \frac{1}{kT_L}$ و با دو پتانسیل شیمیایی μ_R و μ_L مشخص می‌شوند. در این جا $Z_i = \text{tr}_i[e^{-\beta_i(\hat{H}_i - \mu_i \hat{N}_i)}]$ تابع پارش، و $\hat{H}_i$ و $\hat{N}_i$ به ترتیب هامیلتونی و عملگر تعداد ذرات برای مخزن i ام می‌باشند. هامیلتونی آزاد سامانه L-QB-R به صورت زیر داده می‌شود

$$H_0 = \epsilon_{QB} \hat{d}^\dagger \hat{d} + \sum_{\alpha=L,R} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_\alpha \hat{c}_{\alpha,k}^\dagger \hat{c}_{\alpha,k} - \hbar_\alpha (\hat{c}_{\alpha,k-1}^\dagger \hat{c}_{\alpha,k} + c.c.) \quad (1)$$

می‌کند. این به نوبه خود آنتروپی و اگزرژی باتری را افزایش می‌دهد.



شکل 2: حداکثر کار موجود βW_{ext} به عنوان تابعی از ΔT ، برای رژیم‌های مختلف: (a) بدون تشدید - $\varepsilon_{QB} = -0.2$ (b) تشدید $\varepsilon_{QB} = 0.1$ (c) بدون تشدید-خالی $\varepsilon_{QB} = 0.4$. سایر پارامترها عبارتند از $\varepsilon_\alpha = 0, h_\alpha = 1, v_\alpha = 0.12, T_{eq} = 0.1, \mu_{eq} = 0.1$.

نتایج اگزرژی برای گرادیان دمایی‌های مختلف در شکل (2) نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، اگزرژی با افزایش گرادیان دما افزایش می‌یابد. با این حال، رفتار آن به شدت به موقعیت تراز انرژی باتری کوانتومی بستگی دارد. برای موارد بدون تشدید، صرف نظر از علامت جریان‌های حرارتی، جریان‌ها با افزایش ΔT افزایش می‌یابند که در نتیجه منجر به افزایش اگزرژی می‌شود (شکل (2) a و (2) c را ببینید). برای مورد تشدید، افزودن یک بایاس کوچک $\Delta\mu$ به گرادیان دما ΔT منجر به تغییر جریان شارژ می‌شود. طبق قرارداد، یک بایاس مثبت (منفی)

$$\beta W_{ext} = S(\hat{\rho} \| \hat{\rho}^{eq}). \quad (4)$$

بالانویس "eq" مقادیر متعلق به حالت تعادل سامانه $\hat{\rho}^{eq} = Z^{-1} e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$ در دمای معکوس $\beta = \frac{1}{kT}$ را مشخص می‌کند. در این پژوهش، از توصیف ترمودینامیکی غیرتعادلی سامانه بر اساس نظریه توابع گرین غیرتعادلی استفاده شده است. این روش تعاریف استاندارد را برای انرژی، جریان‌های بار و گرما، آنتروپی سامانه و اگزرژی ارائه می‌دهد. برای سامانه‌ای که در اینجا در نظر می‌گیریم، یعنی یک تراز تک الکترونی متصل به دو مخزن، تابع توزیع غیرتعادلی f_{QB}^{NE} باتری کوانتومی به صورت زیر بیان می‌شود

$$f_{QB}^{NE}(\omega) = \frac{\Gamma_L(\omega)f_L(\omega) + \Gamma_R(\omega)f_R(\omega)}{\Gamma_L(\omega) + \Gamma_R(\omega)}. \quad (5)$$

در نهایت یک بیان فشرده برای اگزرژی به دست می‌آید که بر حسب تابع طیفی $A_{QB}(\omega) = -\text{Im}(G^r(\omega))/\pi$ و تابع توزیع غیرتعادلی f_{QB}^{NE} و توزیع FD تعادلی $f_{QB}^{eq} = f_{\alpha}^{eq}$ باتری کوانتومی بیان می‌شود

$$\beta W_{ext} = \int d\omega A_{QB}(\omega) \left[f_{QB}^{NE} \ln \frac{f_{QB}^{NE}}{f_{QB}^{eq}} + (1 - f_{QB}^{NE}) \ln \left(\frac{1 - f_{QB}^{NE}}{1 - f_{QB}^{eq}} \right) \right] \quad (6)$$

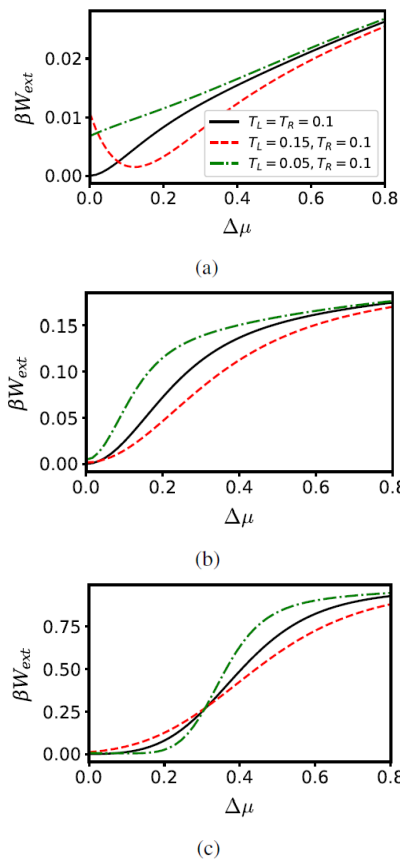
شارژ باتری توسط جریان‌های حالت پایای غیرتعادلی

برای راحتی، فرض می‌کنیم که پارامترهای توصیف کننده مخزن برای هر دو مخزن یکسان باشد. به عنوان اولین قدم برای درک شارژ باتری کوانتومی، فرض می‌کنیم که بایاس و/یا گرادیان دما فقط در یک طرف اتصالات اعمال می‌شود و $\mu_R = \mu_{eq}$ و $T_R = T_{eq}$. در حالی که یک بایاس متناهی $\Delta\mu$ و/یا گرادیان دما ΔT بر روی مخزن سمت چپ، با پتانسیل شیمیایی $\mu_L = \mu_{eq} + \Delta\mu$ و دما $T_L = T_{eq} + \Delta T$ اعمال می‌شود. ما محاسباتی را برای سه رژیم مختلف انجام داده‌ایم: (1) رژیم تشدید که در آن $\varepsilon_{QB} = \mu_{eq}$ (2) رژیم بدون تشدید-خالی که در آن

$\varepsilon_{QB} \gg \mu_{eq}$. (3) رژیم بدون تشدید-پر که در آن $\varepsilon_{QB} \ll \mu_{eq}$.

همانطور که انتظار می‌رود، اعمال یک بایاس $\Delta\mu$ یا یک گرادیان دما ΔT یک جریان بار یا یک جریان انرژی از طریق باتری ایجاد

به یک بایاس اعمال شده) عملکرد شارژ باتری را افزایش داد. مهمتر از آن، می‌توان انرژی باتری کوانتومی را با تطبیق موقعیت



شکل 3: حداکثر کار موجود βW_{ext} به عنوان تابعی از $\Delta\mu$ ، برای رژیم‌های مختلف: (a) بدون تشدید-پر $\mathcal{E}_{QB} = -0.2$ (b) تشدید $\mathcal{E}_{QB} = 0.1$ (c) بدون تشدید-خالی $\mathcal{E}_{QB} = 0.4$. سایر پارامترها مشابه شکل (2) هستند.

تراز انرژی باتری کوانتومی در شرایط غیرتعادلی مربوط به بایاس‌های کاربردی افزایش داد.

مرجع‌ها

- [1] A. Nitzan and M. A. Ratner; "Electron Transport in Molecular Wire Junctions"; *Science* **300**, (2003) 1384.
- [2] I. Lerner, B. Altshuler, and Y. Gefen; "Fundamental Problems of Mesoscopic Physics: Interactions and Decoherence"; NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, Springer Netherlands. (2004)
- [3] M. Di Ventra; "Electrical Transport in Nanoscale Systems"; Cambridge University Press. (2008)
- [4] D. N. Zubarev; "The Method of the Non-Equilibrium Statistical Operator and its Applications. I"; *Fortschritte der Physik* **18**, (1970) 125-147.
- [5] F. H. Kamin, S. Salimi, and A. C. Santos; "Exergy of passive states: Waste energy after ergotropy extraction"; *Phys. Rev. E* **104**, (2021) 034134.

به انتقال الکترون از چپ به راست (راست به چپ) دلالت دارد. این منجر به یک سهم مثبت (منفی) در جریان‌های حرارتی می‌شود. برای رژیم بدون تشدید-خالی، یک بایاس مثبت (منفی) اضافی جریان شارژ و متعاقباً انرژی را افزایش (کاهش) می‌دهد. برای رژیم بدون تشدید-پر، یک بایاس مثبت (منفی) اضافی جریان شارژ را افزایش (کاهش) می‌دهد. با این حال، به دلیل علامت جریان، این با یک رفتار مخالف برای مقدار مطلق جریان مطابقت دارد. اکنون اثرات بایاس‌های اعمال شده را بر روی انرژی (درحضور یا عدم وجود یک گرادیان دمایی کوچک) بررسی می‌کنیم. با این تنظیمات، یک بایاس مثبت به انتقال الکترون از چپ به راست کمک می‌کند. بنابراین بایاس‌های مثبت منجر به جریان‌های بزرگ‌تر در رژیم‌های بدون تشدید-خالی در مقایسه با رژیم تشدید و بدون تشدید-پر می‌شود. در نتیجه، انرژی برای رژیم بدون تشدید-خالی در مقایسه با رژیم تشدید و بدون تشدید-پر بزرگ‌تر است (شکل (3) را ببینید). محاسبات نشان می‌دهد که در مقایسه با گرادیان‌های دما، بزرگ‌ترین مقادیر برای انرژی برای بایاس مثبت (در رژیم بدون تشدید-خالی) به دست می‌آید. بر اساس این ملاحظات، توسعه پروتکل‌های بهینه شارژ بایاس برای باتری‌ها امکان‌پذیر به نظر می‌رسد. علاوه بر این، یک گرادیان دمایی منفی در رژیم‌های شارژ بایاس بالا در شکل (3) عملکرد باتری را بهبود می‌بخشد. در نتیجه، این مشاهدات کنترل زیادی را بر روی شارژ بهینه باتری فراهم می‌کند. جالب اینجاست که می‌توان انرژی را با تطبیق موقعیت تراز انرژی باتری برای شرایط غیرتعادلی (بایاس مثبت) بهینه کرد.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با مطالعه عملکرد باتری با استفاده از رویکرد تابع توزیع غیرتعادلی، رژیم‌های بهینه را برای شارژ باتری کوانتومی یافتیم. همچنین، نشان دادیم که شارژ یک باتری کوانتومی را می‌توان با افزایش بایاس (اختلاف پتانسیل شیمیایی)، در مقایسه با گرادیان دما، به ویژه در رژیم بدون تشدید، به طور قابل توجهی بهبود بخشید. علاوه بر این، همچنین می‌توان با اعمال یک بایاس کوچک برای یک گرادیان دما (یا یک گرادیان دمایی اضافی کوچک

حالت‌های بهینه برای کیفیت کارایی ترابرد متغیر پیوسته یک‌طرفه و دوطرفه

خبازی اسکویی، صمد

دانشکده ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ورامین-پیشوا، پیشوا

چکیده

ترابرد متغیر پیوسته یک پروتوکل اساسی در نظریه اطلاعات کوانتومی است. روش‌های تجربی برای پیاده سازی ترابرد ایده‌آل در شرایط واقعی انجام شده است. در این مقاله، ما یک روش تحلیلی برای مشخص کردن، حالت بهینه ورودی برای کیفیت کارایی ترابرد یک‌طرفه و دوطرفه را ارائه می‌دهیم. متریکی که برای سنجش کارایی مورد استفاده قرار می‌دهیم برابر با فیدلیتی تحت محدودیت انرژی بین ترابرد ایده‌آل و حالت تجربی آن است و در راستای آن حالت بهینه برای حالت ورودی بین حالت ایده‌آل و حالت تجربی را بدست می‌آوریم.

Optimal input states for quantifying the performance of continuous-variable unidirectional and bidirectional teleportation

Samad Khabbazi Oskoueï

Department of Mathematics, Varamin-Pishva Branch, Islamic Azad University, Varamin

Abstract

Continuous-variable (CV) teleportation is a foundational protocol in quantum information science. A number of experiments have been designed to simulate ideal teleportation under realistic conditions. In this paper, we detail an analytical approach for determining optimal input states for quantifying the performance of CV unidirectional and bidirectional teleportation. The metric that we consider for quantifying performance is the energy-constrained channel fidelity between ideal teleportation and its experimental implementation, and along with this, our focus is on determining optimal input states for distinguishing the ideal process from the experimental one.

واژه‌های کلیدی: ترابرد متغیر پیوسته، نظریه اطلاعات کوانتومی، فیدلیتی.

PACS No. 94A15, 47A63, 81P45

مقدمه

است و به دنبال آن برای سیستم‌های کوانتومی پیوسته فرمول بندی شده است. یک سیستم استاندارد ترابرد کوانتومی پیوسته بر مبنای یک حالت کوانتومی درهم تنیده توزیع شده دو-مد حالت خلاء فشرده بین فرستنده و گیرنده بنا شده است. بعبارت دیگر، پروتوکل به این صورت است که گیرنده یک حالت ناشناخته را با بخش درهم تنیده درهم می‌آمیزد و با کمک یک شکافنده پرتو و انجام اندازه گیری هموداین، نتیجه اندازه گیری را در مرحله بعد با کمک یک کانال کلاسیک به گیرنده ارسال می‌کند. در نهایت گیرنده با انجام عملیات اندازه گیری بر بخش توزیع شده، یک تقریبی از حالت اولیه بدست می‌آورد [1]. در یک ترابرد ایده‌آل حالت اولیه به طور کامل بازیابی می‌شود. اما بایستی به نکته توجه کرد که یک حالت ایده‌آل

ترابرد کوانتومی یک پروتوکل اساسی در نظریه اطلاعات کوانتومی است که مشابه کلاسیک ندارد. این شامل انتقال یک حالت کوانتومی دلخواه از یک مکان به مکان دیگر با استفاده از درهم تنیدگی پخش شده بین گیرنده و فرستنده، و همچنین با کمک عملیات موضعی و ارتباطات کلاسیکی است. ترابرد کوانتومی دارای یک نقش اساسی در تکنولوژی‌های کوانتومی مانند پروتوکل‌های پردازش کوانتومی، محاسبات کوانتومی و شبکه‌های کوانتومی می‌باشد. چندین آزمایش برای پیاده سازی پروتوکل ترابرد کوانتومی و توسعه برای سیستم‌های کوانتومی پیچیده انجام شده است. تئوری ترابرد کوانتومی اولین بار برای سیستم‌های کوانتومی دو سطحی بصورت تئوری ارائه شده

مرجع می نامیم. یک فیدلیتی با محدودیت انرژی بین دو کانال $M_{A \rightarrow B}$ و $N_{A \rightarrow B}$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$F_E(M_{A \rightarrow B}, N_{A \rightarrow B}) = \inf_{\rho_{RA}: Tr(H_{APA}) \leq E} F(M_{A \rightarrow B}(\rho_{RA}), N_{A \rightarrow B}(\rho_{RA})),$$

که $\rho_A = Tr_R(\rho_{RA})$ و $\rho_{RA} \in B(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_A)$

با در نظر گرفتن فیدلیتی به عنوان معیار کارایی بین ترابرد ایده آل و کانال نویز با محدودیت انرژی، می توان کارایی ترابرد تجربی را مورد مطالعه قرار داد. با انتخاب هامیلتونی H_A و عملگر تعداد فوتون $\hat{n}_A = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle\langle n|_A$ معیار کارایی بین کانال ایده آل $\mathcal{I}_{A \rightarrow B}$ و کانال نویزدار تجربی $\mathcal{T}_{A \rightarrow B}^\xi$ می تواند به طور دقیق تر بصورت زیر نوشته شود

$$F_E(\mathcal{I}_{A \rightarrow B}, \mathcal{T}_{A \rightarrow B}^\xi) = \inf_{\psi_{RA}} F(\mathcal{I}_{A \rightarrow B}(\psi_{RA}), \mathcal{T}_{A \rightarrow B}^\xi(\psi_{RA})),$$

که اینفیمم بر روی فضا حالت های خالص بصورت

$$\psi_{RA} = |\psi\rangle\langle\psi|_{RA}$$

با شرایط، $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 = 1$ و $\sum_{n=0}^{\infty} n \lambda_n^2 \leq E$ ، برای هر n گرفته شده است. ما حالت ورودی بهینه را با روش تحلیلی بصورت زیر بدست می آوریم که در [3] با کمک تکنیک های عددی بدست آمده است. بعبارت دیگر،

$$F(\mathcal{I}_{A \rightarrow B}(\psi_{RA}), \mathcal{T}_{A \rightarrow B}^\xi(\psi_{RA})) \geq \frac{1}{(1+\xi)} \left[\left(\sum_{n=0}^M \frac{p_n}{(1+\xi)^n} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^M \frac{p_n \xi}{(1+\xi)^n} \right)^2 \right]$$

برای هر حالت ψ_{RA} حال تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f_{M,\xi}(p) := \frac{1}{(1+\xi)} \left[\left(\sum_{n=0}^M \frac{p_n}{(1+\xi)^n} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^M \frac{p_n \xi}{(1+\xi)^n} \right)^2 \right]$$

برای هر $p \in \mathbb{R}^{M+1}$ نشان داده [4] می شود که

$$F(\psi_{RA}, \mathcal{T}_{A \rightarrow B}^\xi(\psi_{RA})) \geq f_{M,\xi}(p).$$

می توان مینیمم $f_{M,\xi}$ با محدودیت انرژی $E \leq \frac{(1+\xi)}{(1+3\xi)}$ را برای هر

$n \in \{0, \dots, M\}$ ، با شرایط زیر بدست آورد که $p_n \geq 0$

$$\sum_{n=0}^M p_n = 1, \quad \sum_{n=0}^M n p_n \leq E$$

$$p_0 = 1 - E, \quad p_1 = E$$

است که برای $n \geq 2$ داریم $p_n = 0$. حالت خالص دارای فرمی

بشکل زیر است

توسط اشکارساز نویزدار تخریب می شود. از انطرف هم دو-مد بینهایت حالت خلاء فشرده در عمل اتفاق نمی افتد و یک تخریب دیگر نیز در این بخش اتفاق می افتد. پس هر ترابرد پیوسته تجربی دارای دو خطای فوق می باشد و در نتیجه برای افراد تجربی مهم است که دقت خطای حالت آزمایشگاهی را از حالت تئوریک ایده آل بدانند.

در این مقاله، ما عملکرد آزمایش تجربی از ترابرد متغیر پیوسته یکطرفه و دوطرفه را تحت محدودیت های انرژی مشخصی تحلیل می کنیم. معیار عملکردی که ما در نظر داریم، فیدلیتی کانال تحت محدودیت انرژی بین ترابرد ایده آل و نویزدار آن است. ما به طور صریح حالت های ورودی بهینه را پیدا می کنیم، به عبارت دیگر، حالت های کوانتومی بدست می آوریم که فیدلیتی خروجی کانال ایده آل و نویزدار تحت این حالت با فیدلیتی تحت محدودیت انرژی میان دو کانال یکسان است. روش ما کاملاً تحلیلی است و از تکنیک های بهینه سازی در محاسبات چندمتغیره استفاده می کند. حالت های بهینه برای ترابرد یکطرفه و دوطرفه، سوپریزیشن درهم تنیده متناهی که در شرط محدودیت انرژی صدق می کنند می باشد. علاوه بر این، ما اثبات می کنیم که حالت های ورودی بهینه منحصر به فرد هستند. نتایج ما در مورد ترابرد دوطرفه نیز به یکی از جذاب ترین مسائل ریاضیاتی در نظریه اطلاعات کوانتومی مرتبط هستند؛ به ویژه مطالعه خواص جمعی و ضربی اندازه گیری ها مرتبط با کانال های کوانتومی.

ترابرد یکطرفه

$\mathcal{H}$ را یک فضای هیلبرت جدایی پذیر در نظر بگیرید. یک اپراتور مثبت با رد 1 را ماتریس چگالی بر $\mathcal{H}$ می نامیم و مجموعه ماتریس چگالی ها را با $B(H)$ نمایش می دهیم. برای دو ماتریس چگالی ρ و σ ، فیدلیتی بین این دو بصورت زیر تعریف می شود.

$$F(\rho, \sigma) = \|\sqrt{\rho} \sqrt{\sigma}\|_1^2.$$

یک کانال کوانتومی از یک سیستم A به سیستم B یک نگاشت کلا مثبت حافظ رد از $B(\mathcal{H}_A)$ به $B(\mathcal{H}_B)$ است. H_A را یک هامیلتونین متناظر با سیستم A در نظر بگیرید. R را نیز یک سیستم

بنابراین، کارایی کانال محدود به انرژی بین ترابرد دوطرفه ایده‌آل $\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}$ و پیاده‌سازی تجربی آن $\mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_E(\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}, \mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}) = \inf_{\phi_{RAB}: \text{Tr}(\hat{n}_{AB} \phi_{AB}) \leq 2E} F(\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}(\phi_{RAB}), \mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}(\phi_{RAB})),$$

که در آن ϕ_{RAB} یک حالت خالص است و $\phi_{AB} = \text{Tr}_R(\phi_{RAB})$ به عنوان نتیجه‌ای از همبستگی فاز مشترک $\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}$ و $\mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}$ ، با توجه به موارد فوق می‌توان معیار کارایی فیدلیتی را بصورت زیر نوشت

$$F_E(\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}, \mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}) = \inf_{\psi_{RAB}} F(\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}(\psi_{RAB}), \mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}(\psi_{RAB})),$$

که در آن $\psi_{RAB} = |\psi\rangle\langle\psi|_{RAB}$ یک حالت خالص است بطوریکه

$$|\psi\rangle_{RAB} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} |m, n\rangle_R |m, n\rangle_{AB},$$

به طوری $\lambda_{m,n} \geq 0$ برای همه m و n

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (m+n) \lambda_{m,n}^2 \leq 2E, \quad \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n}^2 = 1.$$

ما همچنین عبارت فیدلیتی را به صورت زیر ساده‌تر می‌کنیم. از آنجا که با حالت‌های پیوسته کار می‌کنیم، سیستم‌های A, B, A', B' مشابه با یکدیگر هستند. بنابراین، فیدلیتی کانال با محدود انرژی بین $\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}$ و $\mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}$ باید با $\mathcal{T}_{A \rightarrow A'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow B'}^{\xi'}$ و کانال ایده‌آل یکسان باشد. از طرف دیگر به خاطر داشته باشید که یک کانال نویزدار جمعی $\mathcal{T}^\xi$ را می‌توان بصورت ترکیب $\mathcal{A}^{1/\eta} \circ \mathcal{L}^\eta$ که در آن، $\eta = 1/(1+\xi)$ یک کانال کوانتومی pure-loss و $\mathcal{A}^{1/\eta}$ یک کانال کوانتومی تقویت کننده محدود شده در [5] نوشت که $(\mathcal{A}^{1/\eta})^\dagger = \eta \mathcal{L}^\eta$. با توجه به مطالب بالا می‌توان معیار فیدلیتی بین ترابرد ایده‌آل و ترابرد نویزدار دوطرفه را بصورت زیر نوشت

$$|\psi\rangle_{RA} = \sqrt{1-E}|0\rangle_R|0\rangle_A + \sqrt{E}|1\rangle_R|1\rangle_A.$$

ترابرد دوطرفه

در پروتکل ترابرد دوطرفه CV (متغیرهای پیوسته)، انتقال دوطرفه-ای از حالت‌های کوانتومی ناشناخته بین گیرنده و فرستنده انجام می‌شود. یکی از پیاده‌سازی‌های این پروتکل که در اینجا مورد بررسی قرار می‌دهیم، که امکان شبیه‌سازی دو کانال کوانتومی یکطرفه CV ایده‌آل را با کمک اندازه‌گیری‌های تله‌پاتی و کمک عملیات موضعی و ارتباطات کلاسیکی فراهم می‌کند [2]. می‌توان ترابرد دوطرفه را به عنوان ترکیبی از دو ترابرد یکطرفه متغیر پیوسته تصور کرد، یکی از گیرنده به فرستنده و دیگری از گیرنده به فرستنده. حالت‌های ورودی گیرنده به فرستنده را با A و B نمایش می‌دهیم و حالت‌های خروجی از گیرنده به فرستنده را به ترتیب با A' و B' نشان می‌دهیم. ترابرد دوطرفه ایده‌آل بین گیرنده به فرستنده توسط کانال SWAP زیر نمایش داده می‌شود:

$$\text{SWAP} := \sum_{m,n=0}^{\infty} |m\rangle_{A'} \langle n|_A \otimes |n\rangle_{B'} \langle m|_B.$$

که $\{|m\rangle_A\}_{m=0}^{\infty}$ پایه عددی فوتونی متناظر با سیستم A است. در واقع این کانال حالت‌های تانسوری را جابجا می‌کند، بعبارت دیگر

$$\mathcal{S}_{AB \rightarrow A'B'}(\phi_A \otimes \phi_B) = \psi_{A'} \otimes \phi_{B'}.$$

بنابراین، می‌توان کانال SWAP را به عنوان حاصل تانسوری از کانال‌های ایده‌آل $\mathcal{T}_{B \rightarrow A'}$ و $\mathcal{T}_{A \rightarrow B'}$ تصور کرد. یک پیاده‌سازی تجربی از ترابرد متغیر پیوسته دوطرفه، یک کانال تجربی تقریبی را ارائه می‌دهد که به وسیله حاصل تانسوری دو کانال نویزدار جمعی $\mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^\xi \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'}$ تشکیل شده است. هامیلتونی که برای سیستم مرکب AB تعریف می‌شود، عملگر کل عدد فوتونی زیر می‌باشد

$$\hat{n}_{AB} := \hat{n}_A \otimes I_B + I_A \otimes \hat{n}_B$$

برای هر حالت $\rho_{AB} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ نامساوی $\text{Tr}(\rho_{AB} \hat{n}_{AB}) \leq 2E$ نشان می‌دهد که میانگین تعداد فوتون در ρ_{AB} برای هر یک از حالت‌های A و B حداکثر برابر با E است.

$$F_{E,M} \left(S_{AB}, I_{A \rightarrow B}^{\xi} \otimes I_{B \rightarrow A'}^{\xi'} \right) = \begin{cases} 1 - \frac{4\xi'}{1+\xi'} E + 8 \left(\frac{\xi'}{1+\xi'} \right)^2 E^2 \\ \text{if } 2E < \frac{(\xi - \xi')(1 + \xi')}{\xi'^2(1 + \xi)}, \\ 1 - \frac{4\xi}{1+\xi} E + 8 \left(\frac{\xi}{1+\xi} \right)^2 E^2 \\ \text{if } 2E < \frac{(\xi - \xi')(1 + \xi)(1 + \xi')}{\xi^2(1 + \xi')^2 + (\xi - \xi')^2} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a = \frac{2(\xi' - \xi)^2}{(1 + \xi)^2(1 + \xi')^2} + \frac{2\xi\xi'}{(1 + \xi)(1 + \xi')}$$

$$b = \frac{2(\xi' - \xi)}{(1 + \xi')^2} + \frac{4\xi'(\xi(1 - \xi') - 2\xi'E)}{(1 + \xi)(1 + \xi')^2}$$

$$c = 1 - \frac{4\xi'E}{1 + \xi'} + \frac{8(\xi'E)^2}{(1 + \xi')^2}$$

لازم بذکر است شاید بتوان با کمک ساینز ابزارهای ریاضی محدودیت های فوق را بهبود بخشید.

سپاسگزاری

با تشکر از Mark. M. wilde و Hemant K. Mirsha از دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه Cornell که همکاران در نوشتن مرجع [4] می باشند، که این مقاله براساس مقاله فوق نوشته شده است.

مرجع ها

- [1] Samuel L. Braunstein and H. Jeff Kimble. Teleportation of continuous quantum variables. *Physical Review Letters*, **80**(4):869, January 1998.
- [2] Aliza U. Siddiqui and Mark M. Wilde. Quantifying the performance of bidirectional quantum teleportation, arXiv:2010.07905, 2020.
- [3] Kunal Sharma, Barry C. Sanders, and Mark M. Wilde. Optimal tests for continuous-variable quantum teleportation and photodetectors. *Physical Review Research*, **4**(2):023066, April 2022.
- [4] H. K. Mishra, S. K. Oskouei, and M. M. Wilde, Optimal input states for quantifying the performance of continuous-variable unidirectional and bidirectional teleportation, *phys. Rev. A* **107**, 062603 (2023).
- [5] Filippo Caruso, Vittorio Giovannetti, and Alexander S. Holevo. One-mode bosonic Gaussian channels: a full weak-degradability classification. *New Journal of Physics*, **8**(12):310, December 2006.

$$F \left(S_{AB \rightarrow A'B'}, \mathcal{T}_{A \rightarrow B'}^{\xi} \otimes \mathcal{T}_{B \rightarrow A'}^{\xi'} (\psi_{RAB}) \right) = \frac{1}{(1 + \xi)(1 + \xi')} \sum_{m,n,m',n'=0}^{\infty} p_{m,n} p_{m',n'} T_{\xi}^{mm'} T_{\xi'}^{nn'}.$$

که در آن $p = (p_{m,n})_{m,n=0}^{\infty} = (\lambda_{m,n}^2)_{m,n=0}^{\infty}$ و همچنین

$$T_{\xi}^{mm'} = \text{Tr} \left[\mathcal{L}_A^{\frac{1}{1+\xi}} (|m\rangle\langle m'|_A) \mathcal{L}_A^{\frac{1}{1+\xi}} (|m'\rangle\langle m|_A) \right],$$

$$T_{\xi'}^{nn'} = \text{Tr} \left[\mathcal{L}_B^{\frac{1}{1+\xi'}} (|n\rangle\langle n'|_B) \mathcal{L}_B^{\frac{1}{1+\xi'}} (|n'\rangle\langle n|_B) \right].$$

حال قرار می دهیم

$$f_{E,\xi,\xi'}(p) := \frac{1}{(1 + \xi)(1 + \xi')} \sum_{m,n,m',n'=0}^{\infty} p_{m,n} p_{m',n'} T_{\xi}^{mm'} T_{\xi'}^{nn'}.$$

با شرایط

$$\sum_{m,n=0}^M (m + n) p_{m,n}^2 \leq 2E, \quad \sum_{m,n=0}^M p_{m,n}^2 = 1.$$

بنابراین یک بهینه سازی درجه دو خواهیم داشت. برای حل مسئله فوق ما دو استراتژی را در نظر می گیریم. که پایه هر دو اینها بر مبنای در نظر گرفتن یک برش به اندازه M از رابطه بالا است.

اولین روش بر این مبنا است که $\xi' = \xi$. جواب تحلیلی مسئله بخاطر محدودیت هایی که داشتیم، برای محدودیت انرژی

$$2E \leq \frac{1 + \xi}{2 + 3\xi}$$

نشان داده شده است [4]. بعبارت دیگر،

$$F_{E,M} \left(S_{AB}, I_{A \rightarrow B}^{\xi} \otimes I_{B \rightarrow A'}^{\xi'} \right) = \frac{1}{(1 + \xi)^2} \left(1 - \frac{4\xi}{1 + \xi} E + 6 \left(\frac{\xi}{1 + \xi} \right)^2 E^2 \right).$$

دومین روش بر این مبنا است که ξ دلخواه و $\xi' \geq 1$. باز جواب تحلیلی بخاطر محدودیت هایی که وجود داشت برای محدودیت

انرژی

$$2E \leq \min \left\{ \frac{(\xi'^2 - 1)}{(\xi'(3\xi' - 1))}, \frac{(1 + \xi)}{(2\xi)} \right\},$$

نشان داده شده است [4]. بعبارت دیگر،

همدوسی کوانتومی بر مبنای اندازه گیری های تصویری

مانی^۱، اعظم^۱؛ رضازاده، فاطمه^۲؛ کریمی پور، وحید^۲

^۱ دانشکده علوم مهندسی، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

^۲ دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله ما تعریف استاندارد همدوسی را عمومیت بخشیده و همدوسی را بر حسب مجموعه ای از تصویرگرها تعریف کردیم. تعریف جدید شرایطی را که آزمایشگر به جای دسترسی جزئی به یک پایه مرجح، به مجموعه ای از تصویرگرها دسترسی دارد شامل می شود. چنین شرایطی به لحاظ عملیاتی متداول و در نتیجه پراهمیت است. برای تعریف ارائه شده، حالت های ناهمدوس، معیارهای مناسب همدوسی، ساختار عملگرهای ناهمدوس و شکل حالت دارای بیشترین همدوسی را بدست آورده ایم. همچنین نشان داده ایم که حالت دارای بیشترین همدوسی را می توان با عملگرهای مناسب ناهمدوس به هر حالت دلخواه تبدیل کرد. **واژه های کلیدی:** همدوسی، اندازه گیری تصویری.

Coherence based on projective measurement

Mani. Azam¹; Rezazadeh, Fatemeh² ; Karimipour, Vahid²

¹ Department of Physics, University of Tehran, Tehran

² Department of Physics, Sharif University, Tehran

Abstract

We have generalized the concept of quantum coherence to the case where experimental capabilities are not so fine to prepare a preferred basis of states, rather only a set of projectors are at disposal of the experimenter. Due to the difficulty of individual addressing of single atoms, this is a situation of practical importance. We define new measures of coherence, characterize the incoherent operations, and the maximally coherent states. Furthermore, we show how from a maximally coherent state, as a resource, one can create every other arbitrary state and every arbitrary gate, by incoherent operations.

Keywords: coherence, projective measurement.

PACS No. 03.67.-a, 03.67.Mn, 03.65.Ta, 03.65.-w

برای همدوسی و بیان کمیت های مورد نیاز در این ساختار است و همه این تلاش بر مبنای تعریف متعارف همدوسی انجام شده است. در تعریف متعارف همدوسی، یک پایه ارجح مانند $\{|i\rangle, i = 1, 2, \dots, d\}$ برای فضای هیلبرت مشخص می کنند و حالت های ناهمدوس حالت هایی هستند که در این پایه قطری اند [۲]:

$$\rho_{inc} = \sum_{i=1}^d p_i |i\rangle\langle i| \quad (1)$$

مقدمه

یکی از ویژگی های اصلی مکانیک کوانتومی امکان قرار گرفتن حالت ها در برهم نهی و یا به بیان دیگر همدوسی است. با وجود اینکه همدوسی از ابتدا در مکانیک کوانتومی مورد توجه بود اما تلاش برای معرفی کمیت های مناسب برای تعیین میزان همدوسی در سال های اخیر صورت گرفته است [۱و۲]. یکی از کارهای ارزشمندی که در این زمینه انجام شده است، طراحی نظریه منبع

حالت‌ها و عملگرهای ناهمدوس

فضای هیلبرت H با بعد d را در نظر بگیرید. اندازه‌گیری تصویری $\{\pi_\mu; \mu = 1..M\}$ این فضا را به M زیر فضا تقسیم می‌کند:

$$H = \bigoplus_{\mu=1}^M H_\mu \quad (4)$$

که هر یک از زیر فضاهای H_μ بعد d_μ دارند و π_μ عملگر تصویر به هر یک از این زیر فضاهاست. حالت‌های ناهمدوس، به صورت حالت‌هایی تعریف می‌شوند که فرم بلوک قطری دارند:

$$\rho_{inc} = \sum_{\mu=1}^M x_\mu \rho_\mu \otimes |\mu\rangle\langle\mu| \quad \sum_{\mu=1}^M x_\mu = 1 \quad (5)$$

در این نمایش ما از فضای کمکی $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |\mu\rangle, \dots, |M\rangle\}$ برای نشان دادن ساختار بلوک‌ها استفاده کرده‌ایم. در واقع $x_\mu \rho_\mu \otimes |\mu\rangle\langle\mu|$ به این معناست که در بلوک مربوط به فضای H_μ ماتریس $x_\mu \rho_\mu$ قرار گرفته است. بنابراین در ساختار جدید فرم حالت‌های ناهمدوس به جای قطری، بلوک قطری خواهد بود. توجه کنید که مجموعه حالت‌های ناهمدوس یک زیر مجموعه محدب از فضای کل حالت‌ها را تشکیل می‌دهد.

عملگرهای پیشینه ناهمدوس^۲، عملگرهایی هستند که حالت‌های ناهمدوس را به حالت‌های ناهمدوس می‌نگارند. چنین عملگرهایی امکان تولید همدوسی ندارند و به اصطلاح عملگرهای آزاد نظریه منبع همدوسی جدید هستند. عملگرهای ناهمدوس^۳، اعمال پیشینه ناهمدوسی هستند که عملگرهای کراوسشان^۴ نیز ناهمدوس هستند. ساختار کلی چنین عملگرهایی را در قضیه‌ی زیر مشخص کرده‌ایم.

قضیه: عملگر $\mathcal{E}(\rho) = \sum_a K_a \rho K_a^\dagger$ یک عملگر ناهمدوس است، اگر و فقط اگر عملگرهای کراوس آن به فرم زیر باشند:

$$K_a = \sum_{\mu=1}^M K_a^\mu \otimes |a(\mu)\rangle\langle\mu| \quad (6)$$

که در آن $a(\mu)$ یک تابع دلخواه از $\{1, 2, \dots, M\}$ به خودش است و لزوماً یک جایگشت نیست.

اثبات: اگر عملگر کراوس به شکل بالا باشد به راحتی دیده می‌شود که یک عملگر ناهمدوس داریم. اما برای نشان دادن عکس قضیه، یعنی اینکه هر عملگری که بخواهد ناهمدوس باشد باید عملگرهای

در واقع حالت‌های ناهمدوس، حالت‌هایی هستند که با اندازه‌گیری در پایه ارجح $\{|i\rangle\}$ و سپس مخلوط کردن دوباره‌ی نتایج، تغییر نمی‌کنند. نکته‌ای که وجود دارد این است که همیشه اندازه‌گیری با جزئیاتی که معادل یک پایه ارجح باشد برای آزمایشگر ممکن نیست، یعنی اندازه‌گیری‌ها همیشه از مرتبه اول^۱ نیستند. به عنوان مثال فرض کنید آزمایشگری می‌خواهد موازی یا پادموازی بودن اسپین دو ذره تمیز ناپذیر را بررسی کند. در این حالت با توجه به تمیز ناپذیری ذرات، تفکیک بین دو حالت $|01\rangle$ و $|10\rangle$ ممکن نیست و علاوه بر این هدف آزمایشگر هم فقط تشخیص موازی یا پادموازی بودن ذرات است. در چنین مثالی تعریف همدوسی بر اساس چهار پایه

$$\{|10\rangle, |01\rangle, |00\rangle, |11\rangle\} \quad (2)$$

دقیق نیست و باید از تعریفی استفاده کنیم که بر اساس تصویرگرهای زیر بنا شده باشد:

$$P_1 = |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| \\ P_2 = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| \quad (3)$$

هدف این مقاله تعمیم مفهوم همدوسی به حالت‌هایی مانند مثال فوق است. کارهای مختلفی برای گسترش مفهوم همدوسی به شرایط آزمایشگاهی صورت گرفته است [۳ و ۴]، اما در هیچ یک از این کارها به صورت منسجم به نظریه منبع همدوسی بر حسب تصویرگرها پرداخته نشده و ساختار ریاضیاتی منسجمی در آنها ارائه نشده است. ساختار این مقاله بدین صورت است، ابتدا تعریف حالت‌های ناهمدوس و عملگرهای ناهمدوس بر مبنای عملگرهای تصویری را ارائه می‌کنیم. سپس ساختار کلی عملگرهای ناهمدوس در این تعریف جدید را بدست آورده و پس از آن، سنج‌های مناسب برای همدوسی بر مبنای عملگرهای تصویر را بیان می‌نماییم. در نهایت به سراغ حالت بیش همدوس خواهیم رفت. حالت بیش همدوس را در ساختار جدید توصیف کرده و نشان می‌دهیم که حالت بیش همدوس مانند یک منبع است و با در اختیار داشتن آن می‌توان هر حالت دلخواهی را با استفاده از عملگرهای ناهمدوس تولید کرد. مقاله با ارائه یک خلاصه به پایان خواهد رسید.

³ Incoherent Operations (IO)
⁴ Kraus Operators

¹ Rank one
² Maximally Incoherent Operations (MIO)

که در آن $|\phi_\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_\mu}} \sum_{i_\mu=1}^{d_\mu} |e_{i_\mu}\rangle$ ، حالت بیش همدوس (با تعریف متعارف) در زیر فضای μ -ام است. حال باید پرسید آیا این حالت که میزان آنتروپی نسبی همدوسی را بیشینه می‌کند بهترین منبع هم هست؟ یعنی آیا می‌توان با استفاده از این حالت و عملگرهای ناهمدوس هر حالت دلخواهی را تولید کرد؟ در بخش بعد به پاسخ این سوال می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که با به کار بستن عملگرهای کراوس ناهمدوس مناسب، می‌توان این حالت بیش همدوس را به هر حالت دلخواهی تبدیل کرد.

ساخت همه حالت‌ها از حالت بیش همدوس

برای هر فضای هیلبرت که به تعداد زیرفضای دلخواه تقسیم شده باشد و بعد هر یک از زیرفضاها هم دلخواه باشد می‌توان نشان داد که از حالت $|\Phi_{MC}\rangle$ می‌توان به هر حالت دلخواه رسید. اما برای جلوگیری از پیچیدگی ریاضیات، در اینجا فقط حالتی را که فضای H به دو زیر فضا با بعدهای دلخواه d_1 و d_2 تقسیم شده باشد، را با جزییات بررسی می‌کنیم و در مورد مسئله کلی به ذکر نتایج اکتفا می‌کنیم.

فرض کنید عملگرهای تصویر $\pi_1 = \sum_{i=1}^{d_1} |e_i\rangle\langle e_i|$ و $\pi_2 = \sum_{i=1}^{d_2} |f_i\rangle\langle f_i|$ فضای هیلبرت را به دو بخش مجزا $H = H_1 \oplus H_2$ تقسیم می‌کنند. $\{|e_i\rangle\}$ و $\{|f_j\rangle\}$ به ترتیب پایه‌های متعامد برای زیر فضاهای H_1 و H_2 هستند و $\langle e_i | f_j \rangle = 0$. با توجه به رابطه‌ی (۱۱)، حالت بیش همدوس به شکل

$$|\Phi_{MC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\phi_1\rangle \\ |\phi_2\rangle \end{pmatrix} \quad (۱۲)$$

است که در آن

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_1}} \sum_{i=1}^{d_1} |e_i\rangle \quad \text{و} \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_2}} \sum_{i=1}^{d_2} |f_i\rangle$$

تبدیل کردن حالت (۱۲) به حالت دلخواه

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} x|\psi_1\rangle \\ y|\psi_2\rangle \end{pmatrix}, \quad |x|^2 + |y|^2 = 1 \quad (۱۳)$$

است که در آن $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle \in H_1$ ، دو حالت دلخواه یک‌ه هستند. از نظریه‌ی منبع برای همدوسی متعارف، می‌دانیم که تبدیلات $|\psi_1\rangle \rightarrow |\phi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle \rightarrow |\phi_2\rangle$ ، در هر یک از زیرفضاهای H_1 و H_2 امکان‌پذیر است. به طور دقیق‌تر، عملگرهای ناهمدوس

کراوسی به فرم بالا داشته باشد، کافی است یک عملگر کراوس دلخواه بنویسیم و اثر آن را روی یک حالت تک بلوک مانند

$$\rho = \rho_1 \otimes |1\rangle\langle 1| \quad (۷)$$

مطالعه کنیم. خواهیم دید که برای اینکه یک عملگر کراوس، حالت‌های تک بلوک ناهمدوس را به حالت ناهمدوس ببرد ناچار است شکل آن به صورت (۶) باشد. ■

با توجه به قضیه ثابت شده، شکل ماتریسی عملگرهای کراوس بدین صورت است که در هر ستون فقط یک بلوک غیر صفر وجود دارد و در سطرها می‌توان چندین بلوک غیر صفر داشت.

معیارهای همدوسی

مشابه با نظریه استاندارد همدوسی، برای همدوسی بر مبنای اندازه‌گیری‌های تصویری، نیز می‌توان میزان همدوسی یک حالت را تعیین کرد. معیارهای مختلفی برای تعیین میزان همدوسی استفاده می‌شود [۵ و ۱۰]. برخی از این معیارها بر اساس میزان فاصله حالت از حالت‌های ناهمدوس است. ما در اینجا آنتروپی نسبی همدوسی را بررسی می‌کنیم که بر اساس کمینه‌ی آنتروپی نسبی بین حالت مورد نظر و حالت‌های ناهمدوس بیان می‌شود.

$$C_s(\rho) = \min_{\delta \in I_{inc}} S(\rho || \delta) \quad (۸)$$

با توجه به این نکته که δ فرم بلوکه قطری دارد و با استفاده از خاصیت گردشی رد و با محاسبات سر راست نشان داده می‌شود که نزدیک‌ترین حالت ناهمدوس به حالت دلخواه ρ به شکل

$$\rho^* = \sum_{\mu} \pi_{\mu} \rho \pi_{\mu} \quad (۹)$$

است و بنابراین برای محاسبه نزدیک‌ترین حالت همدوس به حالت ρ کافی است بلوک‌های غیر قطری ρ را حذف کنیم. با این توصیف می‌توان فرم بسته زیر را برای آنتروپی نسبی همدوسی بدست آورد:

$$C_s(\rho) = S(\rho^*) - S(\rho) \quad (۱۰)$$

حال با توجه به فرم بسته بدست آمده می‌توان حالتی که بیشترین میزان همدوسی را دارد بدست آورد. کافی است یک حالت دلخواه را با استفاده از فضای کمکی $\{|\mu\rangle\}$ نمایش دهیم و عبارت بالا را برای آن محاسبه کنیم، با کمی محاسبه می‌توان دید که حالتی که بیشترین میزان همدوسی را دارد باید به شکل زیر باشد:

$$|\Phi_{MC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{\mu=1}^M |\phi_{\mu}\rangle \otimes |\mu\rangle \quad (۱۱)$$

ناهمدوس مناسب هر زیرفضا ($K_{\beta\nu}$ -ها) بر روی بلوک قطرها به دست می‌آیند:

$$D_{\beta} := \frac{1}{\sqrt{d_1 d_2 \dots d_M}} \sum_{\nu=1}^M x_{\nu} \sqrt{d_{\nu}} K_{\beta\nu} \otimes |\nu\rangle\langle\nu|, \quad (23)$$

که در آن $\tilde{d} = d_1 d_2 \dots d_M$ و $K_{\beta\nu}$ -ها، تعداد d_{ν} عملگر ناهمدوس مرتبط با زیرفضای H_{ν} هستند. دسته‌ی دیگر عملگرهایی هستند که به صورت جایگشت بین بلوک‌ها اثر می‌کنند:

$$A_I^s = \frac{1}{\sqrt{\tilde{d}}} \sum_{\mu=1}^M x_{\mu} \sqrt{d_{\mu+s}} |\psi_{\mu}\rangle\langle e_{i_{\mu+s}}| \otimes |\mu\rangle\langle\mu+s| \quad (24)$$

به سادگی قابل بررسی است که عملگر ناهمدوس رد نگهدار

$$\mathcal{E}_{inc}(\rho) = \sum_{\beta} D_{\beta} \rho D_{\beta}^{\dagger} + \sum_{s,I} A_I^s \rho A_I^{s\dagger} \quad (25)$$

حالت بیش همدوس (۱۱) را به حالت دلخواه (۲۲) تبدیل می‌کند.

خلاصه و نتیجه گیری

در این مقاله مفهوم همدوسی کوانتومی بر مبنای اندازه‌گیری‌های تصویری با مرتبه بیشتر از یک، را معرفی کرده و یک سنج مناسب برای اندازه‌گیری این نوع همدوسی بر اساس آنتروپی نسبی ارایه کردیم. در این چارچوب حالتی که بیشترین همدوسی را دارد، یافته و نشان دادیم که با اثر عملگرهای ناهمدوس بر روی این حالت بیش همدوس، می‌توان هر حالت دلخواهی را به دست آورد. بر این اساس، همدوسی کوانتومی تعریف شده، در ساختار نظریه‌ی منبع می‌گنجد. لازم به ذکر است که در این ساختار، مجموعه‌ی حالت‌های ناهمدوس بزرگتر از مجموعه‌ی حالت‌های ناهمدوس با تعریف متعارف است و مجموعه‌ی حالت‌های همدوس که منبع کوانتومی به شمار می‌آیند، یک مجموعه‌ی کوچکتر است.

مرجع‌ها

- [1] J. Aberg, arXiv:quant-ph/0612146, (2006).
- [2] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **113**, 140401 (2014)
- [3] F. Bischof, H. Kampermann, and D. Bruß, Phys. Rev. A **103**, 032429 (2021).
- [4] F. Bischof, H. Kampermann, and D. Bruß, Phys. Rev. Lett. **123**, 110402 (2019).
- [5] D. Girolami, Phys. Rev. Lett. **113**, 170401 (2014).
- [6] A. Mani, F. Rezazadeh, and V. Karimipour, arXiv:2302.13148

$$\begin{aligned} K_{\beta} : H_1 &\rightarrow H_1, \quad \beta = 1, \dots, d_1 \\ L_{\gamma} : H_2 &\rightarrow H_2, \quad \gamma = 1, \dots, d_2 \end{aligned} \quad (14)$$

وجود دارند، به نحوی که

$$K_{\beta} |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_1}} |\psi_1\rangle, \quad L_{\gamma} |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_2}} |\psi_2\rangle. \quad (15)$$

حال با استفاده از این عملگرها، عملگرهای کراوس که تبدیل $|\Psi\rangle \rightarrow |\Phi_{MC}\rangle$ را انجام می‌دهند، به دو شکل بلوک قطری و پاد-بلوک-قطری به دست می‌آیند:

$$D_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{d_2}} K_{\beta} & \\ & \frac{y}{\sqrt{d_1}} L_{\gamma} \end{pmatrix} \quad (16)$$

و

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{d_1}} |\psi_1\rangle\langle f_j| & \\ \frac{y}{\sqrt{d_2}} |\psi_2\rangle\langle e_i| & \end{pmatrix}. \quad (17)$$

با انجام محاسبات سر راست می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} D_{\beta\gamma} |\Phi_{MC}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2d_1 d_2}} |\Psi\rangle, \\ A_{ij} |\Phi_{MC}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2d_1 d_2}} |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (18)$$

و در نتیجه

$$\mathcal{E}_{inc}(|\Phi_{MC}\rangle\langle\Phi_{MC}|) = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (19)$$

که در آن نگاشت ناهمدوس $\mathcal{E}_{inc}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{E}_{inc}(\rho) = \sum_{\beta,\gamma} D_{\beta\gamma} \rho D_{\beta\gamma}^{\dagger} + \sum_{i,j} A_{ij} \rho A_{ij}^{\dagger} \quad (20)$$

و شرط رد نگهدار بودن نیز برقرار است:

$$\sum_{\beta,\gamma} D_{\beta\gamma}^{\dagger} D_{\beta\gamma} + \sum_{i,j} A_{ij}^{\dagger} A_{ij} = I \quad (21)$$

در اینجا نقش عملگرهای A_{ij} ، که ساختار غیر بلوک قطری دارند، بسیار اساسی است و اگر این عملگرها لحاظ نشوند، شرط رد نگهدار بودن تامین نخواهد شد.

در حالتی که فضای هیلبرت به تعداد M زیر فضا تقسیم شده باشد نیز، عملگرهای کراوسی که حالت بیش همدوس (۱۱) را به حالت دلخواه

$$|\Psi\rangle = \sum_{\mu=1}^M x_{\mu} |\phi_{\mu}\rangle \otimes |\mu\rangle, \quad \sum_{\mu=1}^M |x_{\mu}|^2 = 1 \quad (22)$$

تبدیل می‌کنند، به دو دسته قابل تقسیم هستند [۶]. یک دسته عملگرهای بلوک قطری هستند که از قرار دادن عملگرهای

تهاثر تیزی اندازه‌گیری و اختلال

صابریان، نیره^۱؛ اخترشناس، سید جواد^۱؛ شاه‌بیگی، فرشته^۲

^۱گروه فیزیک دانشگاه فردوسی مشهد، میدان آزادی، مشهد

^۲دانشکده فیزیک، نجوم و علوم کامپیوتری کاربردی، دانشگاه یاگیلونین، کراکوف، لهستان

چکیده

کسب اطلاعات یک سیستم کوانتومی با استفاده از اندازه‌گیری، حالت آن را مختل می‌کند. منحصر به فرد نبودن حالت‌های پس از اندازه‌گیری و وابستگی آن به روش اندازه‌گیری، معمای اختلال-اطلاعات را پیچیده‌تر نیز می‌کند. بنابراین دو سوال مطرح می‌شود: یک اینکه اختلال کمینه ایجادشده توسط یک اندازه‌گیری چقدر است؟ و دوم اینکه با در نظر گرفتن یک اختلال مشخص، در بهترین شرایط ممکن، اندازه‌گیری چه مقدار اطلاعات می‌دهد؟ در این مقاله، رهیافت‌های متنوعی را برای بررسی این پرسش‌ها پیشنهاد می‌دهیم و پاسخ‌های صریحی برای مجموعه اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن و فضاهای حالت پس‌اندازه‌گیری متناظر با اعمال کانال‌های پائولی به‌دست می‌آوریم. به‌طور خاص نشان می‌دهیم که روابط تبدیلی متفاوتی بین تیزی این اندازه‌گیری و منابع کوانتومی حفظ‌شده در حالت‌های پس‌اندازه‌گیری، پس از به‌کارگیری روش اندازه‌گیری بهینه، برحسب هم‌دوسی و هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی بر اثر اعمال اندازه‌گیری به‌صورت محلی نیز داریم. واژه‌های کلیدی: اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن، کانال‌های پائولی، تیزی، کوانتومی بودن کانال، عدم قطعیت کوانتومی محلی.

Measurement sharpness and disturbance trade-off

Saberian, Nayere¹; Akhtarshenas, Seyed Javad¹; Shahbeigi, Fereshte²

¹ Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

² Faculty of Physics, Astronomy and Applied Computer Science,
Jagiellonian University, 30-348 Krakow, Poland

Abstract

Obtaining information from a quantum system through measurement typically disrupts its state. The post-measurement states for a given measurement, however, are not unique and highly rely on the chosen measurement strategy, complicating the puzzle of information-disturbance. Two distinct questions are then in order. Firstly, what is the minimum disturbance a measurement may induce? Secondly, when a fixed disturbance occurs, how informative is the possible measurement in the best-case scenario? Here, we propose various approaches to tackle these questions and provide explicit solutions for the set of unbiased binary qubit measurements and post-measurement state spaces that are equivalent to the image of a Pauli channel. In particular, we show there are different trade-off relations between the sharpness of this measurement and quantum resources preserved in the post-measurement states, employing the optimal measuring strategy, in terms of coherence and discord-like correlation once the measurement is applied locally.

Keywords: Unbiased Binary Qubit POVM, Pauli Channel, Sharpness, Channel quantumness, Local Quantum Uncertainty (LQU).

مقدمه

یکی از نتایج مهم مکانیک کوانتومی قضیه "عدم کسب اطلاعات، بدون ایجاد اختلال" است، که بیان می‌کند به دست آوردن اطلاعات از یک سیستم کوانتومی، حتما منجر به ایجاد اختلال در این سیستم می‌شود. پژوهش‌های بسیاری درباره مبادله این دو مفهوم انجام شده است مانند [2-8].

کسب اطلاعات، نیازمند اندازه‌گیری روی سیستم است. برای اندازه‌گیری‌های کوانتومی، حالت‌های پس از اندازه‌گیری، وابسته به انتخاب روش اندازه‌گیری هستند و این منحصربه‌فرد نبودن حالت‌های پس‌اندازه‌گیری، بر دشواری بررسی اختلال‌های ایجاد شده توسط اندازه‌گیری روی فضای حالت‌ها می‌افزاید. تعدادی از مقالات [9-12]، برای بررسی مسئله یکتا نبودن حالت پس‌اندازه‌گیری، مفهوم مهم سازگاری اندازه‌گیری-کانال را پیشنهاد داده‌اند. به‌طورکلی، استفاده از هر روشی برای اعمال یک اندازه‌گیری کوانتومی M ، منجر به اختلال‌های خاصی روی فضای حالت‌ها می‌شود که معادل اعمال یک کانال کوانتومی E_M روی این حالت‌ها است. بدین ترتیب، چنین کانالی به‌عنوان کانال سازگار با اندازه‌گیری موردنظر، در نظر گرفته می‌شود.

در طرف مقابل، هر کانال کوانتومی E ، تجزیه‌های مختلفی برحسب عملگرهای کاملاً مثبت و نافزاینده رد Φ_i - دارد؛ نمایش‌های مختلف کراوس، مثالی از این مفهوم است. هریک از این عملیات، منجر به مجموعه‌ای از حالت‌های خروجی ممکن با احتمال‌های متناظر می‌شود و می‌توان این احتمال‌ها را به یک اندازه‌گیری کوانتومی، M_E ، اختصاص داد که به معنای سازگار بودن این اندازه‌گیری با کانال کوانتومی E است. از آن‌جا که تجزیه‌های مختلف می‌تواند منجر به اندازه‌گیری‌های متفاوتی شود، مجموعه تمامی اندازه‌گیری‌های سازگار با کانال E ، $\{M_E\}$ ، نشان می‌دهد که به ازای یک اختلال مشخص روی حالت‌ها، کدام اندازه‌گیری‌ها می‌توانند اعمال شوند و در نتیجه چه مقدار اطلاعات استخراج می‌شود.

با این‌که تاکنون مطالعات متفاوتی درباره اختلال پس‌اندازه‌گیری انجام شده است، نتیجه‌ای کمی برای بیان وجود چنین رابطه‌ای بین تیزی و اختلال وجود ندارد.

در این مقاله، با استفاده از مفهوم سازگاری اندازه‌گیری-کانال و به‌کاربردن آن در مجموعه اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن و کانال‌های پائولی به بررسی این پرسش می‌پردازیم. به‌این‌منظور، نشان می‌دهیم که برای مجموعه اندازه‌گیری‌ها و کانال‌های ذکر شده در بالا تبادلهایی بین میزان تیزی اندازه‌گیری و ویژگی‌های کوانتومی حالت‌های پس‌اندازه‌گیری وجود دارند. این ویژگی‌ها به دو روش مختلف در نظر گرفته می‌شوند: اول، همدوسی آن‌ها و دوم، هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی آن‌ها.

اندازه‌گیری کوانتومی

اندازه‌گیری کوانتومی $M = \{m_i\}_{i=0}^{N-1}$ با N خروجی،

مجموعه عملگرهای مثبت نیمه‌معین دارای شرط کامل بودن است.

اگر اندازه‌گیری در شرط تعامد $m_i m_j = \delta_{ij} m_i$ به ازای هر i

و j - صدق کند به آن اندازه‌گیری برافکنشی گویند [13].

در این مقاله با اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن - $Tr[m_i] = 1$ - مواجه می‌شویم که با $M_{s,\hat{n}} = \{m_{\pm}\}$ نشان داده

می‌شوند به‌طوری‌که $m_{\pm} = \frac{1}{2}(I + s\hat{n} \cdot \sigma)$ ، که در آن $s \in [0,1]$

میزان تیزبودن و $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ برداری یکه است که جهت اندازه‌گیری

را تعیین می‌کند. تیزبودن یک اندازه‌گیری به معنای میزان نزدیکی

آن به یک اندازه‌گیری برافکنشی است. توجه به این نکته لازم است

که در حالت کلی میزان تیز بودن این نوع اندازه‌گیری توسط s یا

تابع یکنوایی از آن مثل s^2 سنجیده می‌شود [14-16].

کانال کوانتومی

کانال کوانتومی نگاشتی کاملاً مثبت و حفظ‌کننده رد است که

روی حالت‌های کوانتومی اثر می‌کند. کانال

پائولی $E_{\vec{p}}(\rho) = \sum_{j=0}^3 p_j \sigma_j \rho \sigma_j$ مثال خاصی از کانال‌های

کیوبیتی است. در این تعریف σ_0 ماتریس همانی است و σ_j برای

$j \in \{1,2,3\}$ یک ماتریس پائولی است. بردار $\vec{p} \in \mathbb{R}^4$ یک بردار

احتمال است و بنابراین مجموعه کانال‌های پائولی می‌تواند توسط

یک چهاروجهی منظم در فضای $\mathbb{R}^3$ نمایش داده شود [17].

دو ویژگی متفاوت کانال کوانتومی را در ادامه توضیح می‌دهیم.

هر دو کران محکم است؛ کانال مربوط به اشباع کران پایین با مشخصات زیر است:

$$p_0 = 1 - 3p_1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{8}(1 + s - \sqrt{1 + 2s - 3s^2}).$$

نتایج

در این بخش به بررسی میزان حفظ کردن منابع کوانتومی فضای حالت -همدوسی و هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی- توسط اندازه‌گیری $M_{s,\hat{n}}$ می‌پردازیم.

یک رهیافت برای تعریف بهترین روش اندازه‌گیری، حفظ بیشترین منابع کوانتومی -در این‌جا همدوسی و هم‌بستگی کوانتومی در زمان اعمال محلی اندازه‌گیری- در فضای حالت‌ها است.

این کمیت‌ها به ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$Q_M := \max_{C_M} Q(E_M), \quad L_M := \max_{C_M} L(\rho_{E_M}),$$

به‌طوری‌که $Q(E_M)$ کوانتومی بودن کانال E_M سازگار با M است و $L(\rho_{E_M})$ سنجه LQU برای حالت چوی-جمیولکوفسکی کانال سازگار E_M و C_M مجموعه تمام کانال‌های سازگار با M . این کمیت‌ها را به‌ترتیب کوانتومی بودن اندازه‌گیری و LQU اندازه‌گیری می‌نامیم. قضیه زیر محدود شدن این مقدار توسط تیزی را نشان می‌دهد.

قضیه ۱: اندازه‌گیری کیوبیتی دوتایی متوازن $M_{s,\hat{n}}$ را در نظر بگیرید. با محدود شدن به مدل‌های پساندازه‌گیری هم‌ارز با اعمال کانال‌های پائولی، کوانتومی بودن اندازه‌گیری و LQU اندازه‌گیری در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$Q_{M_{s,\hat{n}}} \leq 1 - s^2, \quad L_{M_{s,\hat{n}}} = 1 - s.$$

نامساوی موجود در این روابط، برای اندازه‌گیری‌های در راستای محورهای اصلی اشباع می‌شود.

نتیجه مهم این قضیه این است که اگر یک اندازه‌گیری کاملاً تیز باشد، یعنی $s=1$ ، آن‌گاه مستقل از رهیافت اندازه‌گیری، فضای حالت‌های پساندازه‌گیری کاملاً کلاسیکی می‌شوند. یعنی مجموعه کانال‌های سازگار، فقط شامل کانال‌های کلاسیکی-کوانتومی است. اکنون به طرف دیگر مسئله می‌پردازیم؛ با داشتن مجموعه اندازه‌گیری‌های سازگار با یک کانال کوانتومی مفروض، در پی یافتن بیشینه تیزی موجود در این مجموعه سازگار است. در ادامه

کوانتومی بودن کانال‌های کوانتومی: میزان کوانتومی بودن یک کانال، از کمینه کردن میانگین همدوسی کوانتومی فضای حالت پس از اعمال کانال، روی همه پایه‌های متعامد بهنجار این فضا حاصل می‌شود. در حقیقت این کمیت، میزان همدوسی حفظ‌شده در حالت‌ها پس از اعمال کانال را می‌سنجد، که به‌ازاء کانال‌های کلاسیکی-کوانتومی [18] که به‌طور کامل همدوسی کوانتومی همه حالت‌ها را از بین می‌برد، صفر است. کوانتومی بودن کانال‌های پائولی از رابطه زیر حاصل می‌شود [19]:

$$Q(E_{\bar{p}}) = (p_0 - p_1)^2 + (p_2 - p_3)^2; \quad p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3.$$

عدم قطعیت کوانتومی محلی (LQU) برای حالت چوی-جمیولکوفسکی: هم‌بستگی کوانتومی حالت چوی-جمیولکوفسکی [21,20] متناظر با یک کانال کوانتومی، نیز ویژگی‌های کوانتومی آن کانال را بیان می‌کند. با استفاده از رابطه بسته سنجه LQU در مقاله [22] و محاسبه آن برای حالت چوی-جمیولکوفسکی متناظر با کانال پائولی $\rho^{\bar{p}}$ -خواهیم داشت:

$$L(\rho^{\bar{p}}) = 1 - P_{\max}; \quad P_{\max} = \max\{P_1, P_2, P_3\},$$

که در آن $P_i = 2(\sqrt{p_0 p_i} + \sqrt{p_j p_k})$ به‌طوری‌که i, j, k و انتخاب‌های غیریکسانی از 1، 2 و 3 هستند. $L(\rho^{\bar{p}})$ نشان‌دهنده مقدار هم‌بستگی شبه ناهم‌خوانی حفظ‌شده در یک حالت بیشینه درهم‌تیده پس از تحول توسط یک کانال پائولی است. این کمیت نیز برای کانال‌های کلاسیکی-کوانتومی، صفر می‌شود.

سازگاری اندازه‌گیری-کانال

کانال E و اندازه‌گیری M سازگار هستند اگر عملگرهای کاملاً مثبت و نافزاینده رد Φ_i -وجود داشته باشند به‌طوری‌که به‌ازاء هر i و هر حالت ورودی ρ داشته باشیم $E(\rho) = \sum \Phi_i(\rho)$ و $Tr[m_i \rho] = Tr[\Phi_i(\rho)]$ این است که $M_{s,\hat{n}}$ و $E_{\bar{p}}$ سازگار هستند اگر و تنها اگر در نامساوی $\frac{s^2 n_1^2}{P_1^2} + \frac{s^2 n_2^2}{P_2^2} + \frac{s^2 n_3^2}{P_3^2} \leq 1$ صدق کنند. $P_i = 0$ ، منجر به حذف کسر متناظر می‌شود. از این نامساوی نتیجه می‌شود که به‌ازاء همه کانال‌های سازگار با این اندازه‌گیری، $s \leq P_{\max} \leq 1$ که

باشد قضیه 2 را نتیجه می‌دهد که تهاثر داشتن بیشترین اطلاعات و حفظ منابع در فضای حالت پساندازه‌گیری را نشان می‌دهد.

مرجع‌ها

- [1] ترجمه تخصصی برخی لغات: trade-off=تهاثر؛ Sharpness=تیزی؛ discord-like correlation=عدم قطعیت محلی؛ local quantum uncertainty=همدوسی؛ coherence=سازگاری؛ compatibility=متوازن؛ tetrahedron=چهاروجهی.
- [2] C. A. Fuchs and A. Peres; "Quantum-state disturbance versus information gain: Uncertainty relations for quantum information"; Phys. Rev. A **53**, 2038 (1996).
- [3] G. D'Ariano; "On the heisenberg principle, namely on the information-disturbance trade-off in a quantum measurement"; Fortschritte der Physik **51**, 318 (2003).
- [4] L. Maccone; "Information-disturbance tradeoff in quantum measurements"; Phys. Rev. A **73**, 042307 (2006).
- [5] F. Sciarrino, M. Ricci, F. De Martini, R. Filip, and L. Mi'sta; "Realization of a minimal disturbance quantum measurement"; Phys. Rev. Lett. **96**, 020408 (2006).
- [6] F. Buscemi, M. Hayashi, and M. Horodecki; "Global information balance in quantum measurements"; Phys. Rev. Lett. **100**, 210504 (2008).
- [7] P. Busch; "no information without disturbance: Quantum limitations of measurement"; in Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle: Essays in Honour of Abner Shimony (Springer Netherlands, Dordrecht, 2009) pp. 229-256.
- [8] G. Sharma and A. K. Pati; "Trade-off relation for coherence and disturbance"; Phys. Rev. A **97**, 062308 (2018).
- [9] T. Heinosaari, T. Miyadera, and M. Ziman; "An invitation to quantum incompatibility"; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **49**, 123001 (2016).
- [10] T. Heinosaari and T. Miyadera; "Qualitative noisedisturbance relation for quantum measurements"; Phys. Rev. A **88**, 042117 (2013).
- [11] T. Heinosaari, T. Miyadera, and D. Reitzner; "Strongly incompatible quantum devices"; Foundations of Physics **44**, 34-57 (2014).
- [12] T. Heinosaari, D. Reitzner, T. c. v. Ryb'ar, and M. Ziman; "Incompatibility of unbiased qubit observables and Pauli channels"; Phys. Rev. A **97**, 022112 (2018).
- [13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang; "Quantum Computation and Quantum Information"; Cambridge University Press; Anniversary edition. (2011).
- [14] P. Busch; "On the sharpness and bias of quantum effects"; Foundations of Physics **39**, 712 (2009).
- [15] Y. Liu and S. Luo; "Quantifying unsharpness of measurements via uncertainty"; Phys. Rev. A **104**, 052227 (2021).
- [16] A. Mitra; "Quantifying unsharpness of observables in an outcome-independent way"; International Journal of Theoretical Physics **61**, 236 (2022).
- [17] I. Bengtsson and K. Życzkowski; "Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement"; 2nd ed. (Cambridge University Press, 2017).
- [18] A. S. Holevo; "Quantum coding theorems"; Russian Mathematical Surveys **53**, 1295 (1998).
- [19] F. Shahbeigi and S. J. Akhtarshenas; "Quantumness of quantum channels"; Phys. Rev. A **98**, 042313 (2018).
- [20] A. Jamiołkowski; "Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators"; Reports on Mathematical Physics **3**, 275 (1972).
- [21] M.-D. Choi; "Completely positive linear maps on complex matrices"; Linear Algebra and its Applications **10**, 285 (1975).
- [22] D. Girolami, T. Tufarelli, and G. Adesso; "Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty"; Phys. Rev. Lett. **110**, 240402 (2013).

روابط تبادلی بیان می‌شود که نشان می‌دهد هرچه اختلال در فضای حالت‌های پساندازه‌گیری بیشتر باشد، اندازه‌گیری موردنظر تیزتر است و اطلاعات بیشتری می‌دهد. فرض کنیم $S(M)$ تیزی اندازه‌گیری M را می‌سنجد، مفهوم تیزی کانال را به صورت تیزی بیشینه S متناظر با M در مجموعه تمام M های سازگار با $E - D_E$ - تعریف می‌کنیم: $S_E := \max_{D_E} S(M)$.

برای اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن، ساده‌ترین انتخاب سنج تیزی $S(M_{s,\hat{n}}) = s$ است. برای کانال پائولی $E_{\bar{p}}$ ، تیزی کانال دقیقاً برابر $P_{\max}$ است؛ $S_{E_{\bar{p}}} := \max_{D_{E_{\bar{p}}}} s = P_{\max}$.

قضیه 2: کانال پائولی $E_{\bar{p}}$ را در نظر بگیرید که هم‌ارز با فضای حالت پس از اعمال تعدادی اندازه‌گیری $M_{s,\hat{n}}$ است. آنگاه تیزی کانال در روابط زیر صدق می‌کند:

$$S_{E_{\bar{p}}} \leq \sqrt{1 - Q(E_{\bar{p}})}, \quad S_{E_{\bar{p}}} = 1 - L(\rho^{\bar{p}}).$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی این پرسش پرداختیم که چگونه کسب اطلاعات توسط اندازه‌گیری می‌تواند منابع کوانتومی حالت‌های سیستم را تحت تاثیر قرار دهد. برای پاسخ به این پرسش از مفهوم سازگاری اندازه‌گیری-کانال به عنوان بستری برای تعیین همه اختلال‌های ممکن ایجاد شده توسط یک اندازه‌گیری مفروض، بهره بردیم. استفاده از این مفهوم در تعیین همه اندازه‌گیری‌هایی که منجر به یک اختلال مشخص می‌شوند، نیز مفید بود.

با در نظر گرفتن اندازه‌گیری‌های کیوبیتی دوتایی متوازن و کانال‌های پائولی، در قضیه 1 نشان دادیم که تغییر حالت‌های پساندازه‌گیری از منظر منابع کوانتومی که توسط همدوسی و هم‌بستگی‌های شبه ناهم‌خوانی سنجیده می‌شود، لزوماً مخرب است. یعنی مقادیر آن‌ها برای حالت‌های پس از اندازه‌گیری کمتر از حالت‌های پیش از اندازه‌گیری است که این اختلاف توسط تیزی اندازه‌گیری تعیین می‌شود. در وضعیت حدی اندازه‌گیری برافکنشی که حاوی بیشترین اطلاعات است، همه این منابع کوانتومی از بین می‌رود. مطالعه طرف دیگر مسئله یعنی بررسی این پرسش که برای یک اختلال خاص، اندازه‌گیری حاوی چه مقدار اطلاعات می‌تواند

بررسی دروازه های کوانتومی مبتنی بر دو نوسانگر جفت شده قوی در شرایط غیر تعادلی حرارتی

بهزاد لاری^{1*}

¹گروه فیزیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

Email: *behzadlari1979@gmail.com

*نویسنده مسئول

چکیده

بررسی رفتار دمایی دروازه های کوانتومی در معرض محیط، تحت شرایط غیر تعادلی حرارتی می تواند در بهینه سازی عملکرد این دروازه ها موثر باشد. می دانیم در ساخت این گونه ابزارها، می توان از نوسانگر های جفت شده قوی در کاواک های بوزونی استفاده نمود. در بررسی حاضر، درهمتنیدگی دو نوسانگر جفت شده قوی مقید شده به دو-پایین ترین تراز انرژی در معرض محیطی بوزونی را با استفاده از جبر- q و آمار سالیس و در شرایط غیر تعادلی حرارتی مورد بررسی قرار خواهیم داد. به عنوان مثالی از کاربرد نتایج بدست آمده، به رفتار دروازه تعویض گر کوانتومی مبتنی بر دو نوسانگر جفت شده قوی و در معرض محیط در شرایط غیر تعادلی حرارتی، پرداخته می شود.

واژه های کلیدی: نوسانگر هارمونیک، جبر- q ، آمار سالیس، شرایط غیر تعادلی حرارتی، گیت های کوانتومی، گیت تعویض گر

Investigating Quantum gates based on two strongly coupled oscillators in thermal non-equilibrium conditions

*¹Behzad Lari

¹ Department of Physics, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran

Abstract

Investigating the thermal behavior of quantum gates exposed to the environment and under thermal non-equilibrium conditions can be effective in their operations. To assemble such tools, strongly coupled oscillators in bosonic cavities can be used. In the present paper, using the q -algebra and Tsallis statistics, we have investigated the entanglement of two strongly coupled oscillators constrained to their two lowest energy levels and exposed to a bosonic environment in thermal non-equilibrium conditions. As an application, we considered the Swap-gate's behavior in thermal non-equilibrium conditions.

Keywords: Harmonic Oscillator, q -Algebra, Tsallis Statistics, Non-Equilibrium, Quantum Gate, Swap Gate.

PACS No. : 03.67.-a, 03.67.Lx

مقدمه

هندسی q میزان انحراف از آمار تعادلی بولتزمن-گیس را نشان می دهد. به کمک این جبر می توان برخی از نتایج تحلیلی تقریبی بدست آمده را با تغییر q (تغییر هندسه) به نتایج تجربی نزدیک نمود. از طرفی برخی محققان دروازه های کوانتومی مبتنی بر دو ذره نوسانگر را بررسی نموده اند [۱۷-۱۹]. می دانیم که تمام دروازه های کوانتومی بر اساس درهمتنیدگی بین کوانتوم بیت ها ساخته می شوند و یا متأثر از درهمتنیدگی با محیط پیرامون شان هستند. بر این اساس، در این مقاله به بررسی رفتار دمایی و زمانی درهمتنیدگی بین اجزای این دروازه های مبتنی بر نوسانگرهای جفت شده قوی در معرض محیط های بوزونی با استفاده از آمار سالیس و معادله لیندبلاد می پردازیم. همچنین تاثیر ضرایب چلانگی و پرش به جایگاه انرژی متقابل را در رفتار دروازه های کوانتومی بررسی می نماییم. در پایان، به عنوان کاربردی از بررسی انجام شده، به رفتار دمایی و زمانی دروازه تعویض

امروزه، دروازه های کوانتومی [۴-۱] بر اساس تشدید مغناطیسی هسته [۶-۵] و کنترل شونده توسط کاواک های اپتومکانیکی [۹] مورد توجه محققین فیزیک است [۸-۹]. می دانیم که تمامی سامانه ها در معرض محیط های حرارتی بوده [۱۰] و بنابراین تحت تنش های گرمایی (یا شرایط غیر تعادلی حرارتی) هستند [۱۱-۱۲]. بدین جهت بررسی رفتار دمایی و زمانی اینگونه ابزارها در کنترل عملکرد آنها می تواند بسیار سودمند باشد. می دانیم محیط های حرارتی باعث تلفات زمانی اطلاعات فیزیکی سامانه شده و بر نحوه عملکرد آن تاثیر می گذارد. تحول زمانی سامانه های باز کوانتومی باز را می توان با معادله دیفرانسیلی موسوم با معادله لیندبلاد بررسی نمود [۱۴-۱۳]. اما محققان برای بررسی شرایط دمایی از جبری موسوم به جبر- q [۱۵] مبتنی بر آماری سالیس استفاده می نمایند [۱۶]. در این جبر، پارامتر

این تحقیق می تواند در اسپیترونیک [۲۱-۲۰] و در طراحی دروازه های کوانتومی سودمند واقع گردد [۲۴-۲۲].

حرارتی

در این بخش، سامانه ای متشکل از دو نوسانگر هارمونیکی با جفت شدگی قوی که هر یک از نوسانگرها در حمامی بوزونی جداگانه قرار دارند را در نظر گرفته و رفتار دینامیکی آن را بررسی می کنیم. با شروع از هامیلتونی کل "سامانه + محیط" داریم

که در آن $\hat{H}_S$ هامیلتونی سامانه، $\hat{H}_B$ هامیلتونی محیط و $\hat{H}_{SB}$ هامیلتونی اندرکنش بین محیط و سامانه عبارت است از

$$\hat{H}_{SB} = \sum_{i=1,2} \sum_{\Omega_{n_i}} g(\Omega_{n_i}) (\hat{c}_{n_i} + \hat{c}_{n_i}^\dagger) (\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger) \quad (9)$$

که در آن κ و λ ضرایب چلاندگی و پرش به جایگاه انرژی متقابل هستند. ω فرکانس نوسانگرها و Ω_{n_i} مدهای فرکانسی محیط می باشند. $\hat{a}_i^\dagger$ و $\hat{a}_i$ عملگرهای خلق و فنای نوسانگرهای سامانه و $\hat{c}_i^\dagger$ و $\hat{c}_i$ عملگرهای خلق و فنای هر یک از حمام ها می باشند

می‌توان حالت‌های خاص زیر را نیز در این هامیلتونی تشخیص داد.

۱-۰ κ که بیانگر حالت چلانده کامل است.

۲- $\lambda = 0$ که بیانگر حالت تقریب نوسانات سریع می باشد.

در تقریب بورن-مارکوف و با استفاده از تبدیلات بوگولیگوف می توان معادله دیفرانسیل حاکم بر تحول زمانی ماتریس چگالی ای سامانه را به فرم زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S(t)}{dt} = & -i[H_S, \rho_S(t)] + \sum_{i=1,2} (\Gamma_1 [2\hat{a}_i \rho(t) \hat{a}_i^\dagger - \\ & \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i] + \Gamma_2 [2\hat{a}_i^\dagger \rho(t) \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \rho(t) - \\ & \rho(t) \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger] + \Gamma_3 [2\hat{a}_i \rho(t) \hat{a}_i - \hat{a}_i \hat{a}_i \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_i \hat{a}_i] + \\ & \Gamma_3 [2\hat{a}_i^\dagger \rho(t) \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger] + \Gamma_4 [2\hat{a}_1 \rho(t) \hat{a}_2^\dagger - \\ & \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1] + \Gamma_4 [2\hat{a}_2 \rho(t) \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rho(t) - \\ & \rho(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2] + \Gamma_5 [2\hat{a}_2^\dagger \rho(t) \hat{a}_1 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger] + \\ & \Gamma_5 [2\hat{a}_1^\dagger \rho(t) \hat{a}_2 - \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger] + \Gamma_6 [2\hat{a}_2 \rho(t) \hat{a}_1 - \\ & \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2] + \Gamma_6 [2\hat{a}_1 \rho(t) \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rho(t) - \\ & \rho(t) \hat{a}_1 \hat{a}_2] + \Gamma_6 [2\hat{a}_2^\dagger \rho(t) \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger] + \\ & \Gamma_6 [2\hat{a}_1^\dagger \rho(t) \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rho(t) - \rho(t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger] \end{aligned} \quad (\Delta)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \pi \eta^2 \sum_{i=1,2} \alpha_i^2 (\alpha_i - \beta_i)^2 \\
\Gamma_2 &= \pi \eta^2 \sum_{i=1,2} \beta_i^2 (\alpha_i - \beta_i)^2 \\
\Gamma_3 &= \pi \eta^2 \sum_{i=1,2} \alpha_i \beta_i (\alpha_i - \beta_i)^2 \\
\Gamma_4 &= \pi \eta^2 \sum_{i=1,2} (-1)^{i+1} \alpha_i^2 (\alpha_i - \beta_i)^2 \\
\Gamma_5 &= \pi \eta^2 \sum_{i=1,2} (-1)^{i+1} \beta_i^2 (\alpha_i - \beta_i)^2 \\
\Gamma_6 &= \pi \eta^2 \sum_{i=1,2} (-1)^{i+1} \alpha_i \beta_i (\alpha_i - \beta_i)^2
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega + \kappa}{\sqrt{(\omega + \kappa)^2 - \lambda^2}} \\ \beta_1^2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega + \kappa}{\sqrt{(\omega + \kappa)^2 - \lambda^2}} \\ \alpha_2^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega - \kappa}{\sqrt{(\omega - \kappa)^2 - \lambda^2}} \\ \beta_2^2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega - \kappa}{\sqrt{(\omega - \kappa)^2 - \lambda^2}}\end{aligned}\quad (V)$$

جوابهای معادله دیفرانسیل بالا در دمای T به فرم کلی زیر می باشد.

$$|\tilde{\rho}_{i,j}^{\prime\prime(m)}(T, t)\rangle = e^{\hat{M}_p t} |\tilde{\rho}_{i,j}^{\prime(m)}(T, 0)\rangle; \quad p \in \{1, 2\} \quad (8)$$

)

جوابهای مستقل در دو گروه برداری عناصر $\tilde{\rho}$ زیر بدست آورده می شوند.

$$\begin{aligned} |\alpha(T, t)\rangle_1 &= (\rho_{11} \quad \rho_{22} \quad \rho_{33} \quad \rho_{44} \quad \rho_{23} \quad \rho_{32} \quad \rho_{14} \quad \rho_{41})^\dagger \\ |\alpha(T, t)\rangle_2 &= (\rho_{12} \quad \rho_{21} \quad \rho_{24} \quad \rho_{42} \quad \rho_{13} \quad \rho_{31} \quad \rho_{34} \quad \rho_{43})^\dagger \end{aligned} \quad (9)$$

که به دلیل انتخاب جوابهای کانونیک اولیه در دمای T فقط دسته $p = 1$ باقی می ماند که در آن ماتریس ضرایب $\hat{M}_1$ در پیوست (الف) معرفی شده است.

مدل در شرایط غیر تعادلی حرارتی

همانطور که در بخش قبل دیدیم برای بدست آوردن عناصر ماتریسی ماتریس چگالی در زمان t و در دمای T به عناصر در $t = 0$ نیاز داریم. در شرایط غیر تعادلی حرارتی می توان از جبر- q و آمار سالیس وابستگی دمایی این عناصر را در شرایط اولیه بدست آورد. از جبر- q و آمار سالیس مبتنی بر توزیع- $\mathcal{X}^q$

$$f(\beta) = \frac{1}{b \Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b} \right)^{c-1} \quad (1 \cdot)$$

که در آن $\beta_0 = b c$ ، متوسط عکس تغییرات دمایی یعنی $\beta_0 =$ $\frac{1}{T_0}$ و $c \equiv \frac{1}{1-q}$ است. می توان ماتریس چگالی متحل شده سامانه را در دمای T و زمان t بدست آورد. ماتریس چگالی سیستم در طی فرآیند های حرارتی غیرتعادلی، که در هر بازه کوچک با آمارتعادلی $e^{-\beta \hat{H}}$ وبا استفاده از چگالی احتمال $f(\beta)$ توصیف می شود را می توان به فرم زیر بدست آورد.

$$\tilde{\rho}(T, 0) = \frac{1}{Z} \int_0^\infty d\beta f(\beta) e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \sum_i \tilde{B}(\varepsilon_i) |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \quad (11)$$

$\tilde{B}(\varepsilon_j)$ ، عامل بولتزمن موثر است که بصورت زیر داده می شود.

$$\tilde{B}(\varepsilon_i) = \int_0^\infty d\beta f(\beta) e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (12)$$

$\tilde{Z}$ تابع پارش تعمیم یافته است که از رابطه زیر بدست می آید.

$$\tilde{Z} = \sum_i \tilde{B}(\varepsilon_i) \quad (13)$$

که بنا بر آمار سالیس، $\tilde{B}(\varepsilon_i)$ و $\tilde{Z}$ در نواحی مختلف q تعریف می

شود. [۱۱-۱۲].

$$\tilde{B}(\varepsilon_i) = \begin{cases} e^{-\beta_0 \varepsilon_i} & \text{for } q = 1 \\ \Theta(\Lambda_i) \Lambda_i^{\left(\frac{1}{1-q}\right)} & \text{for } q \neq 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \sum_i e^{-\beta_0 \varepsilon_i} & \text{for } q = 1 \\ \sum_i \theta(\Lambda_i) \Lambda_i^{\left(\frac{1}{1-q}\right)} & \text{for } q \neq 1 \end{cases} \quad (15)$$

مقاله نامه چهارمین کنفرانس ملی اطلاعات و محاسبات کوانتومی همتندگی با گذر ماه و انشیرنگی بصورتی اشتراکی هندسی q کاهش می‌دهد.

$$\theta(A_i) = \begin{cases} 1; & \text{اگر } A^* > 0 \\ \frac{\delta_{i,*}}{g_i^*} & \text{اگر } A^* \leq 0 \end{cases} \quad \text{for } q < 1 \quad (16)$$

که در آن $A_i = (1 - \beta \varepsilon_i (1 - q))$ ، $A^* = (1 - \beta \varepsilon^* (1 - q))$ ، $\varepsilon^* = \inf\{\varepsilon_n\}$ انرژی و $g_i^* = \inf\{g_n\}$ تراز انرژی مربوط به اینفیموم

$$\delta_{i,*} = \begin{cases} 1 & \text{for } \varepsilon^* = \varepsilon_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

همان طور که از معادلات بالا بر می آید، با استفاده از ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی سامانه در زمان $t = 0$ می توان ماتریس چگالی اولیه را در شرایط غیر تعادلی حرارتی یافت تا با استفاده از معادله (۸) ماتریس چگالی سامانه در زمان t بدست آورد و از آنجا بستگی دمایی و زمانی درهمتندگی در دنباله محاسبه نمود.

بنابراین، ماتریس چگالی موثر در ابتدای زمان و در پایه $\{|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle\}$ با استفاده از معادلات (۱۱) و (۱۳)، بدست آورده می شود. در معادلات بالا ε_i ها ویژه مقادیر هامیلتونی سامانه است که به فرم زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \omega + \kappa, |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_2 = \omega - \kappa, |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_3 &= \omega + \delta, |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega + \delta}{\kappa + \omega}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\omega + \delta}{\kappa + \omega} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_4 &= \omega - \delta, |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \delta}{\kappa + \omega}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\omega - \delta}{\kappa + \omega} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن $\delta = \sqrt{\kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2 + \omega^2}$ تعریف می شود. با توجه به معادلات بالا و ویژه توابع هامیلتونی می توان ماتریس چگالی سامانه را در زمان $t=0$ نوشت (پیوست ب).

می توان درهمتندگی سامانه را با توجه به معادلات (۸) و (۱۱) بدست آورد.

$$EOF = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (18)$$

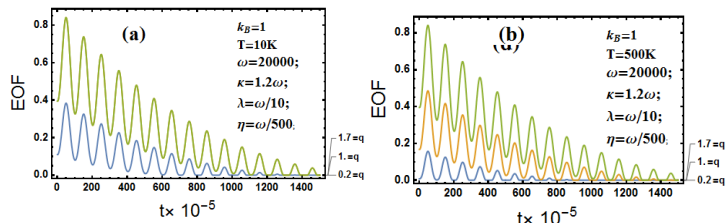
که در آن $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$ و $C = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$ کانکورنس می باشد.

λ_i ویژه مقادیر جذر مربعی عملگر $\bar{\rho}_s(t, T) \rho_s(t, T)$ در یک نظم کاهش می یابد $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ و در آن

$$\bar{\rho}_s(t, T) = (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}) \rho_s^*(t, T) (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}) \quad (19)$$

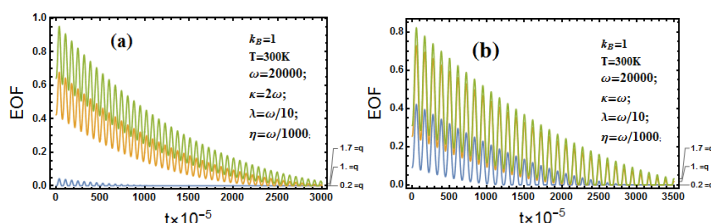
در اشکال (۱) و (۲) بستگی زمانی درهمتندگی به ترتیب، در دماها مختلف و در ثوابت جفت شدگی مختلف K برای نواحی مختلف هندس q نشان داده شده است. با توجه به نمودارها، می توان دید:

- ۲- می توان دریافت که برای نواحی هندسی q داریم [۱۳].
- ۳- می توان دریافت، قله منحنی ها با کاهش ضریب چلانگی K کاهش می شود.



شکل (۱). بستگی زمانی

درهمتندگی برای سامانه ای متشکل از دو نوسانگر جفت شده قوی محدود به دو تراز پایین آنها وقتی در مجاورت حمام های بوزونی قرار داده شوند



به عنوان تابعی از دمای T و پارامتر هندسی q

شکل (۲). بستگی زمانی درهمتندگی به عنوان تابعی از ثابت جفت شدگی K و پارامتر هندسی q .

دروازه کوانتومی تعویض گر در شرایط غیر تعادلی

حرارتی

در ای بخش، خروجی دروازه کوانتومی تعویض گر $SWAP^p$ در معرض محیط بوزونی در شرایط غیر تعادلی حرارتی را می توان به فرم زیر بدست آورد.

می دانیم که درواز تعویض گر را می توان با یک عملگر یکتایی معرفی کرد. با تبدیل یکتایی زیر می توان اثر این دروازه را روی ورودی ماتریس چگالی سامانه یافت. این می تواند به عنوان حالت اولیه در شرایط غیر تعادلی حرارتی برای معادله (۸) باشد. بنابراین

$$\tilde{\rho}'^{(m)}(T, 0) = U_{(SWAP)^p} \tilde{\rho}^{(m)}(T, 0) U_{(SWAP)^p}^\dagger \quad (20)$$

که در آن

$$U_{(SWAP)^p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+e^{i\pi p}}{2} & \frac{1-e^{i\pi p}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-e^{i\pi p}}{2} & \frac{1+e^{i\pi p}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

عناصر ماتریس دروازه تعویض گر چگالی در دمای T عبارت است

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}'_{11}^{(m)}(T, 0) &= \tilde{\rho}_{11}^{(m)}(T, 0); & \tilde{\rho}'_{44}^{(m)}(T, 0) &= \tilde{\rho}_{44}^{(m)}(T, 0) \\ \tilde{\rho}'_{14}^{(m)}(T, 0) &= \tilde{\rho}_{14}^{(m)}(T, 0); & \tilde{\rho}'_{41}^{(m)}(T, 0) &= \tilde{\rho}_{41}^{(m)}(T, 0) \\ \tilde{\rho}'_{22}^{(m)}(T, 0) &= \tilde{\rho}_{33}^{(m)}(T, 0) = \frac{1}{Z_m} \left(\frac{\tilde{\rho}^{(m)}(\varepsilon_1) + \tilde{\rho}^{(m)}(\varepsilon_2) e^{2i\pi p}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$(22) \left(\frac{\tilde{\rho}_{23}^{(m)}(T, 0)}{\tilde{\rho}_{ij}^{(m)}(T, 0)} \right) = \frac{\tilde{\rho}_{23}^{(m)}(T, 0)}{\tilde{\rho}_{ij}^{(m)}(T, 0)} e^{2i\pi p} \left(\frac{\tilde{\rho}_{23}^{(m)}(T, 0)}{\tilde{\rho}_{ij}^{(m)}(T, 0)} \right)^2$$

نیز حساب کنیم. دریافتیم که درهمتیدگی با گذشت زمان برای تمام نواحی هندسی q کاهش می‌یابد. علاوه بر آن دیده شد که برای نواحی مختلف هندسی q :

$$\text{EOF}(\rho^{q < 1}(T, t)) \leq \text{EOF}(\rho^{q = 1}(T, t)) \leq \text{EOF}(\rho^{q > 1}(T, t))$$

همچنین دیدیم که کاهش ضریب چلانگی K باعث کاهش ارتفاع قله منحنی های EOF^q با زمان می‌شود.

نهایتاً، باتوجه به اینکه هر دروازه کوانتومی مانند سوپ را می‌توان توسط یک عملگر یکتایی معرفی نمود. با اعمال این عملگر یکتایی به روی ماتریس چگالی اولیه (پیوست (ب))، توانستیم اثر دروازه سوپ را بدست آورده و سپس تاثیر محیط و تحول زمانی مواجه با آن را بیابیم. البته با معرفی این ماتریس چگالی خروجی می‌توان بستگی دمایی- زمانی درهمتیدگی میان نوسانگر های جف شده که پایه عملکرد دروازه است بررسی نمود. این بررسی می‌تواند در تحلیل رفتار دروازه کمک نماید.

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم که از دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم که در تهیه بودجه این پژوهش همکاری لازم را انجام دادند.

نتیجه گیری

در بررسی حاضر، درهمتیدگی دو نوسانگر جفت شده قوی مقید شده به دو-پایین ترین تراز انرژی در معرض محیطی بوزونی را با استفاده از جبر- q و آمار سالیس و در شرایط غیر تعادلی حرارتی مورد بررسی قرار دادیم. بدین منظور، ابتدا بستگی زمانی عناصر ماتریس چگالی سامانه در معرض محیط را که به شرایط اولیه آن بستگی دارند، بدست آوردیم (معادله (8)). سپس با استفاده از ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی سامانه و با استفاده از آمار سالیس (فرمولهای (14-16))، بستگی دمایی عناصر ماتریس چگالی سامانه در زمان صفر و در شرایط غیر تعادلی حرارتی (به عنوان شرایط اولیه) بدست آوردیم. با استفاده از ماتریس چگالی وابسته به دما و زمان

پیوست (الف).

ماتریس ضرایب $\tilde{M}_1$ در معادله (8) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} -4\Gamma_2 & 2\Gamma_1 & 2\Gamma_1 & 0 & 2\Gamma_4 & 2\Gamma_4 & -2\Gamma_6 + iK & -2\Gamma_6 - iK \\ 2\Gamma_2 & (-2\Gamma_1 - 2\Gamma_2) & 0 & 2\Gamma_1 & (iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & (-iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & 2\Gamma_6 & 2\Gamma_6 \\ 2\Gamma_2 & 0 & (-2\Gamma_1 - 2\Gamma_2) & 2\Gamma_1 & (-iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & (iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & 2\Gamma_6 & 2\Gamma_6 \\ 0 & 2\Gamma_2 & 2\Gamma_2 & -4\Gamma_1 & 2\Gamma_5 & 2\Gamma_5 & (-iK - 2\Gamma_6) & (iK - 2\Gamma_6) \\ 2\Gamma_5 & (iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & (-iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & 0 & (-2\Gamma_1 - 2\Gamma_2) & 2\Gamma_4 & 0 & 0 \\ 2\Gamma_5 & (-iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & (iK - \Gamma_4 - \Gamma_5) & 2\Gamma_4 & 0 & (-2\Gamma_1 - 2\Gamma_2) & 0 & 0 \\ (iK - 2\Gamma_6) & 2\Gamma_6 & 2\Gamma_6 & (-iK - 2\Gamma_6) & 0 & 0 & (-2\Gamma_1 - 2\Gamma_2 + 2i\omega) & 0 \\ (-iK - 2\Gamma_6) & 2\Gamma_6 & 2\Gamma_6 & (iK - 2\Gamma_6) & 0 & 0 & 0 & (-2\Gamma_1 - 2\Gamma_2 - 2i\omega) \end{pmatrix}$$

پیوست (ب).

ماتریس چگالی سامانه متشکل دو نوسانگر جفت شده قوی در زمان $t=0$ و در دمای T در شرایط غیر تعادلی حرارتی

$$\tilde{\rho}_m(T, 0) = \frac{1}{Z_m} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_4)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} + \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_3)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} & 0 & 0 & \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_4)(-\delta + \omega)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} + \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_3)(\delta + \omega)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} \\ 0 & \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_1) + \tilde{B}^{(m)}(\epsilon_2)}{2} & \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_1) - \tilde{B}^{(m)}(\epsilon_2)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_1) - \tilde{B}^{(m)}(\epsilon_2)}{2} & \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_1) + \tilde{B}^{(m)}(\epsilon_2)}{2} & 0 \\ \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_4)(-\delta + \omega)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} + \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_3)(\delta + \omega)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} & 0 & 0 & \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_4)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} + \frac{\tilde{B}^{(m)}(\epsilon_3)}{1 + \frac{(\kappa + \omega)^2}{(\delta - \omega)^2}} \end{pmatrix}$$

Kockum, "Fast Multiqubit Gates through Simultaneous Two-Qubit Gates", *PRX Quantum* 2, 040348 (2021).

مرجع ها

- [5] M. D Price, T. F. Havel, and D. G. Cory, "Multiqubit logic gates in NMR quantum computing", *New J. Phys.* **2** 10.1-10.9 (2000).
 [7] D. Collins, K. W. Kim, W. C. Holton, H. Sierzputowska-Graca, and E. O. Stejskal, "NMR quantum computation with indirectly coupled gates", *Phys. Rev. A* **62**, 022304 (2000).
 [9] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, "Cavity Optomechanics: Nano- and Micromechanical Resonators Interacting with Light", Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2014).
 [8] S. Bose, K. Jacobs, P. L. Knight, "Preparation of non-classical states in cavities with a moving mirror". *Phys. Rev. A* **56** (5): 4175-4186 (1997).

- [1] X. F. Shi, "Deutsch, Toffoli, and CNOT Gates via Rydberg Blockade of Neutral Atoms". *Phys. Rev. Appl.*, **9** (5): 051001 (2018).
 [2] S. E. Rasmussen, and N. T. Zinner, "Simple implementation of high fidelity controlled- i swap gates and quantum circuit exponentiation of non-Hermitian gates". *Phys. Rev. Res.* **2** (3): 033097 (2020).
 [3] T. Stolz, H. Hegels, M. Winter, B. Röhr, Y. F. Hsiao, L. Husel, G. Rempe, and S. Dürr, "Quantum-Logic Gate between Two Optical Photons with an Average Efficiency above 40%", *Phys. Rev. X* **12**, 021035 (2022).
 [4] X. Gu, J. Fernández-Pendás, P. Vikstål, T. Abad, C. Warren, A. Bengtsson, G. Tancredi, V. Shumeiko, J. Bylander, G. Johansson, and A. F.

- مجله دانش فیزیک، تابستان ۱۳۹۹، شماره ۱۹ و ۲۰، مهرماه دانشگاه صنعتی شریف
- [۱۱] Z. Fardgh, A. Ahani, K. Javidi, and S. Nazifker, "Dynamics of Entanglement in Optomechanical-Cavity Arrays: Localization-Delocalization Transition", *Int. J. Theor. Phys.* **60** (7490):1-9 (2021).
- [۱۰] X. Rong, J. Geng, F. Shi, Y. Liu, K. Xu, W. Ma, F. Kong, Z. Jiang, Y. Wu, and J. F. Du, "Experimental fault-tolerant universal quantum gates with solid-state spins under ambient conditions", *Nat. Commun.* **vol. 6**, 8748 (2015).
- [۱۱] Z. Rahdar, and B. Lari, "Open quantum systems and thermal non-equilibrium processes", *Mod. Phys. Lett. B* 2050194 (2020).
- [۱۲] E. Mohammadikhabaz, B. Lari, H. Hassanabadi, "Room temperature quantum Hall effect in q -formalism", *Eur. Phys. J. Plus* **137**:655 (2022).
- [۱۳] D. Manzano, "A short introduction to the Lindblad master equation", *AIP Advances*, **10** (2): 025106 (2020).
- [۱۴] R. Alicki, K. Lendi, "Quantum Dynamical Semigroups and Applications", Springer (2007).
- [۱۵] Y. Pomeau, M.B. Tran, *Statistical Physics of Non Equilibrium Quantum Phenomena*, Springer International Publishing (2019).
- [۱۶] C. Tsallis, Chaos, some comments on Boltzmann-Gibbs statistical mechanics, *Solitons Fractals* **6** 539-559 (1995).
- [۱۷] A. A. Altintas, F. Ozaydin, C. Yesilyurt, S. Bugu, M. Arik, "Constructing Quantum Logic Gates Using q -Deformed Harmonic Oscillator Algebras", *Quantum Inf. Process.* **13** (4) 1035 (2014).
- [۱۸] K. Gautam, T. K. Rawat, H. Parthasarathy, and N. Sharma, "Realization of commonly used quantum gates using perturbed harmonic oscillator", *Quantum Inf. Process.* **14**:3257-3277 (2015).
- [۱۹] K. Jhih-Yuan, and C. Chung-Hsien, "Quantum entanglement in coupled harmonic oscillator systems: from micro to macro", *New J. Phys.*, **Vol. 18**, (2016).
- [۲۰] T. Dietl; D. D. Awschalom, M. Kaminska, et al., "Spintronics". Academic Press (2009).
- [۲۱] I. Žutić, S. Das Sarma, "Spintronics: Fundamentals and applications". *Rev. Mod. Phys.* **76** (2): 323-410 (2004).
- [۲۲] S. D. Bader, S. S. P. Parkin, "Spintronics". *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1**: 71-88 (2010).
- [۲۳] E. Paladino, A. Mastellone, A. D'Arrigo, and G. Falci, "Optimal tuning of solid-state quantum gates: A universal two-qubit gate", *Phys. Rev. B* **81**, 052502 (2010).
- [۲۴] H. Kim, R. Bose, T. C. Shen, G. S. Solomon, E. Waks, "A quantum logic gate between a solid-state quantum bit and a photon", *Nature Photonics* **vol.7**, pages373-377 (2013).

بررسی اثر میرایی در رفتار شاهد غیر کلاسیکی برای یک سیستم دو حالت

زرآبادی پور^۱، سمیه^۱؛ نحوی فرد^۱، الهه^۱؛ بذرافکن، محمدرضا^۱

^۱گروه فیزیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین

چکیده

در این مقاله، اثر میرایی در رفتار شاهد غیرکلاسیکی یک نوسانگر هارمونیک کوانتومی که در بر همکنش باکیوبیت است، بررسی گردید و با در نظر گرفتن میرایی شاهد غیرکلاسیکی جدیدی معرفی شد. در حضور میرایی هنوز کیوبیت ما تابع مشخصه نرمال را اندازه می‌گیرد ولی مسیری که متغیر مختلط معرفی شده در صفحه مختلط طی می‌کند برخلاف حالت بدون میرایی یک دایره نیست بلکه مسیر مارپیچ است. واژه های کلیدی: غیر کلاسیکی، میرایی، کیوبیت، تابع مشخصه نرمال.

Studying the effect of damping in non-classical witness behavior for a two-mode system

Zarabadipour, Somayeh¹; Nahvifard, Elahe¹; Bazrafkan, Mahammad reza¹

¹ Physics group, International University of Imam Khomeini, Qazvin

Abstract

In this paper, the effect of damping in the non-classical witness behavior of a quantum harmonic oscillator based on the qubit interaction was investigated and a new non-classical witness damping was introduced. In the presence of damping, our qubit still measures the normal characteristic function, but the complex variable introduced in the complex plane takes a spiral path, unlike the case without damping, which is a circle.

Keywords: Non-classicality, damping, qubit, normal characteristic function.

PACS No. 03.65.Ta

مقدمه

صورت حالت غیر کلاسیک نامیده می‌شود [2 و 3]. تابع گلاوبر برای اغلب حالت‌های غیر کلاسیک یک تابع تعمیم‌یافته و تکین است و اندازه‌گیری مستقیم آن غیر ممکن است. تنها از طریق محاسبه چشمداشتی‌های مختلف برای مشاهده‌پذیرهای گوناگون، می‌توان اطلاعاتی بدست‌آورد که توصیف کاملی از تابع گلاوبر بدهد. به همین دلیل حتی وقتی هدف توصیف کامل از نمایش گلاوبر حالت است این کار با اندازه‌گیری خانواده‌ای از چشمداشتی‌ها انجام می‌شود [2]. در این جا به کمک برهم‌کنش یک سامانه دوترازه به عنوان ابزار اندازه‌گیری با یک نوسانگر هارمونیک کوانتومی، کمیتی اندازه‌گیری می‌شود که از نتیجه آن غیرکلاسیکی بودن حالت را تشخیص خواهیم داد.

طبیعت غیر کلاسیکی حالت‌های کوانتومی نقش اساسی و مهمی در توسعه اطلاعات کوانتومی و مخابرات کوانتومی دارد. [1] مکانیک کوانتومی به طور اساسی با مکانیک کلاسیک متفاوت است. احتمال تداخل دامنه‌ها و جمع حالت‌ها، عدم قطعیت هایزنبرگ بین دو متغیر کانونیک از پدیده های اساسی متفاوت بودن طبیعت مکانیک کوانتومی با کلاسیک است. حالت و سیستمی که از مکانیک کوانتومی تبعیت می‌کند غیرکلاسیکی نامیده می‌شود. بنابراین بنابر تعریف، اگر نمایش گلاوبر- سودارشان عملگر چگالی مانند توابع توزیع چگالی احتمال کلاسیکی مثبت و بهنجار باشد آنگاه حالت کوانتومی مشابه کلاسیک دارد و در غیر این

شاهد غیر کلاسیکی منتج از برهم کنش با کیوبیت

اکنون یک نوسانگر کوانتومی با هامیلتونی $\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ به عنوان سامانه هدف، یک کیوبیت با هامیلتونی $\hat{\sigma}_z$ و $\hbar\omega_0/2$ به عنوان ابزار اندازه گیری در نظر بگیرید که به طور طولی به یکدیگر جفت^۱ شده اند [4]. در اینجا ω فرکانس طبیعی نوسانگر و ω_0 فرکانس گذار کیوبیت است. این دو سامانه را با جمله برهم کنشی $\hbar\omega\beta\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_z$ به یکدیگر جفت می کنیم که در اینجا β ثابت جفت شدگی بی بعد و مستقل از زمان است. بنابراین هامیلتونی کل با رابطه زیر داده می شود

$$\hat{H} = \hbar\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\beta\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_z, \quad (1)$$

که در لحظه ابتدایی نوسانگر در حالت $\hat{\rho}_0$ و ابزار کیوبیتی در حالت $\hat{\rho}_q$ می باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{q0} &= \hat{\rho}_q \otimes \hat{\rho}_0 \\ &= \hat{\rho}_q \otimes \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \end{aligned} \quad (2)$$

در اینجا $P(\alpha)$ نمایش گلاوبر- سودارشان حالت اولیه نوسانگر است. حال می توان تحول زمانی سامانه مرکب را به شکل زیر محاسبه کرد

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{q0}(t) &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_q \otimes \hat{\rho}_0 e^{+i\hat{H}t/\hbar} \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_q \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{+i\hat{H}t/\hbar} \end{aligned} \quad (3)$$

در زمان نهایی t ، با مشاهده کیوبیت می توان اطلاعاتی راجع به حالت نوسانگر بدست آورد. حالت کوانتومی کیوبیت با محاسبه تریس جزئی نسبت به سامانه نوسانگر بدست می آید

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_q(t) &= \text{Tr}_0 \hat{\rho}_{q0}(t) \\ &= \text{Tr}_0 e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_q \otimes \hat{\rho}_0 e^{+i\hat{H}t/\hbar} \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) \text{Tr}_0 e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_q \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{+i\hat{H}t/\hbar}, \end{aligned} \quad (4)$$

بنابراین عملکرد چگالی کاهش یافته کیوبیت باید به شکل زیر باشد

$$\hat{\rho}_q(t) = \begin{pmatrix} p & w(t) \\ w^*(t) & 1-p \end{pmatrix}, \quad (5)$$

که در آن $w(t)$ تابع مختلطی از زمان و $0 \leq p \leq 1$ ثابت حقیقی است [4]. در نتیجه $w(t)$ در رابطه زیر

$$w(t) = \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_x \rangle - i\frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_y \rangle, \quad (6)$$

قابل اندازه گیری است. برای دنبال کردن تحول زمانی حالت تنها اندازه گیری $\langle \hat{\sigma}_x \rangle, \langle \hat{\sigma}_y \rangle$ کافی است. با فرض قابل اندازه گیری بودن این کمیت ها و با توجه به $\hat{\sigma}_z |\pm\rangle = \pm 1 |\pm\rangle$ داریم

$$w(t) = \langle + | \hat{\rho}_q(t) | - \rangle \triangleq \int d^2\alpha P(\alpha) w(t; \alpha), \quad (7)$$

و با استفاده از رابطه بستاری حالت های همدوس می توان نوشت $w(t; \alpha) =$

$$\begin{aligned} &= \langle + | \text{Tr}_0 e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_q \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{+i\hat{H}t/\hbar} | - \rangle \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi} \langle + | \langle z | e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_q \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{+i\hat{H}t/\hbar} | z \rangle | - \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

باکمی محاسبه و تعریف زیر

$$\gamma(t) \equiv -i4\beta \sin \frac{\omega t}{2} e^{i\omega t/2} \quad (9)$$

رابطه معرفی شده در (۸) به شکل زیر می شود

$$w(t; \alpha) = w(0) e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}} e^{\gamma\alpha^* - \gamma^*\alpha}. \quad (10)$$

و نتیجه نهایی بحث بالا رابطه (۱۱) است که عنصر ماتریسی $\langle + | \hat{\rho}_q(t) | - \rangle$ را به تابع مشخصه نرمال حالت مربوط می کند

$$w(t) = w(0) e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}} \left\langle : e^{\gamma(t)\hat{a}^\dagger - \gamma^*(t)\hat{a}} : \right\rangle. \quad (11)$$

دو نکته وجود دارد که شایسته توجه است. اول اینکه رابطه (۹) بطور از پیش معین شده ای با زمان، و البته خیلی سریع، تغییر می کند. دوم اینکه ما برای تغییر γ راهی بجز تغییر پارامتر جفت شدگی β نداریم. منظور از این توضیحات این است که از رابطه (۱۱) نمی توان برای اندازه گیری تابع مشخصه نرمال در همه صفحه مختلط سود جست. با این وجود اگر تابع سودارشان مثبت و حالت کلاسیکی باشد آنگاه

$$\left| \frac{w(t)}{w(0)} \right| \leq e^{-8\beta^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} \int d^2\alpha |P(\alpha)|. \quad (12)$$

از سوی دیگر با فرض کلاسیکی حالت

$$\int d^2\alpha |P(\alpha)| = 1, \Rightarrow \left| \frac{w(t)}{w(0)} \right| \leq e^{-8\beta^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}}, \quad (13)$$

بنابراین

¹ longitudinally couple

عملگرهای خلق و فنا ی این نوسانگر مجازی را با $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ نمایش می‌دهیم، و $\hat{L} \equiv 2\hat{a}\hat{b} - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b}$ عملگر نوسانگری است. با مرتب کردن جملات و با استفاده از نمایش برهمکنش - میرایی که به شکل روبه رو تعریف می‌شود $e^{\kappa t \hat{L}} |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12} \equiv |\rho_{qo}^R\rangle_{12}$ می‌توانیم معادله زیر را بدست آوریم

(19)

$$\frac{d}{dt} |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12} = -i \omega_o + \omega \beta e^{-\kappa t \hat{L}} \hat{a} + \hat{b}^\dagger e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger + \hat{b} e^{+i\omega t} e^{\kappa t \hat{L}} |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12}.$$

با ساده سازی و تبدیل تشابه داریم

$$\hat{R} t = e^{-\kappa t \hat{L}} \hat{a} + \hat{b}^\dagger e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger + \hat{b} e^{+i\omega t} e^{\kappa t \hat{L}} = \hat{M} t + \hat{N} t, \quad (20)$$

در اینجا

$$\hat{M} t \equiv 2e^{-zt} - e^{z^*t} \hat{a} + 2e^{-z^*t} - e^{zt} \hat{b}, \quad \hat{N} t \equiv e^{zt} \hat{a}^\dagger + e^{z^*t} \hat{b}^\dagger, \quad (21)$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt} |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12} = -i \omega_o + \omega \beta \hat{M} t + \omega \beta \hat{N} t |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12} = \hat{A} t + \hat{B} t |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12},$$

$$\hat{A} \equiv -i \omega_o I + \omega \beta \hat{M} t, \hat{B} \equiv -i \omega \beta \hat{N} t, \quad (22)$$

اکنون با توجه به لم [7] می‌توان راهی برای بدست آوردن جواب معادله (19) پیدا کرد. لم: اگر عملگرهای وابسته به زمان $\hat{A} t, \hat{B} t'$ در شرایط زیر صدق کنند

$$[\hat{A} t, \hat{A} t'] = 0, \quad [\hat{B} t, \hat{B} t'] = 0, [\hat{A} t, \hat{B} t'] = f(t, t'), \quad (23)$$

جواب معادله $\frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{A} t + \hat{B} t |\psi\rangle$ به صورت زیر است

(24)

$$|\psi t\rangle = \exp \left\{ \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' f(t', t'') \right\} \exp \left\{ \int_0^t \hat{B} t' dt' \right\} \exp \left\{ \int_0^t \hat{A} t' dt' \right\} |\psi 0\rangle.$$

اکنون به حل معادله (19) برمی‌گردیم

classical state $\Rightarrow$

$$e^{8\beta^2 \sin^2 \omega t/2} \left| \frac{w t}{w 0} \right| = e^{|\gamma t|^2/2} \left| \frac{w t}{w 0} \right| \leq 1. \quad (14)$$

در واقع این شرط $|\langle : e^{\gamma \hat{a}^\dagger - \gamma^* \hat{a}} : \rangle| \leq 1$ همان شرط بوخنر برای تابع مشخصه است تا تابع مشخصه فیزیکی باشد [4].

بررسی اثر میرایی در رفتار شاهد غیر کلاسیکی

در دنیای واقعی هر سامانه فیزیکی در تماس حرارتی با محیط قرار دارد و این تماس عموماً حالت سامانه مرکب را از یک حالت خالص به یک حالت آمیخته تبدیل می‌کند. بنابراین شاهد غیر کلاسیکی ما هم باید از این واهمدوسی متأثر شود. در اینجا با فرض تماس حرارتی نوسانگر با یک منبع گرمایی در دمای صفر رفتار شاهد های غیر کلاسیکی بازبینی می‌شود. فرض کنید تنها نوسانگر کوانتومی در تماس مستقیم با منبع گرمایی در دمای صفر مطلق باشد و در نتیجه معادله جامع زیر تحول زمانی مسئله را توصیف کند

$$\frac{d\hat{\rho}_{qo}}{dt} = -i \left[\frac{\omega_o}{2} \hat{\sigma}_z + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \beta \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_z, \hat{\rho}_{qo} \right] + \kappa \left[2\hat{a} \hat{\rho}_{qo} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{qo} - \hat{\rho}_{qo} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \quad (15)$$

در اینجا $\hat{\rho}_{qo}$ باید به عنوان یک عملگر چگالی برای سامانه مرکب نوسانگر + کیوبیت در نظر گرفته شود. یعنی

$$\hat{\rho}_{qo} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{11} & \hat{\rho}_{12} \\ \hat{\rho}_{21} & \hat{\rho}_{22} \end{pmatrix} = \int d^2\alpha \begin{pmatrix} P_{11} & \alpha & P_{12} & \alpha \\ P_{21} & \alpha & P_{22} & \alpha \end{pmatrix} |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

$$\text{Tr}_o \hat{\rho}_{qo} = \int d^2\alpha \begin{pmatrix} P_{11} & \alpha & P_{12} & \alpha \\ P_{21} & \alpha & P_{22} & \alpha \end{pmatrix}. \quad (16)$$

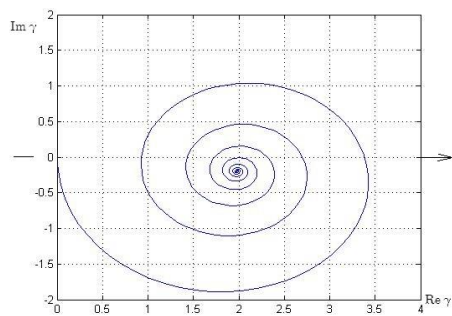
البته در اینجا لزوماً $\hat{\rho}_{i,j}$ ها هرمیتی و مثبت (عملگر چگالی حالت) نیستند. با تعریف نمایش برهم کنش چرخشی به شکل

$$\hat{\rho}_{qo}^R = e^{+i\omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\rho}_{qo} e^{-i\omega t \hat{a}^\dagger \hat{a}}, \quad (17)$$

معادله جامع (15) به شکل زیر

$$\frac{d\hat{\rho}_{qo}^R}{dt} = -i \left[\frac{\omega_o}{2} \hat{\sigma}_z + \omega \beta \hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{+i\omega t} \hat{\sigma}_z, \hat{\rho}_{qo}^R \right] + \kappa \left[2\hat{a} \hat{\rho}_{qo}^R \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{qo}^R - \hat{\rho}_{qo}^R \hat{a}^\dagger \hat{a} \right], \quad (18)$$

ساده خواهد شد. اکنون این معادله را در نمایش کت برداری می‌نویسیم [5و6]. برای این کار یک نوسانگر کمکی (مجازی) تصور می‌کنیم که به همراه نوسانگر فیزیکی یک سامانه مرکب بسازند.



نمودار ۱: نمودار مسیر γ t در صفحه مختلط

متاسفانه فاکتور $e^{f_1 t - |\omega\beta v|^2 - i\omega t}$ با افزایش زمان برهم کنش به صفر میل می‌کند و اصولاً در زمان‌های بزرگ عنصر غیرقطری w t هم صفر شده و غیر قابل اندازه‌گیری می‌شود. با این وجود اگر زمان برهم کنش آنقدر بزرگ نباشد که w t غیر قابل اندازه‌گیری شود، با استفاده از نتایج بدست آمده و با تصحیح فرمول (14) به صورت زیر می‌توان شاهی برای غیر کلاسیکی حالت معرفی کرد

$$e^{-f_1 t + |\omega\beta v|^2 + i\omega t} \frac{w}{w_0} = \langle : e^{\gamma \hat{a}^\dagger - \gamma^* \hat{a}} : \rangle, \Rightarrow$$

$$\left| e^{-f_1 t + |\omega\beta v|^2} \left| \frac{w}{w_0} \right| \right| = \left| \langle : e^{\gamma \hat{a}^\dagger - \gamma^* \hat{a}} : \rangle \right| \leq 1, \quad (29)$$

نتیجه‌گیری

در مورد فرآیند برهم‌کنش یک کیوبیت و یک نوسانگر کوانتومی، اثرات اتلاف ناشی از محیط را تجزیه و تحلیل کردیم. این برهم‌کنش برای اندازه‌گیری شاهد غیر کلاسیک بودن وضعیت نوسانگر، طراحی شده است. رابطه (29) را برای یک جزئی غیر قطری پیدا کردیم. عنصر ماتریسی حالت کیوبیت را با نمایش حالت در هم تنیده محاسبه کردیم. برای فاصله زمانی کوتاه‌تر از برهم‌کنش کیوبیت-نوسانگر (قبل از ناپدید شدن ماهیت علامت غیر کلاسیک)، ما نشان دادیم که لازم است اصلاحات مربوط به اتلاف را در غیر کلاسیک بودن حالت در نظر بگیریم.

مرجع‌ها

- [1] C.H. Bennett and D.P. DiVincenzo; "Quantum information and computation"; *Nature* **404**, (2000) 247-255.
- [2] U.M. Titulaer, R. Glauber, "Correlation Functions for Coherent Fields"; *Phys. Rev.* **140**, (1965) B676-B682.

$$\frac{d}{dt} |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12} = \hat{A} t + \hat{B} t |\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12}. \quad (25)$$

چون $|\rho_{qo}^{\text{dis}}\rangle_{12} \equiv |\rho_{qo}^R\rangle_{12} = |\rho_{qo}\rangle_{12}$ بنابراین عملگر $\hat{\rho}_{qo,12}^R$ t با عبارت زیر داده می‌شود

$$\hat{\rho}_{qo,12}^R t = e^{f_1 t - i\omega_0 t} w_0 \times$$

$$\int d^2 \alpha P_\alpha e^{-|\alpha|^2} e^{-i\omega\beta} 2u-v^* \alpha + 2u^*-v \alpha^* \times$$

$$e^{\alpha - i\omega\beta v} \alpha^* - i\omega\beta v^* 1 - e^{-2\kappa t} \frac{1}{e^2} |\alpha - i\omega\beta v e^{-\kappa t}|^2 \times$$

$$\frac{1}{e^2} |\alpha^* - i\omega\beta v^* e^{-\kappa t}|^2 |\alpha - i\omega\beta v e^{-\kappa t}\rangle \langle \alpha + i\omega\beta v e^{-\kappa t}| \quad (26)$$

محاسبه عملگر $\hat{\rho}_{qo,12}^R$ t از روی $\hat{\rho}_{qo,12}^R$ سراسر است.

تريس جزئی این عملگر برابر است با

$$\text{Tr}_o \hat{\rho}_{qo,12} t = e^{f_1 t - i\omega_0 t} w_0 \times$$

$$\int d^2 \alpha P_\alpha e^{-|\alpha|^2} e^{-i\omega\beta} 2u-v^* \alpha + 2u^*-v \alpha^* \times$$

$$e^{\alpha - i\omega\beta v} \alpha^* - i\omega\beta v^* 1 - e^{-2\kappa t} \times$$

$$\frac{1}{e^2} |\alpha - i\omega\beta v e^{-\kappa t}|^2 \frac{1}{e^2} |\alpha^* - i\omega\beta v^* e^{-\kappa t}|^2 \quad (27)$$

$\langle \alpha + i\omega\beta v e^{-\kappa t - i\omega t} | \alpha - i\omega\beta v e^{-\kappa t - i\omega t} \rangle$,
و عنصر غیر قطری عملگر کاهش یافته چگالی کیوبیت،
یعنی w t مطابق رابطه زیر می‌شود

$$w t = \text{Tr}_o \hat{\rho}_{qo,12} t =$$

$$e^{f_1 t - |\omega\beta v|^2 - i\omega_0 t} w_0 \int d^2 \alpha P_\alpha e^{-i2\omega\beta} u^* \alpha^* + u \alpha$$

$$= w_0 e^{f_1 t - |\omega\beta v|^2 - i\omega_0 t} \langle : e^{\gamma \hat{a}^\dagger - \gamma^* \hat{a}} : \rangle, \quad (28)$$

$\gamma t = -i2\omega\beta u^* t$
همانطور که مشاهده می‌شود حتی در حضور میرایی هنوز کیوبیت ما تابع مشخصه نرمال را اندازه می‌گیرد ولی مسیری که متغیر مختلط γt در صفحه مختلط طی می‌کند برخلاف حالت قبل یک دایره نیست بلکه مسیر مارپیچ زیر است

- [3] M. Hillery.” Classical pure states are coherent states” *Phys. Lett.* **111A**, (1985) 409–411.
- [4] S. Agarwal, J. Eberly “Witnessing nonclassicality of a quantum oscillator state by coupling it to a qubit”; *H. Phys. Rev. A.*; **86**, (2012) 022341.
- [5] HY. Fan, Y. Fan “New representation for thermo excitation and de-excitation in thermofield dynamics”; *Phys Lett A.*; **282**, (2001) 269–275.
- [6] LY. Hu, HY. Fan, “Infinite operator-Sum Representation of Density operator for a Dissipative Cavity with Kerr Medium Derived by Virtue of Entangled State Representation.”; *Int. J. Theor. Phys.*; **48**, (2009) 3396–3402.
- [7] CW. Gardiner, P. Zoller,” *Quantum Noise*”; Berlin: Springer; 2004.

پوسترها

کنترل حلقه باز بهینه شده یک سامانه کوانتومی دو تراز

جاویدان^۱، کوروش^۱؛ اکبرپور، مسعود^۲

^۱ گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

^۲ دانشکده فیزیک دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، گاوآنگ، زنجان، ایران

چکیده

اغلب نیازمند آن هستیم که ترکیب خاصی از ویژه حالت های یک سیستم کوانتومی را در اختیار داشته باشیم. برای دستیابی به این مقاصد؛ وجود تکنیک های کنترلی کوانتومی، بسیار کارآمد خواهند بود. در این پژوهش، مساله ی کنترل انتقال تراز حالات مختلف سیستم کوانتومی را به روش لیاپونوف برای یک سامانه کوانتومی دو-سطحی همدوس و بسته؛ با در نظر گرفتن فاکتورهای مهم و مؤثر در کنترل این سامانه را حل و بررسی کرده ایم. مدلی که برای کنترل این سامانه طراحی شده، هیچ محدودیتی در انتخاب حالات ابتدائی و انتهائی سامانه ندارد. رسیدن به کت نهائی مورد نظر؛ در عین مینیمم کردن شدت میدان خارجی اعمال شده، سرعت انتقال تراز و دستیابی به پایداری پس از رسیدن به حالت نهائی، از اهداف این مدل کنترلی می باشد که به دو روش عددی و تحلیلی حل شده و نتایج با هم مقایسه گردیده اند.

واژگان کلیدی: کنترل کوانتومی - سیستم های کنترلی دو سطحی - کنترل کوانتومی لیاپونوف

Optimized Open-Loop Control of a Two-State Quantum System

Javidan, Kurosh¹ ; Akbarpour, Masoud²

¹ Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

² Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Gavazang, Zanjan, Iran

Abstract

we often need quantum systems in a particular composition of Eigen-States to work with. To reach this goal, the entity of Quantum Control Techniques is so useful.

In this research, we had solved and investigated a Control Problem of Different State-Transition via Lyapunov Method, for a closed & coherent qubit under considering essential and useful elements of control. In presented model, there is no limitation on considering any initial & final state. The goal of this model is to reach the desired State; aside minimizing the intensity of external field, velocity of state-transition and achieving sustainable manner. This was done numerically & analytically; and so the results of each of these, are compared with each other.

Keywords: Quantum Control – 2 State Controlling Systems – Lyapunov Quantum Control

PACS No. 03.67.Lx, 03.65.-w

مقدمه

اما برای انجام آزمایش، لازم است تا سامانه مورد نظر در یک حالت اولیه ی بخصوص مرکب یا خالص قرار گرفته باشد تا روی آن آزمایش صورت گیرد بنابراین لازم است تا سامانه را آماده کنیم.

در حالت طبیعی، یک سامانه ی کوانتومی در ابتدای امر می تواند در یک حالت اولیه آمیخته قرار داشته باشد.

$$|\Psi^{(0)}(t_i)\rangle = \sum_{p=1}^{M=\dim} C_p^i |\psi_p^{(0)}\rangle \quad (2)$$

$$|\Psi^n(r, dt)\rangle = \sum_{m=1}^M C_m^n(r, dt) |\psi_m\rangle ; n = \text{fixed} \quad (1)$$

اکنون با اکسترمم کردن تابع لیاپوونو، می توان فرم تابع کنترل را به دست آورد. [1]

$$V(t) \equiv \frac{1}{2} (1 - |\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle|^2) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \langle \Psi_f | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle)$$

با مشتق گیری و تشکیل نامعادله ی نزولی، خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\hbar} \sum_{k=1}^K \lambda_k(t) \cdot x_k \right) \leq 0 \quad (11)$$

برای آنکه نامعادله ی فوق برقرار بشود؛ لازم است تمامی جملات داخل جمع بندی، مثبت باشند. یعنی:

$$\lambda_k(t) \cdot x_k \geq 0 \quad (12)$$

بنابراین تابع کنترل باید به فرم کلی زیر باشد:

$$\lambda_k(t) = M_k \cdot F_k(x_k) ; M_k > 0 \quad (13)$$

از ویژگی های تابع F اینست که:

✓ کاملاً یکنواخت و هموار باشد.

✓ با شیب ملایم از مبداء مختصات بگذرد.

✓ در ربع اول و یا سوم و از نظر اندازه، بین صفر و یک باشد.

با یک نگاه در آخرین رابطه از فرمول (11)، متوجه خواهید شد که اگر کت های اولیه و نهائی، بر یکدیگر متعامد و ویژه کت های هامیلتونی باشند؛ آنگاه کنترل $\lambda_k(t)$ کاملاً بلا استفاده خواهد بود.

برای حل این ایراد؛ بهتر است رابطه ی (11) را به فرم قطبی بنویسیم تا بتوانیم از تحولات لحظه به لحظه ی کت حالت جو یا شویم. [1]

$$\dot{V}(t) = \frac{-1}{\hbar} \sum_{k=1}^K [\lambda_k(t) \cdot \|\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle\| \cdot \text{Im}(e^{i\angle \langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle} \langle \Psi_f | H_k | \Psi(t) \rangle)] \quad (14)$$

و اِلمان قابل تعیینی که کنترل کننده ی مسیر گذار است

$$\gamma(t) = \angle \langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle \quad (15)$$

$$= \pi - \text{Arccos} \left((\cos \theta_f \cdot \cos \theta(t)) + (\sin \theta_f \cdot \sin \theta(t) \cdot \cos(\varphi_f - \varphi(t))) \right)$$

در حقیقت زوایای $\varphi(t)$ و $\theta(t)$ و رابطه ای که میان آنهاست؛ مسیر گذار را کنترل می کنند. اکنون به سراغ معادله ی تحول شرودینگر و کت های دلخواه اولیه و نهائی برویم.

$$H_{(T)}(t) = H_{(0)} + \lambda(t) \cdot H_{(\lambda)} \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} h_{1,1}^{(0)} & 0 \\ 0 & h_{2,2}^{(0)} \end{bmatrix} + \lambda(t) \begin{bmatrix} 0 & h_{1,2}^{(\lambda)} \\ h_{2,1}^{(\lambda)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Psi^{(0)}(t_i)\rangle = \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) |\psi_1^{(0)}\rangle + \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \cdot e^{i\varphi_i} |\psi_2^{(0)}\rangle$$

$$|\Psi^{(0)}(t_f)\rangle = \sum_{p=1}^{M=\dim} C_p^f |\psi_p^{(0)}\rangle \quad (3)$$

ما یک سامانه کوانتومی دو-ترازه ی بسته و همدوس را انتخاب کرده و به دنبال آن بودیم که مدلی برای انتقال جمعیت از یک تراز به تراز دیگر را در بستر یک میدان خارجی قابل کنترل به همراه بهینه کردن شدت میدان خارجی در ازای دستیابی به کت مورد نظر در کوتاهترین زمان ممکن و یا با عبور از مسیر دلخواه؛ به دست آوریم.

دینامیک مسأله

با توجه به نظریه لیاپوونو [1] در سال 1892، که برای

کنترل غیر مستقیم سامانه و دستیابی به پایداری پس از کنترل، ارائه شد. بطور کلی یک سامانه غیر خطی را به گونه ای در نظر بگیرید که

$$\dot{\lambda}(t) = f(x) \quad (4)$$

فرض کنید

$$\lambda_{eq} = 0 \quad (5)$$

نقطه تعادل باشد. آنگاه این نقطه ی تعادل پایدار است اگر:

$$\forall \varepsilon > 0 : \delta = \delta(\varepsilon) \quad \|\lambda(t)\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 : \|\lambda(t)\| < \varepsilon \quad (6)$$

قضیه: اگر مشتق تابع لیاپوونو $V(\lambda(t))$ در همسایگی نقطه ی تعادل، منفی باشد؛ آنگاه آن نقطه ی تعادل، پایدار است. تابع لیاپوونو دارای ویژگی های بخصوصی است. [1] مثلاً اینکه:

✓ باید پیوسته باشد.

✓ دارای یک نقطه ی اکسترمم منحصر به فرد، نسبت به دیگر نقاط در همسایگی خود باشد.

✓ آهنگ تغییرات در همسایگی آن نقطه ی تعادل، منفی و سیر نزولی داشته باشد.

برای تعیین این تابع لیاپوونو، از معیار بورس استفاده کرده ایم. [1]

$$d_{Bures}(|\Psi(t)\rangle, |\Psi_f\rangle) \equiv \min_{\theta} \|\Psi(t)\rangle - e^{i\theta} |\Psi_f\rangle\| ; \theta \in R \quad (7)$$

بطوریکه تابع لیاپوونو را بر حسب فاصله لحظه ای میان حالت در حال تحول و حالت نهائی هدف تعریف و با اکسترمم کردن آن، کمینه ی تابع شدت میدان خارجی را به دست می آوریم. [1]

$$V \equiv \frac{1}{2} (1 - |\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle|^2) \quad (8)$$

در حالت عمومی معادله ی تحول سامانه را می نویسیم.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = (H_0 + \sum_k \lambda_k(t) H_k) |\Psi(t)\rangle \quad (9)$$

یعنی ماکزیمم فیدلیتی پیشرفت. به عبارتی در حلقه‌باز، مسأله‌ی ما بهینه نیست. اما در حل تحلیلی، دیگر آزمون و خطایی وجود ندارد! صرفاً با تشکیل یک معادله برای ماکزیمم فیدلیتی؛ می‌توان شدت میدان کمینه شده را به ازای هر مسیر خطی برای هر کت‌حالت اولیه و نهائی، به‌دست آورد. معادله‌ای که مسأله‌ی ما را به این بهینه می‌کند:

$$V \equiv \frac{1}{2} (1 - |\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle|^2) = 0 \quad (21)$$

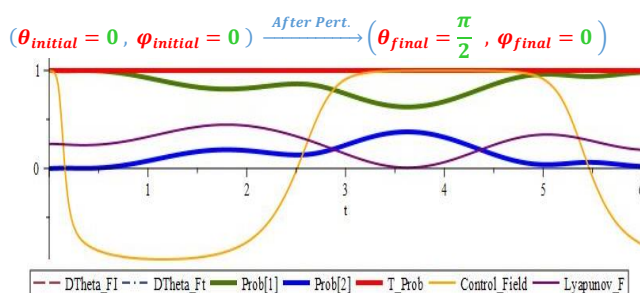
در حقیقت صفر شدن تابع لیاپوونو؛ نشانگر انتقال تراز کامل است.

نتایج محاسبات عددی و تحلیلی

در انجام هردو مدل محاسبات، پارامتر گذر زمان برای تحول، به‌گونه‌ای مقیاس‌بندی شده است که هر واحد زمانی؛ معادل با یک دوره $10E-16$ [sec] می‌باشد. در تمامی نمودارها، به اینک انتقال کامل ترازا در چه لحظه‌ای رخ داده است؛ دقت کنید.

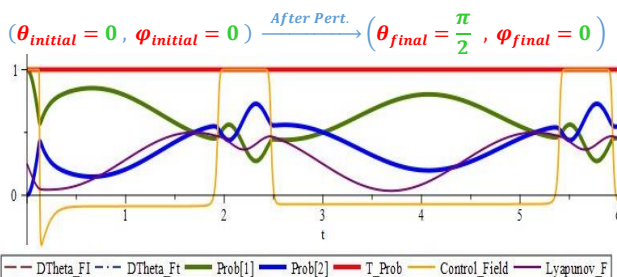
○ نتایج حل عددی:

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma_x$$



شکل 1 هرچند که تابع لیاپوونو به صفر رسیده است اما در همان لحظه تابع کنترلر در بیشترین مقدار خود قرار دارد؛ یعنی سیستم کنترلی کاملاً روشن است و تبعاً همین باعث اختلال جزئی در انتقال تراز می‌شود که مشاهده می‌کنید جمعیت ترازا به یکدیگر نزدیک شده‌اند ولی نه کامل.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t) \cdot 4 \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$



شکل 2 در نمودار فوق نیز به دلیل عدم هم‌خوانی مقادیر تابع لیاپوونو و تابع کنترلر، سامانه دوباره از وضعیت مورد نظر خارج می‌شود.

$|\Psi^{(\lambda)}(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)|\psi_1^{(\lambda)}\rangle + \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \cdot e^{i\varphi(t)}|\psi_2^{(\lambda)}\rangle$
 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_n^{(0)} | \Psi^{(\lambda)}(t) \rangle = H_{(T)}(t) \langle \psi_n^{(0)} | \Psi^{(\lambda)}(t) \rangle$
 تا اینجا، مسأله را به روش عددی می‌توان حل کرد. اما برای حل به روش تحلیلی؛ از نظریه اختلال کمک گرفته و با توجه به اینکه سامانه دو-تراز دارد؛ اختلال را تا مرتبه اول در نظر می‌گیریم. [2]

$$|\psi_n^{(\lambda)}(t)\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda^1(t)|\psi_n^{(1)}\rangle + \dots \quad (17)$$

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \left(\frac{-h_{m,n}^{(\lambda)}(\delta_{m,n-1} + \delta_{m-1,n})}{(h_{m,m}^{(0)} - h_{n,n}^{(0)})} \right) |\psi_m^{(0)}\rangle$$

و برای ویژه مقادیر انرژی:

$$E_n^{(\lambda)}(t) = E_n^{(0)} + \lambda^1(t)E_n^{(1)} + \dots \quad (18)$$

$$E_{(\pm)}^{(\lambda)}(t) = \left(\frac{h_{m,m}^{(0)} + h_{n,n}^{(0)}}{2} \right) \pm \left(\frac{h_{m,m}^{(0)} - h_{n,n}^{(0)}}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{\| \lambda(t) \cdot (h_{m,n}^{(\lambda)} \delta_{m,n-1}) \|^2}{\left(\frac{h_{m,m}^{(0)} - h_{n,n}^{(0)}}{2} \right)^2}}$$

با اعمال روابط اختلالی فوق، خواهیم دید که چگونه می‌توان شدت میدان خارجی کمینه‌شده را به‌دست آورد. اما بطور کلی، چه برای حل عددی و چه برای حل تحلیلی، اولاً تابع M را در روش عددی هربار با آزمون و خطا مقداردهی می‌کنیم و در روش تحلیلی با اکسترم کردن معادله لیاپوونو، مینیم آن را به‌دست آوریم. ثانیاً فرم تابع F را با توجه به ویژگی‌هایی که قبلاً به آن اشاره کردیم $\tanh()$ در نظر می‌گیریم. اما برای $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ ، لزوم قطعی شدن انتقال تراز، ایجاب می‌کند که این دو تابع مستقل از یکدیگر نباشند. از آنجائی که ما به سریع‌ترین تحول ممکن علاقه‌مند بودیم؛ لذا این دو تابع باید صورت خطی به یکدیگر مرتبط می‌شدند. پس باز هم فرم $\tanh()$ را برای آن‌ها در نظر گرفتیم. یعنی:

$$\theta(t) \equiv \Delta\theta \cdot \tanh(t) \rightarrow t = \tanh^{-1}\left(\frac{\theta(t)}{\Delta\theta}\right) \quad (19)$$

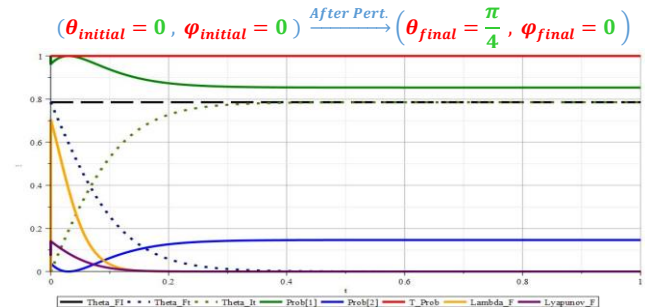
$$\Delta\theta = |\theta_f - \theta_i| \quad ; \quad \Delta\varphi = |\varphi_f - \varphi_i|$$

$$\varphi(t) \equiv \Delta\varphi \cdot \tanh(t) \xrightarrow{(19)} \varphi(t) \equiv \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\theta}\right) \cdot \theta(t) \quad (20)$$

توجه داشته باشید که این تعیین توابع زوایا؛ منجر به ایجاد تحول از مسیری خواهد شد که ما تعیین می‌کنیم! به عبارت دیگر، این مدل کنترل از نوع بازخوردی و بسته نیست؛ بلکه از نوع حلقه‌ی باز است. در حل عددی، صرفاً می‌توان با یک حدس اولیه در تعیین شدت میدان خارجی و دیدن نتایج، با آزمون و خطا به سمت بهترین مدل

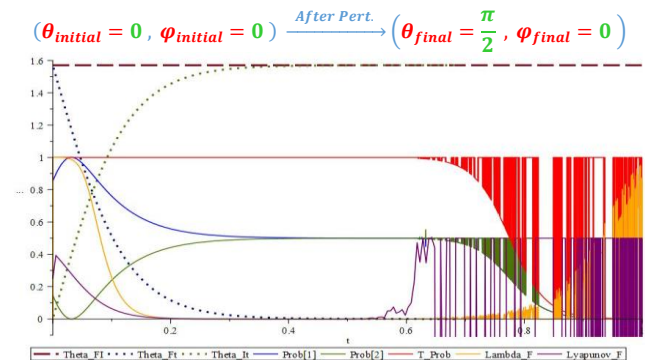
○ نتایج حل تحلیلی:

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t).X(t).\sigma_x$$



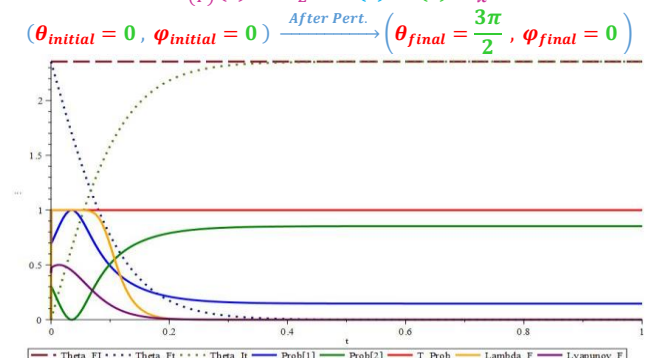
شکل 3 همچنان که در نمودار فوق می بینید، انتقال تراز در مدت زمان بسیار کوتاه تر و بطور کامل انجام شده و از پایداری کامل در گذر زمان نیز برخوردار است. تابع لیاپونوف و تابع کنترلر هردو به صفر رسیده اند.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t).X(t).\sigma_x$$



شکل 4 تقریباً پس از گذشت نیم واحد زمانی، پایداری سیستم مختل شده و جمعیت هر دو تراز به سمت صفر نزدیک می شوند که باعث بروز عدم پایداری احتمالی کل شده است. شاید به دلیل یونیزه شدن کامل اتم باشد.

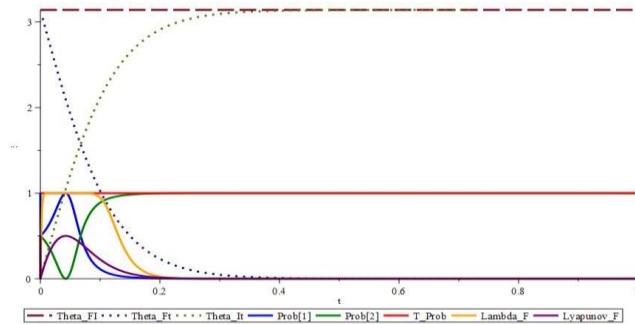
$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t).X(t).\sigma_x$$



شکل 5 انتقال تراز در مدت زمان بسیار کوتاه تر و بطور کامل انجام شده و از پایداری کامل در گذر زمان نیز برخوردار است. تابع لیاپونوف و تابع کنترلر هردو به صفر رسیده اند.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t).X(t).\sigma_x$$

$$(\theta_{initial} = 0, \varphi_{initial} = 0) \xrightarrow{\text{After Pert.}} (\theta_{final} = \pi, \varphi_{final} = 0)$$

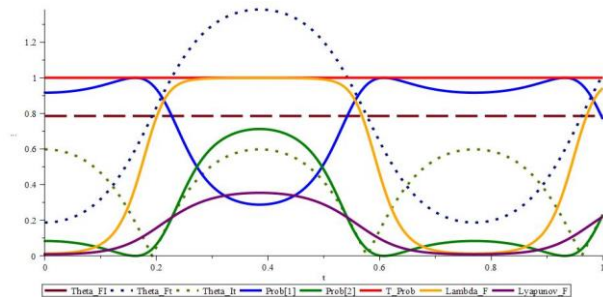


شکل 6 انتقال تراز در مدت زمان بسیار کوتاه تر و بطور کامل انجام شده و از پایداری کامل در گذر زمان برخوردار است. تابع لیاپونوف و تابع کنترلر نیز به صفر رسیده اند.

$$H_{(T)}(t) = \sigma_z + \lambda(t).X(t).\sigma_x$$

$$(\theta_{initial} = 0, \varphi_{initial} = 0) \xrightarrow{\text{After Pert.}} (\theta_{final} = \frac{\pi}{4}, \varphi_{final} = \frac{\pi}{2})$$

$$\theta(t) := \theta_f \cdot \tanh\left(\cos\left(\frac{a}{c} \cdot t\right)\right) ; \quad \varphi(t) := \varphi_f \cdot \tanh\left(\sin\left(\frac{a}{c} \cdot t\right)\right)$$



شکل 7 دو تابع زاویه با اختلاف فاز $\pi/2$ نسبت به یکدیگر، درحال تحول هستند که همین باعث بروز نارسایی در روند انتقال تراز می شود. در همان لحظاتی که اختلاف زاویه ی بین کت اولیه و کت لحظه ای، به صفر می رسد؛ جمعیت تغییر یافته ی ترازها، به شرایط اولیه ی مسأله بازمی گردند. در نتیجه انتقال کامل و پایدار ترازها هیچوقت رخ نخواهد داد.

نتیجه گیری:

برای آنکه سامانه پس از انتقال تراز کامل انجام شده؛ در وضعیت پایدار باقی بماند، لازم است تا شدت میدان خارجی اعمال شده بر سامانه، بصورت دینامیک عمل کند و به نرمی خاموش شود تا مبدا سیستم دوباره به شرایط قبلی بازگردد و اینکه وابستگی خطی میان زوایای سمتی و قطبی، از شروط لازم برای به ثمر رسیدن این پروسه ی انتقال تراز است.

مرجع ها:

[1] Cong, S., 2014. *Control Of Quantum Systems Theory and Methods*. s.l.:s.n.

[2] Zwiebach, P. B., 2008. *MIT Quantum Mechanics Courses*. s.l., MIT University.

استفاده از پردازشگر های کوانتومی در شبکه های عصبی پیچشی با حفظ معماری کلاسیک

اکبری، امیرمحمد¹ مهدیان، محمود²

^{1,2} دانشکده فیزیک دانشگاه تبریز، تبریز

چکیده

معماری های کلاسیک شبکه های عصبی پیچشی به بلوغ مناسبی رسیده و به طور گسترده در زمینه های مختلف مورد استفاده است. محدودیت های نوع پردازش کلاسیک باعث میشوند انجام پردازش های پیچیده و پردازش بر روی داده هایی با عمق بیت بیشتر زمان بر و پرهزینه باشد. استفاده از پردازش کوانتومی می تواند به عنوان راه حلی برای این مشکل در این زمینه نیز مورد استفاده باشد. از این رو ایجاد روشی برای ترکیب پردازش کوانتومی در شبکه های عصبی پیچشی و ارائه این امکان، مورد این پژوهش است. در این پژوهش، پردازشگر های کوانتومی با حفظ معماری آزموده شده شبکه های عصبی پیچشی کلاسیک، بعنوان فیلتر های عمل پیچش در آنها مورد استفاده قرار گرفته اند و با جاروب تمام تصویر توسط هسته هایی کوچکتر و همچنین استفاده از یک پردازشگر یکتا بعنوان چند فیلتر مجزا این کار را برای پردازنده های کوانتومی در دسترس عملی تر میکنند. در نهایت کد های مورد استفاده بصورت فرمورکی پایه ای با پایتون ۳ برای تکرار و تغییر و ادامه تحقیق در این کار بصورت متن باز در اختیار عموم قرار دارد.

واژه های کلیدی: هوش مصنوعی کوانتومی، شبکه های عصبی پیچشی کوانتومی، پردازش کوانتومی، شبکه های عصبی پیچشی، پردازش ترکیبی، هوش مصنوعی.

Using quantum processors in convolutional neural networks while maintaining classical architecture

Akbari, Amirmohammad¹ Mahdian, Mahmoud²

^{1,2} Department of Physics, University of Tabriz, Tabriz

Abstract

Classical architectures of convolutional neural networks have reached a suitable maturity and are widely used in various fields. The limitations of the classical processing type make complex processing and processing on data with bit-depth more time-consuming and expensive. The use of quantum processing can be used as a solution to this problem in this field. Therefore, creating a method for combining quantum processing in convolutional neural networks and providing this possibility is the subject of this research. In this research, quantum processors have been used as convolution filters by keeping the tested architecture of classical convolutional neural networks, and by sweeping the entire image with smaller kernels and also using a single processor as several separate filters, make it more practical for quantum processors. Finally, the codes used as a basic framework With Python 3, it has been made available to the public in open source form for repeating and changing and continuing the research.

Keywords: Quantum artificial intelligence, quantum convolutional neural networks, quantum processing, convolutional neural networks, hybrid processing, artificial intelligence.

مقدمه

پردازش به شکل جاروب تمام پیکسل های تصویر توسط پیچش یک یا چند فیلتر روی آن انجام می گیرد. هسته ها به شکل یک ماتریس از اطلاعات کلاسیک و پیچیدگی عمل ریاضی اعمال شده بر روی داده ها کمینه و محدود به ضرب و جمع است.

شبکه های عصبی پیچشی نوع خاصی از شبکه های عصبی مصنوعی هستند که برای تشخیص الگو های بصری طراحی شده اند و در این نوع شبکه ها محاسبات حداقلی ای روی پیکسل ها انجام میشود. [1]

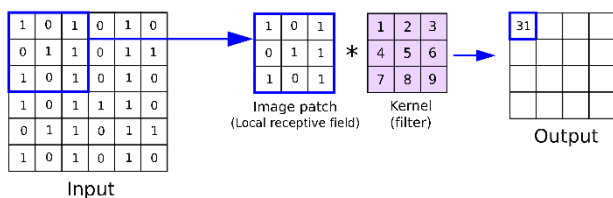
بصورت کلاسیک حفظ و به همان صورت آزموده و توسعه داده می شود، ولی محاسبات بر روی داده ها توسط پردازشگری کوانتومی انجام می شود.

بدین ترتیب امیدواریم از سویی با استفاده از پردازشگرهای کوچکتر کوانتومی که امروزه در دسترسند از مزایای نامبرده این نوع پردازش و از سوی دیگر از تجربیات پیشین در شبکه های عصبی پیچشی کلاسیک بهره برداریم.

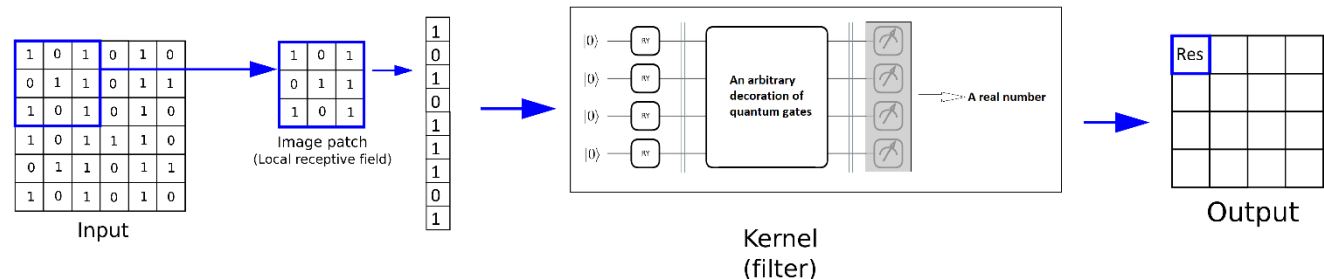
روش های محاسباتی

همانطور که گفته شد هدف در نهایت ایجاد امکان ساخت شبکه های عصبی پیچشی ترکیبی ای است که پردازش پیچش هسته های آن توسط کامپیوتری کوانتومی انجام شود.

درواقع به این علت این روش را ایجاد و اجرا می کنیم که روش های دیگر پردازش تصویر با پردازشگرهای کوانتومی، تمام تصویر را به یکباره در پردازشگر کوانتومی کدگذاری می کنند و این امر امروزه دور از دسترس است، و از سویی در روش کلاسیک هم پردازش به این شکل انجام نمی شود و تصویر توسط پیچش هسته های بسیار کوچکتر از ابعاد کل بر روی آن جاروب می شود. با ترکیب این دو دیدگاه ما از هسته های کوانتومی استفاده می کنیم و تمام تصویر را بمانند نوع کلاسیک با این هسته کوچک جاروب می کنیم.



1. عمل پیچش در نوع کلاسیک که ضرب در یک ماتریس هسته تمام ماتریس داده را جاروب می کند.



2. طرح انجام پیچش با استفاده از پردازش داده در یک پردازشگر کوانتومی

از دیگر کاربرد های شبکه های عصبی پیچشی پردازش سیگنال برای بررسی الگوهای موجود در آن است که عموماً با نوع تک بعدی شبکه های عصبی پیچشی انجام می شود.

هدفی که استفاده از پردازشگرهای کوانتومی در این حوزه را توجیه می کند دستیابی به پردازش کارآمد تر داده هایی با عمق بیت بیشتر و یا داده های کوانتومی است.

بعنوان نمونه، داده های تصاویر پزشکی عمق بیت زیادی دارند، یعنی طیف مقادیر رنگ های آنها بسیار بزرگ است و از این رو انجام فشرده سازی روی آنها به یک استاندارد و ضرورت تبدیل شده. از سوی دیگر با وجود انجام فشرده سازی نیز همچنان حجم و عمق بیت این تصاویر، برای تشخیص صحیحتر، بیشتر از حد معمول است. [2]

استفاده از کیوبیت های پردازشگرهای کوانتومی می تواند امکان پردازش ساده تر داده هایی با عمق بیت بسیار بیشتر را فراهم کند که در این مثال باعث پردازش بهتر تصاویر حجیم تر پزشکی و ایجاد امکان آموزش کاربردی و دقیقتر این تشخیص به ماشین می شود. روش های دیگر که برای تشخیص الگوی تصاویر با استفاده از پردازنده های کوانتومی ارائه شده اند [3] هر پیکسل تصویر را در یک کیوبیت مجزا کد گذاری می کنند که در حال حاضر برای تصاویر واقعی، استفاده، آزمون و خطا و توسعه معماری در این روش ها ناممکن است؛ زیرا برای انجام این روش به پردازشگرهایی با بیش از چند میلیون کیوبیت نیاز داریم که بتوانند تمام تصویر را به یک باره پردازش کنند.

روش پیشنهادی در این مقاله استفاده از معماری شبکه های عصبی مصنوعی کلاسیک، و تنها جایگزینی پردازشگر کوانتومی با پردازشگر کلاسیک برای انجام پیچش است. یعنی معماری شبکه

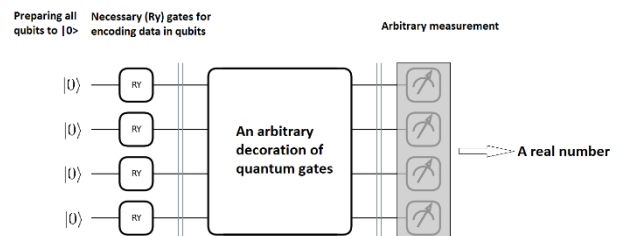
ویژگی های مدار های کوانتومی مورد استفاده و نحوه آموزش کل شبکه به شرح زیر است.

موضوع محاسبه داده با عمق بیت زیاد که به آن اشاره کردیم، در این روش بصورت کدگذاری داده در مقدار حقیقی کیوبیت، یعنی مقدار محور Z کره بلاخ قابل انجام است؛ درواقع اگر درمورد یک کیوبیت داشته باشیم $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ تنها مقادیر حقیقی ضرایب مورد استفاده و درحال تغییرند یا به عبارت دیگر مقادیر φ همواره صفر می مانند و در صفحه xz حرکت می کنیم. کد گذاری به این صورت انجام می شوند که بر روی کیوبیت آماده شده در حالت $|0\rangle$ یک گیت تک کیوبیتی دوران حول محور x ها و به اندازه زاویه α اعمال می کنیم، که زاویه α به این ترتیب بدست می آید:

برای داده x با عمق بیت n :

$$\alpha = x/2^n$$

این گیت چرخش در ابتدای تمام مدارهای متغیر وجود دارد و به این شکل تنها با تغییر مقدار محور Z داده ها با هر عمقی در کیوبیت کد گذاری می شوند؛ درواقع این تنها شرط در طراحی مدار است که تمام کیوبیت ها در ابتدا در حالت $|0\rangle$ آماده شوند و بلافاصله گیت تک کیوبیتی دوران متغیری برای کدگذاری داده داشته باشند. ادامه مدار مورد استفاده در هسته متشکل از آرایشی دلخواه از گیت های کوانتومی است که هرکدام می توانند پارامتری قابل تغییر داشته باشند و به اصطلاح مدار کوانتومی ما متغیر باشد. تکنولوژی و نوع مدار و شکل آن مورد بررسی نیست و هر مداری که در حالت کلی سه بخش کدگذاری، گیت های آموزش پذیر دلخواه و اندازه گیری را داشته باشد و یک خروجی به ما بدهد قابل استفاده است.



2 شمای کلی از سه بخش مذکوری که مدار کوانتومی مورد استفاده بعنوان هسته باید داشته باشد.

روش آموزش شبکه ارائه شده نیز همانند شبکه های عصبی پیچشی کلاسیک بر پایه کاهش تابع هزینه نسبت به هر پارامتر مدار متغیر

مورد استفاده در هسته است. روش های مختلفی قابل پیاده سازی اند که ما در چهارچوب نرم افزاری ارائه شده، بصورت پیشفرض از روشی بر پایه parameter-shift rule [4] برای این کار استفاده کرده ایم. اساس کار به این صورت است که تاثیر تغییرات هر تک پارامتر قابل تغییر در نتیجه تابع هزینه L را از طریق روشی بر پایه parameter-shift rule و با استفاده از تعریف مشتق بدست آورده و با توجه به آن مقدار پیشین پارامتر بهبود می دهیم.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \log_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i + \varepsilon, \dots, \theta_m) - O(\dots, \theta_i - \varepsilon, \dots)}{\varepsilon}$$

در رابطه بالا θ_i مقدار مربوط به هر پارامتر مدار هسته مورد استفاده است (که با توجه به دلخواه بودن مدار هسته، تعداد آنها در مورد هر مدار متفاوت است).

درواقع روش مرسوم بازگشت به عقب و محاسبات ریاضی آن در اینجا مورد انجام نیست و بدست آوردن شیب هر پارامتر بصورت محاسبه عددی و از طریق انتقال مقدار تک به تک آنها و تغییرات تابع هزینه با توجه به این تغییر بدست می آید.

از مزایای این روش این است که بر روی هر مدار کوانتومی متغیری قابل اجراست. و همچنین، چون بهبود پارامتر ها مستقل از نوع آنها و تنها با آزمون اثر ایشان بر روی تابع هزینه است، استفاده همزمان هسته های کلاسیکی و کوانتومی را نیز در این روش ممکن است. یعنی با این روش می توان در کنار هسته های کوانتومی ای که قصد استفاده از آنها را داریم هسته هایی کلاسیک نیز به شبکه اضافه کنیم و از توان ترکیبی کوانتوم-کلاسیکی استفاده کنیم.

و از معایب آن سرعت پایین و تعدد تکرار در هر مرحله آموزش است. همچنین می دانیم استفاده از تعریف مشتق نیز الزاما روش عددی کاملاً مناسبی برای بدست آوردن شیب تابع هزینه نسبت به پارامتر نیست. اما بدلیل بنیادی بودن و قابل درک بودن بعنوان روش پیشفرض استفاده شده است. روش های دیگر محاسبه عددی شیب تابع نسبت به پارامتر نیز در کد منبع ارائه شده قابل پیاده سازی هستند.

در نهایت روش فرض شده و چهارچوب نرم افزاری نوشته شده بر طبق آن، در شبکه ای با تنها یک لایه کانولوشنی بر روی مجموعه داده هایی بسیار ساده که در شکل 4 آنرا مشاهده می کنید با هسته

ایده مذکور در چهارچوبی نرم افزاری پیاده سازی شد و کد منبع آن با اجازه نامه gpl3 در نشانی [مرجع \[5\]](#) قابل دسترسی است. این کد منبع در نمونه‌ای که ذکر شد آزموده شده و دقتی 79 درصدی از آن حاصل شد که کد آن ایضا در منبع ذکر شده [\[5\]](#) قابل دسترسی است. چهارچوب نرم افزاری حاصل از این پژوهش امکان گسترش این روش و استفاده از آن جهت ساخت شبکه های عصبی پیچشی ترکیبی با استفاده از مدارهای کوانتومی دلخواه و آموزش آن بر روی مجموعه داده های مختلف و در نتیجه بهره مندی از ویژگی های پردازش کوانتومی را برای ما ممکن می‌کند.

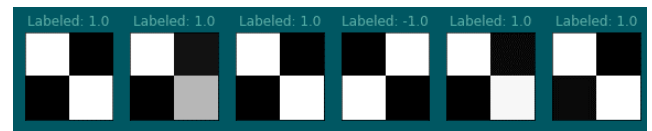
در آینده با توسعه روش هایی کارآمدتر از روش مورد استفاده ما برای بدست آوردن شیب تابع هزینه نسبت به هر پارامتر و یا توسعه روش های محاسبه عددی مناسب تر برای آن می‌توان این چهارچوب نرم افزاری را توسعه داد و آنرا بهینه تر کرد.

از سوی دیگر تبدیل شبکه های کلاسیک موجود با استفاده از این روش به شبکه های ترکیبی کلاسیک-کوانتومی و یافتن هسته های کوانتومی مناسب و مقایسه توان پردازشی انواع این شبکه ها و البته بررسی تاثیر ویژگی های کوانتومی مدارهای مورد استفاده در هسته بر الگویی که آن هسته استخراج میکند می‌تواند هدف پژوهشایی در آینده باشد.

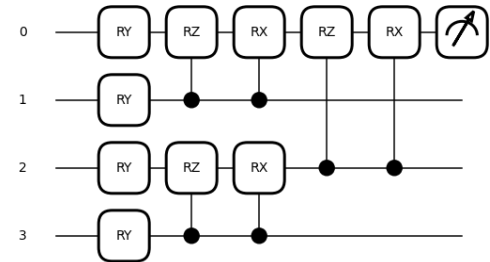
مراجع

- [1] I. G. e. al., "Convolutional Networks," in *Deep Learning*, The MIT Press, 2016, pp. 330-372.
- [2] N. N. N. e. al., "RNS-Based FPGA Accelerators for High-Quality 3D Medical Image Wavelet Processing Using Scaled Filter Coefficients," *IEEE access*, vol. 10, pp. 19215-19231, 2022.
- [3] I. Cong and et al., "Quantum Convolutional Neural Networks," *Nature Physics*, vol. 15, pp. 1273-1278, 2019.
- [4] K. Mitarai and et al., "Quantum Circuit Learning," *Phys. Rev. A* 98, 032309, pp. -, 2018.
- [5] ا. اکبری, "مخزن کد چهارچوب نرم افزاری مربوطه," 2023. [Online]. Available: <https://github.com/amirm343/kiwi>.

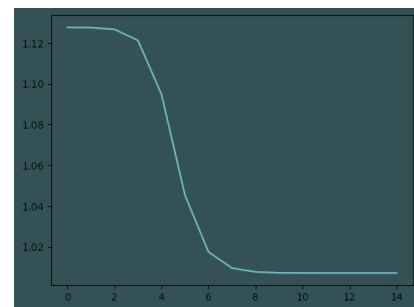
ساده زیر (شکل 5) آزموده شد و دقتی ۷۹ درصدی را ارائه کرد! لازم به ذکر است آزمون در یک شبیه ساز کیوبیتی اجرا شده است.



3 نمونه هایی از دیتابیس ساده‌ای که برای آزمون روش استفاده شده اند.



4 هسته کوانتومی‌ای که در آزمون استفاده شده. دقت داریم که ادعای روش بر روی هسته مورد استفاده و ویژگی های کوانتومی آن نیست و از این جهت از بیان این ویژگی ها صرف نظر کرده ایم.



5 کسیر کاهش مقدار تابع هزینه بر حسب تکرار های اعمال شده. تمام این داده ها و تصاویر و نمودار ها در مخزن اصلی چهارچوب نرم افزاری قابل دسترسی است.

امید است در آینده با شبکه و هسته کوانتومی مناسبتر این دقت افزایش یابد و دقت بهتری بر روی دیتاست های پیچیده تر دیگر نیز حاصل شود.

نتیجه گیری

با ترکیب روش کلاسیک شبکه های عصبی پیچشی و روش های مرسوم پردازش تصویر کوانتومی [\[3\]](#) ایده مدنظر جهت احقاق امکان استفاده از پردازشگر های کوانتومی در دسترس که کیوبیت های کمی دارند و ایجاد شبکه های عصبی پیچشی ترکیبی، استفاده از پردازشگر هایی کوانتومی بجای هسته های معمول کلاسیک در همان معماری شبکه های عصبی پیچشی کلاسیکی بود. بدین ترتیب ما امکان استفاده از ویژگی های پردازش کوانتومی در حوزه پردازش تصویر را ایجاد می‌کنیم.

پذیرفتاری بار و اسپین در حالت‌های هلیکال یک بعدی با برهم کنش ها و میدان زمین

بخشی پور، زینب^{۱*}؛ حسینی، میروحید^۱

^۱ دانشکده فیزیک دانشگاه زنجان، زنجان

چکیده

ما توابع پاسخ اسپینی و بار را در سیم کوانتومی هلیکال در حضور برهم کنش ها و میدان تبدلی زمین بررسی می کنیم. با ارزیابی در رژیم های گپ مؤثر و مرزی- غیرمؤثر، ما درمی یابیم که میدان زمین علاوه بر ایجاد گپ در حالت‌های هلیکال، حالت‌های اسپینی را نیز آمیخته میکند. این رویداد به همراه برهم کنش ها، توابع همبستگی موج چگالی بار و اسپین را تحت تأثیر قرار می دهد. در این کار، ابزار محاسباتی نظیر تکنیک بوزونیزیشن و آنالیز گروه بازبهنجارش استفاده خواهند شد.

واژه‌های کلیدی: سیم کوانتومی هلیکال- میدان تبدلی زمین- موج چگالی اسپین- موج چگالی بار- بوزونش- گروه باز بهنجارش.

The charge and spin susceptibility of one-dimensional helical states in the presence of the interactions and Zeeman field

¹Bakhshipour, Zeinab^{1*}; Hosseini, Mir vahid¹

¹ Department of Physics, University of Zanjan, Zanjan

Abstract

We study the spin and charge response functions of the helical quantum wire in the presence of the interactions and Zeeman exchange field. Calculating in the relevant and marginal-irrelevant regimes, we find that the Zeeman field gaps out the helical states and mixes the spin states. This event along with the interactions, affects the correlation functions of the charge density wave and spin density wave. The computational tools we employ include Bosonization technique and renormalization group analysis.

Keywords: helical quantum wire- Zeeman exchange field- spin density wave- charge density wave- Bosonization- renormalization group

PACS No.

مقدمه

خیزهای بار و اسپین بررسی کرد. یکی از بارزترین خصوصیات مایع لاتینجر توموناگا **TLL** این است که همه توابع همبستگی به صورت قانون توانی با نمای غیرجهانی رفتار می کنند. این نماها به پارامتر و سرعت لاتینجر **K** و **v** و بنابراین به برهم کنش ها وابسته هستند. در این کار، ما همبستگی موج چگالی بار و اسپین را در حالت‌های لبه هلیکال در حضور میدان تبدلی زمین بررسی میکنیم. در طی این فرآیند، ما همبستگی ها را در رژیم های جفت شدگی قوی و ضعیف تحقیق میکنیم و تصحیحاتی که جمله شکاف به این همبستگی ها وارد می کند را ارزیابی میکنیم. در رژیم جفت شدگی ضعیف ما بخش های نمایی (مؤلفه های Y, Z, YZ, ZY موج چگالی اسپین) و غیرنمایی (موج چگالی بار و مؤلفه اسپین- X) را به دلیل تفاوت در نوع محاسبات، تفکیک می کنیم. برای جمله

در سال های اخیر، مایع لاتینجر هلیکال و شبه هلیکال، دسته خاصی از مایع های فرمی که تراورد فیلترشده ی اسپینی را نمایش می دهند، توجهات بسیاری را جلب نمودند. مایع لاتینجر هلیکال برای نمونه، لبه های عایق های توپولوژی دو بعدی را توصیف می کند.^{۱,۲} نمونه های شبه هلیکال برای مثال می توانند در یک سیم کوانتومی با برهم کنش اسپین مدار راشبا که در معرض یک میدان مغناطیسی قرار میگیرد، ایجاد شوند.^۳ یک علامت تجربی مناسب برای حالت هلیکال بوسیله رسانندگی الکتریکی در سیم فراهم می شود بطوریکه وقتی سیم هلیکال می شود، رسانندگی از $2e^2/h$ به $1e^2/h$ افت می کند.^۴ در کنار اینها می توان فیزیک بار و اسپین سیم هلیکال را بوسیله اندازه گیری های پذیرفتاری یا افت

همبستگی های موج چگالی بار CDW و اسپین SDW

همبستگی های غیر اختلالی بار و اسپین به ترتیب با استفاده از عملگر بار کل و عملگر چگالی اسپینی در سه راستای X, Y, Z با معادلات زیر بدست می آیند

$$O_{\rho}(x) = \sum_{i,i'} \psi_i^{\dagger}(x) \psi_{i'}'(x) \quad (4)$$

$$O_{\sigma}^a(x) = \sum_{i,i'} \psi_i^{\dagger}(x) \sigma^a \psi_{i'}'(x) \quad , a = x, y, z \quad (5)$$

بطوریکه $\psi_{i,i'}'(x)$ عملگرهای میدان تک ذره ای با کایرالیته $i, i' = R, L$ و σ^a ماتریس های پائولی هستند. ما با استفاده از تکنیک های استاندارد بوزونش، شکل بوزونایز همبستگی های فضا-زمانی را در $r' = 0$ به صورت زیر بدست می آوریم

$$R_{CDW}(r, r') = -\frac{1}{4\pi^2} K F_2(r) \quad (6)$$

$$R_{SDW}^{xx}(r, r') = -\frac{1}{4\pi^2 K} F_2(r) \quad (7)$$

$$(8)$$

$$R_{SDW}^{yy}(r, r') = R_{SDW}^{zz}(r, r') = \frac{\cos(\alpha x)}{2(\pi a_0)^2} e^{-2KF_1(r)}$$

$$R_{SDW}^{yz}(r, r') = -R_{SDW}^{zy}(r, r') = -\frac{\sin(\alpha x)}{2(\pi a_0)^2} e^{-2KF_1(r)} \quad (9)$$

$$F_2(r) = \frac{(v\tau \text{sign}(\tau) + a_0)^2 - x^2}{2((v\tau \text{sign}(\tau) + a_0)^2 + x^2)^2} \quad \text{بطوریکه}$$

$$r = (x, \tau) \quad F_1(r) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{(v\tau \text{sign}(\tau) + a_0)^2 + x^2}{a_0^2} \right]$$

همبستگی های آمیخته ی XY و XZ سهمی در این ملاحظه ندارند. در مفهوم اختلال، ترم پراکندگی برگشتی تصحیحاتی را به همبستگی ها وارد میکند که در زیر ارزیابی می شوند.

الف- تصحیحات در رژیم جفت شدگی قوی: بر طبق آنالیز

RG عامل میدان تبدالی زمین در $K < 2$ مؤثر می شود و به علاوه ی منظم کردن میدان $\Phi(r)$ ، در نظم اسپینی هلیکال اختلال ایجاد می کند. در مفهوم شکاف مؤثر، فلوی **RG** (معادله ی (3))،

تا یک مقیاس طول مرتبط با شکاف قابل تغییر $\Delta(l)$ میدان $\Phi(r)$ با مقدار قطع فاصله ی کوتاه قابل تغییر معادل است. این مرز انتهای اعتبار معادلات فلو است. با استفاده از بسط جمله

های نمایی، از تصحیحات لگاریتمی و برای دیگری از روش بسط اختلالی مستقیم استفاده می کنیم.

مدل و روشهای محاسباتی

برای بررسی پاسخ اسپین و بار در حالت های هلیکال، ما با مدلسازی یک عایق توپولوژی دو بعدی با حالت لبه هلیکال یک بعدی در حضور میدان تبدالی زمین شروع می کنیم. در این سیستم حالت های لبه و بنابراین راستای حرکت الکترون ها در امتداد محور X است. همچنین محور کوانتش اسپینی اسپین های قفل شده به تکانه در همان راستای X می باشد. دو مد اسپینی حرکت کننده در جهت های مقابل هم، بوسیله تقارن وارونی زمان محافظت می شوند. اضافه شدن یک میدان مغناطیسی عمود بر سطح، یک جمله پراکندگی برگشتی تولید و در نقاط مرزی حالت های لبه رسانا به مقتضی شکسته شدن تقارن وارونی زمان، شکاف ایجاد می کند. با استفاده از تکنیک بوزونش⁵ ما همیلتونی برهم کنشی شکاف دار را در پایه های عملگرهای فرمیونی بدست می آوریم

$$H = \frac{v}{2} \left[\frac{1}{K} (\partial_x \Phi)^2 + K (\partial_x \Theta)^2 \right] + \frac{\tilde{\Delta}}{2\pi a_0} e^{i\sqrt{4\pi}\Phi} + h.c. \quad (1)$$

بطوریکه $\partial_x \Theta = \partial_x (\theta_R - \theta_L)$ و $\partial_x \Phi = \partial_x (\phi_R - \phi_L)$ به ترتیب افت و خیزهای چگالی و عملگر جریان با میدان های بوزونی کایرال $\phi_{R,L}$ و $\theta_{R,L}$ هستند. $\tilde{\Delta}$ ضریب شکاف بازبهنجار شده را نشان می دهد. برای درک نقش اختلال ها، ما آنالیز گروه بازبهنجارش⁵ **RG** را به کار میگیریم. در این روش، ما میتوانیم به خصوصیات انرژی پایین حالت های هلیکال شکاف دار در چارچوب نظریه میدان دست یابیم و معادلات فلو را که رژیم های با قدرت تأثیر متفاوت شکاف را مشخص می کنند، استخراج کنیم.

$$\frac{dK(l)}{dl} = -\frac{\pi^2}{4} y^2(l) K^2(l) J_0(\alpha(l) a_0) \quad (2)$$

$$\frac{dy(l)}{dl} = (2 - K(l)) y(l) \quad (3)$$

که $y(l) = \frac{\sqrt{2}\Delta(l)a_0}{v}$ ثابت بدون بعد شکاف می باشد. معادله

(3) بیان می کند که برای $K < 2$ عملگر شکاف مؤثر می شود که این تولید شکاف خواهد کرد.

رسیم. با جایگذاری این پارامتر در فلوی (2) و (3) و انتگرالگیری، میتوانیم برای $y < y_{int}$ عبارت های زیر را بدست آوریم

$$y_{int}(l) = -\frac{A}{8 \tanh[Al + \text{ArcTanh}[-\frac{A}{8y_{int}(0)}]]} \quad (14)$$

$$y(l) = \frac{A}{\sinh[Al + \text{ArcTanh}[\frac{A}{8y_{int}(0)}]]} \quad (15)$$

ما دو مورد کلی را بررسی می کنیم. اول حالتی را که در آن سیستم روی خط جداکننده دو رژیم قرار می گیرد، بطوریکه $y = 8y_{int}$ ، که مؤلفه ی y موج چگالی اسپین به شکل زیر حاصل می شود

$$L_1^{separatrix} = \left(\frac{a_0}{r}\right)^{4+16y_{int}} y_{int}^{-4} \log^4\left(\frac{a_0}{r}\right) \quad (16)$$

مؤلفه ی Z شبیه نتیجه y است. مؤلفه های آمیخته ی $YZ = -ZY$ به استثنای تعدادی ضرایب، مانند مؤلفه y بدست می آیند. حالا اگر این فرض که سیستم روی خط جداکننده باشد را برداریم و مورد کلی را بررسی کنیم، ما با حل معادلات (14) و (15) درمی یابیم

$$L_1^{unseparatrix} = \left(\cosh[Al_r] - \frac{8y_{int} \sinh[Al_r]}{A} \right)^{-4}$$

اگر $Al_r \ll 1$ ، با بسط $L_1^{unseparatrix}$ ما به نتایج مربوط به خط جدایی با $A=0$ می رسیم. اگر $Al_r \gg 1$ نتیجه زیر بدست می آید

$$L_1^{unseparatrix} = \left(\frac{a_0}{r}\right)^{16y_{int}+4+4A} \left(1 - \frac{8y_{int}}{A}\right)^{-4}$$

ج- **تصحیحات همبستگی های غیرنمایی:** در این بخش، ما توابع همبستگی غیرنمایی را با بسط عملگر غیرمؤثر ارزیابی می نمایم و تصحیحات آنها را با اعمال نظریه ی اختلال تا مرتبه ی دوم، بدست می آوریم. بدین جهت، ما توابع همبستگی غیراختلالی فضا-زمان را به فضای وارون تکانه-فرکانس تبدیل میکنیم. سپس بسط اختلالی را نیز با رویه ی تبدیل فوریه پیش میبریم و در انتها عباراتی برای تصحیحات بدست می آوریم. وابستگی فرکانس همبستگی های غیراختلالی **CDW** و **SDW^{xx}** خواهند بود

$$R_{CDW}(\omega) = -\frac{i}{4} K \omega e^{-\frac{\omega a_0}{v}} \text{Sign}(\omega) \quad (19)$$

پراکندگی برگشتی تا مرتبه دوم، همیلتونی انرژی پایین در انتهای فلو حاصل می شود.

$$H = \frac{v^*}{2} \left[\frac{1}{K^*} (\partial_x \Phi)^2 + K^* (\partial_x \Theta)^2 \right] + \frac{2\Delta}{a_0} \Phi^2 + \frac{2\Delta k_F x}{\sqrt{\pi} a_0} (2 - v_F \frac{K^*}{v^*}) \Phi \quad (10)$$

که v^* و K^* مقادیر جفت شدگی قوی سرعت و پارامتر لاتینجر می باشند، بطوریکه $v(l^*) = \Delta(l^*) a_0^*$. با عبارت کش ساخته شده از این همیلتونی و تشکیل یک تابع پارش گوسی، ما به تصحیحات در حد $r \sim a_0$ و $\Delta \gg 1$ دست می یابیم.

$$R_{SDW}^{str,xx}(r, r') = \frac{1}{4\pi^2 K^*} F_2^*(r) \quad (11)$$

$$R_{SDW}^{str,yy}(r, r') = \frac{\cos(\alpha a_0)}{2\pi^2 K^*} \quad (12)$$

فاز **CDW** محو می شود و فاز **SDW^{zz}** به صورت نمایی صفر میشود. دلیل چنین رویدادی این است که میدان Φ منظم است، بنابراین عملگر $\sin(\sqrt{4\pi}\Phi(r) + 2k_F x) = 0$. یک مقدار ثابت برای **SDW^{yy}** به این معنی است که این فاز در شکاف قوی پایدار خواهد بود به نحوی که آن به سمت یک مقدار ثابت میل می کند.

ب- **تصحیحات لگاریتمی در رژیم جفت شدگی ضعیف:** وقتی عملگرها در مرز مؤثر بودن قرار میگیرند، تصحیحات لگاریتمی برای توابع همبستگی ظاهر می شوند. در این روش، ما معادلات بازهنجارش را برای خود توابع همبستگی می نویسیم. با استفاده از $K = 2 - 8y_{int}$ ، ما معادلات **RG** را برحسب y_{int} بازنویسی میکنیم و همبستگی ها را در اختلال محاسبه می نمایم. سپس بوسیله یک تغییر جزئی در مقدار قطع فاصله از a_0 به $a_0(l) = a_0 e^l$ و بعضی محاسبات دیگر، توابع همبستگی تا پایین ترین مرتبه ی غیربدیهی در ثابت جفت شدگی بدست می آیند.

$$R_{SDW}^{log,yy}(r, r') = \frac{1}{2(\pi a_0)^2} \cos(\alpha x) \left(\frac{a_0}{r}\right)^{4+16y_{int}} L_1 \quad (13)$$

بطوریکه $L_1 = \exp[-32 \int_0^l y_{int}(l) dl]$. با استفاده از معادلات فلو، ما به یک ثابت حرکت به صورت $A^2 = 64y_{int}^2 - y^2$ می

ما دریافتیم که همبستگی های بار و اسپین در راستای X در حالت غیراختلالی رفتاری شبیه به هم دارند، که به عنوان یک مایع لاتینجر غیرعادی در نظر گرفته می شود. چنین رفتاری به مقتضی جفت شدگی بار و اسپین-X در رژیم هلیکال است. در عوض، ما یک رفتار قانون توانی وابسته به برهم کنش ها را در مؤلفه های yy , zz و $yz=-zy$ می بینیم که منشأ آن حضور هلیسیتی در راستای X می باشد. این به طور کوانتومی به حضور آمیخته ای از سمت گیری های بالا و پایین اسپینی در راستای Y و Z بدون هیچ ترجیحی خواهد شد. به صورت یک نتیجه، در این دو راستا، ما با یک مایع لاتینجر عادی مواجه هستیم. حالا، وقتی جمله شکاف مؤثر روشن می شود، اسپین ها شروع به چرخش در راستای Y می کنند و حالت های هلیکال آمیخته، توان کمتری برای جفت کردن بار و اسپین در راستای X خواهند داشت. بنابراین فاز موج چگالی اسپین در راستای Y بر سایر فازها چیره می شود و با یک مقدار ثابت پایدار می گردد. از طرف دیگر، نظم میدان بوزونی Φ به جهت مؤثر بودن شکاف، تغییرات فضا-زمانی آن را فریز می کند و این رویداد، فاز موج چگالی بار را محو می کند. همچنین فاز موج چگالی اسپین-X به وجود هلیکال خود اما متأثر از شکاف ادامه می دهد. به مقتضی نظم میدان Φ ، فاز موج چگالی اسپین-Z و آمیخته های آن رو به زوال می روند. در فصل مشترک دو رژیم، تصحیح لگاریتمی، فاز SDW^{yy} را به علاوه افزایش بخش قانون توانی آن، ارتقا می دهد. آن به این معنی است که اگر عملگر شکاف به جای اینکه به صفر بازبهنجار شود، قادر به ایجاد نظم در همیلتونی باشد، سیستم بخاطر می آورد که می تواند فازهای $SDW^{yy,zz,yz,zy}$ را منظم کند. در مقابل، وقتی شکاف غیرمؤثر می شود، فازهای SDW^{yy} و SDW^{zz} بدون هیچ ترجیحی همان رفتار مایع لاتینجر عادی را توصیف می کنند. درحالیکه فاز بار و اسپین-X یک میرایی مایع لاتینجر غیرعادی را تجربه می کنند که با افزایش K، تصحیحات روی حالت هلیکال، ناچیزتر می شوند.

مرجع ها

- [1] M. Koning, H. Buhmann, L. w. Molenkamp, T. Hughes, C.-X. Liu, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *J. Phys. Soc. Japan* **77**, 031007 (2008).
- [2] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010)
- [3] P. Streda and P. Seba, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 256601 (2003)

$$R_{SDW}^{xx}(\omega) = -\frac{i}{4K} \omega e^{\frac{\omega a_0}{v}} \text{Sign}(\omega) \quad (20)$$

ملاحظه می شود که آنها یک وابستگی قانون توانی با یک نمای مستقل از برهم کنش ها روی فرکانس دارند. اینجا فقط ضرایب به پارامتر لاتینجر K بستگی دارند. وقتی عملگر شکاف غیرمؤثر به حساب آورده می شود، یک سهمی تا مرتبه ی دوم در ضریب شکاف، وارد خواهد شد. ملاحظه شد که با افزایش K، تصحیحات کم اهمیت تر می شوند. جهت نشان دادن این نتیجه، ما متوسط حاصلضرب ترتیب یافته ی زمانی عملگرهایی نظیر

$$c = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \left\langle T_{\tau} \partial_x \Phi(r) \partial_x \Phi(0) e^{i\sqrt{4\pi\varepsilon\Phi(r_3)}_3} e^{-i\sqrt{4\pi\varepsilon\Phi(r_4)}_4} \right\rangle_{H_0} \quad (21)$$

را ارزیابی می کنیم. آنگاه ما بدست می آوریم

$$R_{CDW}(r) = \frac{y^2(l)}{4\pi^2 a_0^4} \iint d^2 r_3 d^2 r_4 e^{-2\pi \langle T_{\tau} [\Phi(r_3) - \Phi(r_4)]^2 \rangle} \langle T_{\tau} [\partial_x \Phi(r) \Phi(r_3)] \rangle \langle T_{\tau} [\partial_x \Phi(0) \Phi(r_3) - \partial_x \Phi(0) \Phi(r_4)] \rangle \times \cos(\alpha(x_3 - x_4)) \quad (22)$$

$$R_{SDW}^{xx}(r) = \frac{y^2(l)}{4\pi^2 a_0^4} \iint d^2 r_3 d^2 r_4 e^{-2\pi \langle T_{\tau} [\Phi(r_3) - \Phi(r_4)]^2 \rangle} \langle T_{\tau} [\partial_x \Theta(r) \Phi(r_3)] \rangle \langle T_{\tau} [\partial_x \Theta(0) \Phi(r_3) - \partial_x \Theta(0) \Phi(r_4)] \rangle \times \cos(\alpha(x_3 - x_4)) \quad (23)$$

این همبستگی ها شامل بخش های هارتری و فوک هستند. بر طبق ارزیابی های ما، جمله هارتری سهمی در تصحیحات قانون توانی برای $K > 2$ ندارد. اما، جمله فوک یک نتیجه جالب توجه دارد. برای CDW وقتی $K > 2.5$ ، عبارت تصحیح در مقایسه با ω در $\omega \rightarrow 0$ مغلوب میشود. درحالیکه تصحیح SDW^{xx} یک سهم مغلوب را در $K > 2$ به جمله غیراختلالی وارد می کند. بنابراین، رفتار همبستگی ها در حضور شکاف غیرمؤثر به شکل زیر خواهد بود

$$R_{CDW}(\omega) \approx \omega + \omega^{2(K-2)} + O(\omega^{2(K-2)}) \quad (24)$$

$$R_{SDW}^{xx}(\omega) \approx \omega + \omega^{2K-3} + O(\omega^{2K-3}) \quad (25)$$

تصحیح مؤلفه های آمیخته ی XY و XZ صفر است.

نتیجه گیری

- [4] C. H. L. Quay, T. L. Hughes, J. A. Sulpizio, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, K. W. West, D. Goldhaber-Gordon, and R. de Picciotto, *Nat. Phys.* **6**, 336 (2010)
- [5] T. Giamarchi, *Quantum physics in one dimension*. Clarendon press; 2003 Dec 18.

*E-Mail: Z.Bakhshipour@gmail.com

یک روش خوشه‌بندی K-means کوانتومی بهبود یافته

براتعلی‌پور، الهه^۱؛ کبودیان، سیدجهانشاه^۲

^۱دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه رازی، کرمانشاه

^۲دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه رازی، کرمانشاه

چکیده

امروزه محاسبات کوانتومی به عنوان یک پارادایم امیدوارکننده برای انجام محاسبات سریع مطرح شده است و یادگیری ماشین کوانتومی، حوزه جدیدی از تحقیقات در زمینه الگوریتم‌های بانظارت و بی‌نظارت است. در این مقاله، از یک روش چندمرحله‌ای برای کدگذاری کوانتومی و تبدیل دادگان کلاسیک به حالت‌های کوانتومی استفاده شده است. مراحل تبدیل عبارتند از کاهش بعد با تکنیک PCA، هنجارسازی با دو روش مختلف، محدودسازی با شش تابع مختلف و در نهایت استفاده از گیت چرخش کوانتومی. نتایج آزمایش‌ها بر روی دو مجموعه از دادگان خوشه‌بندی UCI نشان می‌دهد که الگوریتم خوشه‌بندی پیشنهادی از نقطه نظر اکثر معیارهای اعتبارسنجی خوشه‌بندی بهتر از الگوریتم کلاسیک K-means و همچنین بهتر از الگوریتم‌های خوشه‌بندی کوانتومی دیگر است.

واژه‌های کلیدی: محاسبات کوانتومی، یادگیری ماشین کوانتومی، الگوریتم‌های بانظارت و بدون نظارت، الگوریتم K-means.

An Improved Quantum K-means Clustering

Elahe, Baratalipour¹; Kabudian, S. Jahanshah²

¹ Department of Electrical and Computer Engineering, Razi University, Kermanshah, [IRAN](#)

² Department of Electrical and Computer Engineering, Razi University, Kermanshah, [IRAN](#)

Abstract

Quantum computing has emerged as a promising paradigm for performing fast computations, and quantum machine learning is a new area of research in supervised and unsupervised algorithmic approaches. In this article, a multi-stage method is employed for quantum encoding and transforming classical data into quantum states. The transformation stages include dimensionality reduction using PCA technique, normalization using two different methods, bounding using six different functions, and finally, the utilization of quantum rotation gates. Experimental results on two sets of UCI clustering datasets demonstrate that the proposed clustering algorithm outperforms the classical K-means algorithm and other quantum clustering algorithms in terms of most cluster validity metrics.

Keywords: Quantum computing, quantum machine learning, supervised and unsupervised algorithms, K-means algorithm.

PACS No.

مقدمه

اساس ویژگی‌های آنها است. هدف از خوشه‌بندی شناسایی گروه‌های درون یک مجموعه داده است، جایی که اشیاء درون یک خوشه بیشتر به یکدیگر شبیه هستند تا اشیاء در خوشه‌های دیگر

خوشه‌بندی یک تکنیک محبوب در یادگیری ماشین و تجزیه و تحلیل داده است که شامل گروه‌بندی اشیاء یا نقاط داده مشابه بر

[1]. خوشه‌بندی یک رویکرد یادگیری بی نظارت است، به این معنی که به داده‌های برچسب‌دار نیاز ندارد. در عوض، الگوریتم‌های خوشه‌بندی به دنبال شناسایی الگوها و ساختار درون خود داده‌ها هستند [2].

میان الگوریتم‌های خوشه‌بندی محبوب، الگوریتم K-means، یکی از رایج‌ترین الگوریتم‌های خوشه‌بندی در یادگیری ماشین است، زیرا درک و پیاده‌سازی آن نسبتاً آسان است و برای بسیاری از انواع داده‌ها به خوبی کار می‌کند. خوشه‌بندی K-means اغلب زمانی استفاده می‌شود که تعداد خوشه‌ها یا از قبل شناخته شده است یا می‌توان از داده‌ها تخمین زد [3]. الگوریتم K-means را می‌توان به دو صورت کلاسیک و کوانتومی پیاده‌سازی کرد. در K-means کلاسیک، داده‌ها به شکل کلاسیک نمایش داده می‌شوند و الگوریتم به طور مکرر نقاط داده را بر اساس میزان شباهت آن‌ها به مراکز خوشه‌ها، به خوشه‌ی نزدیکتر اختصاص می‌دهد. یکی از محدودیت‌های K-means کلاسیک پیچیدگی محاسباتی آن است که می‌تواند برای مجموعه داده‌های بزرگ بازدارنده باشد. همچنین این الگوریتم ممکن است برای تجزیه و تحلیل داده‌ها با الگوها و ساختارهای پیچیده مناسب نباشد [4]. الگوریتم K-means کوانتومی یک الگوریتم یادگیری ماشین کوانتومی با هدف رفع محدودیت‌های نسخه‌ی کلاسیک است که خوشه‌بندی را روی داده‌های کوانتومی با استفاده از عملیات کوانتومی انجام می‌دهد.

در K-means کوانتومی داده‌ها به صورت کوانتومی نمایش داده می‌شوند و خوشه‌بندی با استفاده از گیت‌های کوانتومی انجام می‌شود. این الگوریتم نیز به طور مکرر نقاط داده را بر اساس شباهت آن‌ها به مجموعه‌ای از مرکز خوشه‌ها، به خوشه‌ها اختصاص می‌دهد. در خوشه‌بندی کوانتومی، در اولین مرحله نقاط داده کلاسیک به حالات کوانتومی تبدیل می‌شوند [5] و سپس در مرحله‌ی بعد، خوشه‌بندی روی نقاط داده کوانتومی انجام می‌شود. در این روش از احتمالات کیوبیت‌ها برای نشان دادن فاصله بین دو حالت استفاده می‌شود. لوید و همکاران [6] برای تبدیل داده‌ی کلاسیک به کوانتومی، بردارهای N بعدی کلاسیک را به مقدار نرم آن‌ها تقسیم کرده‌اند. سپس از پیوند یک کیوبیت کمکی به داده‌های کوانتومی برای ایجاد حالت درهم‌تنیده استفاده کرده‌اند. در نهایت

از مدار تست جابجایی برای بررسی میزان تفاوت دو حالت کوانتومی بهره برده‌اند. در روش آناگولوم [7]، برای تخمین فازهای کوانتومی، هر بعد از بردار کلاسیک دو بعدی بطور جداگانه یک واحد افزایش و در $\frac{\pi}{2}$ ضرب شده‌اند. سپس گیت U برای تولید حالت کوانتومی همراه با حالت کمکی $|0\rangle$ مورد استفاده قرار گرفته است. در نهایت محاسبه‌ی فاصله با استفاده از مدار تست جابجایی و اندازه‌گیری احتمال $|1\rangle$ انجام شده است. ایده‌ی تولید داده‌ی کوانتومی ارائه شده توسط کاویتا و همکاران [8]، مشابه روش آناگولوم بوده است که تفاوت آن‌ها در محاسبه‌ی فاصله میان دو حالت کوانتومی است. در این طرح از فرمول 1 برای محاسبه‌ی فاصله استفاده شده است.

$$Dis = d^2 r_{\max}^4 \quad 2Pr |0\rangle - 1 \quad (1)$$

که d تعداد نقاط داده غیرصفر ورودی و $r_{\max}$ حداکثر محدودیت تمام ویژگی‌ها در داده‌ها است.

در این مقاله، ابتدا، داده‌ها با دو روش Z-score و MED-MAD هنجارسازی می‌شوند. سپس، برای آماده‌سازی حالات کوانتومی توابع سیگموئید دوقطبی ارائه می‌شود. در مرحله سوم، رویکرد مدار کوانتومی تست جابجایی برای محاسبه فاصله بین مرکز و نقاط داده استفاده می‌شود. در نهایت، اثربخشی K-means کوانتومی پیشنهادی با سایر روش‌ها و خوشه‌بندی کلاسیک بصورت نتایج تجربی نشان داده می‌شود.

متدولوژی مقاله

در این مقاله از روش چندمرحله‌ای زیر برای کدگذاری حالت کوانتومی استفاده می‌شود و این روش کدگذاری سپس در الگوریتم خوشه‌بندی K-means به کار گرفته می‌شود.

استفاده از الگوریتم کاهش بُعد و انتخاب دو بُعد مهم: این مرحله شامل استفاده از الگوریتم تحلیل مؤلفه اساسی (PCA) برای کاهش ابعاد داده کلاسیک است.

هنجارسازی نوع Z-score یا MED-MAD: مرحله دوم شامل اجرای هنجارسازی روی داده‌ی دو بُعدی است تا اطمینان حاصل شود که همه متغیرها در یک مقیاس هستند. روش‌های مختلفی برای هنجارسازی وجود دارد که دو روش متداول عبارتند از Z-score و

داده کلاسیک اول (x) حالت کوانتومی Φ و متناظر با داده کلاسیک دوم (μ) حالت کوانتومی Ψ را تولید می‌کند. بعد از این باید فاصله بین دو حالت کوانتومی Φ و Ψ را محاسبه نماییم.

محاسبه فاصله: برای محاسبه فاصله بین دو حالت کوانتومی، می‌توان از مدار تست جابجایی به کمک یک کیوبیت کمکی $|0\rangle$ استفاده کرد. این مدار با ایجاد برهم‌نهی از دو حالت کوانتومی با استفاده از یک گیت هادامارد و سپس اعمال یک گیت فردکین یا جابجایی کنترل‌شده (C_{swap}) کار می‌کند. سپس حالت ترکیبی با استفاده از اعمال یک گیت هادامارد دیگر و یک گیت اندازه‌گیری برای تعیین احتمال $|1\rangle$ اندازه‌گیری می‌شود. احتمال بدست آوردن $|1\rangle$ از طریق فرمول 12 تعیین می‌شود.

$$\Pr |1\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 \quad (12)$$

اگر مقدار احتمال $|1\rangle$ برابر 0.5 شود، یعنی دو حالت کوانتومی اصلاً هم‌پوشانی ندارند (متعامد هستند) و در صورتیکه صفر شود، یعنی حداکثر هم‌پوشانی را دارند (در یک راستا هستند).

روش ارزیابی

برای ارزیابی، داده‌های Iris و Diabetes را که از مجموعه داده‌های دانشگاه UCI هستند، در نظر گرفته‌ایم که در جعبه‌ابزار scikit_learn قابل دسترسی هستند. به منظور بررسی عملکرد الگوریتم و کیفیت خوشه‌بندی، از معیارهای اعتبارسنجی خوشه همچون معیار نیمرخ (SIL)، شاخص رند (RI)، اندازه (VM)، شاخص دیویس-بولدین (DB) استفاده کرده‌ایم [10]. پیاده‌سازی و اجرای طرح‌ها با استفاده از کیت توسعه نرم افزار کوانتومی منبع باز IBM، یعنی QISKIT [11] انجام شده است. مدارهای کوانتومی روی شبیه‌ساز محلی 1024 بار اجرا شدند.

نتایج آزمایش‌ها

در این بخش، ابتدا توابع سیگموئید مختلف ارائه شده برای تعیین زاویه کیوبیت را مورد ارزیابی قرار داده‌ایم که نمودارهای مربوط به ارزیابی‌های مختلف در شکل 1 نشان داده شده است.

MED-MAD. روش Z-score برای هنجارسازی از تفریق میانگین و تقسیم حاصل بر انحراف معیار استفاده می‌کند. روش MED-MAD از تفریق میانه (MED) و تقسیم حاصل بر میانه قدرمطلق انحراف (MAD) استفاده می‌کند. روش MED-MAD نسبت به روش Z-score قاعده‌تاً نسبت به وجود نقاط پرت در داده‌ها حساسیت کمتری دارد.

تابع سیگموئید دوقطبی و تولید دیتای کوانتومی: در این مرحله یکی از توابع سیگموئید دوقطبی زیر به مجموعه داده اعمال می‌شود.

$$f_1(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (2)$$

$$f_2(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$f_3(x) = \frac{4}{\pi} \tan^{-1}(\tanh(\frac{\pi}{4}x)) \quad (4)$$

$$f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (5)$$

$$f_5(x) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(\frac{\pi}{2}x) \quad (6)$$

$$f_6(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad (7)$$

بعد از اعمال تابع سیگموئید روی دو نمونه (داده کلاسیک دو بُعدی $x=[x_0 \ x_1]$ و $\mu=[\mu_0 \ \mu_1]$ حاصل از اعمال PCA و سپس هنجارسازی از نوع Z-score یا MED-MAD، مقدار θ و φ بصورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\theta_0 = f(x_0) + 1 \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

$$\varphi_0 = f(x_1) + 1 \pi \quad (9)$$

$$\theta_1 = f(\mu_0) + 1 \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

$$\varphi_1 = f(\mu_1) + 1 \pi \quad (11)$$

منظور از $f(\cdot)$ یک تابع سیگموئید دوقطبی است که مقداری در بازه $[-1, +1]$ برمی‌گرداند و می‌تواند یکی از توابع f_1 تا f_6 باشد. متغیر θ که مقداری بین 0 تا π دارد، زاویه سمت‌الرأس (زینیت) و متغیر φ که مقداری بین 0 تا 2π دارد، زاویه السُموت (آزیموت) در کره بلوخ خواهد بود. سپس گیت چرخش کوانتومی $U(\theta, \varphi, 0)$ با پارامتر زاویه چرخش θ در جهت سمت‌الرأس و پارامتر زاویه چرخش φ در جهت السُموت، حالت کوانتومی $|0\rangle$ را می‌چرخاند و متناظر با

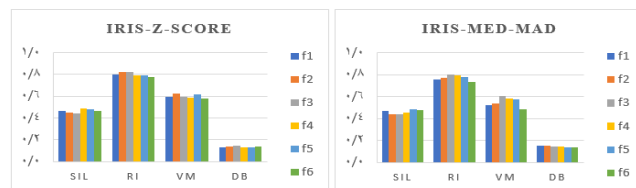
همانطور که مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی در اکثر معیارها در مقایسه با روشهای دیگر نسبتاً خوب عمل می‌کند، زیرا به مقادیر بالایی از SIL، RI و VM دست می‌یابد که معیارهای کیفیت خوشه هستند. همچنین، مقدار نسبتاً پایینی از DB را به دست می‌آورد که نشان می‌دهد خوشه‌ها به خوبی از هم جدا شده‌اند.

نتیجه‌گیری

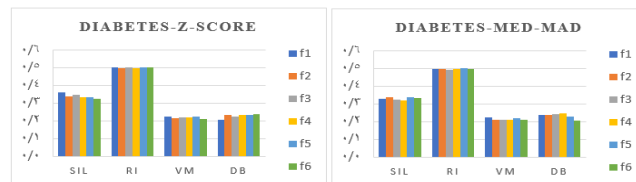
در این مقاله یک روش خوشه‌بندی K-means کوانتومی بهبودیافته ارائه گردید. در روش مذکور از یک تکنیک چندمرحله‌ای برای تبدیل دادگان کلاسیک به حالات کوانتومی بهره‌برداری شد. روش پیشنهادی بر روی دو مجموع دادگان خوشه‌بندی از دادگان استاندارد UCI اعمال گردید و با شاخص‌های اعتبارسنجی مختلف برای خوشه‌بندی مورد آزمون قرار گرفت. نتایج آزمایش‌ها نشان داد که روش کوانتومی پیشنهادی با اکثر معیارهای اعتبارسنجی خوشه بهتر از روش کلاسیک و روشهای خوشه‌بندی کوانتومی دیگر است.

مرجع‌ها

- [1] A. K. Jain, M. N. Murty, and P. J. Flynn, "Data clustering: a review," *ACM computing surveys (CSUR)*, vol. 31, no. 3, pp. 264-323, 1999.
- [2] E. Alpaydm, "Introduction to machine learning", 2nd edition, 2011.
- [3] T. Hastie, R. Tibshirani, et al., *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*, Springer, 2009.
- [4] D. Arthur and S. Vassilvitskii, "K-means++ the advantages of careful seeding," in *Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 1027-1035, 2007.
- [5] K. Benlamine, Y. Bennani, N. Grozavu, and B. Matei, "Quantum collaborative k-means," in *Proc. 2020 IJCNN*, pp. 1-7, 2020.
- [6] S. Lloyd, M. Mohseni, and P. Rebentrost, "Quantum algorithms for supervised and unsupervised machine learning," *arXiv preprint arXiv:1307.0411*, 2013.
- [7] S. Anagolum, "Quantum machine learning: distance estimation for k-means clustering," <https://towardsdatascience.com/quantum-machine-learning-distance-estimation-for-k-means-clustering-26bccfbfcc76/>, [Online Access: Mar. 27, 2019].
- [8] S. Kavitha and N. Kaulgud, "Quantum K-means clustering method for detecting heart disease using quantum circuit approach," *Soft Computing*, pp. 1-14, 2022.
- [9] S. Hritik, "Quantum-Distance-Estimator-for-K-Means-clustering," <https://github.com/hritiksaw199/Quantum-Distance-Estimator-for-K-Means-clustering>, [Online Access: Dec. 18, 2022].
- [10] C.C. Aggarwal, "Data Clustering: Algorithms and Applications", CRC Press, 2013.
- [11] T. A. G. Aleksandrowicz, P. Barkoutsos, L. Bello, Y. Ben-Haim, D. Bucher, F.J. Cabrera-Hernández, J. Carballo-Franquis, A. Chen, C.F. Chen, J.M. Chow, "Qiskit: An open-source Framework for Quantum Computing," <https://zenodo.org/record/2562111>, [Online Access: Jan. 23, 2019].



(الف)



(ب)

شکل 1: تأثیر استفاده از توابع سیگموئید مختلف در تعیین زاویه کیوبیت در معیارهای اعتبارسنجی خوشه؛ (الف) دادگان Iris و (ب) دادگان Diabetes

با توجه به نتایج، برای دیتاست Iris، توابع f_1, f_2, f_4, f_5 و f_2 به ترتیب برای معیارهای SIL، RI، VM، DB بهترین نتایج را ارائه داده‌اند. برای دیتاست Diabetes، تابع f_1 برای معیارهای SIL، RI، VM، DB به ترتیب با Z-score، MED-MAD، Z-score، Z-score بهترین نتیجه را داشته است. این توابع به عنوان روش پیشنهادی برای مقایسه با روش‌های دیگر انتخاب شده است. در جداول 1 و 2، نتایج مقایسه کار پیشنهادی با الگوریتم K-means کلاسیک و روش‌های کوانتومی ارائه شده توسط لوید و همکاران [7]، آنالولوم [8] و کاویتا و همکاران [9]، میانگین و انحراف معیار بعد از 10 بار اجرا و شرط توقف 0.001 نشان داده شده است.

جدول 1: مقایسه معیارهای اعتبارسنجی خوشه در روش پیشنهادی با سایر

روش‌ها روی دادگان Iris

روش‌های مختلف	SIL	RI	VM	DB
K-means (Z-score)	0.499 ± 0.038	0.795 ± 0.058	0.586 ± 0.087	0.142 ± 0.064
K-means (MED-MAD)	0.488 ± 0.055	0.791 ± 0.046	0.597 ± 0.074	0.133 ± 0.082
رویکرد لوید و همکاران [۷]	0.439 ± 0.076	0.795 ± 0.040	0.582 ± 0.058	0.156 ± 0.083
رویکرد آنالولوم [۸]	0.181 ± 0.025	0.704 ± 0.039	0.372 ± 0.064	0.327 ± 0.090
رویکرد کاویتا و همکاران [۹]	0.246 ± 0.055	0.449 ± 0.048	0.168 ± 0.054	0.210 ± 0.090
روش پیشنهادی	0.490 ± 0.037	0.825 ± 0.035	0.627 ± 0.052	0.129 ± 0.068

جدول 2: مقایسه معیارهای اعتبارسنجی خوشه در روش پیشنهادی با سایر

روش‌ها روی دادگان Diabetes

روش‌های مختلف	SIL	RI	VM	DB
K-means (Z-score)	0.329 ± 0.031	0.494 ± 0.012	0.213 ± 0.019	0.239 ± 0.100
K-means (MED-MAD)	0.329 ± 0.032	0.494 ± 0.010	0.210 ± 0.011	0.231 ± 0.100
رویکرد لوید و همکاران [۷]	0.149 ± 0.062	0.497 ± 0.002	0.007 ± 0.005	0.555 ± 0.100
رویکرد آنالولوم [۸]	0.285 ± 0.024	0.502 ± 0.006	0.007 ± 0.004	0.317 ± 0.110
رویکرد کاویتا و همکاران [۹]	0.186 ± 0.032	0.509 ± 0.011	0.008 ± 0.004	0.234 ± 0.085
روش پیشنهادی	0.361 ± 0.045	0.503 ± 0.001	0.224 ± 0.009	0.206 ± 0.075

نقش دمش همدوس در تولید زوج فوتون‌های درهم‌تنیده

تخمه‌چیان، سارا^۱؛ وفافرد، آذر^۱؛ صحرایی، مصطفی^۱

^۱ دانشکده فیزیک دانشگاه تبریز، بلوار ۲۹ بهمن، تبریز

چکیده

در این مقاله، نقش دمش همدوس، بر روی درهم‌تنیدگی فوتون-فوتون مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور یک سامانه سه تراز با چیدمان آبشاری در نظر گرفته‌ایم، که دو فوتون گسیل شده در دو مد مختلف، می‌توانند درهم‌تنیده شوند. معادلات ماتریس چگالی برای سامانه ارائه شده محاسبه شده و به صورت عددی حل شده است. نشان داده شد که دو فوتون گسیل شده در مجموعه‌ای از پارامترهای مناسب در هم‌تنیده می‌شوند و با بکارگیری یک میدان پمپاژ همدوس، این سامانه می‌تواند منبع نور درهم‌تنیده به شمار آید. نتایج حاصل حاکی از آن است که با افزایش نرخ دمش میدان، درجه درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: درهم‌تنیدگی، دمش ناهمدوس، گسیل خودبه‌خودی، فوتون

Effect of the coherent pump on the generation of photon-photon entanglement

Tokhmechian, Sara¹; Vafafard, Azar¹; Sahrai, Mostafa¹

¹ Department of Physics, University of Tabriz, Tabriz,

Abstract

We discuss the generation of entangled photon pairs by a coherent pump in a correlated spontaneous emission light. The system consists of three-level ladder atomic schemes in which two emitted photons with different modes can be entangled. The density matrix equations for the presented system are derived and solved numerically. It has been shown that the two emitted photons get entangled in a proper set of parameters. We demonstrate that this system can be a source of macroscopic entangled light by using a coherent pumping field. The degree of the entanglement enhances as the rate of the pumping field is increased.

Keywords: Entanglement, Incoherent pumping, Spontaneous emission, Photon

PACS No. (11 Times New Roman, italic)

مقدمه

آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و پایه بسیاری از فرایندهای اطلاعات کوانتومی می‌باشد [1]. بنابراین، مطالعه و بررسی شرایط وجود درهم‌تنیدگی، پارامترهای کنترل‌کننده و نقش آن‌ها در میزان درهم‌تنیدگی حائز اهمیت است. یکی از مهمترین فرایندهای اپتیکی که از اندرکنش نور با ماده ناشی می‌شود، گسیل خودبخودی است که به عوامل کنترل‌کننده نظیر میدان‌های اعمال شده و محیطی که اتم در آن قرار دارد بستگی دارد. میدان اعمال شده می‌تواند عامل

پدیده درهم‌تنیدگی که یکی از رخداد‌های ویژه کوانتومی است، به یکی از موضوع‌های مهم و جذاب پژوهشی سال‌های اخیر تبدیل شده است. کاربردهای مختلفی برای انواع درهم‌تنیدگی وجود دارد که از بین آنها درهم‌تنیدگی بین فوتون‌ها بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. به دلیل مهندسی و کنترل پذیری مناسب، فوتون‌های درهم-تنیده و باتوجه به ویژگی‌های حالت‌های درهم‌تنیده، تولید و توزیع

برای محاسبه عناصر ماتریس چگالی، که پاسخ سامانه به میدان‌های اعمالی است، استفاده می‌شود.

تئوری

جهت بررسی برهمکنش میدان الکترومغناطیس با ماده، در این مقاله از دیدگاه کوانتومی بهره خواهیم برد. برای مطالعه تحول زمانی سامانه سه تراز آبخاری، ماتریس چگالی سامانه را محاسبه می‌کنیم. با این روش می‌توان به مشخصات فیزیکی سامانه پی برد و زیرسیستم‌های یک سامانه کوانتومی مرکب را توصیف کرد. از این رو یافتن این عناصر با در نظر گرفتن گذار ناشی از فوتون حائز اهمیت می‌باشد. برای این منظور، ابتدا هامیلتونی سامانه‌ای که تحت دمش میدان لیزری همدوس بوده است را در تصویر برهمکنش می‌نویسیم:

$$V = (g_k a_k |a\rangle\langle b| + g_q a_q |b\rangle\langle c| - \frac{1}{2} \Omega e^{-i\varphi} |a\rangle\langle c|) + H.c \quad (1)$$

a_k و a_q عملگرهای فنا برای فوتون‌های حاصل از مد k و مد q ، در بسامدهای ω_k و ω_q هستند. g_k و g_q ثابت ترویج گذارهای $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ و $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ می‌باشند.

در ادامه باید جملات ماتریس چگالی را بدست آوریم که با استفاده از فرم کلی معادله حرکت ماتریس چگالی قابل محاسبه هستند [3]:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [V, \rho] + L(\rho), \quad (2)$$

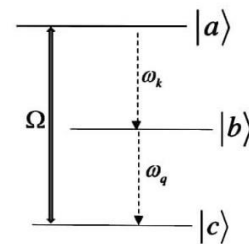
که $L(\rho)$ نشان دهنده جملات اتلاف مانند واهلش ناشی از گسیل خودبخودی می‌باشد، فرم کلی ماتریس واهلش بصورت $\langle n|\Gamma|m\rangle = \gamma_n \delta_{nm}$ ، تعریف می‌شود که γ نرخ واهلش ناشی از گسیل خود بخودی می‌باشد. با جاگذاری جملات اتلافی و روابط (1) در رابطه (2) تحول زمانی ρ_{bc} و ρ_{ab} بدست می‌آید.

$$\frac{d}{dt} \rho_{ab} = -i(g_k a_k \rho_{bb} - g_k \rho_{aa} a_k - g_q \rho_{ac} a_q^\dagger) + \frac{i\Omega e^{-i\varphi}}{2} \rho_{cb} - \gamma \rho_{ab}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{bc} = -i(g_q a_q \rho_{cc} - g_q \rho_{bb} a_q + g_k a_k^\dagger \rho_{ac}) - \frac{i\Omega e^{-i\varphi}}{2} \rho_{ba} - \gamma \rho_{bc},$$

به همین ترتیب معادلات حرکت مرتبه صفر ($i=a,b,c$) با فرض اینکه اتم‌ها با نرخ r_a در تراز پایینی $|c\rangle$ به داخل کاواک تزریق شده‌اند، بدست می‌آیند:

کنترل کننده گسیل خود بخود باشد، زیرا اعمال میدان خارجی قوی به سامانه اتمی می‌تواند تمام یا بخشی از طیف گسیل را حذف کند. از گسیل خودبخودی می‌توان به عنوان منبع تولید درهم‌تنیدگی استفاده کرد زیرا فوتون‌هایی که از گسیل خودبخودی حاصل می‌شوند، می‌توانند درهم‌تنیده باشند [2]. در این مقاله به مطالعه درهم‌تنیدگی بین فوتون‌های تولید شده در دو مد، در سامانه اتمی سه تراز با چیدمان آبخاری شامل تراز بالایی $|a\rangle$ ، تراز پایین $|c\rangle$ و تراز میانی $|b\rangle$ می‌پردازیم (شکل 1).



شکل 1: سامانه سه تراز آبخاری

بین ترازهای $|a\rangle$ و $|c\rangle$ میدان لیزری همدوس قوی با فرکانس رابی $\Omega e^{-i\varphi}$ اعمال شده است. گسیل خودبه خود از تراز $|a\rangle$ به تراز $|b\rangle$ ($|a\rangle \rightarrow |b\rangle$) و نیز از تراز $|b\rangle$ به تراز $|c\rangle$ ($|b\rangle \rightarrow |c\rangle$) با فرکانس ω_k و ω_q صورت می‌گیرد. گذار از حالت $|a\rangle$ به حالت $|b\rangle$ فوتون‌هایی در مد k تولید می‌کند، در حالی که گذار از تراز $|b\rangle$ به تراز $|c\rangle$ فوتون‌هایی در مد q ایجاد می‌نماید. فرض می‌شود حالت اولیه اتم در تراز $|b\rangle$ باشد.

همچنان که قبلاً نیز بیان گردید، علت گسیل خودبخود، اندرکنش سامانه اتمی با افت و خیزهای خلا (مدهای خلا) است. بنابراین فوتون‌های حاصل از گذار الکترون از تراز $|a\rangle$ به تراز $|b\rangle$ در مد k و نیز فوتون حاصل از گذار الکترون از تراز $|b\rangle$ به تراز $|c\rangle$ در مد q ، تحت شرایط خاصی می‌توانند درهم‌تنیده باشند. مطالعه درهم‌تنیدگی این فوتون‌ها، هدف اساسی این تحقیق محسوب می‌شود.

در این مقاله برای بررسی درهم‌تنیدگی بین فوتون‌های تولید شده از گسیل خودبخودی که توسط میدان‌های لیزری کنترل می‌شوند، از سنجه متغیر پیوسته استفاده می‌کنیم. بدین منظور از معادلات تحول ماتریس چگالی و هامیلتونی سامانه سه تراز در تصویر برهمکنش

بررسی درهم‌تنیدگی مد k و q ، برای دو عملگر پیوسته $\hat{u}$ و $\hat{v}$ نوع EPR [5] سنجه زیر می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، که اگر در این نامساوی صدق کنند، گفته می‌شود فوتون‌ها درهم‌تنیده هستند:

$$\langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle < 2 \quad (8)$$

تعاریف u و v بر حسب عملگرهای کانونیک بصورت $\hat{u} = \hat{p}_k - \hat{p}_q$ ، $\hat{v} = \hat{x}_k - \hat{x}_q$ می‌باشد که طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{x}_k = (\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k)/\sqrt{2}, \quad \hat{x}_q = (\hat{b}_q^\dagger + \hat{b}_q)/\sqrt{2}, \quad (9)$$

$$\hat{p}_k = i(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k)/\sqrt{2}, \quad \hat{p}_q = i(\hat{b}_q^\dagger - \hat{b}_q)/\sqrt{2}$$

در نهایت رابطه نامساوی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle &= 2[1 + \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle + \langle \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_q \rangle + \langle \hat{a}_k \hat{a}_q \rangle \\ &+ \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_q^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_k^\dagger \rangle \langle \hat{a}_k \rangle - \langle \hat{a}_q^\dagger \rangle \langle \hat{a}_q \rangle \\ &- \langle \hat{a}_k \rangle \langle \hat{a}_q \rangle - \langle \hat{a}_k^\dagger \rangle \langle \hat{a}_q^\dagger \rangle], \end{aligned} \quad (10)$$

بحث و نتایج

جهت بررسی درهم‌تنیدگی، نمودار تحول زمانی سنجه را رسم می‌کنیم. ابتدا با انتخاب پارامترهای $g = \gamma$ ، $k = 0.001g$ و $\Omega = 25\gamma$ [4] درهم‌تنیدگی را با تغییر نرخ دمش میدان بررسی می‌کنیم. طبق شکل (2) زمانیکه نرخ دمش صفر می‌باشد ($r_a = 0$)، درهم‌تنیدگی وجود نخواهد داشت. سه منحنی دیگر به ازای مقادیر مختلف دمش رسم شده‌است که نشان می‌دهد در بازه‌ی مشخصی از زمان، مقدار کمیت $\langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle$ به دلیل اثرگذاری میدان دمشی از 2 کوچکتر می‌باشد. بنابراین در نامعادله تعریف شده برای سنجه، صدق می‌کند و حاکی از شکل‌گیری درهم‌تنیدگی بین زوج فوتون تولیدی است. در نتیجه مدهای k و q میدان، درهم‌تنیده خواهند بود. نکته قابل توجه این است که درهم‌تنیدگی با گذشت زمان زیاد شده و سپس کاهش یافته و بعد از مدت زمان محدودی از بین می‌رود.

همانطور که ملاحظه می‌شود در $r_a = 0.5\gamma$ ، کمترین مقدار نمودار در $\langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle \approx 0.44$ می‌باشد و در $r_a = 1\gamma$ ، $\langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle \approx 0.41$ و در $r_a = 2\gamma$ ، $\langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle \approx 0.39$ است، که نشان دهنده افزایش درجه درهم‌تنیدگی است. پس در

$$\frac{d}{dt} \rho_{aa} = \frac{i\Omega}{2} (e^{-i\varphi} \rho_{ca} - e^{i\varphi} \rho_{ac}) - \gamma \rho_{aa}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{cc} = \frac{i\Omega}{2} (e^{i\varphi} \rho_{ac} - e^{-i\varphi} \rho_{ca}) - \gamma \rho_{cc} + r_a \rho_f,$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{ac} = -\frac{i\Omega}{2} e^{i\varphi} (\rho_{aa} - \rho_{cc}) - \gamma \rho_{ac},$$

پارامتر r_a نشان دهنده نرخ دمش می‌باشد. در این سامانه، میدان‌های اعمال شده باعث ایجاد همدوسی می‌شوند. از این رو، نرخ دمش و شدت میدان اعمالی عوامل کنترلی مهمی محسوب می‌شوند.

با توجه به اینکه حالت اولیه اتم در تراز $|c\rangle$ می‌باشد، $\rho_{bb} = 0$ است. جملات ماتریس چگالی بدست آمده در رابطه (3) و (4) باید در رابطه ماتریس چگالی کاهش یافته میدان که رد روی همه اتم‌ها است و بصورت زیر تعریف می‌شود، جاگذاری شود [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_F &= -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_{Atom} [V, \rho_{AF}] \\ &= -\frac{i}{\hbar} ([V_{ba}, \rho_{ab}] + [V_{cb}, \rho_{bc}] + [V_{ab}, \rho_{ba}] + [V_{bc}, \rho_{cb}]) \end{aligned} \quad (5)$$

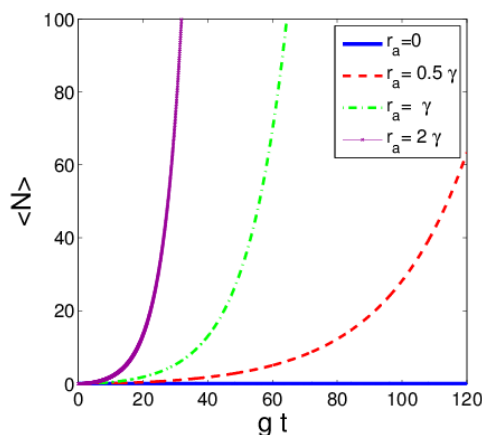
با نوشتن دستگاه معادلات به شکل ماتریسی، ρ_{aa} ، ρ_{cc} و ρ_{ac} بدست می‌آید که با جاگذاری آنها در رابطه (3) و انتگرال‌گیری در بازه‌ی $t \rightarrow -\infty$ تا t عبارت‌های ρ_{ab} و ρ_{bc} در نرم افزار Mathematica بدست می‌آیند. در نهایت با جاگذاری عناصر ماتریس چگالی بدست آمده در رابطه (5) در حالت خلا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_F &= -B_k (\rho_F a_k a_k^\dagger - a_k^\dagger a_k \rho_F) e^{i\varphi} \\ &- K_k (a_k^\dagger a_k \rho_F - a_k \rho_F a_k^\dagger) \\ &- (B_q + K_q) (a_q^\dagger a_q \rho_F - a_q \rho_F a_q^\dagger) \\ &+ C_k (a_k^\dagger a_q^\dagger \rho_F - a_k^\dagger \rho_F a_q^\dagger) e^{-i\varphi} \\ &+ C_q (\rho_F a_k^\dagger a_q^\dagger - a_k^\dagger \rho_F a_q^\dagger) e^{-i\varphi} + H.c., \end{aligned} \quad (6)$$

که K_k و K_q ثابت میرایی هر مد، B_k و B_q به ترتیب مربوط به گسیل از تراز $|a\rangle$ و جذب از تراز $|c\rangle$ می‌باشد و C_k و C_q تزویج بین فوتون‌های حاصل از دو مد را نشان می‌دهند:

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{3g_k^2 r_a \Omega^2}{4(\gamma^2 + \Omega^2)(\gamma^2 + \frac{\Omega^2}{4})}, \quad B_q = \frac{g_q^2 r_a}{\gamma^2 + \Omega^2}, \\ C_k &= \frac{ig_k g_q r_a \Omega}{\gamma(\gamma^2 + \Omega^2)}, \quad C_q = \frac{ig_k g_q r_a \Omega (\Omega - 2\gamma^2)}{4(\gamma^2 + \Omega^2)(\gamma^2 + \frac{\Omega^2}{4})}, \end{aligned} \quad (7)$$

با توجه به اینکه دو فوتون در مدهای مختلف تولید می‌شود، سنجه بکار گرفته شده باید برای متغیرهای پیوسته تعریف شود. برای



شکل 3: میانگین تعداد فوتون‌ها به ازای مقادیر مختلف دمش، در $r_a = 0$ (خط)، $r_a = 0.5\gamma$ (خط چین)، $r_a = 1\gamma$ (خط-نقطه چین)، $r_a = 2\gamma$ (خط توپر)

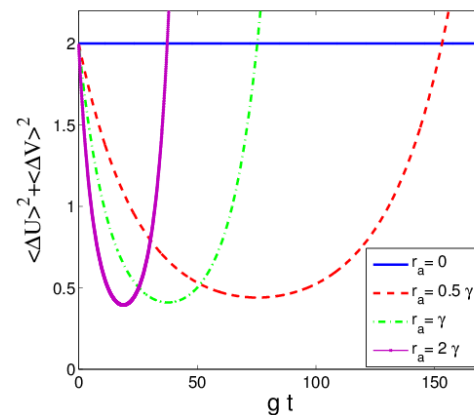
نتیجه‌گیری

در این مقاله با انتخاب سامانه سه ترازی در چیدمان آبهاری، درهم-تیدگی فوتون‌های تولید شده از گسیل خودبخودی در دو مد متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته است. با بررسی‌های انجام شده در این سامانه، ملاحظه شد که با اعمال یک میدان لیزری به سامانه، فوتون‌های تولید شده در دو مد، درهم‌تیده خواهند بود. علاوه بر آن، با بررسی نمودارهای مربوطه این نتیجه حاصل شد که توسط میدان دمش می‌توان درهم‌تیدگی را کنترل کرد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر نرخ دمش، مدت زمان درهم‌تیدگی افزایش می‌یابد. در ادامه با بررسی تعداد فوتون‌ها، مشخص می‌شود که با افزایش نرخ دمش میدان، تعداد فوتون‌ها بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

مرجع‌ها

- 1- Nielsen, M.A. and I.L. Chuang, *Quantum information and quantum computation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 2(8): p. 23.
- 2- Zhang, H.Z., et al., Quantum interference in spontaneous emission of an atom embedded in a double-band photonic crystal. *Physical Review A*, 2002. 65(6): p. 063802.
- 3- Scully, M.O. and M.S. Zubairy, *Quantum optics*. 1999, American Association of Physics Teachers.
- 4- Xiong, H., M.O. Scully, and M.S. Zubairy, Correlated spontaneous emission laser as an entanglement amplifier. *Physical review letters*, 2005. 94(2): p. 023601
- 5- Duan, L.-M., et al., Inseparability criterion for continuous variable systems. *Physical Review Letters*, 2000. 84(12): p. 2722.

نهایت با توجه به شکل (2) نتیجه می‌گیریم با افزایش نرخ دمش میدان، درجه درهم‌تیدگی افزایش می‌یابد.



شکل 2: تحول زمانی $\langle (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \rangle$ به ازای مقادیر مختلف دمش، در $r_a = 0$ (خط)، $r_a = 0.5\gamma$ (خط چین)، $r_a = 1\gamma$ (خط-نقطه چین)، $r_a = 2\gamma$ (خط توپر)

کمیت مهم دیگر، تعداد میانگین فوتون‌ها در دو مد می‌باشد که می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\langle N \rangle = \langle a_k^\dagger a_k + a_q^\dagger a_q \rangle, \quad (11)$$

جملات این رابطه هم قابل محاسبه به روش کاملاً کوانتومی، با استفاده از رابطه (6) خواهد بود. برای بررسی، ضمن در نظر گرفتن پارامترهای $g = \gamma$ ، $k = 0.001g$ و $\Omega = 25\gamma$ ، در برنامه MATLAB قابل رسم خواهد بود. با توجه به اینکه از عوامل تاثیرگذار روی تعداد فوتون‌ها نرخ دمش می‌باشد، میانگین تعداد فوتون‌ها را به ازای مقادیر مختلف دمش $r_a = 0, 0.5\gamma, 1\gamma, 2\gamma$ رسم می‌کنیم. طبق شکل (3) در $r_a = 0.5\gamma$ تا بازه $gt = 120$ تعداد فوتون‌ها به 60 رسیده است. در $r_a = 1\gamma$ تا بازه $gt = 60$ تعداد فوتون‌ها تقریباً به 95 و در $r_a = 2\gamma$ تا بازه $gt = 30$ تعداد فوتون‌ها به 100 رسیده است. پس نتیجه می‌گیریم که هرچه نرخ دمش افزایش می‌یابد، در زمان کمتری تعداد فوتون‌ها به طور سریع افزایش می‌یابد. البته همان‌گونه که از شکل هم مشخص است، زمانی که نرخ دمش برابر صفر است هیچ فوتونی تولید نشده است و تعداد فوتون‌ها برابر صفر می‌شود.

تحول هم‌دوسی کوانتومی و مخلوط شدگی در کانال‌های حافظه دار

حکیمه جاقوری

گروه فیزیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

چکیده

به مطالعه‌ی تحول هم‌دوسی و مخلوط شدگی یک سیستم دو کیوبیتی در کانال‌های نوفه دار با حافظه مثل میرایی دامنه، میرایی فاز و واقطیش می‌پردازیم. نتایج تایید می‌کند که کانال‌های کوانتومی حافظه دار، از هم‌دوسی در مقابل نوفه محافظت می‌کنند. از طرف دیگر این کانال‌ها از مخلوط شدن سیستم فیزیکی جلوگیری می‌کند. در کانال‌های حافظه دار واقطیش و میرایی فاز در مقایسه با کانال میرایی دامنه مخلوط شدگی سیستم و هم‌دوسی بیشتر حفظ می‌شود.

واژه های کلیدی: کانال کوانتومی، نوفه، میرایی دامنه، هم‌دوسی، میرایی فاز، واقطیش

Quantum coherence evolution and mixedness in memory channels

Hakimeh Jaghouri

Department of Physics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz

Abstract

We study the evolution of coherence and mixedness of a two-qubit system in memory- channels such as amplitude damping, phase damping and depolarizing channels. The results confirm that the quantum memory channels protect coherence against noise. On the other hand, these channels prevent from mixedness of the physical system. In channels with memory, depolarizing and phase damping channels, compared to amplitude damping channels, mixedness and coherence are preserved more.

Keywords: quantum channel, noise, amplitude damping, coherence, phase damping, depolarizing

PACS No

مقدمه

هر چه ضریب حافظه بیشتر باشد همبستگی های کوانتومی را می توان برای مدت زمان طولانی تری می توان حفظ کرد [1]. در این مقاله، مدلی را با همبستگی کلاسیکی بین دو کانال متوالی در نظر می گیریم. در ابتدا به معرفی دو نوع مختلف کانال یعنی، کانال های بدون حافظه و کانال های حافظه دار می پردازیم. کانال های بدون حافظه (کانال های غیر هم بسته)، کانال های کوانتومی به صورت یکسان و مستقل روی هر سیستم کوانتومی عمل می کنند یعنی اگر به تعداد N ، کانال کوانتومی $\mathcal{E}$ داشته باشیم آن گاه برای این کانال های متوالی $\mathcal{E}_N = \mathcal{E}^{\otimes N}$ را خواهیم داشت. در واقعیت، در استفاده متوالی از کانال های کوانتومی روی هر سیستم کوانتومی ممکن است

سیستم های کوانتومی واقعی با محیط برهم کنش می دهند و این برهم کنش اجتناب ناپذیر است. برای ساختن ابزارهای کوانتومی مانند حافظه های کوانتومی برهم کنش با محیط باید به حداقل ممکن برسد. از این رو مطالعه اثرات محیط در غالب نوفه بر روی سیستم های کوانتومی جالب و ضروری به نظر می رسد. انواع مختلفی از کلنال مانند میرایی دامنه، میرایی فاز و واقطیش را در نظر می گیریم. نتایج نشان می دهند که دو کیوبیت که در ابتدا در حالت جدای پذیر هستند در کانال میرایی دامنه می توانند درهم تنیده شوند که تابعی از ضریب حافظه است [1-4].

که در این جا $|\varphi\rangle = \sqrt{1-\alpha^2}|00\rangle + \alpha|11\rangle$ با $0 \leq \alpha \leq 1$ حالت شبه بل است و پارامتر Γ میزان خلوص حالت را مشخص می کند.

سنجه هم دوسی سیستم فیزیکی با نرم یک به صورت زیر تعریف می شود [2].

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{i,j,i \neq j} |\rho_{i,j}|^2 \quad (6)$$

مخلوط شدگی یک ماتریس چگالی ρ با بعد d از رابطه زیر بدست می آید [2].

$$M_{cl} = \frac{C_{l_1}(\rho)^2}{(d-1)^2} + S_l(\rho) \quad (7)$$

که $S_l(\rho) = \frac{d}{d-1} (1 - \text{tr}(\rho^2))$ آنтроپی خطی و C_{l_1} هم دوسی کوانتومی است.

کانال های کوانتومی

در این بخش به معرفی کانال های کوانتومی می پردازیم.

کانال کوانتومی میرایی دامنه حافظه دار

اتلاف انرژی به وسیله کانال میرایی دامنه توصیف می شود.

عملگرهای کراوس که بر روی یک کیوبیت اثر می کنند به صورت زیر هستند [1].

$$B_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که $p = 1 - e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ است که γ آهنگ واپاشی را در این کانال نشان می دهد. با در نظر گرفتن یک سیستم دو کیوبیتی به طوری که، دو کیوبیت تحت تاثیر کانال های میرایی دامنه بی حافظه (ناهم بسته) قرار دارند، عملگرهای کراوس به صورت هستند.

$$E_{ij} = B_i \otimes B_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (9)$$

عملگرهای کراوس $E_{k,k}$ برای کانال های حافظه دار به صورت زیر هستند [3]

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بین هر کانال ϵ با کانال دیگر همبستگی وجود داشته باشد، به طوری که کانال ها به طور وابسته یعنی $\epsilon_N \neq \epsilon^{\otimes N}$ عمل می کنند. این کانال ها را، کانال های حافظه دار (کانال های همبسته) می نامند. کانال کوانتومی ϵ که یک نگاشت ردنگهدار کاملاً مثبت است، اگر حالت اولیه سیستم را ρ فرض کنیم تحت تاثیر این کانال حالت نهایی سیستم به صورت زیر است [3]

$$\epsilon(\rho) = E_{i_1 \dots i_N} \rho E_{i_1 \dots i_N}^\dagger$$

در این جا $E_{i_1 \dots i_N}$ عملگرهای کراوس هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$E_{i_1 \dots i_N} = \sqrt{p_{i_1 \dots i_N}} B_{i_1} \otimes \dots \otimes B_{i_N} \quad (1)$$

$$\sum_i p_{i_1 \dots i_N} = 1.$$

مجموع احتمال عملگرهای متوالی تصادفی روی N کیوبیت که از کانال می گذرند، برابر یک است.

برای کانال های بی حافظه عملگرهای B_i مستقل هستند و رابطه $p_{i_1 \dots i_N} = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_N}$ برقرار است. اما در کانال های باحافظه، عملگرها همبسته هستند.

عملگرهای کراوس برای دو کانال کوانتومی متوالی که روی یک سیستم دو کیوبیتی $p_{i_1 \dots i_N}$ اعمال می شوند به صورت زیر هستند [1,3].

$$E_{i_1 i_2} = \sqrt{p_{i_1 i_2}} B_{i_1} \otimes B_{i_2} \quad (2)$$

اگر کانال ها بی حافظه (مستقل) باشند $p_{i_1 i_2} = p_{i_1} p_{i_2}$ و عملگرهای کراوس B_{i_1} و B_{i_2} مستقل هستند. برای دو کانال حافظه دار (همبسته) عملگرهای کراوس به صورت زیر است

$$E_{i,j} = \sqrt{(1-\mu)p_i p_j + \mu p_i \delta_{i,j}} B_i \otimes B_j \quad (3)$$

در این جا $0 \leq \mu \leq 1$ ، ضریب حافظه کانال است (میزان همبسته بودن کانال ها را مشخص می کند). حالت نهایی سیستم به صورت زیر است

$$\epsilon(\rho) = (1-\mu) \sum_{i,j=1}^2 E_{i,j} \rho + \mu \sum_{k=1}^2 E_{k,k} \rho E_{k,k}^\dagger \quad (4)$$

در حالت $\mu = 0$ همبستگی بین دو کانال متوالی وجود ندارد و کانال بی حافظه است. در حالت $\mu = 1$ همبستگی کامل بین دو کانال متوالی وجود دارد و کانال حافظه دار است

حالت ابتدایی سیستم را به صورت زیر در نظر می گیریم.

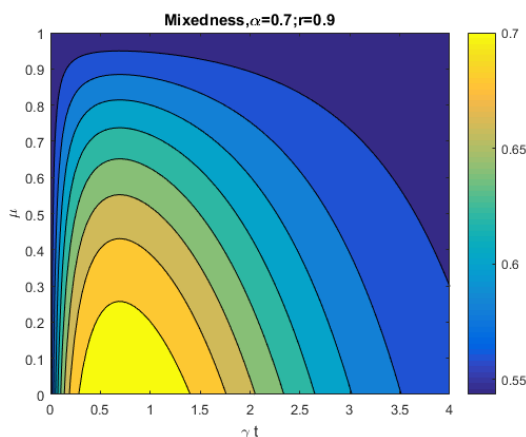
$$\rho(0) = r|\varphi\rangle\langle\varphi| + \frac{1-r}{4} I \quad (5)$$

زمان در ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. با افزایش ضریب حافظه کوانتومی هم دوسی بیشتر و مخلوط شدگی کمتر می شود.

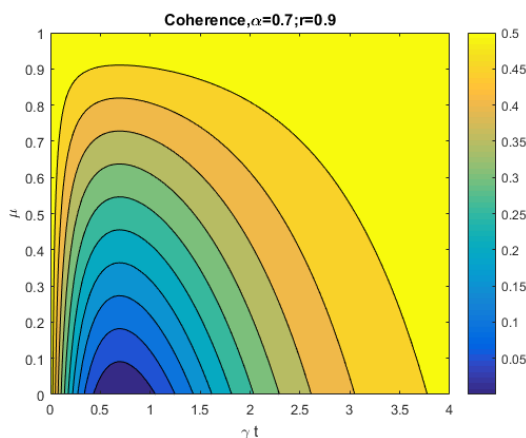
کانال کوانتومی میرایی فاز حافظه دار

کانال میرایی فاز، در این کانال از دست دادن اطلاعات فاز را بدون از دست دادن انرژی داریم. عملگرهای کراوس برای یک کیوبیت تنها به صورت $\sigma_0 = I$ و σ_3 تعریف می شود. اگر کانال بدون حافظه باشد عملگرهای کراوس به صورت زیر خواهند بود [3]

$$E_{i,j} = \sqrt{p_i p_j} \sigma_i \otimes \sigma_j \quad (11)$$



شکل 3. تحول مخلوط شدگی سیستم دو کیوبیتی به ازای $\alpha=0.7$ و $r=0.9$ در کانال میرایی فاز حافظه دار



شکل 4. هم دوسی سیستم دو کیوبیتی به ازای $\alpha=0.7$ و $r=0.9$ در کانال میرایی فاز حافظه دار

و اگر کانال حافظه دار باشد خواهیم داشت [3]

$$E_{k,k} = \sqrt{p_k} \sigma_k \otimes \sigma_k, \quad i, j, k = 1, 3, \quad (12)$$

$$p_1 = 1 - p, p_2 = p$$

که $p = 1 - e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ است که γ آهنگ واپاشی را در این کانال نشان می دهد. با توجه به محدودیت صفحات، عناصر ماتریس چگالی

عناصر ماتریس چگالی تحول یافته تحت تاثیر این کانال به صورت زیر است.

$$\rho_{1,1}(t) = \frac{1}{4}(p-1)(4r\alpha^2 - 1 - 3r)(1-p + \mu p) \quad (10)$$

$$\rho_{1,4}(t) = r\alpha\sqrt{1-\alpha^2}(\mu\sqrt{1-p}) + (\mu-1)(p-1)$$

$$\rho_{2,2}(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r + r(1-\alpha^2)(1-\mu) + (1-\mu)\left(-\frac{1}{4}r + \left(-\frac{3}{4} + \alpha^2\right)r\right)p^2$$

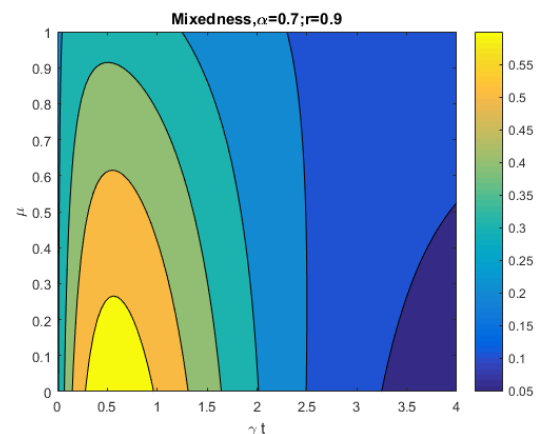
$$\rho_{4,4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r + r\alpha^2 + p^2(\mu-1)\left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4} + \alpha^2\right)r\right) + \frac{1}{4}p((-2 - 4\mu\alpha^2 + 5\mu)r + 2 - \mu)$$

$$\rho_{1,4}(t) = \rho_{4,1}(t)$$

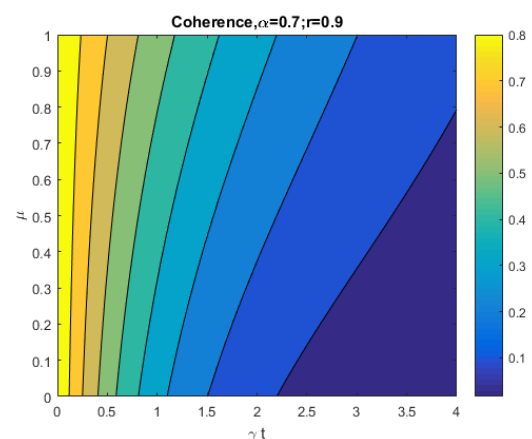
$$\rho_{2,2}(t) = \rho_{3,3}(t)$$

$$\rho_{1,2}(t) = \rho_{1,3}(t) = \rho_{2,3}(t) = \rho_{2,1}(t) = \rho_{2,4}(t) =$$

$$\rho_{3,1}(t) = \rho_{3,4}(t) = \rho_{3,2}(t) = \rho_{4,2}(t) = \rho_{4,3}(t) = 0$$

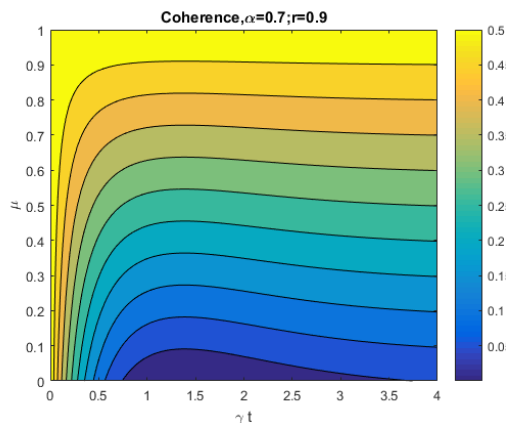


شکل 1. تحول مخلوط شدگی سیستم دو کیوبیتی به ازای $\alpha=0.7$ و $r=0.9$ در کانال میرایی دامنه حافظه دار



شکل 2. تحول هم دوسی سیستم دو کیوبیتی به ازای $\alpha=0.7$ و $r=0.9$ در کانال میرایی دامنه حافظه دار

شکل های 1 و 2 نشان می دهند که در کانال میرایی دامنه با گذشت زمان هم دوسی کاهش یافته است و مخلوط شدگی سیستم با گذشت



شکل 6. واهم دوسی سیستم دو کیوبیتی به ازای $\alpha=0.7$ و $r=0.9$ در کانال واقطش حافظه دار

نتیجه گیری

در این مقاله به مطالعه تحول هم دوسی کوانتومی و مخلوط شدگی در کانال های مختلف پرداختیم. شکل ها تایید کننده نقش حفاظت کننده کانال های حافظه دار در حفظ هم دوسی و میزان مخلوط شدگی هستند. هر چه ضریب حافظه کانال بیشتر باشد محافظت از هم دوسی و مخلوط شدگی سیستم فیزیکی بیشتر است. اگر کانال ها بی حافظه باشند واهم دوسی در کانال میرایی دامنه بیشتر حفظ می شود. واهم دوسی با گذشت زمان در کانال های میرایی فاز بی حافظه و واقطش بی حافظه ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد. اگر کانال ها را حافظه دار در نظر بگیریم مشاهده می شود که کانال واقطش و میرایی فاز بیشترین هم دوسی را در مقایسه با کانال میرایی دامنه خواهد داشت، در کانال میرایی دامنه با گذشت زمان هم دوسی کم می شود. با گذشت زمان در کانال میرایی فاز و واقطش در ابتدا مخلوط شدگی زیاد و سپس کاهش می یابد. کانال میرایی دامنه با گذشت زمان کمترین میزان مخلوط شدگی را نشان می دهد

مرجع ها

- [1] Awasthi, Natasha, Joshi Dheeraj Kumar, and Surbhi Sachdev. "Variation of quantum speed limit under Markovian and non-Markovian noisy environment." *Laser Physics Letters* 19.3 (2022): 035201.
- [2] Paulson, K. G., and Subhashish Banerjee. "Quantum speed limit time: role of coherence." *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 55.50 (2022)
- [3] Guo, You-neng, et al. "Generation and protection of steady-state quantum correlations due to quantum channels with memory." *Quantum Information Processing* 15.12 (2016): 5129-5144.
- [4] Awasthi, Natasha, et al. "Quantum speed limit time for correlated quantum channel." *Quantum Information Processing* 19 (2020): 1-17.

تحول یافته را مشابه با کانال میرایی دامنه بدست می آوریم و در این جا آنها را نمی نویسیم.

شکل های 3 و 4 نشان می دهند که هم دوسی در ابتدا با گذشت زمان کاهش و سپس افزایش می یابد. با گذشت زمان مخلوط شدگی افزایش می یابد.

کانال واقطش حافظه دار

در انتها به بررسی تحول یک سیستم دو کیوبیتی تحت کانال حافظه دار واقطش می پردازیم. در این کانال ماتریس چگالی به حالت $\frac{I}{4}$ تحول می یابد که در اینجا I ماتریس یکانی است. عملگرهای کراوس برای سیستم دو کیوبیتی که کانال واقطش بی حافظه روی آن اعمال می شود، به صورت زیر است [3]:

$$E_{i,j} = \sqrt{p_i p_j} \sigma_i \otimes \sigma_j \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3 \quad (13)$$

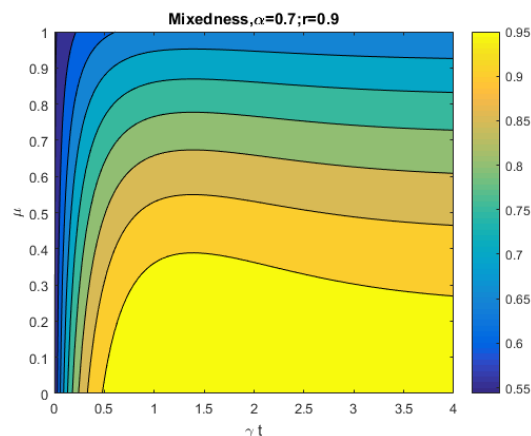
$$p_0 = 1 - p, p_1 = p_2 = p_3 = \frac{p}{3}.$$

آهنگ واپاشی را در این کانال γ است که $p = 1 - e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ که نشان می دهد.

اگر کانال حافظه دار باشد عملگرهای کراوس به صورت زیر است

$$E_{k,k} = \sqrt{p_k} \sigma_k \otimes \sigma_k \quad (14)$$

عناصر ماتریس چگالی تحول یافته را مشابه با کانال میرایی دامنه بدست می آوریم .



شکل 5. تحول مخلوط شدگی سیستم دو کیوبیتی به ازای $\alpha=0.7$ و $r=0.9$ در کانال واقطش حافظه دار

شکل های 5 و 6 نشان می دهند که با گذشت زمان هم دوسی ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد. مخلوط شدگی ابتدا با گذشت زمان زیاد و سپس کاهش می یابد

شواهد درهمتنیدگی بدون داشتن چارچوب مرجع مشترک

جان نثاری، وحید^۱؛ رضازاده، فاطمه^۱؛ رئیسی، صادق^۱؛ کریمی پور، وحید^۱

^۱دانشکده فیزیک دانشگاه شریف، خیابان آزادی، تهران

چکیده

وجود یک دستگاه مختصات مشترک یکی از پیش فرض‌های مورد نیاز شناسایی درهمتنیدگی برای یک سیستم دو-حالتی است که میان دو پایگاه دور از هم به اشتراک گذاشته شده‌اند. اما این پیش فرض به دلایل مختلفی می‌تواند با مشکل مواجه شود. در این مقاله، یک روش برای شناسایی درهمتنیدگی در غیاب دستگاه مختصات مشترک میان دو پایگاه ارائه شده است. نشان داده‌ایم که با اشتراک گذاری یک حالت تک-تایی (سینگلت) می‌توان نتیجه‌ی اندازه‌گیری هر شاهد درهمتنیدگی بر روی حالت به اشتراک گذاشته شده را به دست آورد. همچنین نشان داده‌ایم که با استفاده از روشی که در این مقاله معرفی می‌شود، می‌توان نتیجه‌ی هر اندازه‌گیری بر روی حالت به اشتراک گذاشته شده میان دو پایگاه، وقتی که چارچوب مرجع مشترک وجود ندارد، را به دست آورد.

واژه های کلیدی: شاهد درهمتنیدگی، حالت تک-تایی (سینگلت)، چارچوب مرجع مشترک.

Entanglement Witness with no Shared Reference Frame

Jannesary, Vahid¹; Rezazade, Fatemeh¹; Raeisi, Sadeq¹; Karimipour, Vahid¹

¹ Department of Physics, University of Sharif, Tehran,

Abstract

Having common reference frames, i.e. aligned coordinate systems, is one of the presumptions in witnessing entanglement in a two-party state possessed by two remote parties. This assumption may fail for many reasons. In this article, we propose a method for witnessing entanglement in the absence of any common coordinate systems. We show that with shared singlet states, no matter what kind of witness the two parties have in mind and no matter what the dimension of the state is, the two remote parties can still witness entanglement with the same efficiency as the original witness. Beyond the context of Entanglement Witnesses, our method works also for remote measurements of observables of particles (entangled or not) in laboratories which may have deficiency in their resources.

Keywords: Entanglement Witness, Shared Reference Frame, Singlet state

PACS No. 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.67.a.

مقدمه

ماتریس‌های چگالی در فضای $D(H_A)$ و $D(H_B)$ هستند. می‌دانیم که شواهد درهمتنیدگی ماتریس‌های بلوکی مثبت و نه کاملاً مثبت هستند و به ازای هر حالت درهمتنیده ρ حتماً می‌توان یک شاهد درهمتنید W یافت به طوری که $\text{Tr}(W\rho) < 0$ باشد [۱]. هر شاهد درهمتنیده را می‌توان به صورت

$$W = \sum A_i \otimes B_i,$$

تجزیه کرد که در آن A_i, B_i عملگرهای موضعی هستند که آلیس و باب به صورت جداگانه بر روی ذراتی که در دست دارند

فرض کنید که H_A و H_B فضای هیلبرت مربوط به دو ذره باشد که میان آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده‌اند. فضای $D(H)$ را فضای همه‌ی ماتریس‌های چگالی مربوط به H در نظر می‌گیریم که یک مجموعه‌ی محدب است. یک حالت جدایی‌پذیر در فضای $D(H)$ به صورت $\rho = \sum p_i \rho_{a,i} \otimes \rho_{b,i}$ نشان داده می‌شود که در آن p_i نمایش‌دهنده‌ی احتمالات و $\rho_{a,i}$ و $\rho_{b,i}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی

اندازه‌گیری کرده و سپس با ارسال نتایج اندازه‌گیری‌ها به یکدیگر و با جمع کردن آمار نهایی به دست آمده، مقدار چشمداشتی W را به دست می‌آورند. اما چنین کاری نیاز به داشتن یک چارچوب مرجع مشترک میان آلیس و باب دارد، چرا که در صورتی که چنین دستگاه مشترکی وجود نداشته باشد، نتایج اندازه‌گیری‌های آلیس و باب برای یکدیگر بی‌معنی خواهد بود.

ایده‌ی اصلی این مقاله بر اساس فرابرد کوانتومی ناقص برقرار است. می‌دانیم که در یک فرابرد کوانتومی کامل [۲] که نیازمند چارچوب مرجع مشترک است، آلیس می‌تواند یک حالت کوانتومی که در آزمایشگاه خود دارد را با استفاده از یک حالت بل که میان او و باب به اشتراک گذاشته شده، و انتقال دو بیت اطلاعات به صورت کامل منتقل کند. اما وقتی که چارچوب مرجع مشترک میان دو پایگاه وجود نداشته باشد، نمی‌توان این پروتکل را به صورت کامل اجرا کنیم. در فرابرد کوانتومی استاندارد، آلیس باید یک اندازه‌گیری در پایه‌ی بل انجام دهد و سپس نتیجه‌ی اندازه‌گیری خود را برای باب ارسال کند. باب نیز از این اطلاعات استفاده کرده و حالت مورد نظر را به صورت کامل بازایی می‌کند. توجه کنید که به دلیل خطی بودن رابطه‌ی حالت‌های خالص و مخلوط، کافی است محاسبات را تنها خالص انجام دهیم. حال فرض کنید که یک حالت دوکیوبیتی میان آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است. در صورتی که آلیس و باب چارچوب مرجع مشترک داشته باشند، آلیس می‌تواند با استفاده از فرابرد کوانتومی کامل، که البته نیازمند اشتراک گذاری یک حالت کمکی بل است، حالتی که در دست دارد را به صورت کامل به دستگاه باب منتقل کند. سپس باب با انجام دادن اندازه‌گیری مورد نظر، مقدار چشمداشتی هر عملگری را بر روی حالتی که میان او و آلیس به اشتراک گذاشته شده بود را به دست می‌آورد. این فرایند که با نام مبادله‌ی درهمتنیدگی شناخته می‌شود، در حالتی که دستگاه آلیس و باب هم جهت نباشند، کاربرد نخواهد داشت. ما در این مقاله نشان داده‌ایم که با انجام دادن فرابرد ناقص کوانتومی، که نیازمند چارچوب مرجع مشترک نیست، نیز می‌توان درهمتنیدگی حالت به اشتراک گذاشته شده را با استفاده از شواهد درهمتنیدگی به دست آورد. برای انجام این کار آلیس باید یک اندازه‌گیری غیر وابسته به دستگاه مختصات انجام

دهد و نتیجه‌ی اندازه‌گیری خود را با استفاده از یک بیت کلاسیکی برای باب ارسال کند. سپس نشان می‌دهیم با این که حالت آلیس به صورت کامل نمی‌تواند در دستگاه باب بازایی شود، باب می‌تواند درهمتنیدگی حالت اولیه‌ی به اشتراک گذاشته شده میان دو پایگاه بود را شناسایی کند. البته برای انجام این کار نیاز به اشتراک گذاری یک حالت سینگلت کمکی دارند. لازم به ذکر است که برای به دست آوردن مقدار چشمداشتی، آلیس و باب به مقدار زیادی حالت اولیه و همچنین حالت سینگلت برای انجام این پروتکل نیاز خواهند داشت. این پروتکل نه تنها برای دو کیوبیت، بلکه برای هر بعدی برقرار است. همچنین این پروتکل توانایی به دست آوردن مقدار چشمداشتی هر عملگر دیگری، علاوه بر شواهد درهمتنیدگی، را نیز دارد.

شاهد درهمتنیدگی برای حالت‌های دوکیوبیتی

برای این که بتوانیم موضوع این مقاله را به خوبی شرح دهیم، نیاز است که ابتدا نشانه‌گذاری‌هایی که در ادامه از آن‌ها استفاده شده را معرفی کنیم. شکل ۱ چیدمان اصلی مورد نیاز در این مقاله را نشان می‌دهد. ذراتی که در دستگاه آلیس هستند را با a, a' و ذراتی که در دستگاه باب هستند را با b, b' نشان می‌دهیم.

در ابتدا برای روشن‌تر شدن موضوع، فرابرد ناقص کوانتومی برای یک حالت دوکیوبیتی را شرح می‌دهیم. فرض کنید آلیس حالت زیر را در اختیار دارد

$$|\phi_{a'}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

همچنین حالت سینگلت

$$|\psi_{ab}\rangle = \frac{1}{2}(|0,1\rangle - |1,0\rangle),$$

میان آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است. کیوبیت‌های a, a' نزد آلیس و کیوبیت b نزد باب است. حالت نهایی که میان آلیس و باب وجود دارد به شرح زیر است

$$|\Phi_{a'ab}\rangle := |\phi_{a'}\rangle \otimes |\psi_{ab}\rangle = \frac{1}{2}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (|0,1\rangle - |1,0\rangle).$$

توجه کنید که در این معادله همه‌ی حالت‌ها در مختصات باب نوشته و بنابراین همه‌ی $|0\rangle, |1\rangle$ ها مختص دستگاه باب هستند. حالت سینگلت می‌تواند توسط یک نفر سوم تولید شده و برای آلیس و باب به صورت انتقال موازی فرستاده شود، که در همه‌ی

واقع می‌خواهیم نشان دهیم که باب در همه‌ی مواقع، می‌تواند یک اندازه‌گیری مناسب انجام دهد تا نتیجه‌ی زیر حاصل شود:

$$Tr(W_{bb'}^{(i)} \rho_{bb'}^{(i)}) = Tr(W \rho),$$

که در آن $W_{bb'}^{(i)}$ اندازه‌گیری‌های باب است وقتی که آلیس نتیجه‌ی π_i به دست می‌آورد. در بخش بعد نشان می‌دهیم که اندازه‌گیری‌های باب، وقتی که آلیس نتیجه‌ی π_0 به دست می‌آورد همان شاهد درهم‌تنیدگی مورد نظر، W ، و وقتی که آلیس نتیجه‌ی π_1 به دست می‌آورد به صورت خواهد بود:

$$W_{bb'}^{(1)} = 2I \otimes W_2 - 3W, W_2 = Tr(W).$$

شاهد درهم‌تنیدگی برای حالت‌های کلی

در این بخش می‌خواهیم پروتکلی که در بخش قبل توضیح دادیم را برای هر بعدی بررسی کنیم. با اشتراک گذاری یک حالت بل بعدی

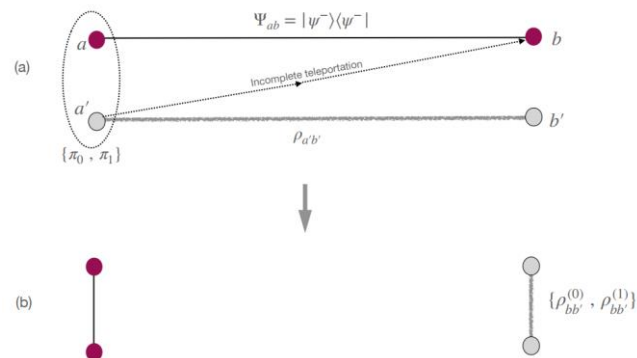
$$|\phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j, j\rangle,$$

و اندازه‌گیری در پایه‌های بل

$$|\phi_{m,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \omega^{jm} |j, j+n\rangle,$$

که در آن $\omega^d = 1$ است، می‌توان عمل فرابرد کوانتومی در d بعد را انجام داد. در پروتکلی که شرح دادیم، آلیس فقط می‌تواند اندازه‌گیری‌های اسپین کل انجام دهد، چرا که این اندازه‌گیری نیاز به اشتراک گذاری یک چارچوب مشترک ندارد و در همه‌ی دستگاه‌ها یکسان است. اما برای تکمیل پروتکل نیاز به اشتراک گذاری یک حالت کمکی نیز داریم. این حالت کمکی باید نسبت به عمل دوران $R \otimes R \in SO(3) \otimes SO(3)$ ناورد باقی بماند. این حالت را با $|\psi_{00}\rangle$ نمایش می‌دهیم و با حالت $|\psi_{00}\rangle$ که تحت عمل $U \otimes U^* \in SU(d) \otimes SU(d)$ ناورد است، تفاوت دارد. بنابراین حالت کمکی و اندازه‌گیری‌های انجام شده توسط آلیس باید با توجه به ناوردایی نسبت به عمل دوران انجام پذیرد. آلیس یک اندازه‌گیری با دو عملگر تصویری $\{\pi_0, \pi_1\}$ انجام می‌دهد که در آن π_0 عملگر تصویر به فضای اسپین کل با مقدار صفر و $\pi_1 = I - \pi_0$ عملگر تصویر به فضای اسپین کل با مقدار غیر صفر است. برای ادامه‌ی کار فرض می‌کنیم که $d = 2j + 1$

دستگاه‌ها به همین فرم است. همچنین فرض کرده‌ایم که حالت $|\phi_{00}\rangle$ که برای آلیس ناشناخته است نیز با توجه به دستگاه مختصات باب نوشته شده. این حالت اگر با توجه به دستگاه مختصات آلیس نوشته شود ضرایب متفاوتی خواهد داشت، اما ما در اینجا به فرابرد حالت توجه داریم و نه انتقال ضرایب.



شکل ۱: یک حالت ناشناخته‌ی $\rho_{a'b'}$ و یک حالت سینگلت ψ_{ab} میان آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است. آلیس اندازه‌گیری‌های مستقل از دستگاه مختصات π_0, π_1 انجام می‌دهد و نتایج اندازه‌گیری خود را برای باب ارسال می‌کند. حالتی که با a' نشان داده شده است به صورت ناقص به دستگاه باب منتقل می‌شود و با قسمت b' که باب قبلاً در دست داشت، حالت $\rho_{bb'}$ را تشکیل می‌دهد. حال باب می‌تواند درهم‌تنیدگی این حالت را به دست آورد که برابر با درهم‌تنیدگی حالت اولیه‌ی به اشتراک گذاشته شده میان او و آلیس، $\rho_{a'b'}$ است.

حال آلیس یک اندازه‌گیری مستقل از دستگاه مختصات انجام می‌دهد. می‌دانیم اندازه‌گیری مستقل از دستگاه مختصات برای دو کیوبیت همان اندازه‌گیری اسپین کل است. عملگرهای تصویری این اندازه‌گیری را با π_0, π_1 نشان می‌دهیم

$$\pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle), \quad \pi_1 = 1 - \pi_0,$$

که هر کدام از آن‌ها عملگرهای تصویر به زیرفضای اسپین کل با مقدار صفر و یک هستند. اندازه‌گیری اسپین کل تحت عمل دوران هیچ تغییری نمی‌کند و بنابراین می‌توان گفت مستقل از دستگاه مختصات است. سپس آلیس نتیجه‌ی اندازه‌گیری‌های خود را توسط یک بیت اطلاعات به باب ارسال می‌کند. باب نیز با توجه به بیت دریافتی، یک اندازه‌گیری بر روی حالتی که در دست دارد انجام می‌دهد. وقتی که آلیس نتیجه‌ی π_i به دست می‌آورد، حالتی که در دستگاه باب تولید می‌شود را با $\rho_{bb'}^{(i)}$ نمایش می‌دهیم. در

$$p_0 = \frac{1}{(2j+1)^2} \quad \text{and} \quad p_1 = 1 - \frac{1}{(2j+1)^2}.$$

در اینجا ρ حالت اولیه درهمتنیده‌ی به اشتراک گذاشته شده میان آلیس و باب است، یعنی $\rho_{a'b'} = \rho$.

همان‌گونه که توضیح دادیم، باب باید متناسب با بیت‌هایی که آلیس برای او ارسال می‌کند، یک عملگر بر روی حالتی که در دست دارد اندازه‌گیری کند به طوری که نتیجه‌ی نهایی هر کدام از اندازه‌گیری‌ها برابر با $Tr(W\rho)$ باشد. اندازه‌گیری‌های نهایی به صورت زیر هستند

$$W_{bb'}^{(0)} = W,$$

$$W_{bb'}^{(1)} = (2j+1)I \otimes W_2 - 4j(j+1)W.$$

با انجام این اندازه‌گیری‌ها و با انجام یک سری محاسبات ریاضی، می‌توان به نتیجه‌ی زیر رسید

$$Tr(W_{bb'}^{(i)} \rho_{bb'}^{(i)}) = Tr(W\rho),$$

که همان نتیجه‌ی مورد نظر است.

توجه کنید که روشی که در این مقاله ارائه شد، می‌تواند برای اندازه‌گیری مقدار چشمداشتی هر عملگری بر روی یک حالت دو-قسمتی که میان آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده، مورد استفاده قرار گیرد. برای انجام این کار، کافی است به جای W از عملگر مورد نظر استفاده گردد.

نتیجه گیری

در این مقاله نشان دادیم که آلیس و باب می‌توانند بدون وجود یک چارچوب مرجع مشترک، مقدار چشمداشتی هر عملگری بر روی حالتی که میان آن‌ها به اشتراک گذاشته شده را به دست آورند. این کار با کمک حالت سینگلت، یعنی حالتی که اسپین کل آن برابر با صفر است و بنابراین به چارچوب متخصصات وابستگی ندارد، انجام می‌شود.

مرجع‌ها

- [1] M. Horodecki; P. Horodecki; R. Horodecki; "Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions"; Physics Letters A, 223(1-2):1-8, nov 1996.
- [2] B. Charles H.; Brassard, Gilles; Crépeau, Claude; Jozsa, Richard; Peres, Asher; Wootters, William K.; "Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels"; Physical Review Letters. 70 (13): 1895-1899.

است که در آن j بیانگر اسپین کل هر کدام از ذرات است. در ابتدا فرض کنید که می‌خواهیم عمل فرایرد ناقص کوانتومی را برای یک حالت $\rho_{a'}$ توسط آلیس انجام دهیم و پس از آن می‌توانیم به سراغ انجام پروتکل اصلی، که همان چک کردن درهمتنیدگی حالت به اشتراک گذاشته شده میان آلیس و باب است و به آن مبادله‌ی ناقص درهمتنیدگی می‌گوییم، برویم. پس از اندازه‌گیری آلیس، حالتی که برای باب تولید می‌شود به صورت زیر خواهد بود:

$$p_0 \rho_b^{(0)} + p_1 \rho_b^{(1)} =: X_b^{(0)} + X_b^{(1)},$$

که در آن

$$X_b^{(i)} = Tr_{aa'}[(\pi_i)_{aa'}(\rho_{a'} \otimes \Psi_{ab})(\pi_i)_{aa'}], \quad i=0,1,$$

و احتمال هر کدام از این اندازه‌گیری‌ها به شرح زیر است

$$p_i = Tr_{aa'b}[(\pi_i)_{aa'}(\rho_{a'} \otimes \Psi_{ab})(\pi_i)_{aa'}].$$

توجه کنید که حالت‌های بالا به هنجار نیستند و حالت‌های به هنجار شده به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\rho_b^{(i)} = \frac{X_b^{(i)}}{p_i}.$$

برای انجام مراحل بعد ابتدا نیاز داریم که حالت سینگلت برای دو ذره با اسپین j را یادآوری کنیم. به سادگی می‌توان دید که این حالت یکتا است و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$|\psi_{ab}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^m |m_a, -m_b\rangle.$$

در فرمول بالا ما از فرم کوتاه شده $|j, m\rangle = |m\rangle$ استفاده کرده‌ایم. می‌توان چک کرد که حالت یاد شده یک حالت سینگلت است، چرا که معادلات زیر برای آن صادق هستند

$$J_z |\psi\rangle = J_{\pm} |\psi\rangle = 0.$$

بنابراین حالت اولیه‌ی آلیس، $\rho_{a'}$ ، که یک حالت آمیخته در نظر گرفته شده بود، به ما این اجازه را می‌دهد همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده، این معادلات را برای تبادل درهمتنیدگی از جفت $(a'b')$ به جفت (bb') انجام دهیم. می‌توان نشان داد که حالت‌های باب پس از اندازه‌گیری آلیس به صورت

$$\rho_{bb'}^{(0)} = \rho \quad \text{and} \quad \rho_{bb'}^{(1)} = \frac{(2j+1)(I \otimes \rho_2) - \rho}{4j(j+1)},$$

هستند، که هر کدام از آن‌ها با احتمالات زیر تولید می‌شوند

استفاده از ساختار PS-EOM-PS در سیستم‌های BB84 بازه‌ی زمانی

رضائی شاد، دنیا سادات^{۱،۲،۳}؛ رضایی، محمد^{۱،۴}؛ طباطبائی، فروغ السادات^۳؛ صالحی، جواد^{۲،۴}

^۱ مرکز کوانتوم شریف، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

^۲ دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

^۳ دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

^۴ پژوهشکده جامع علوم و فناوری‌های همگرا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چکیده

سیستم‌های توزیع کلید کوانتومی BB84 بازه‌ی زمانی، علاوه بر امکان ارسال فوتون در فواصل طولانی بر روی فیبر، استفاده از ابعاد دلخواه (کیودیت) برای جاسازی اطلاعات کلید را ممکن می‌سازد. ساختار مرسوم تداخل‌سنج ماخ‌زندر در سیستم BB84 بازه‌ی زمانی، دارای احتمال موفقیت $1/2$ برای ارسال و آشکارسازی کیوبیت در هر دو سمت فرستنده و گیرنده می‌باشد که نرخ دریافت کلید خام را به طور چشم‌گیری کاهش می‌دهد. در این مقاله، ساختار PS-EOM-PS برای پیاده‌سازی عملگر هادامارد ارائه می‌شود که علاوه بر احتمال موفقیت نزدیک به 1، به سادگی قابل تعمیم به ابعاد دلخواه می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: پروتکل BB84، توزیع کلید کوانتومی، بازه‌ی زمانی، رمزنگاری.

The PS-EOM-PS structure in time-bin BB84 systems

Rezaeishad, Donya Sadat^{1,2,3}; Rezai, Mohammad^{1,4}; Tabataba, Foroogh Sadat³; A. Salehi, Jawad^{1,2,4}

¹ Sharif Quantum Center, Sharif University of Technology, Tehran

² Department of Electrical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran

³ Department of Electrical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan

⁴ Institute for Convergence Science & Technology, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

The time-bin BB84 quantum key distribution systems can transfer the photon over long distances on optical fibers and support the use of arbitrary dimension qudits to embed the key information. The traditional Mach-Zehnder interferometer structure in time-bin BB84 systems has a transmission and detection success probability of $1/2$ at both transmitter and receiver, which reduces the raw secret key rate. In this paper, the "PS-EOM-PS" configuration is offered for implementing the Hadamrd operator, which has a near-1 success probability and can be easily extended to arbitrary dimensions.

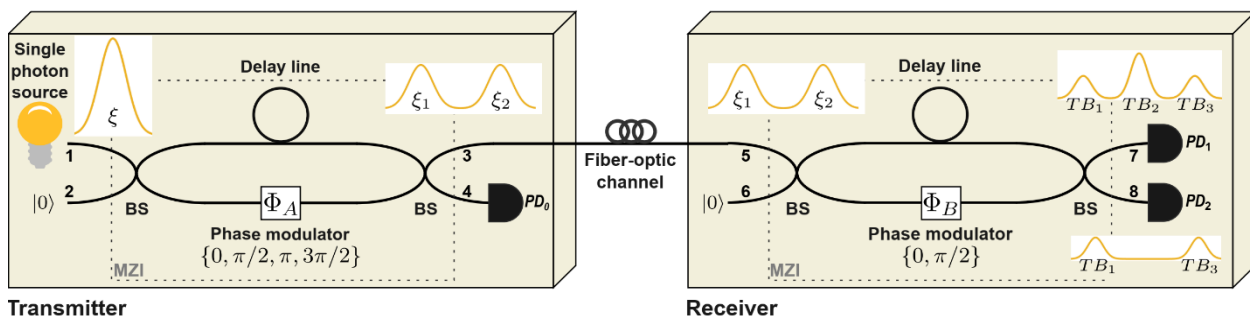
Keywords: BB84 protocol, Quantum key distribution, time-bin, cryptography.

PACS No. 03.67.Dd

مقدمه

اولیه‌ی الگوریتم BB84، از قطبش فوتون برای توزیع کلید استفاده شده است. پروتکل‌های توزیع کلید مبتنی بر قطبش فوتون، به دلیل مشکلاتی مانند انکسار مضاعف، تلفات وابسته به قطبش و نیاز به جبران‌ساز قطبش سریع، قابل انتقال در مسافت‌های طولانی بر روی فیبر نیستند. الگوریتم‌های مبتنی بر بازه‌ی زمانی می‌توانند در مسافت‌های طولانی بر روی فیبر انتقال یابند، با ابعاد بالاتر کد شوند و ظرفیت کانال را افزایش دهند. در این پژوهش، استفاده از

توزیع کلید کوانتومی یک روش به اشتراک‌گذاری کلید بین فرستنده و گیرنده است که برخلاف رمزنگاری کلاسیک، با به کارگیری قوانین فیزیک کوانتوم، امنیت بی‌قید و شرط ارتباط برقرار می‌شود. درجات آزادی مختلف فوتون، مانند قطبش، زمان، فرکانس، فاز و تکانه‌ی زاویه‌ای مداری می‌توانند در پیاده‌سازی روش‌های مختلف توزیع کلید کوانتومی به کار روند. در نسخه‌ی



شکل ۱. ساختار مرسوم فرستنده و گیرنده الگوریتم BB84 مدولاسیون بازه‌ی زمانی، با استفاده از تداخل سنج ماخ‌زندر.

BB84 با دو مجموعه پایه استفاده کرده و مدل ریاضی آن را از دیدگاه روابط مکانیک کوانتومی استخراج می‌کنیم.

BB84 بازه‌ی زمانی مبتنی بر ساختار PS-EOM-PS

شکل ۲، ساختار سیستم BB84 بازه‌ی زمانی پیشنهادی را نشان می‌دهد. در این شکل، ابتدا با استفاده از یک مدولاتور PPM، شکل موج فوتون را در یکی از دو بازه‌ی زمانی زود $|0\rangle$ یا دیر $|1\rangle$ قرار می‌دهیم (پایه‌های زمانی). سپس، با استفاده از دو سویچ، تعیین می‌شود که آیا فوتون در پایه‌های زمانی ارسال شود و یا با اعمال عملگر هادامارد، از پایه‌های فازی $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ استفاده شود. در گیرنده، پایه‌های زمانی یا فازی توسط سویچ انتخاب شده و بر اساس آن، گیت هادامارد ممکن است اعمال شود. در ادامه، ساختار PS-EOM-PS برای پیاده‌سازی گیت هادامارد با احتمال موفقیت ۱ در فرستنده و گیرنده استفاده شده است. این ساختار، به سادگی قابل تعمیم برای کیودیت ($d > 2$) می‌باشد.

مبنای این روش بر تجزیه‌ی یک ماتریس دلخواه مربعی $d \times d$ به ضرب حداکثر $2d-1$ ماتریس قطری و گردشی به صورت متناوب است [3]. برای فوتون‌های بازه‌ی زمانی، ساخت گیت دلخواه با استفاده از مدولاتور الکترونوری، به اختصار EOM، و شکل‌دهنده‌ی پالس، به اختصار PS، صورت می‌پذیرد [1].

EOM عملگر شیفت‌دهنده‌ی فاز زمانی است که به صورت

رابطه (۱) توصیف می‌شود و در آن، فاز EOM در لحظه‌ی t است.

$$\hat{U}_{\text{EOM}} = e^{-i\sum_t \phi(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)} = \prod_t e^{-i\phi(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)} \quad (1)$$

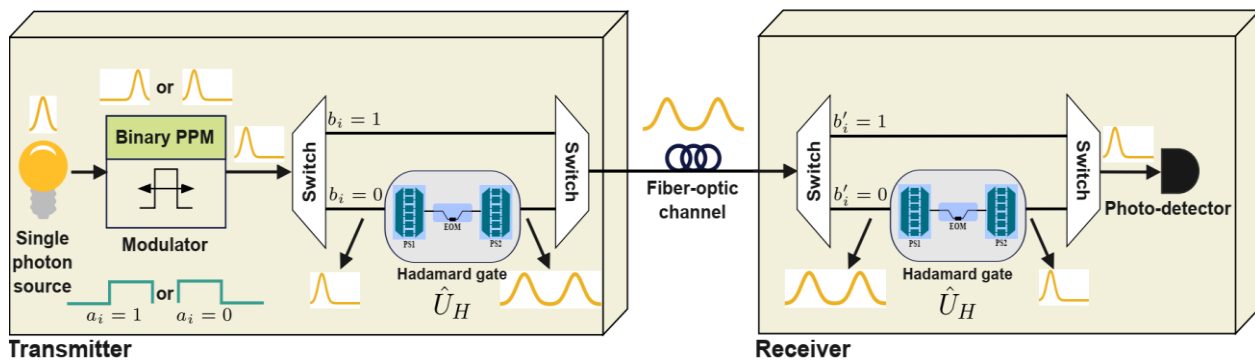
$$= \prod_t \hat{U}_{\text{EOM}}(t)$$

بازه‌ی زمانی ارسال فوتون به عنوان حامل انتقال اطلاعات کلید مورد توجه است.

BB84 بازه‌ی زمانی مبتنی بر ساختار ماخ‌زندر

شکل ۱، ساختار سیستم BB84 بازه‌ی زمانی مرسوم را نشان می‌دهد. در سمت فرستنده، فوتون تولید شده از منبع وارد تداخل‌سنج ماخ‌زندر می‌شود. این تداخل‌سنج شامل دو مسیر با طول متفاوت است که در یک مسیر، مدولاتور فاز مقادیر تصادفی 0 یا $\pi/2$ برای بیت صفر و π یا $3\pi/2$ برای بیت یک را اعمال می‌کند. در سمت گیرنده، فوتون دریافتی از تداخل‌سنج ماخ‌زندر که دقیقاً مشابه ماخ‌زندر فرستنده طراحی شده است، عبور می‌کند. مدولاتور فاز گیرنده به صورت تصادفی یکی از مقادیر 0 یا $\pi/2$ را اعمال می‌کند.

با توصیف ریاضی حالات کوانتومی در این روش، می‌توان نشان داد در صورتی که فرستنده و گیرنده پایه‌های یکسانی را انتخاب کنند، تنها نیمی از فوتون‌های دریافتی در گیرنده (که در بازه‌ی زمانی وسط آشکارسازی می‌شوند)، می‌توانند اطلاعات کلید را بازیابی کنند. به همین دلیل، احتمال موفقیت گیرنده در این روش در حالت باینری برابر با $1/2$ است و در حالت کلی d بعدی برابر با $1/d$ خواهد بود. به علاوه، پیاده‌سازی روش ماخ‌زندر در حالت d بعدی نیازمند افزایش خطی تعداد گیرنده‌های نوری می‌باشد. استفاده‌ی متناوب از المان‌های EOM و PS در [۱] برای طراحی گیت دلخواه مطرح شده است و در [2] از این ساختار، برای تولید پایه‌های تواما بدون بایاس در الگوریتم توزیع کلید کوانتومی با $d+1$ مجموعه پایه استفاده شده است. در ادامه، از ساختار PS-EOM-PS برای تولید گیت هادامارد در



شکل ۲. ساختار فرستنده و گیرنده الگوریتم BB84 مدولاسیون بازه‌ی زمانی با استفاده از شیفت دهنده‌های فاز زمان-فرکانس.

توصیف می‌شود که در آن، $\hat{U}_{PS}(\omega) = e^{-i\phi(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega)\hat{a}(\omega)}$ فاز PS در فرکانس ω است. با روندی مشابه آنچه برای EOM بیان شد می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\xi PS}^\dagger &= \hat{U}_{PS} \hat{a}_\xi^\dagger \hat{U}_{PS}^\dagger \\ &= \int d\omega \tilde{\xi}(\omega) e^{-i\phi(\omega)} \hat{a}^\dagger(\omega) \\ &= \int d\omega \tilde{\xi}_{PS}(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega)\end{aligned}\quad (7)$$

که در آن $\tilde{\xi}_{PS}(\omega) = \tilde{\xi}(\omega) e^{-i\phi(\omega)}$ شکل موج فرکانسی فوتون بعد از عبور از PS است.

به منظور بررسی تاثیر PS بر شکل موج زمانی فوتون، فرض می‌کنیم PS یک مدولاتور فاز متناوب با دوره‌ی تناوب Ω است. در این صورت، بسط سری فوری‌ی آن به صورت

$$e^{-i\phi(\omega)} = \sum_l c_l e^{i(l\frac{2\pi}{\Omega}\omega)} = \sum_l c_l e^{i(\kappa l\omega)} \quad (8)$$

خواهد بود که در آن $\kappa \triangleq \frac{2\pi}{\Omega}$ در نتیجه،

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\xi PS}^\dagger &= \sum_l c_l \int d\omega \tilde{\xi}_l(\omega) e^{i(\kappa l\omega)} \hat{a}^\dagger(\omega) \\ &= \sum_l c_l \int d\omega \tilde{\xi}_l(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) \\ &= \sum_l c_l \int dt \tilde{\xi}_l(t) \hat{a}^\dagger(t) \\ &= \sum_l c_l \int dt \tilde{\xi}(t - \kappa l) \hat{a}^\dagger(t)\end{aligned}\quad (9)$$

که $\tilde{\xi}_l(\omega) = \tilde{\xi}(\omega) e^{i(\kappa l\omega)}$ و $\tilde{\xi}_l(t) = \tilde{\xi}(t)$ تبدیل فوری‌ی $\tilde{\xi}_l(\omega)$ است.

برای بررسی تاثیر عملگر $\hat{T} = \hat{U}_{PS2} \hat{U}_{EOM} \hat{U}_{PS1}$ بر عملگر خلق، ابتدا توجه شود از آنجایی که شکل موج زمانی فوتون خارج از بازه‌ی زمانی n ام حول $\langle t_n \rangle$ صفر است،

با اعمال EOM بر عملگر خلق با شکل موج زمانی فوتون $\xi(t)$ ، که به صورت

$$\hat{a}_\xi^\dagger = \int d\omega \tilde{\xi}(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) = \int dt \xi(t) \hat{a}^\dagger(t) \quad (2)$$

تعریف می‌شود $[\xi]$ ، داریم

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\xi EOM}^\dagger &= \hat{U}_{EOM} \hat{a}_\xi^\dagger \hat{U}_{EOM}^\dagger \\ &= \int dt \xi(t) \hat{U}_{EOM} \hat{a}^\dagger(t) \hat{U}_{EOM}^\dagger \\ &= \int dt \xi(t) e^{-i\sum_t \phi(t') \hat{a}^\dagger(t') \hat{a}(t')} \hat{a}^\dagger(t) \hat{U}_{EOM}^\dagger\end{aligned}\quad (3)$$

با استفاده از رابطه‌ی جابجایی $[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t')] = \delta(t-t')$ و محاسبات ساده داریم

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\xi EOM}^\dagger &= \int dt \xi(t) e^{-i\phi(t) \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t)} \hat{a}^\dagger(t) e^{i\phi(t) \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t)} \\ &= \int dt \xi(t) \hat{U}_{EOM}(t) \hat{a}^\dagger(t) \hat{U}_{EOM}^\dagger(t).\end{aligned}\quad (4)$$

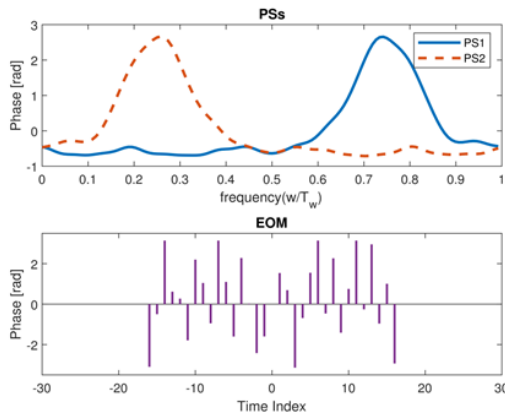
سپس، با به کارگیری لم معروف بیکر-کمپیل-هاسدورف، به رابطه‌ی

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\xi EOM}^\dagger &= \int dt \xi(t) e^{-i\phi(t)} \hat{a}^\dagger(t) \\ &= \int dt \xi_{EOM}(t) \hat{a}^\dagger(t)\end{aligned}\quad (5)$$

می‌رسیم که در آن، $\xi_{EOM}(t) = \xi(t) e^{-i\phi(t)}$ شکل موج زمانی فوتون بعد از عبور از EOM است.

PS عملگر شیفت‌دهنده‌ی فاز مولفه‌های فرکانسی است و به صورت

$$\begin{aligned}\hat{U}_{PS} &= e^{-i\sum_\omega \phi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}(\omega)} = \prod_\omega e^{-i\phi(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}(\omega)} \\ &= \prod_\omega \hat{U}_{PS}(\omega)\end{aligned}\quad (6)$$



شکل 3. مقادیر فازهای PS ها (در یک دوره تناوب) و EOM برای $p > 0.9999$ و $F > 0.9999$ با بهینه‌سازی.

$$F = \frac{\text{Tr}(\hat{T}^\dagger \hat{W}) \text{Tr}(\hat{W}^\dagger \hat{T})}{\text{Tr}(\hat{T}^\dagger \hat{T}) \text{Tr}(\hat{W}^\dagger \hat{W})} \quad (16)$$

را نزدیک به 1 حفظ کند. شکل 3، مقادیر فازهای ساختار PS-EOM برای پارامتر مانستگي $F > 0.9999$ و احتمال صحت $P > 0.9999$ را نشان می‌دهد. احتمال موفقیت حاصله به میزان پیچیدگی طراحی فازهای PS ها و EOM وابسته است.

نتیجه‌گیری

با استفاده از ساختار PS-EOM-PS که ترکیبی از ماتریس‌های گردشی-قطری-گردشی را فراهم می‌آورد، توانستیم گیت هادامارد را با پارامتر مانستگي $F > 0.9999$ و $P > 0.9999$ طراحی کنیم. به این ترتیب، در مقایسه با روش ماک-زندر، احتمال ارسال فوتون در فرستنده و احتمال دریافت اطلاعات فوتون در گیرنده، هر کدام دو برابر شده است که موجب افزایش نرخ دریافت کلید خواهد شد. به علاوه، ساختار معرفی شده روشی برای پیاده‌سازی BB84 در ابعاد دلخواه را ارائه می‌دهد.

مرجع‌ها

- [1] J. M. Lukens and P. Lougovski, "Frequency-encoded photonic qubits for scalable quantum information processing", *Optica* **4**, No. 1 (2017) 8-16.
- [2] J. M. Lukens, N. T. Islam, C. C. W. Lim, D. J. Gauthier, "Reconfigurable generation and measurement of mutually unbiased bases for time-bin qudits", *Applied Physics Letters* **112**, No. 11 (2018).
- [3] D. B. Uskov, L. Kaplan, A. M. Smith, S. D. Huver, J. P. Dowling, "Maximal success probabilities of linear-optical quantum gates", *Physical Review A* **79**, No. 4 (2009) 042326.
- [4] R. Loudon, "The quantum theory of light", OUP oxford, 2000.

یعنی $\xi_{(t_n)}(t) \approx 0$ برای $t \notin (\langle t_n \rangle - \frac{\delta}{2}, \langle t_n \rangle + \frac{\delta}{2})$ با انتخاب

$t_n = n\Delta$ که طول هر بازه زمانی است، می‌توان نوشت

$$\hat{a}_\xi^\dagger = \int dt \xi_{(t_n)}(t) \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}_{\xi_n}^\dagger = \hat{a}_n^\dagger \quad (10)$$

بنابراین، روابط (5) و (9) به ترتیب به

$$\hat{U}_{\text{EOM}} \hat{a}_n^\dagger \hat{U}_{\text{EOM}}^\dagger = e^{-i\phi_n} \hat{a}_n^\dagger \quad (11)$$

$$\hat{U}_{\text{PS}} \hat{a}_n^\dagger \hat{U}_{\text{PS}}^\dagger = \sum_l c_l \hat{a}_{n+l}^\dagger = \sum_l c_{l-n} \hat{a}_l^\dagger \quad (12)$$

تبدیل می‌شود. حال، با استفاده از روابط (11) و (12) داریم

$$\begin{aligned} \hat{T} \hat{a}_n^\dagger \hat{T}^\dagger &= (\hat{U}_{\text{PS2}} \hat{U}_{\text{EOM}} \hat{U}_{\text{PS1}}) \hat{a}_n^\dagger (\hat{U}_{\text{PS1}}^\dagger \hat{U}_{\text{EOM}}^\dagger \hat{U}_{\text{PS2}}^\dagger) \\ &= \hat{U}_{\text{PS2}} \hat{U}_{\text{EOM}} \left(\sum_l c_{l-n}^{(1)} \hat{a}_l^\dagger \right) \hat{U}_{\text{EOM}}^\dagger \hat{U}_{\text{PS2}}^\dagger \\ &= \hat{U}_{\text{PS2}} \left(\sum_l c_{l-n}^{(1)} e^{-i\phi_l} \hat{a}_l^\dagger \right) \hat{U}_{\text{PS2}}^\dagger \\ &= \sum_{l,m} c_{l-n}^{(1)} e^{-i\phi_l} c_{m-l}^{(2)} \hat{a}_m^\dagger \\ &= \sum_{l,m} \mathbf{C}_{n,l}^{(1)} \mathbf{D}_{l,l} \mathbf{C}_{l,m}^{(2)} \hat{a}_m^\dagger \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن، $\mathbf{C}_{n,l}^{(1)} \triangleq c_{l-n}^{(1)}$ و $\mathbf{C}_{l,m}^{(2)} \triangleq c_{m-l}^{(2)}$ درایه‌های ماتریس‌های گردشی PS در زمان هستند. به علاوه، $\mathbf{D}_{l,l} = e^{-i\phi_l}$ درایه‌های ماتریس قطری EOM در زمان می‌باشند. بنابراین، نمایش ماتریسی رابطه‌ی (10) به صورت $\hat{T} \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{T}^\dagger = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{a}}^\dagger$ خواهد بود که در آن، $\mathbf{T} = \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{D} \mathbf{C}^{(2)}$.

برای طراحی گیت دلخواه، در این جا گیت هادامارد، باید ماتریس‌های یکانی و قطری $\tilde{D}_1$ ، D_2 و $\tilde{D}_3$ را با روش‌های بهینه‌سازی به گونه‌ای جستجو کرد که ماتریس تبدیل حالت $V = (F^\dagger \tilde{D}_3 F) D_2 (F^\dagger \tilde{D}_1 F)$ با ابعاد $L \times L$ باید به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب شود که از پدیده‌ی الیاسینگ جلوگیری کند)، که برای تک فوتون با ماتریس انتقال حالت W به صورت

$$W = \begin{bmatrix} V_{\frac{L}{2}, \frac{L}{2}} & V_{\frac{L}{2}, \frac{L}{2}+1} \\ V_{\frac{L}{2}+1, \frac{L}{2}} & V_{\frac{L}{2}+1, \frac{L}{2}+1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

رابطه دارد، احتمال موفقیت

$$P = \frac{\text{Tr}(\hat{W}^\dagger \hat{W})}{\text{Tr}(\hat{T}^\dagger \hat{T})} \quad (15)$$

را بیشینه کند در حالی که پارامتر وفاداری

اثر پهن شدگی داپلری در شفافیت القایی الکترومغناطیسی در سیستم‌های کوانتومی چند تراز

رفیعی چهاربرج^۱، فرشید^۱؛ بخشی، زهرا^۲

گروه فیزیک، دانشکده ی علوم پایه، دانشگاه شاهد تهران

z.bakhshi@shahed.ac.ir

چکیده

عوامل بسیار زیادی در پدیده‌ی شفافیت القایی الکترومغناطیسی اثرگذار هستند که از جمله‌ی این عوامل می‌توان به اثر دما، فشار و پدیده‌ی داپلر اشاره کرد که ما در این مقاله به اثر پهن شدگی داپلری در شفافیت القایی الکترومغناطیسی در یک سیستم کوانتومی پنج سطحی می‌پردازیم. ما در اینجا یک محیط شفافیت القا شده‌ی الکترومغناطیسی (EIT) متشکل از اتم‌های آبشاری پنج سطحی برای کنترل سرعت گروهی نور چند فرکانس تحت گسترش داپلر را در نظر می‌گیریم، یک عبارت تحلیلی برای شاخص گروهی نور پروب به عنوان تابعی از پارامترهای نور جفت و دمای محیط بدست می‌آید. نشان داده شده است که با تنظیم شدت و یا فرکانس تنها نور کوپلینگ (جفت شده) ممکن است بطور همزمان سرعت گروهی نور گاوشر را در سه ناحیه فرکانسی مجزا دستکاری کرد، که هر یک می‌توانند بین حالت‌های زیر نوری و فوق نوری سوئیچ شوند. از سوی دیگر، اثر گسترش داپلر سرعت گروه را افزایش می‌دهد و محدوده‌ی تنظیم شدت جفت را برای جابه‌جایی بین حالت‌های فوق نور و زیر نور افزایش می‌دهد.

کلید واژه: اثر داپلر؛ شفافیت القایی الکترومغناطیسی؛ فرکانس؛ سرعت گروه

Effect of Doppler broadening in electromagnetic induced transparency in multi-level quantum systems

Rafiei Chaharborj¹, Farshid; Bakhshi, Zahra²

^{1&2}Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahid University of Tehran

Abstract

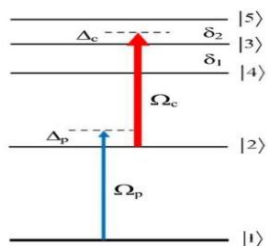
Many factors are effective in the phenomenon of electromagnetic induced transparency, among these factors we can mention the effect of temperature, pressure, and the Doppler phenomenon, which in this article we discuss the effect of Doppler broadening in electromagnetic induced transparency in a five-level quantum system. We consider here an electromagnetically induced transparency (EIT) medium composed of five-level cascaded atoms to control the group velocity of multi-frequency light under Doppler broadening, an analytical expression for the group index of probe light as a function of parameters Coupling light and ambient temperature are obtained. It is shown that by adjusting the intensity or frequency of only the Couplin (coupled) light it is possible to simultaneously manipulate the group velocity of the probe light in three distinct frequency regions, each of which can be between Sub-optical and super-optical modes can be switched. On the other hand, the Doppler broadening effect increases the group velocity and increases the range of coupling intensity adjustment to switch between superluminescent and subluminescent states.

Keyword: Doppler effect; electromagnetic induction transparency; frequency; Group speed

مقدمه

$|5\rangle - |3\rangle$ نشان می‌دهیم. تنظیم فرکانس پروب و چراغ‌های جفت شده به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta_p = \omega_p - \omega_{21}, \quad \Delta_c = \omega_c - \omega_{32} \quad (1)$$



شکل 1: سیستم آشناری پنج تراز

تکامل سیستم، که از طریق عملگر چگالی نشان داده می‌شود، با معادله لیوویل زیر نشان داده می‌شود (7):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \Lambda_\rho, \quad (2)$$

که در آن، H و Λ_ρ به ترتیب نشان دهنده مجموع عملگر هامیلتونی و آسایش هستند. با استفاده از تقریب‌های دوقطبی و موج دوار الکتریکی، عناصر ماتریس چگالی سیستم در قاب چرخان به صورت زیر مشتق می‌شوند (7):

$$\dot{\rho}_{51} = [i(\Delta_c + \Delta_p - \delta_2) - \gamma_{51}] \rho_{51} - \frac{i}{2} \Omega_p \rho_{52} - \frac{i}{2} \Omega_c a_{52} \rho_{21}, \quad (3)$$

$$\dot{\rho}_{41} = [i(\Delta_c + \Delta_p + \delta_1) - \gamma_{41}] \rho_{41} - \frac{i}{2} \Omega_p \rho_{42} - \frac{i}{2} \Omega_c a_{42} \rho_{21}, \quad (4)$$

$$\dot{\rho}_{31} = [i(\Delta_c + \Delta_p) - \gamma_{31}] \rho_{31} - \frac{i}{2} \Omega_p \rho_{32} - \frac{i}{2} \Omega_c a_{32} \rho_{21}, \quad (5)$$

$$\dot{\rho}_{21} = [i\Delta_p - \gamma_{21}] \rho_{21} - \frac{i}{2} \Omega_p (\rho_{22} - \rho_{11}) + \frac{i}{2} a_{31} \Omega_c \rho_{31} - \frac{i}{2} \Omega_c a_{42} \rho_{41} + \frac{i}{2} \Omega_c a_{52} \rho_{51}, \quad (6)$$

در اینجا به ترتیب، $\Omega_c = \frac{d_{32} E_c}{\hbar}$ و $\Omega_p = \frac{d_{21} E_p}{\hbar}$ فرکانس رابی ردیاب (Rabi Frequency) و میدان‌های نوری کوپل شده (coupling light fields) هستند. d_{ik} ، گشتاور دوقطبی انتقال بین حالات $|i\rangle$ و $|k\rangle$ است. $a_{32} = \frac{d_{32}}{d_{32}}$ ، $a_{42} = \frac{d_{42}}{d_{32}}$ و $a_{52} = \frac{d_{52}}{d_{32}}$ نقاط استحکام انتقال نسبی سه انتقال از سه سطح فرعی فوق ظریف $|3\rangle$ ، $|4\rangle$ و $|5\rangle$

شفافیت القایی الکترومغناطیسی (EIT) یک اثر تداخل کوانتومی است که باعث می‌شود یک محیط تشدید برای میدان نوری کاوشگر تحت القای سایر میدان‌های نوری جفت قوی شفاف تر و پراکنده‌تر شود (۱).

مطالعات اولیه در مورد سرعت دسته ای نور در سیستم‌های اتمی سه تراز موفقیت آمیز بوده است. با این حال، پیکربندی‌های اتمی سه تراز تنها یک روزه EIT ایجاد می‌کنند که در آن نور فقط در ناحیه‌ی فرکانس باریک کنترل می‌شود. یک راه ممکن برای دستیابی به EIT چند روزه‌ای استفاده از میدان‌های کنترل کننده‌ی اضافی برای برانگیختن سیستم‌های اتمی چند تراز مختلف است. اخیراً، یک مدل تجزیه‌ای برای مطالعه‌ی تاثیر غیرخطی خود-کر (self-Kerr nonlinearity) عظیم برای سرعت دسته‌ای نور چند فرکانس توسعه داده شده است. نتایج نشان داد که تحت غیرخطی خود-کر، می‌توان از میدان‌های ردیابی و یا جفت شده به عنوان برآمدگی‌ها برای پردازش نور ردیابی بین حالت‌های زیر نوری و فوق نور در سه ناحیه فرکانسی مجزا استفاده کرد. علاوه بر این، با استفاده از چنین طرح تحریک آشناری، می‌توان بالاترین حالت‌های الکترونیکی برانگیخته را انتخاب کرد که عمر طولانی دارند (2-6).

مدل نظری

ما یک سیستم اتمی از نوع آشناری پنج تراز را همانند شکل 1 در نظر می‌گیریم. یک نور لیزر پروب ضعیف (با فرکانس ω_p)، انتقال $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ را هدایت می‌کند، در حالی که یک نور لیزر جفت کننده شدید (با فرکانس ω_c)، به طور همزمان بین حالت $|2\rangle$ و سه حالت $|3\rangle$ ، $|4\rangle$ و $|5\rangle$ تغییر می‌کند. ما δ_1 و δ_2 را به ترتیب جداسازی فرکانس بین سطوح $|3\rangle - |4\rangle$ و

شیفت‌های داپلر، جداسازی فرکانس به این صورت تغییر می‌کند:

$$\Delta_p = \omega_p - \omega_{21} + \frac{\omega_p v}{c}, \quad \Delta_c = \omega_c - \omega_{32} - \frac{\omega_c v}{c} \quad (15)$$

در شرایط تعادل حرارتی در دمای T ، تعداد ذرات دارای سرعت v مطابق با توزیع ماکسول-بولتزمن زیر فرض می‌شود:

$$N(v) = \frac{N_0}{\mu \sqrt{v}} e^{-v^2/\mu^2} dv, \quad (16)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (17)$$

V سرعت مطلوب، m جرم ذره است. N_0 تعداد کل ذرات اشغال شده در واحد حجم است. تحت مفروضات فوق در مورد اثر داپلر، قابلیت در معادله (9) بر روی سرعت از $-\infty$ تا $+\infty$ ، داده شده توسط:

$$\chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(v) dv = \frac{i N_0 d_{21}^2 \sqrt{\pi}}{\epsilon_0 \hbar \left(\frac{\omega_p \mu}{c}\right)} e^{z^2} [1 - \text{erf}(z)], \quad (18)$$

که در آن، $\text{erf}(z)$ تابع خطا با آرگومان مختلط z است:

$$z = \frac{c}{\omega_p \mu} (B + iA), \quad (19)$$

با توجه به رابطه کرامرز-کرونیگ، ضرایب جذب و پراکندگی به ترتیب قسمت‌های χ'' موهومی و χ' حقیقی از قابلیت $\chi = \chi' + i\chi''$ را نشان می‌دهند. بنابراین ضرایب جذب و پراکندگی نور ردیاب را می‌توان از طریق روابط زیر تعیین کرد:

$$a = \frac{\omega_p \chi''}{c}, \quad (20)$$

$$n = 1 + \frac{\chi'}{2}. \quad (21)$$

شاخص گروه برای میدان کاوشگر در مورد گسترش داپلر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$n_g^{(D)} = n + \omega_p \frac{\partial n}{\partial \omega_p} \quad (22)$$

سرعت گروه و شاخص گروه به هم مرتبط هستند:

$$v_g^{(D)} = \frac{c}{n_g^{(D)}} \quad (23)$$

به سطح $|2\rangle$ هستند. γ_{ik} نشان‌دهنده سرعت فروپاشی انسجام نوری (optical coherence) ρ_{ik} است که به شکل زیر تعریف می‌شود (7):

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} (\sum_{E_j < E_i} \Gamma_{ij} + \sum_{E_l < E_k} \Gamma_{lk}), \quad (7)$$

در اینجا، Γ_{ik} سرعت فروپاشی جمعیت از سطح $|i\rangle$ به سطح $|k\rangle$ است. در حد میدان ضعیف نور ردیاب (پروب) و در رژیم ثابت (steady regime)، عنصر ماتریس ρ_{21} به صورت زیر تعیین می‌شود (7):

$$\rho_{21} = \frac{\frac{i}{2} \Omega_p}{\gamma_{21} + i\Delta_p + \frac{a_{32}^2 \left(\frac{\Omega_c}{2}\right)^2}{\gamma_{31} + i(\Delta_p + \Delta_c)} + \frac{a_{42}^2 \left(\frac{\Omega_c}{2}\right)^2}{\gamma_{41} + i(\Delta_p + \Delta_c + \delta_1)} + \frac{a_{52}^2 \left(\frac{\Omega_c}{2}\right)^2}{\gamma_{51} + i(\Delta_p + \Delta_c - \delta_2)}} \quad (8)$$

حساسیت محیط اتمی برای نور کاوشگر مربوط به عنصر ماتریس ρ_{21} توسط

$$\chi = 2 \frac{N d_{21}}{\epsilon_0 E_p} \rho_{21} = \frac{N d_{21}^2}{\epsilon_0 \hbar} \left(\frac{A}{A^2 + B^2} + i \frac{B}{A^2 + B^2} \right), \quad (9)$$

داده می‌شود که در آن A و B پارامترهای واقعی هستند:

$$A = -\Delta_p + \frac{A_{32}}{\gamma_{31}} + \frac{A_{42}}{\gamma_{42}} + \frac{A_{52}}{\gamma_{52}}, \quad (10)$$

$$B = \gamma_{31} + \frac{A_{32}}{\Delta_p + \Delta_c} + \frac{A_{42}}{\Delta_p + \Delta_c + \delta_1} + \frac{A_{52}}{\Delta_p + \Delta_c - \delta_2}, \quad (11)$$

و A_{ik} پارامترهای جفت شده موثر داده شده توسط

$$A_{32} = \frac{\gamma_{31}(\Delta_p + \Delta_c)}{\gamma_{31}^2 + (\Delta_p + \Delta_c)^2} a_{32}^2 \left(\frac{\Omega_c}{2}\right)^2, \quad (12)$$

$$A_{42} = \frac{\gamma_{41}(\Delta_p + \Delta_c + \delta_1)}{\gamma_{41}^2 + (\Delta_p + \Delta_c + \delta_1)^2} a_{42}^2 \left(\frac{\Omega_c}{2}\right)^2, \quad (13)$$

$$A_{52} = \frac{\gamma_{51}(\Delta_p + \Delta_c - \delta_2)}{\gamma_{51}^2 + (\Delta_p + \Delta_c - \delta_2)^2} a_{52}^2 \left(\frac{\Omega_c}{2}\right)^2, \quad (14)$$

برای یک محیط بخار، لازم است اثر پهن شدگی داپلری بر روی حساسیت در نظر گرفته شود. در این شرایط، اتمی با سرعت v که به سمت پرتو پروب حرکت می‌کند، به ترتیب یک شیفت فرکانس بالا (با $\frac{\omega_p v}{c}$) و شیفت پایین (با $-\frac{\omega_c v}{c}$) را برای نورهای ردیاب و جفت شده «می‌بیند». در چنین

مگاهرتز برای عدم وجود و 22 مگاهرتز برای وجود پهن شدگی داپلر انتخاب شده است.

نتیجه گیری

ما یک محیط اتمی آبشاری پنج ترازوی را برای دستکاری سرعت دسته ای (گروهی) نور ردیاب (پروپ) فرکانس چندگانه تحت پهن شدگی داپلری در نظر گرفتیم. یک عبارت تحلیلی برای شاخص دسته به عنوان تابعی از پارامترهای یک نور جفت کننده و دمای محیط به دست آمده است. نشان داده شده است که می توان شدت و یا فرکانس سرعت دسته کنترل میدان نور جفت شده ردیاب را در سه ناحیه فرکانس مجزا تنظیم کرد، که هر یک از آن ها امکان دستکاری بین حالت های زیر نوری و فوق نوری را فراهم می کند. از سوی دیگر، پهن شدگی داپلری سرعت دسته را افزایش می دهد و محدوده تنظیم مورد نیاز شدت جفت شده را برای جابجایی بین حالت های زیر نوری و فوق نوری افزایش می دهد.

مراجع

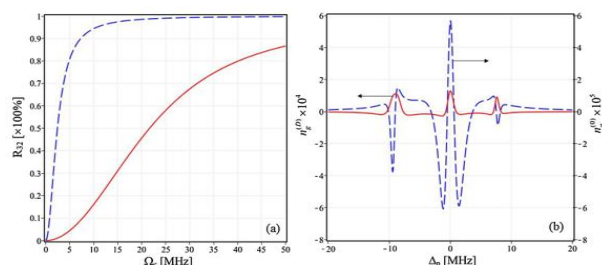
- [1] M. Fleischhauer, I. Mamoglu, and J. P. Marangos, "Electromagnetically Induced Transparency: Optics in Coherent Media", Rev. Mod. Phys. 77 (2005) 633.
- [2] I. H. Bae and H. S. Moon, "Continuous control of light group velocity from subluminal to superluminal propagation with a standing-wave coupling field in a Rb vapor cell," Phys. Rev. A 83 (5), 053806 (2011).
- [3] S. Dutta, "The incoherent pump rate: an optical tool for controlling the probe response and dispersion in a three-level Λ system in the presence of spontaneously generated coherence", Phys. Scr. 83 (2011) 015401 (7pp).
- [4] E. Paspalakis and P. L. Knight, "Electromagnetically induced transparency and controlled group velocity in a multilevel system", Phys. Rev. A 66 (2002) 015802.
- [5] J. Wang, L.B. Kong, X.H. Tu, K.J. Jiang, K. Li, H.W. Xiong, Yifu Zhu, M.S. Zhan "Electromagnetically induced transparency in multi-level cascade scheme of cold rubidium atoms", Phys. Lett. A 328 (2004) 437
- [6] A.T. Nguyen, D.L. Van and B.N. Huy, "Manipulating multi-frequency light in a five-level cascade-type atomic medium associated with giant self-Kerr nonlinearity", J. Opt. Soc. Am. B 35 (6) (2018) 1233-1239.
- [7] D. X. Khoa, P. V. Trong, L. V. Doai and N. H. Bang, "Electromagnetically induced transparency in a five-level cascade system under Doppler broadening: an analytical approach", Phys. Scr. 91 (2016) 035401

در مورد عدم وجود داپلر، شاخص خطی $n^{(0)}$ و شاخص دسته $n_g^{(0)}$ توسط:

$$n^{(0)} = 1 + \frac{Nd_{21}^2}{2\epsilon_0\hbar} \frac{A}{A^2+B^2} \quad (24)$$

$$n_g^{(0)} = \omega_p \frac{Nd_{21}^2}{2\epsilon_0\hbar} \left[\frac{A'(A^2+B^2) - 2A(AA' + BB')}{(A^2+B^2)^2} \right] \quad (25)$$

که در آن، A' و B' به ترتیب مشتقات A و B را بر روی ω_p نشان می دهند. ما اثر پهن شدگی داپلری را با ترسیم شاخص دسته در مقابل تنظیم فرکانس ردیاب برای موارد عدم وجود (خط چین) و حضور (خط جامد) پهن شدگی داپلری (در دمای اتاق $T = 300K$) در نظر می گیریم. حداکثر شاخص دسته را می توان در بازده شفافیت حدود 50% به دست آورد (6)، بنابراین برای مقایسه سرعت دسته در هر دو مورد، ما از شدت لیزر جفت کننده Ω_c در مقادیری استفاده کردیم که با بازده شفاف 50 درصد برای هر مورد مطابقت دارد. شکل 2(a) تغییر بازده شفاف R_{32} را با توجه به Ω_c نشان می دهد. همانطور که در شکل 2(b) نشان داده شده است، سه ناحیه فرکانس نور ردیاب وجود دارد (در مرکز $\Delta_p = -9MHz$ ، $\Delta_p = 0$ و $\Delta_p = 7.6MHz$) که هر کدام به ترتیب دارای شاخص دسته مثبت و منفی یا انتشار زیر نوری و فوق نوری هستند. از طرف دیگر، پهن شدگی داپلر منجر به کاهش شاخص دسته یا افزایش سرعت دسته در مقایسه با حالت غایب (عدم وجود) داپلر می شود.



شکل 2: نمودار بازده شفاف (a) R_{32} و شاخص دسته (b) برای مواردی که پهن شدگی داپلر وجود ندارد (خط چین) و وجود دارد (خط جامد) زمانی که $\Delta_c = 0$ در شکل 2(b)، مقدار Ω_c به ترتیب 2.5

ظرفیت‌های کانال لاندائو استریتر تعمیم یافته

شایان روفه^۱؛ وحید کریمی‌پور^۱

^۱ دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله یک تعمیم دو پارامتری از کانال لاندائو استریتر در سه بعد معرفی، ویژگی‌های هموردایی آن بررسی و کانال مکمل آن تعیین شده است. ظرفیت کانال برای انتقال اطلاعات با کمک درهم‌تنیدگی به طور دقیق محاسبه شده و نقشه رنگی آن، بر اساس پارامترهای کانال کشیده شده است. برای ظرفیت کوانتومی کانال، کران‌های بالا و پایین به ترتیب از طریق برنامه نویسی نیمه معین و محاسبه حداکثر اطلاعات هم‌دوس به دست آمده است. این محدوده‌ها به صورت بصری با استفاده از نقشه‌های رنگی نشان داده شده‌اند که بینش‌هایی را در مورد قابلیت‌های ارتباطی کوانتومی کانال ارائه می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: کانال لاندائو استریتر، هموردایی، ظرفیت با کمک درهم‌تنیدگی، ظرفیت کوانتومی

Capacities of Generalized Landau-Streater Channel

Roofeh, Shayan¹; Karimipour, Vahid¹

¹ Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran,

Abstract

This article introduces a two-parameter generalization of the Landau Streeter channel in three dimensions, exploring its covariant properties and determining its complementary channel. The entanglement-assisted capacity of the channel is accurately calculated, and a color map is generated based on the channel's parameters. For the quantum capacity of the channel, upper and lower bounds are derived through semi-definite programming and maximum coherent information calculation, respectively. These bounds are visually represented using two color maps, providing valuable insights into the channel's quantum communication capabilities.

Keywords: Landau-Streater Channel, Covariance, Entanglement-assisted capacity, Quantum capacity

PACS No. (11 Times New Roman, italic)

مقدمه

ظرفیت هستند [۲]، کانال‌های کوانتومی دارای تعاریف چندگانه ظرفیتی هستند که به نوع اطلاعات ارسال‌شده و منابع اضافی مورد استفاده در طول فرآیند بستگی دارد.

محاسبه ظرفیت‌های کانال کوانتومی به دلیل خاصیت ابرجمع‌پذیری توابع آنتروپی کوانتومی، عموماً دشوار است. این باعث می‌شود ارزیابی ظرفیت‌ها، حتی برای ساده‌ترین کانال‌های کیوبیتی، یک مشکل بسیار چالش‌برانگیز باشد. به عنوان مثال، با وجود تلاش‌های تحقیقاتی قابل توجه [۳]، ظرفیت کوانتومی کانال واقطبش [۴] ناشناخته باقی مانده است. کانال واقطبش پائولی این ویژگی را دارد

تئوری سیستم‌های کوانتومی باز تکامل یک حالت را از طریق یک کانال کوانتومی توصیف می‌کند که یک نگاشت کاملاً مثبت رد نگهدار (CPTP) است [۱]. هنگامی که یک سیگنال از طریق یک کانال کوانتومی منتقل می‌شود، تحت تاثیر نویز است، که اثر آن را می‌توان با کدهای تصحیح خطای کوانتومی کاهش داد. حداکثر نرخ که اطلاعات را می‌توان از طریق یک کانال کوانتومی مخابره کرد، به عنوان ظرفیت کانال کوانتومی شناخته می‌شود. شایان ذکر است که برخلاف کانال‌های کلاسیک که دارای یک تعریف واحد از

به ازای $j = 1$ است که تحت گروه کوچک‌تری از تقارن‌ها، هموردا است.

تعمیم دوپارامتری کانال لاندائو استریتر

کانال لاندائو استریتر، به ازای $j=1$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_{LS}(\rho) = \frac{1}{2}(J_x \rho J_x + J_y \rho J_y + J_z \rho J_z) \quad (2)$$

در این بعد به ازای هر عملگر یکه، کانال هموردا است [۶]:

$$\Phi_{LS}(U^\dagger \rho U) = V^\dagger \Phi_{LS}(\rho) V \quad (3)$$

که اگر U و V را در پایه بردار ویژه‌های J_z بنویسیم، خواهیم داشت [۶]:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$V = \begin{pmatrix} \overline{U_{33}} & -\overline{U_{32}} & \overline{U_{31}} \\ -\overline{U_{23}} & \overline{U_{22}} & -\overline{U_{21}} \\ \overline{U_{13}} & -\overline{U_{12}} & \overline{U_{11}} \end{pmatrix}.$$

در عبارت فوق، به علت اینکه ماتریس U یک ماتریس یکه است، با یک محاسبه ساده می‌توان دید که یکه بودن ماتریس V نیز از یکه بودن ماتریس U نتیجه می‌شود. اکنون تعمیم دو پارامتری کانال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Phi(\rho) = (1 - x - y)\rho + x\Phi_{LS}(\rho) + y\Phi_{LS}^+(\rho). \quad (5)$$

$\Phi_{LS}^+(\rho)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_{LS}^+(\rho) = \frac{1}{2}(J_x \rho J_x + J_y \rho J_y + K \rho K) \quad (6)$$

که در آن $K = |J_z|$ است. کلی‌ترین هموردایی که می‌توان برای

کانال رابطه (۵) پیدا

$$U \in \left(\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

که تحت همه تبدیل‌های یکه هموردا باشد، یعنی برای هر $U \in SU(2)$ ، داریم

$$\epsilon(U \rho U^\dagger) = U \epsilon(\rho) U^\dagger$$

این یک ویژگی اساسی است که در بعضی از کانال‌ها وجود دارد و محاسبه ظرفیت‌ها را تسهیل می‌کند.

در پردازش اطلاعات کوانتومی در ابعاد بالاتر، ارزیابی ظرفیت‌های کانال کوانتومی به یک کار بسیار سخت تبدیل می‌شود. دلیل آن بسیار ساده است، تعداد پارامترهای یک حالت کوانتومی در بعد دلخواه d ، با $d^2 - 1$ رشد می‌یابد. علاوه بر این، بر خلاف کانال‌های کبویی، که دانش تقریباً کاملی در مورد ساختار آن‌ها وجود دارد، اطلاعات کمی در مورد ساختار کانال‌های با ابعاد بالاتر وجود دارد. یک تفاوت مهم این است: در حالی که هر کانال کبویی که یونیتال، یعنی $\Phi(I) = I$ ، است به صورت ترکیبی محذب از نگاشت‌های یکه قابل نوشتن است، یعنی:

$$\Phi(\rho) = \sum_i p_i U_i \rho U_i^\dagger$$

چنین قضیه‌ای برای $d \geq 3$ کانال وجود ندارد. کانال لاندائو استریتر [۵]، که کانال معروف و شناخته شده است، شاید اولین نمونه از چنین کانالی باشد که قضیه فوق را نقض می‌کند. این کانال به صورت زیر تعریف شود:

$$\Phi_{LS}(\rho) = \frac{1}{j(j+1)}(J_x \rho J_x + J_y \rho J_y + J_z \rho J_z) \quad (1)$$

که در آن J_x ، J_y و J_z مولدهای $SU(2)$ هستند که بر روی فضای هیلبرت $(2j+1)$ بعدی عمل می‌کنند. علاوه بر این، کانال لاندائو استریتر یک نقطه بحرانی در فضای همه کانال‌های کوانتومی در بعد معین است، یعنی نمی‌توان آن را به صورت ترکیب محذب هر کانال دیگر صرف نظر از نوع آنها نوشت. این ویژگی حتی بیشتر به اهمیت محاسبه ظرفیت‌های کانال لاندائو استریتر می‌افزاید. این مسئله در مرجع [۶] به طور کامل بررسی شده و انواع مختلف ظرفیت‌های آن یا دقیقاً محاسبه شده و یا کران بالا و پایین آن گزارش شده است. هدف ما در این مقاله بررسی و بدست آوردن عبارات دقیق یا کران‌ها مختلف برای ظرفیت‌های تعمیم دو پارامتری کانال لاندائو استریتر

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad J_y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

کرد، به صورت زیر است.

$$(7)$$

$$J_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روابط (۹) کراوس اپراتورهای کانال مکمل (۵) به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{\Phi}(\rho) = \sum_{\alpha=1}^3 R_{\alpha} \rho R_{\alpha}^{\dagger},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-x-y} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{x+y}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{x} & 0 & 0 \\ \sqrt{x} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-x-y} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{x+y}{2}} \\ \sqrt{\frac{x+y}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1-x-y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{x+y}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{x-y}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ظرفیت کلاسیک با استفاده از درهم‌تنیدگی

ظرفیت به کمک درهم‌تنیدگی، نشان‌دهنده حداکثر نرخ است که در آن اطلاعات می‌تواند از طریق یک کانال کوانتومی منتقل شود، با فرض اینکه که فرستنده و گیرنده اجازه دارند حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده را به اشتراک بگذارند. ظرفیت کلاسیک به کمک درهم‌تنیدگی کانال Φ به صورت زیر تعیین می‌شود [۹]:

مکمل کانال لاندائو استریتر تعمیم یافته

قضیه انبساط اشتاین اشپرینگ یک نتیجه اساسی است که تکامل زمانی یک سیستم (S) همراه با یک محیط (E) را بر حسب یک عملگر یکانی کلی U، بیان می‌کند. با گرفتن رد جزئی از محیط، اثر عملیات بر روی سیستم را می‌توان آشکار کرد که یک نگاشت کاملاً مثبت است [۷]. این نگاشت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathcal{N}(\rho) = Tr_E [U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}], \quad (8)$$

که در آن ρ ماتریس چگالی سیستم و σ ماتریس چگالی محیط است. تکامل حالت محیط را نیز می‌توان مشابه همین با گرفتن رد جزئی از سیستم بدست آورد:

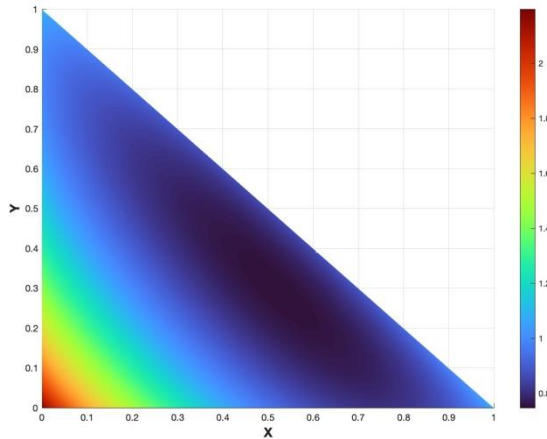
$$\mathcal{N}^c(\rho) = Tr_S [U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}].$$

هردوی $\mathcal{N}$ و $\mathcal{N}^c$ کانال‌های کوانتومی هستند بنابراین می‌توان آن‌ها را با کراوس اپراتورها نمایش داد. کراوس اپراتورهای این دو کانال با روابط زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند [۸].

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\rho) &= \sum_i K_i \rho K_i^{\dagger} \\ \mathcal{N}^c(\rho) &= \sum_{\alpha} \tilde{R}_{\alpha} \rho \tilde{R}_{\alpha}^{\dagger} \\ (K_i)_{\alpha\beta} &= (\tilde{R}_{\alpha})_{i\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

که i شماره عملگرهای کراوس و $\alpha\beta$ ورودی‌های ماتریس را در $(K_i)_{\alpha\beta}$ نشان می‌دهد. با نمایش کراوس اپراتورهای کانال (۵) در پایه بردار ویژه‌های J_z و با استفاده از روابط (۹) می‌توان کراوس اپراتورهای کانال مکمل را تعیین کرد. کراوس اپراتورهای کانال (۵) در پایه بردار ویژه‌های J_z عبارتند از:

مختلف ظرفیت را به ازای پارامترهای مختلف نشان می‌دهد و نمایشی بصری از عملکرد کانال در انتقال اطلاعات با کمک درهم‌تنیدگی ارائه می‌دهد.



شکل ۱: نمایش نقشه رنگی ظرفیت به کمک درهم‌تنیدگی برای کانال تعمیم یافته لاندائو استریتز، که در آن گرادیان رنگ نشان دهنده محدوده مقادیر ظرفیت مشاهده شده به ازای پارامترهای مختلف است.

ظرفیت کوانتومی

بیشترین نرخ که می‌توان اطلاعات کوانتومی را با اطمینان از طریق کانال کوانتومی Φ ارسال کرد، ظرفیت کوانتومی $Q(\Phi)$ ، گفته می‌شود. اطلاعات همدوس، $I_c(\Phi, \rho) = S(\Phi(\rho)) - S(\tilde{\Phi}(\rho))$ ، یک کمیت آنتروپیک است که می‌تواند برای بیان ظرفیت کوانتومی استفاده شود. حداکثر مقدار I_c در تمام حالت‌های ورودی ρ با $Q_1(\Phi)$ نشان داده می‌شود. برای تعریف ظرفیت کوانتومی یک کانال، $Q(\Phi)$ ، از ظرفیت کوانتومی تک حرفی استفاده می‌کنیم و مقدار ظرفیت را در بی‌نهایت بار استفاده از کانال محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Q_1(\Phi^{\otimes n}) \quad (14)$$

محاسبه مستقیم ظرفیت کوانتومی یک کار بسیار چالش برانگیز است، در نتیجه، به جای محاسبه مستقیم ظرفیت کوانتومی، معمولاً از تکنیک‌هایی برای بدست آوردن کران‌های بالا و پایین برای ظرفیت کوانتومی استفاده می‌شود.

$$C_{ea}(\Phi) = S(\rho) + S(\Phi(\rho)) - S(\rho, \Phi) \quad (11)$$

آنتروپی خروجی محیط، که به عنوان تبادلی آنتروپی شناخته می‌شود، با عبارت $S(\rho, \Phi) = S(\tilde{\Phi}(\rho))$ که در آن $\tilde{\Phi}$ کانال مکمل است نشان داده می‌شود. طبق گزاره ۹.۳ در مرجع [۱۰]، حداکثر ظرفیت مبتنی بر درهم‌تنیدگی یک کانال هموردا Φ ، برای یک حالت ناوردی به دست می‌آید. در حالت خاصی که Φ نسبت به یک نمایش کاهش ناپذیر از یک گروه، هموردا است، حداکثر ظرفیت در حالت کاملاً مخلوط به دست می‌آید. در نتیجه برای کانال (۵) داریم:

$$C_{ea}(\Phi) = S\left(\frac{I}{3}\right) + S\left(\Phi\left(\frac{I}{3}\right)\right) - S\left(\tilde{\Phi}\left(\frac{I}{3}\right)\right) \quad (12)$$

برای بدست آوردن ظرفیت به کمک درهم‌تنیدگی، ابتدا $\tilde{\Phi}\left(\frac{I}{3}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{\Phi}\left(\frac{I}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1-y-x & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{y}\sqrt{1-y-x}}{3} \\ 0 & \frac{x}{3} + \frac{y}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} + \frac{y}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{y}\sqrt{1-y-x}}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{3} \end{pmatrix} \quad (13)$$

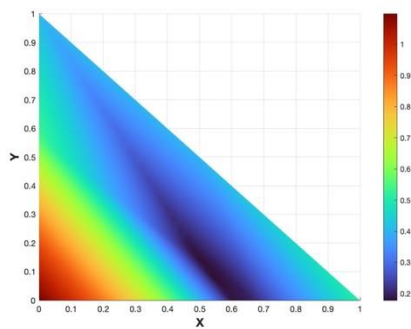
در ادامه مقادیر ویژه $\tilde{\Phi}\left(\frac{I}{3}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_3 \\ \tilde{\lambda}_4 \\ \tilde{\lambda}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} \\ \frac{x}{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{y}{3} - \sigma_1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ \sigma_1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \frac{\sqrt{9x^2 + 16xy - 18x + 8y^2 - 16y + 9}}{6}$$

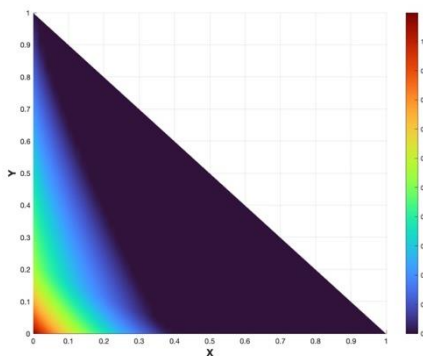
از آنجایی که کانال (۵) یونیتال است، $\Phi\left(\frac{I}{3}\right) = \frac{I}{3}$ می‌باشد. بنابراین، ظرفیت به کمک درهم‌تنیدگی را به صورت زیر می‌توان بدست آورد:

$$C_{ea} = 2 \log 3 + \sum_{i=1}^5 \tilde{\lambda}_i \log \tilde{\lambda}_i \quad (14)$$

شکل ۱ نقشه رنگی ظرفیت به کمک درهم‌تنیدگی کانال تعمیم یافته را برحسب پارامترهای کانال، نشان می‌دهد. گرادیان رنگ، سطوح



شکل ۲: نقشه رنگی برحسب x و y که کران بالای ظرفیت کانال تعمیم یافته لاندائو استریتز را با روش برنامه‌نویسی نیمه معین در نقاط مختلف نمایش می‌دهد.



شکل ۳: نقشه رنگی برحسب x و y که کران پایین ظرفیت کانال تعمیم یافته لاندائو استریتز را که از محاسبه ماکسیمم اطلاعات همدوس بدست آمده، در نقاط مختلف نمایش می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما ظرفیت ارسال اطلاعات به کمک درهم‌تنیدگی کانال تعمیم یافته لاندائو استریتز را بررسی و مقدار دقیق آن را پیدا کرده‌ایم و همچنین کران‌های بالا و پایینی را برای ظرفیت کوانتومی کانال تعیین کرده‌ایم. شکل ۱ نشان می‌دهد که هر چه مقدار x و y کمتر باشد، ظرفیت ارسال اطلاعات با کمک درهم‌تنیدگی بیشتر است. کران بالا بوسیله برنامه‌نویسی نیمه معین که از جمله مهم‌ترین پیشرفت‌ها در زمینه علوم کامپیوتر در دهه ۹۰ میلادی می‌باشد، تعیین شد. این کران برای ظرفیت کوانتومی، یک حد بحرانی را برای حداکثر نرخ انتقال اطلاعات کوانتومی قابل دستیابی تعیین می‌کند.

در این جا برای پیدا کردن کران بالای این کانال از برنامه‌نویسی نیمه معین (SDP) استفاده می‌کنیم. برنامه نویسی نیمه معین یک تکنیک بهینه سازی ریاضی پیشرفته است که برنامه نویسی خطی را برای حل برخی مسائل بهینه سازی غیرخطی و درجه دوم تعمیم می‌دهد. این روش تابع هدف و قیدها را بر حسب ماتریس فرموله می‌کند و حل مسائل پیچیده که شامل ماتریس‌های نیمه معین مثبت هستند را ممکن می‌سازد.

یک کران بالای کلی برای ظرفیت کوانتومی با استفاده از برنامه‌نویسی نیمه معین در مرجع [۱۱] معرفی شده است که با Q_F نشان داده می‌شود. برای کانال $\Phi: A \rightarrow B$ کمیت $Q_F(\Phi)$ به صورت $\log \Gamma(\Phi)$ تعریف می‌شود، که در آن $\Gamma(\Phi)$ به صورت یک مسئله بهینه سازی نیمه معین تعریف شده است:

$$\Gamma(\Phi) = \max \text{Tr}(J_1(\Phi)R)$$

subject to

$$R, \rho_A \geq 0, \text{Tr}(\rho_A) = 1,$$

$$-\rho_A \otimes I \leq R^{T_B} \leq \rho_A \otimes I_B, \quad (15)$$

که R عملگری خطی در فضای $A \otimes B$ است. $J_1(\Phi)$ ماتریس چوی کانال Φ است که به صورت $J_1(\Phi) = \sum_{ij} (|i\rangle\langle j|) \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|)$ تعریف می‌شود. همچنین T_B عمل ترانهاده بروی زیر فضای B است. شکل ۲ نقشه رنگی برحسب x و y است که کران بالای بدست آمده بوسیله این روش برای کانال تعمیم یافته لاندائو استریتز را نشان می‌دهد.

از آن جایی که اطلاعات همدوس ابرجمع‌پذیر هستند می‌توان با محاسبه Q_1 یک کران پایین برای ظرفیت کوانتومی کانال (۵) بدست آورد:

$$Q_1(\Phi) = \max_{\rho} I_c(\Phi, \rho) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{\rho} I_c(\Phi^{\otimes n}, \rho^{\otimes n}) = Q(\Phi) \quad (16)$$

شکل ۳، نقشه رنگی $Q_1(\Phi)$ را بر حسب x و y نمایش می‌دهد. نقشه‌های رنگی کران‌های بالا و پایین در شکل‌های ۲ و ۳، بینش‌هایی را در مورد رفتار ظرفیت کانال برای مقادیر مختلف x و y ارائه می‌دهد.

همچنین کران پایین که در واقع همان ظرفیت کوانتومی تک حرفی می باشد، برای این کانال تعیین شده است. این کران پایین انعطاف پذیری کانال را تحت سناریوهای مختلف نویز و تداخل روشن می کند و بینش هایی را در مورد حداقل نرخ انتقال که تحت محدودیت های عملی قابل دستیابی است، ارائه می دهد.

در کل محاسبه ظرفیت های مختلف یک کانال کوانتومی پیامدهای عملی برای طراحی پروتکل های ارتباطی کوانتومی کارآمد دارد، زیرا آن ها اطلاعات ارزشمندی برای بهینه سازی انتقال داده در سیستم های کوانتومی دنیای واقعی ارائه می دهند.

مرجع ها

- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, 10th anniversary ed. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2010.
- [2] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, Jul. 1948, doi: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
- [3] G. Smith, J. A. Smolin, and A. Winter, "The Quantum Capacity With Symmetric Side Channels," *IEEE Trans Inf Theory*, vol. 54, no. 9, pp. 4208–4217, Sep. 2008, doi: 10.1109/TIT.2008.928269.
- [4] C. King, "The capacity of the quantum depolarizing channel," *IEEE Trans Inf Theory*, vol. 49, no. 1, pp. 221–229, Jan. 2003, doi: 10.1109/TIT.2002.806153.
- [5] L. J. Landau and R. F. Streater, "On Birkhoff's theorem for doubly stochastic completely positive maps of matrix algebras," *Linear Algebra Appl*, vol. 193, pp. 107–127, Nov. 1993, doi: 10.1016/0024-3795(93)90274-R.
- [6] S. N. Filippov and K. V. Kuzhamuratova, "Quantum informational properties of the Landau–Streater channel," *J Math Phys*, vol. 60, no. 4, p. 42202, Apr. 2019, doi: 10.1063/1.5037700.
- [7] W. F. Stinespring, "Positive Functions on C^* -Algebras," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 6, no. 2, p. 211, Apr. 1955, doi: 10.2307/2032342.
- [8] M. Smaczynski, W. Roga, and K. Zyczkowski, "Selfcomplementary quantum channels," Feb. 2016, doi: 10.1142/S1230161216500141.
- [9] C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin, and A. V. Thapliyal, "Entanglement-assisted capacity of a quantum channel and the reverse Shannon theorem," *IEEE Trans Inf Theory*, vol. 48, no. 10, pp. 2637–2655, Oct. 2002, doi: 10.1109/TIT.2002.802612.
- [10] A. S. Holevo, *Quantum systems, channels, information: a mathematical introduction*, no. 16. in De Gruyter studies in mathematical physics. Berlin: De Gruyter, 2012.
- [11] X. Wang and R. Duan, "A semidefinite programming upper bound of quantum capacity," in *2016 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Barcelona, Spain: IEEE, Jul. 2016, pp. 1690–1694. doi: 10.1109/ISIT.2016.7541587.

توزیع کلید کوانتومی میدان دوقلو براساس پروتکل تغییر فاز تفاضلی

زارعی، سیده زهرا^۱؛ طریقی تابش، فاطمه^۲؛ عبدی، مهدی^۱

^۱ دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

^۲ گروه فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران

چکیده

هدف از این پژوهش، ارائه یک پروتکل جدید برای توزیع یک کلید امن میان دو کاربر مورد اعتماد با استفاده از حالت‌های هم‌دوس نور است. برای ارائه چنین پروتکلی از روشی به نام میدان دوقلو استفاده می‌شود که در آن یک کاربر نقش تکرار کننده کوانتومی را بر عهده گرفته است. در این پژوهش برای کدگذاری بیت‌ها روی حالت‌های هم‌دوس از پروتکل DPS الهام گرفته‌ایم. نشان می‌دهیم که با ترکیب این دو پروتکل در حضور حمله شکافنده پرتو میتوان به نرخ کلید امن بالاتری نسبت به پروتکل DPS دست یافت.

واژه های کلیدی: توزیع کلید کوانتومی، پروتکل میدان دوقلو، پروتکل DPS، حالات هم‌دوس نوری

Twin-Field Quantum Key Distribution Based on Differential-Phase-Shift Protocol

Zarei, Seyede Zahra¹; Tarighi Tabesh, Fatemeh²; Abdi, Mehdi¹

¹ Department of Physics, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

² Institute for Research in Fundamental Sciences, Tehran, Iran

Abstract

The aim of this research is to provide a new protocol for securely distributing a key between two trusted users using coherent states of light. To present such a protocol, the twin field protocol is utilized where one user takes on the role of a quantum repeater. In this research, we draw inspiration from the DPS protocol for encoding bits. We show that by combining these two protocols in the presence of beam-splitter attacks, we can achieve a higher secret key rate than the original DPS protocol.

Keywords: Quantum Key Distribution, Twin Field Protocol, DPS protocol, Coherent states of light

PACS No.

مقدمه

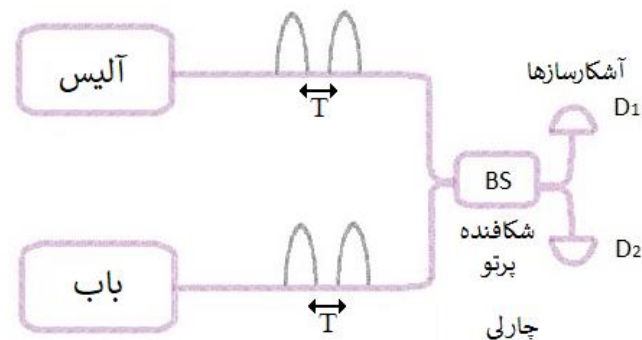
گذشته، QKD توجه گسترده‌ای را به خود جلب کرده و در دنیای واقعی بر روی شبکه‌های فیبر نوری پیاده‌سازی شده است. با این حال وجود اتلاف در کانال، کاربرد گسترده‌تر QKD، افزایش نرخ کلید و فاصله توزیع کلید را محدود می‌کند. در یک سیستم QKD، فوتون‌ها به عنوان حامل کلیدهای کوانتومی، به صورت حالات تک فوتونی آماده و عمدتاً توسط کانال انتقال، پراکنده و جذب

توزیع کلید کوانتومی^۱ (QKD)، توزیع بیت‌های امن براساس قوانین اساسی فیزیک کوانتومی بین دو کاربر است و یک ارتباط امن نظری- اطلاعاتی را بدون توجه به قدرت محاسباتی نامحدود یک شنودگر بالقوه امکان‌پذیر می‌سازد [۱]. در طول چهار دهه

¹ Quantum key distribution

دو حالت ارسال شده، از تداخل سنج ماخ زندر بهره گرفته و به استخراج کلید می‌پردازد. آلیس و باب با سنجش زمان دریافت حالات توسط باب و بررسی روشنایی^۹ می‌توانند به حضور شنودگر (ایو) پی ببرند.

هدف ما تولید کلید امن با استفاده از پروتکل میدان دوقلو بر پایه‌ی کد کردن حالت‌ها در پروتکل DPS می‌باشد.



شکل ۱: شمای کلی پروتکل DPSTF. اختلاف فاز بین دو پالس متوالی، بیت کد شده در هر دنباله را نشان می‌دهد.

شرح پروتکل

در این پروتکل، آلیس و باب در آزمایشگاه‌های خود به صورت تصادفی یک بیت کلاسیک تولید کرده و سپس به آماده‌سازی حالت کوانتومی منطبق با آن بیت براساس پروتکل DPS می‌پردازند. در مرحله بعد، حالت‌های آماده شده به سمت آزمایشگاه چارلی ارسال می‌شوند. فاصله بین پالس‌های متوالی هر فرستنده برابر با T فرض شده است. شکل ۱ شمای کلی این پروتکل را نمایش می‌دهد. حالت‌های ارسال شده از طرف آلیس و باب، از شکافنده پرتو موجود در آزمایشگاه چارلی عبور کرده و با هم تداخل می‌کنند. نتیجه تداخل در زمان‌های t_1 و $t_2 = t_1 + T$ بسته به یکسانی یا ناهمسانی حالات ارسال شده توسط آلیس و باب متفاوت است. می‌توان نشان داد چنانچه بیت آلیس و باب یکسان باشد، یکی از آشکارسازهای D_1 یا D_2 در زمان‌های t_1 و t_2 به صورت متوالی کلیک می‌کند؛ و آشکارساز دیگر خاموش

می‌گردند. با این حال، آن‌ها را نمی‌توان تقویت کرد، و آشکارسازها با احتمال بسیار کمی آن‌ها را شناسایی می‌کنند.

از طرفی برای یک پروتکل QKD مبتنی بر فیبر، نرخ کلید به صورت تصاعدی با فاصله فرستنده تا گیرنده کاهش می‌یابد و نمی‌تواند از کران $PLOB^2$ فراتر رود. این کران بیان می‌کند در یک پروتکل توزیع کلید کوانتومی بدون استفاده از تکرارکننده‌های کوانتومی^۳ نرخ کلید امن در فواصل طولانی، به صورت خطی با ضریب گذردهی کانال کوانتومی^۴ متناسب است: $r_{QKD} \propto O(\eta_C)$ که η_C نشان‌دهنده ضریب گذردهی کانال است [۲].

پروتکل توزیع کلید کوانتومی میدان دوقلو^۵ [۳] با جایگزین کردن یک کاربر غیر قابل اعتماد (چارلی) به جای تکرارکننده‌های کوانتومی، موجب افزایش مسافت قابل به‌کارگیری پروتکل و بهبود نرخ کلید امن می‌شود. از زمان معرفی این پروتکل در سال ۲۰۱۸، توجهات زیادی به سوی آن جلب شده و سویه‌های متعددی از آن، از جمله NPP^6 [۴] و SNS^7 [۵] نیز معرفی شده‌اند. دستاورد مهم پروتکل میدان دوقلو، عبور از کران PLOB با نشان دادن تناسب نرخ کلید خود با مجذور ضریب گذردهی کانال کوانتومی است:

$$r_{TF} \propto \sqrt{\eta_C}$$

است، این موضوع به معنای افزایش قابل توجه نرخ کلید در مقایسه با سایر پروتکل‌های توزیع کلید کوانتومی خواهد بود.

از سوی دیگر، یک پروتکل مهم که از اختلاف فاز میان دو حالت همدوس متوالی برای کدگذاری حالات استفاده می‌کند، پروتکل DPS^8 [۶] است. در این پروتکل، فرستنده (آلیس) برای کد کردن بیت صفر از دو پالس همدوس با فاز یکسان (هر دو برابر با صفر یا π) و برای کدگذاری بیت ۱ از دو پالس همدوس با اختلاف فاز برابر با π (فاز یکی برابر با صفر و فاز دیگری برابر با π) استفاده می‌کند. گیرنده (باب) برای تشخیص اختلاف فاز میان

² Pirandola-Laurenza-Ottaviani-Banchi (PLOB) bound
³ Quantum Repeaters
⁴ Quantum Channel Transmittance
⁵ Twin-Field
⁶ no phase post-selection (NPP)
⁷ sending-or-not-sending (SNS)
⁸ Differential-Phase-Shift Protocol

می‌ماند. در صورتی که بیت آن‌ها متفاوت باشد، یک آشکارساز در زمان t_1 و آشکارساز دیگر در زمان t_2 کلیک خواهد کرد.

جدول ۱: حالات ارسالی ممکن و نحوه آشکارسازی آن‌ها

بیت	حالت کوانتومی ارسالی	نتیجه آشکارسازی
آلیس: ۰ - باب: ۰	$ \alpha\rangle_{t_1} \alpha\rangle_{t_2}$ یا $ \alpha\rangle_{t_2} \alpha\rangle_{t_1}$	کلیک یکی از آشکارسازها در دو زمان متوالی
آلیس: ۱ - باب: ۱	$ \alpha\rangle_{t_1} -\alpha\rangle_{t_2}$ یا $ \alpha\rangle_{t_2} -\alpha\rangle_{t_1}$	کلیک یکی از آشکارسازها در دو زمان متوالی
آلیس: ۰ - باب: ۱	آلیس: $ \alpha\rangle_{t_1} \alpha\rangle_{t_2}$ یا $ \alpha\rangle_{t_2} \alpha\rangle_{t_1}$ باب: $ \alpha\rangle_{t_1} -\alpha\rangle_{t_2}$ یا $ \alpha\rangle_{t_2} -\alpha\rangle_{t_1}$	کلیک یک آشکارساز در t_1 و کلیک آشکارساز دیگر در t_2
آلیس: ۱ - باب: ۰	آلیس: $ \alpha\rangle_{t_1} -\alpha\rangle_{t_2}$ یا $ \alpha\rangle_{t_2} -\alpha\rangle_{t_1}$ باب: $ \alpha\rangle_{t_1} \alpha\rangle_{t_2}$ یا $ \alpha\rangle_{t_2} \alpha\rangle_{t_1}$	کلیک یک آشکارساز در t_1 و کلیک آشکارساز دیگر در t_2

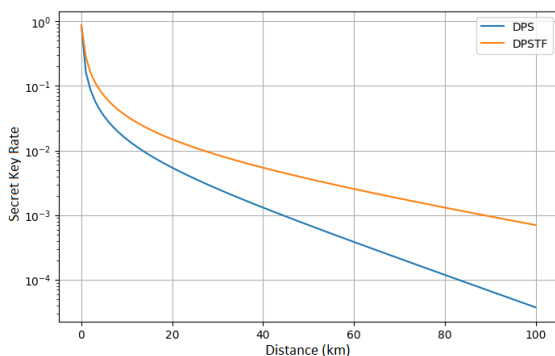
همزمان دو آشکارساز می‌گردد. بنابراین، آلیس و باب می‌توانند همانند پروتکل DPS با سنجش روشنایی به حضور ایو پی ببرند.

با توجه به رابطه مربوط به نرخ کلیک پروتکل میدان دوقلو [۳] و نرخ کلیک پروتکل DPS در برابر حملات شکافنده پرتو [۷]، نرخ کلیک پروتکل ما به صورت زیر خواهد بود

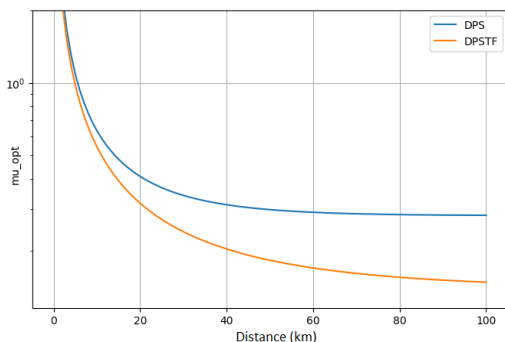
$$r_{DPSTF} = (1 - e^{-2\mu\eta}) \left[1 - 2h\left(\frac{1 - \gamma_E^2}{2}\right) + h\left(\frac{1 - \gamma_E^4}{2}\right) \right] \quad (1)$$

که در این رابطه، μ شدت پالس همدوس ارسال شده، η حاصل ضرب ضریب گذردهی کانال (η_c) و بازده آشکارساز، h تابع آنتروپی دودویی شانون و $\gamma_E = e^{-2\mu(1-\eta_c)}$ می‌باشد.

در شکل ۲ حداکثر میزان نرخ کلیک امن (شکل الف) و شدت بهینه پالس‌ها (شکل ب) براساس فاصله (کیلومتر) برای پروتکل DPS و پروتکل DPSTF نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل (الف) مشاهده می‌شود، پروتکل DPSTF دارای یک مرتبه نرخ کلیک امن بزرگتری نسبت به DPS در فاصله ۱۰۰ کیلومتری است. از شکل (ب) روشن است که در هر فاصله با به کارگیری شدت کمتر، به نرخ کلیک بالاتری دست پیدا کرده‌ایم.



شکل ۲ (الف): مقایسه نرخ کلیک پروتکل DPS و پروتکل ما (DPSTF). نرخ کلیک در هر فاصله با در نظر گرفتن شدت بهینه محاسبه شده است.



شکل ۲ (ب): مقایسه شدت بهینه در دو پروتکل DPS و پروتکل DPSTF.

بنابراین، در صورتی که از حملات ایو و نوفه موجود در کانال چشم‌پوشی کنیم و شرایط را به صورت ایده‌آل در نظر بگیریم، کلیک یک آشکارساز در دو زمان متوالی و سکوت آشکارساز دیگر در این دو زمان نشان‌دهنده یکسانی بیت‌های آلیس و باب، و کلیک دو آشکارساز مختلف در دو زمان متوالی نمایانگر ناهمسانی بیت‌های آلیس و باب خواهد بود. در جدول ۱، حالات ارسالی ممکن و نحوه کلیک آشکارسازها به صورت متناظر نشان داده شده است.

سنجش امنیت

با توجه به امن بودن پروتکل DPS و میدان دوقلو در برابر حمله شکافنده پرتو^{۱۰}، پروتکل ما نیز در برابر حمله فوق امن است. از طرفی، چنانچه حمله ایو خود را به صورت برهم زدن الگوی تداخلی در آزمایشگاه چارلی نشان دهد، منجر به کلیک

نتیجه گیری

با استفاده از کدگذاری حالات در اختلاف فاز میان دو پالس متوالی و استفاده از پروتکل میدان دوقلو، به نرخ کلید امن بیشتری در فواصل دور نسبت به پروتکل DPS دست یافته‌ایم. از آنجا که پروتکل DPS نسبت به پروتکل BB84 از لحاظ امنیت و نرخ کلید برتری دارد، انتظار داریم که پروتکل DPSTF نیز این برتری را نسبت به پروتکل میدان دوقلو حفظ کند.

مرجع‌ها

- [1] Bennett, C. H. & Brassard, G. Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing. In *Proc. IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing* 175–179 (IEEE, 1984).
- [2] Pirandola, S., Laurenza, R., Ottaviani, C. & Banchi, L. Fundamental limits of repeaterless quantum communications. *Nat. Commun.* **8**, 15043 (2017).
- [3] M. Lucamarini, Z. L. Yuan, J. F. Dynes و A. J. Shields, "Overcoming the rate–distance limit of quantum key distribution without quantum repeaters", *Nature volume 557*, **037902**(2018).
- [4] Lin, J. & Lütkenhaus, N. Simple security analysis of phase-matching measurement-device-independent quantum key distribution. *Phys. Rev. A* **9**, 042332 (2018).
- [5] Jiang, C., Yu, Z.-W., Hu, X.-L. & Wang, X.-B. Unconditional security of sending or not sending twin-field quantum key distribution with finite pulses. *Phys. Rev. Appl.* **12**, 024061 (2019).
- [6] Inoue, Kyo, Edo Waks, and Yoshihisa Yamamoto. "Differential phase shift quantum key distribution." *Physical review letters* 89.3 (2002).
- [7] Branciard, Cyril, Nicolas Gisin, and Valerio Scarani. "Upper bounds for the security of two distributed-phase reference protocols of quantum cryptography." *New Journal of Physics* 10.1, **013031** (2008).

ذخیره انرژی در باتری‌های کوانتومی و ارتباط آن با خواص آماری شارژرها

شکری، عباس^{۱*}؛ ارجمندی، محمدباقر^۲؛ فیضی، اسفندیار^۱

^۱ دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

^۲ دانشکده فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده

در این مقاله عملکرد باتری‌های کوانتومی را با شارژرهای دوتایی هم‌بسته و مستقل مطالعه می‌کنیم و ارتباط آن را با خواص آماری مدهای الکترومغناطیسی (شارژرها) که با پارامتر مندل معرفی می‌شود بررسی می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند بین مقدار انرژی قابل استخراج که با ارگوتروپی اندازه‌گیری می‌شود و خواص آماری حالت شارژرها ارتباط معناداری وجود دارد. از طرفی نشان می‌دهیم غیر کلاسیک بودن حالت هر کدام از شارژرها می‌تواند یک مزیت برای ذخیره انرژی باشد و نیز خواص آماری حالت شارژرها تحت تأثیر وجود یا عدم وجود هم‌بستگی اولیه میان شارژرها است.

واژه های کلیدی: باتری کوانتومی، ارگوتروپی، پارامتر مندل

Energy storage in quantum batteries and its relation with statistical properties of chargers

Shokri, Abbas^{1,*} ; Arjmandi, Mohammad Bagher² ; Faizi, Esfandiyar¹

¹ Department of Physics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz 53714-161, Iran

² Faculty of Physics, University of Isfahan, P.O. Box 81746-7344, Isfahan, Iran

Abstract

In this paper, we study the performance of quantum batteries with independent and correlated double chargers and its relation with the statistical properties of electromagnetic modes (chargers) introduced by Mandel parameter. The results show that there is a significant relation between the amount of extractable energy measured by ergotropy and the statistical properties of the chargers. On the other hand, we show that the non-classical state of each charger can have an advantage for energy storage, and properties of the state of chargers are affected by the presence or absence of initial correlation between chargers.

Keywords: quantum battery, ergotropy, Mandel parameter

PACS No.

توجه محققین قرار گرفت. یک باتری کوانتومی مجموعه‌ای از یک یا چند سامانه کوانتومی دو یا چند ترازه است که می‌تواند انرژی ذخیره کند. به‌طور کلی مطالعه عملکرد باتری‌های کوانتومی به دو فرایند مجزا تقسیم می‌شود: شارژ و تخلیه (خود به خود)^۳ [2 و 3]. از طرفی یکی از ملاک‌های تعیین کننده خواص آماری میدان‌های الکترومغناطیسی، پارامتر مندل است [4] که می‌تواند برای بررسی خواص کلاسیکی و کوانتومی میدان‌های الکترومغناطیسی مورد

مقدمه

در سال‌های اخیر با پیشرفت‌هایی که در حوزه ترمودینامیک کوانتومی صورت گرفته است، توسعه دستگاه‌های کوانتومی با کاربرد ذخیره‌سازی انرژی به موضوع مهمی بدل گردیده است. به-این منظور باتری‌های کوانتومی ابتدا توسط آلیسکی^۱ و فانس^۲ معرفی شد [1] و پس از آن به‌عنوان یک زمینه تحقیقاتی مهم مورد

¹ Alicki

² Fannes

³ Self-discharging

که $\rho_B(0)$ و $\rho_C(0)$ به ترتیب حالت‌های اولیه باتری و شارژر می‌باشند. در این مقاله فرض می‌کنیم باتری در حالت اولیه دارای دو سلول است که در حالت پایه (H_B) قرار دارند یعنی $\rho_B(0) = (|g\rangle\langle g|)^{\otimes 2}$. همچنین دو فرایند شارژ را در نظر می‌گیریم که در هر دو مورد شارژرها در حالت همدوس قرار دارند. در مورد اول شارژرها به صورت مستقل از هم هستند و در مورد دوم شارژرها در حالت هم‌بسته می‌باشند. حالت‌های همدوس ویژه حالت‌های عملگر نابودی a یعنی $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ هستند. همچنین از اثر عملگر جابجایی $\hat{D}$ در حالت خلأ به دست می‌آید ($|\alpha\rangle = \hat{D}|0\rangle$). به طوری که α یک عدد مختلط است که شدت میدان و تعداد میانگین فوتون‌های کاواک را نشان می‌دهد که به صورت $\bar{n} = |\alpha|^2$ می‌باشد [6].

عملکرد ترمودینامیکی و خواص آماری

با فرض اینکه باتری کوانتومی با ماتریس چگالی ρ و هامیلتونی H داشته باشیم، انرژی درونی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(\rho, H) = \text{Tr}(\rho H) \quad (4)$$

از آنجایی که معمولاً این انرژی از طریق عملیات یکانی^۵ نمی‌تواند به طور کامل استخراج شود، نیاز است تابعی موسوم به ارگوتروپی را تعریف کنیم که بیشترین انرژی قابل استخراج از طریق عملیات یکانی است [6] و به صورت اختلاف انرژی درونی حالت کوانتومی سامانه و حالت غیر فعال^۶ متناظر با آن تعریف می‌شود، یعنی

$$\varepsilon(\rho, H) = E(\rho, H) - E(\eta, H) \quad (5)$$

که در آن η حالت غیر فعال نامیده می‌شود [3] به گونه‌ای که هیچ انرژی نمی‌توان با عملیات یکانی از آن استخراج کرد.

کمیت مهم دیگری که به بررسی آن خواهیم پرداخت پارامتر مندل است که خواص آماری میدان تابشی کوانتیده را در هر زمانی مشخص می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود [4]:

$$Q_j = \frac{\langle \hat{n}_j^2 \rangle - \langle \hat{n}_j \rangle^2}{\langle \hat{n}_j \rangle} - 1 \quad (6)$$

استفاده واقع گردد. در این مقاله یک باتری کوانتومی شامل دو سلول کوانتومی دو ترازه (کیوبیت) را در نظر می‌گیریم که با دو مد الکترومغناطیسی به عنوان شارژر برهم‌کنش می‌کنند که هر کدام در یک حالت اولیه همدوس^۴ آماده شده‌اند. سپس به بررسی نحوه ذخیره انرژی در باتری با روش‌های شارژ مختلف می‌پردازیم و نیز ارتباط بین پارامتر مندل و عملکرد باتری در حین فرایند شارژ را بررسی خواهیم کرد.

مدل

مدل کلی هامیلتونی برای سامانه مورد نظر ما به صورت زیر است [5]:

$$H = H_B + H_C + H_I \quad (1)$$

که در آن

$$\begin{aligned} H_B &= \frac{\omega_0}{2} \sum_i^{N_B} \sigma_i, \\ H_C &= \sum_j^{N_C} \omega_j a_j^\dagger a_j, \\ H_I &= \sum_{i,j}^{N_B, N_C} g_{ij} (\sigma_i^+ a_j + \sigma_i^- a_j^\dagger) \end{aligned} \quad (2)$$

به ترتیب هامیلتونی‌های مربوط به باتری، شارژر و برهم‌کنش بین باتری و شارژر می‌باشند. N_C و N_B به ترتیب تعداد سلول‌های کوانتومی باتری و تعداد شارژرها هستند. ($k = x, y, z$) σ_i^k ماتریس‌های پائولی و $\sigma_i^\pm$ عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده کیوبیت i -ام می‌باشند. a_j و $a_j^\dagger$ عملگرهای خلق و فانی شارژر j -ام هستند. ω_j و ω_0 به ترتیب فرکانس گذار اتم و فرکانس فوتون‌ها در کاواک می‌باشند که در اینجا شرایط تشدید $\omega_0 = \omega_j$ را در نظر می‌گیریم. g_{ij} قدرت جفت‌شدگی بین کیوبیت i -ام و j -ام است. فرض می‌کنیم باتری و شارژرها تحت تحول یکانی به صورت $U = \exp(-iHt)$ باشند که در آن H در رابطه ۱ بیان شده است. برای سادگی $\hbar = 1$ می‌گیریم و داریم:

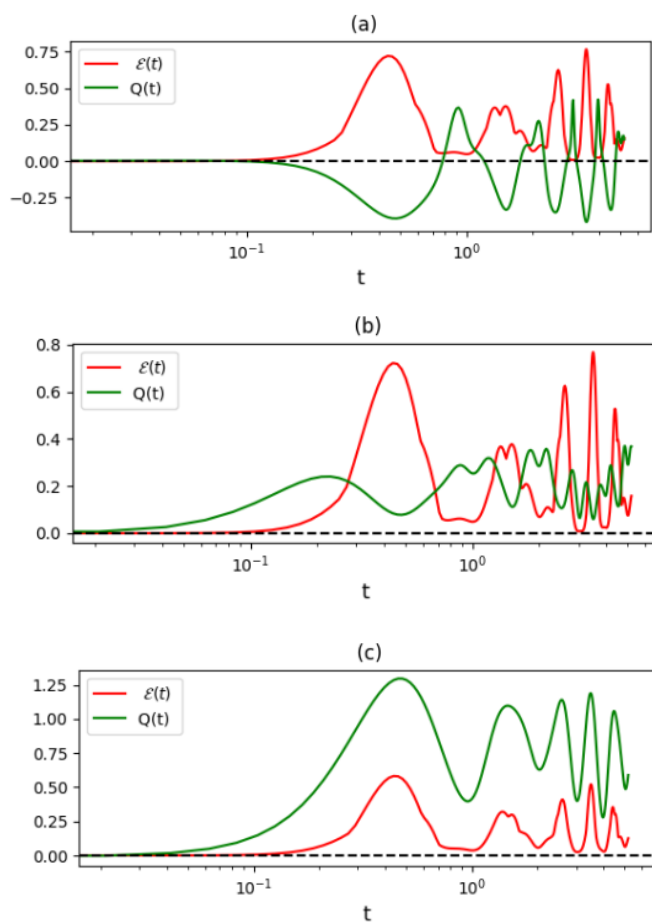
$$\rho_{B,C}(t) = \text{Tr}_{C,B} [U \rho_B(0) \otimes \rho_C(0) U^\dagger] \quad (3)$$

⁵ Unitary operation

⁶ Passive state

⁴ Coherent state

همین‌طور کمینه‌ها)ی هر دو تابع با یکدیگر هم‌خوانی دارند (شکل 1(c)). نکته حائز اهمیت دیگر آن است که در مورد شارژهای مستقل، پارامتر مندل جز در مورد شدت ضعیف میدان-ها ($\alpha = 0.05$)، در سایر موارد همواره دارای مقادیر مثبت است که این دلالت بر کلاسیکی بودن حالت شارژها دارد. بنابراین این‌گونه به نظر می‌رسد که برای این مورد یعنی شارژهایی که در ابتدا در حالت هم‌بسته هستند، غیرکلاسیکی بودن حالت‌ها تنها در مقادیر اندک α می‌تواند به‌عنوان یک مزیت در شارژ باتری کوانتومی مطرح شود.



شکل 1. ارگوتروپی باتری کوانتومی $\mathcal{E}(t)$ و پارامتر مندل $Q(t)$ برای دو شارژ مستقل به‌ازای (a) $\alpha = 0.05$ ، (b) $\alpha = 0.5$ و (c) $\alpha = 2.5$

در شکل 2 نیز ارگوتروپی باتری کوانتومی و پارامتر مندل بر حسب زمان برای دو شارژ هم‌بسته با حالت اولیه $|\phi^+\rangle$ (رابطه 8) به‌ازای مقادیر مختلف α رسم شده است. همان‌طور که مشخص است وجود ارتباط سازنده میان غیر کلاسیکی بودن حالت شارژها و ارگوتروپی از عمومیت بیشتری برخوردار است. زیرا تقریباً در

که در آن اندیس $j = 1, 2$ معرف هرکدام از دو مُد میدان است. به‌طوری که $\hat{n}_1 = a^\dagger a$ و $\hat{n}_2 = b^\dagger b$ تعداد فوتون‌ها در میدان کاواک می‌باشند. اگر $Q = 0$ باشد، دارای آمار پواسونی (حالت همدوس) است، اگر $Q > 0$ باشد، دارای آمار فرا پواسونی^۷ (حالت کلاسیکی) و اگر $Q < 0$ باشد، دارای آمار زیر پواسونی^۸ (حالت غیر کلاسیکی) است [4 و 7]. توجه داریم که رابطه 6 بیانگر پارامتر مندل برای مورد تک مدی است و با توجه به آنکه تمرکز این پژوهش معطوف به حالت تک شارژ است و نه حالت جمعی شارژها، چنانچه علاقمند به مشخصات آماری حالت کلی هر دو شارژ (دو مد الکترومغناطیسی) باشیم، می‌بایست از پارامتر مندل تعمیم یافته استفاده نماییم [7].

شارژهای هم‌بسته و مستقل

حال دو طرح‌واره از شارژهای دوتایی را در نظر می‌گیریم. در مورد اول دو شارژ مستقل که هرکدام در حالت همدوس قرار دارند:

$$|\psi\rangle = |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle \quad (7)$$

و در مورد دوم دو شارژ در یک حالت هم‌بسته (درهم‌تنیده شبه-بل^۹) قرار دارند [8]:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_+}} (|\alpha_1\rangle |\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle |\alpha_2\rangle) \quad (8)$$

که در آن $N_+ = 2(1 + e^{-2(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)})$ ثابت بهنجارش است. (در ادامه فرض می‌کنیم که $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$).

در شکل 1 ارگوتروپی باتری کوانتومی و پارامتر مندل بر حسب زمان برای دو شارژ مستقل با حالت اولیه $|\psi\rangle$ (رابطه 7) به‌ازای مقادیر مختلفی از α رسم شده است. همان‌طور که مشخص است نحوه تأثیر خواص آماری شارژهای مستقل بر میزان ذخیره ارگوتروپی در باتری، متأثر از شدت میدان‌ها است. به بیان دقیق‌تر، هنگامی که $\alpha \leq 0.5$ است، بیشترین مقادیر ارگوتروپی متناظر با کمترین مقادیر پارامتر مندل است (شکل 1(a) و 1(b)). حال آنکه در شدت‌های بالا یعنی $\alpha = 2.5$ بیشینه‌ها (و

⁷ super-Poissonian

⁸ sub-Poissonian

⁹ semi-Bell

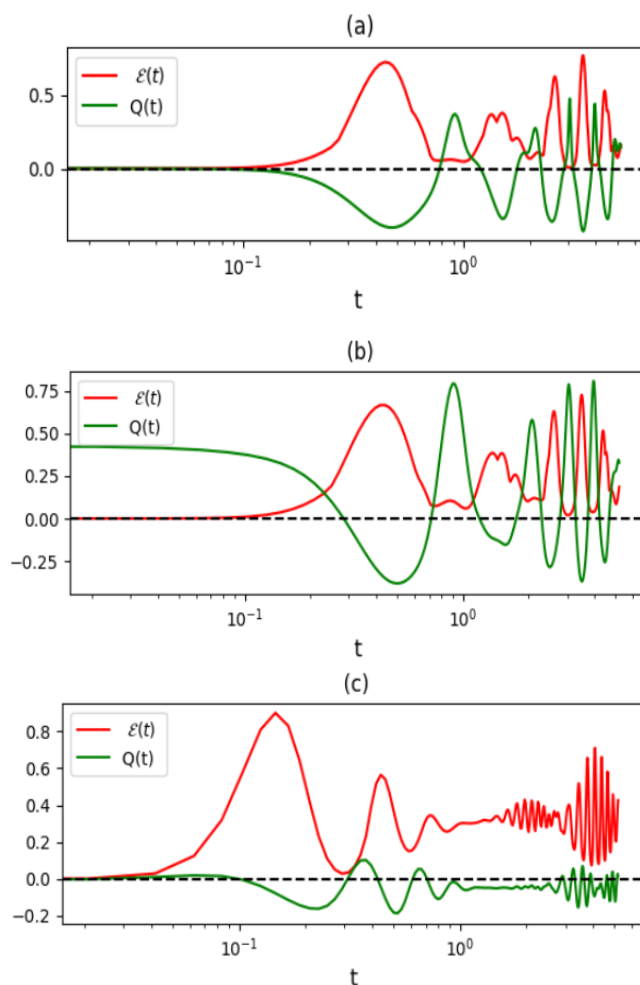
نتیجه گیری

در این مقاله یک باتری کوانتومی دو کیوبیتی در نظر گرفتیم که می تواند با دو مد از میدان الکترومغناطیسی به عنوان شارژر برهم-کنش کند. نشان دادیم ارتباط میان ارگوتروپی و خواص آماری هر کدام از شارژرها وابسته به وجود یا عدم وجود هم بستگی اولیه میان شارژرهای دوتایی است، به طوری که وقتی دو شارژر در حالت درهم تنیده شبه بل هستند، در زمان هایی که پارامتر مندل دارای مقدار منفی تری است و یا حالت های هر شارژر غیر کلاسیکی تر باشند، ارگوتروپی بیشتری در باتری ذخیره می شود. اما برای دو شارژر مستقل از هم غیر کلاسیکی بودن حالت شارژرها تنها برای مقادیر اندکی از متوسط تعداد فوتون ها می تواند به عنوان یک مزیت در ذخیره انرژی در نظر گرفته شود در حالی که برای مقادیر بالاتر شدت میدان، هرچه حالت تک شارژرها کلاسیکی تر باشد تأثیر مناسب تری بر فرایند شارژ خواهد داشت. همچنین دریافتیم کلاسیکی یا کوانتومی بودن حالت های تک شارژر متأثر از وجود یا عدم وجود هم بستگی اولیه میان شارژرهای دوتایی است.

مرجع ها

- [1] R. Alicki and M. Fannes, Entanglement, boost for extractable work from ensembles of quantum batteries, Phys. Rev. E 87,042123(2013).
- [2] G. M. Andolina, M. Keck, A. Mari, M. Campisi, V. Giovannetti, and M. Polini, Extractable Work, the Role of Correlations, and Asymptotic Freedom in Quantum Batteries, Phys. Rev. Lett. 122, 047702 (2019).
- [3] M. B. Arjmandi, H. Mohammadi, and A. C. Santos, Enhancing self-discharging process with disordered quantum batteries, Phys. Rev. E 105, 054115 (2022).
- [4] Mandel, Leonard. "Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence." *Optics letters* 4.7 (1979).
- [5] M. Tavis and F. W. Cummings, Exact solution for an N molecule radiation-field Hamiltonian, Phys. Rev. 170, 379 (1968).
- [6] M. O. Scully and M. S. Zubairy, Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [7] B. Arvind, N. Mukunda. Non-classical photon statistics for two mode optical fields. J. Phys. A: Math. Gen. 29, 5855-5872 (1996).
- [8] M. B. Arjmandi, et al. "Performance of quantum batteries with correlated and uncorrelated chargers." *Physical Review A*. 106.6, 062609 (2022).

تمام بازه زمانی و نیز به ازای شدت های مختلف میدان، مقادیر بیشینه ارگوتروپی با مقادیر کمینه و منفی پارامتر مندل هم خوانی دارند. لذا برای این حالت خاص یعنی شارژرهایی که در ابتدا در حالت هم بسته هستند، غیر کلاسیکی بودن حالت هر کدام از شارژرها به عنوان یک مزیت برای ذخیره انرژی مطرح می گردد. از طرفی با مقایسه بین شکل 1(a) با شکل 2(a) می توان دید که در مقادیر کوچک α پارامتر مندل و ارگوتروپی برای هردو شارژر هم بسته و مستقل مشابه خواهد بود.



شکل 2. ارگوتروپی باتری کوانتومی $\mathcal{E}(t)$ و پارامتر مندل $Q(t)$ برای دو شارژر هم بسته به ازای (a) $\alpha = 0.05$ ، (b) $\alpha = 0.5$ و (c) $\alpha = 2.5$

همچنین لازم به ذکر است که اگرچه در هردو مورد شارژرهای مستقل (و هم بسته) می توان دید که ارگوتروپی با افزایش شدت میدان، کاهش (و افزایش) می یابد، اما به طور کلی وابستگی ارگوتروپی به تعداد متوسط فوتون ها یکنواخت نیست [8].

نقش آنتروپی درهم‌تنیدگی در بررسی گذار فاز کوانتومی در سیستم‌های هسته ای زوج-زوج

قیانوری، مریم^{1*}؛ امیری، نرجس²

¹ سازمان انرژی اتمی، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای، پژوهشگاه فیزیک پلاسما و گداخت هسته ای

² دانشگاه تبریز، دانشکده فیزیک، گروه هسته ای

چکیده

در این مقاله، درهم‌تنیدگی کوانتومی بعنوان نشانه‌ای از گذار فازی شکلی در هسته‌های زوج-زوج بحث شد. یکی از کمیت‌هایی که برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی بین دو جسم استفاده می‌شود، آنتروپی فون نویمان است که به عنوان معیاری مناسب برای بررسی درهم‌تنیدگی بین دو حالت در نظر گرفته شد. نحوه تعیین آنتروپی در مدل IBM در منطقه گذار ارتعاشی به چرخنده گامای ناپایدار ارائه شد. واژه های کلیدی: گذار فاز کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی، مدل اندرکنش بوزون (IBM)، آنتروپی.

The role of entanglement entropy in investigating the quantum phase transition in even-even nuclear systems

Ghapanvari, Maryam¹; Amiri, Narjes²

¹Atomic Energy Organization, Research Institute for Nuclear Science and Technology, Institute of Plasma Physics and Nuclear Fusion

² Tabriz University, Faculty of Physics, Nuclear Group,

Abstract

In this paper, quantum entanglement is discussed as an indication of shape phase transition in even-even nuclei. One of the quantities for measuring entanglement between two bodies is the von Neumann entropy, which was considered as a suitable criterion for examining entanglement. How to determine the entropy in the IBM model in the region of vibrational to unstable gamma rotor transition was presented.

Keywords: Quantum phase transition, quantum entanglement, interaction boson model (IBM), entropy.

PACS No. 21

مقدمه

کوانتومی اساس نظریه اطلاعات کوانتومی و منبع اولیه کوانتوم است. اخیراً، نظریه اطلاعات کوانتومی رویکرد جدیدی برای مشاهده و مطالعه سیستم‌های هسته‌ای درهم‌تنیده، مانند هسته‌ها، که سیستم‌های چند ذره ای در نظر گرفته میشوند، ارائه میکند [5]. استفاده از اطلاعات کوانتومی در سیستم‌های هسته‌ای فرصت‌های جالب جدیدی را برای درک و تفسیر پدیده‌های برهمکنش قوی فراهم میکند. فیزیک که نقش عمیقی در تمام کاربردهای مکانیک کوانتومی دارد. بنابراین، واضح است که مفاهیم و ابزار اطلاعات کوانتومی در حال ورود به عرصه مورد علاقه در فیزیک هسته‌ای هستند. در نتیجه، ضروری است که هم نظریه پردازان اطلاعات کوانتومی و هم گروه هسته‌ای به ویژگی‌های درهم‌تنیدگی نشان داده شده توسط سیستم‌ها و فرآیندهای هسته ای علاقه مند باشند.

یکی از مسائل اساسی علم اطلاعات کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی است. درهم‌تنیدگی کوانتومی یک پدیده فیزیکی است که زمانی اتفاق می‌افتد که گروهی از ذرات ایجاد می‌شوند، برهمکنش می‌کنند یا مجاورت فضایی را به اشتراک می‌گذارند به گونه‌ای که حالت کوانتومی هر ذره از گروه را نمیتوان مستقل از حالت ذرات دیگر توصیف کرد، از جمله زمانی که ذرات با فاصله زیادی از هم جدا می‌شوند. چنین پدیده ای موضوع مطالعه آلبرت اینشتین، بوریس پودولسکی و ناتان روزن در سال 1935 بود [1]. حالتهای درهم‌تنیده کوانتومی نقش کلیدی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی مانند انتقال از راه دور کوانتومی [2]، رمزنگاری کوانتومی [3] و محاسبات کوانتومی [4] دارند. درهم‌تنیدگی

$$S_s^+ = (S_s^-)^\dagger = \frac{1}{2} s^\dagger$$

$$S^0 = \frac{1}{2} (s^\dagger s + s s^\dagger) = \frac{1}{2} n_s + \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$S_d^+ = (S_d^-)^\dagger = \frac{1}{2} d^\dagger$$

$$S_d^0 = \frac{1}{2} (d^\dagger d + d d^\dagger) = \frac{1}{2} n_d + \frac{5}{4}$$

عملگرهای جبر بی نهایت بعدی $SU(1, 1)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$S_n^\pm(sd) = C_s^{2n+1} S^\pm(s) + C_d^{2n+1} S^\pm(d) \quad (3)$$

$$S_n^0(sd) = C_s^{2n} S^0(s) + C_d^{2n} S^0(d) \quad (4)$$

که کمیات C_d و C_s پارامترهای حقیقی بوده و n مقادیر $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را به خود می گیرد. برای محاسبه طیف انرژی و محاسبه انتقال، ویژه حالت $|l\omega\rangle$ که پایین ترین حالت جبر آفین است و شامل هیچ جفت بوزونی نمی باشد را در نظر می گیریم.

$$|l\omega\rangle_{sd} = \left| \begin{matrix} N, k_s = \frac{1}{2}(\nu_s + \frac{1}{2}), \mu_s = \frac{1}{2}(n_s + \frac{1}{2}), \\ k_d = \frac{1}{2}(\nu_d + \frac{5}{2}), \mu_d = \frac{1}{2}(n_d + \frac{5}{2}), LM \end{matrix} \right\rangle \quad (5)$$

از اینرو داریم:

$$S_n^0 |l\omega\rangle = \left\{ C_s^{2n} \frac{1}{2} (n_s + \frac{1}{2}) + C_d^{2n} \frac{1}{2} (n_d + \frac{5}{2}) \right\} |l\omega\rangle = \Lambda_n^0 |l\omega\rangle \quad (6)$$

با استفاده از مولدهای $SU(1, 1)$ می توانیم یک هامیلتونین کلی IBM را برای توصیف منطقه گذار بین $U(5)$ - $O(6)$ بدست آوریم:

$$H = g S_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta C_2(SO(5)) + \gamma C_2(SO(3)) \quad (7)$$

پارامترها مقادیر حقیقی هستند. این هامیلتونین به ازای $C_s = C_d$ تقارن دینامیکی $O(6)$ ، به ازای $C_d \neq 0$ و $C_s = 0$ برای توصیف حد تقارنی $U(5)$ و نهایتاً به ازای $C_s \neq C_d \neq 0$ برای مطالعه ناحیه گذاری مورد استفاده قرار می گیرد.

حال ویژه مقادیر هامیلتونین به صورت زیر بیان می گردد:

به عنوان مثال، درهم تنیدگی در سیستم های هسته ای و فرآیندهای هسته ای مانند شکافت و غیره در حال بررسی است [6-7]. انتقال فاز کوانتومی در سیستم های هسته ای در ارتباط با درهم تنیدگی، اخیراً مورد مطالعه قرار گرفته است [6-7]. برای مشخص کردن ویژگیهای سیستم، باید یک پارامتر نظم را معرفی کرد. درهم تنیدگی به عنوان یکی از جالب ترین ویژگی های نظریه کوانتومی، می تواند به عنوان یک پارامتر نظم در سیستم های هسته ای در نظر گرفته شود. بنابراین، اندازه گیری آن برای گذار فاز کوانتومی مهم است. یکی از بهترین اندازه گیری ها برای درهم تنیدگی کوانتومی در سیستم های فیزیکی، آنتروپی نویمان است [7]. در این مقاله، با توجه به اهمیت سیستم های هسته ای و موضوعات اطلاعات کوانتومی، درهم تنیدگی کوانتومی را مطالعه می کنیم.

برای بررسی گذار فاز، ما آنتروپی درهم تنیدگی را برای ناحیه گذاری در مدل IBM با استفاده از ساختار جبری دوگانه بر اساس جبر l محاسبه میکنیم. سپس به توصیف گذار فاز کوانتومی و ساختار هسته بر مبنای میزان درهم تنیدگی در زنجیره ایزوتوپیک هسته زوج-زوج $^{100-104}Ru$ پرداخته شد.

چارچوب تئوری کار

به منظور روشن شدن بررسی آنتروپی درهم تنیدگی در سیستم های هسته ای، مدل های مورد استفاده در هسته های زوج باید بر اساس تکنیک جبری $SU(1, 1)$ معرفی شوند. دو زنجیره از زیر جبرهای $U(6)$ که شامل جبر تکانه زاویه ای $SO(3)$ است وجود دارند که عبارتند از:

$$U(6) \supset \left\{ \begin{matrix} U(5) \\ O(6) \end{matrix} \right\} \supset O(5) \supset O(3) \quad (1)$$

جبر لی متناظر با گروه $SU(1, 1)$ توسط اپراتورهای جفت شدگی ایجاد می شود. برای بسط مدل جبر جفت شدگی شبه اسپین $SU(1, 1)$ بوزون های s و d را به صورت رابطه (2) تعریف می کنیم که n_s و n_d عملگر عدد برای بوزون های اسکالر و برداری است.

با استفاده از روابط زیر

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_s}{1-c_s^2 x_i} S_s^+ + \frac{c_d}{1-c_d^2 x_i} S_d^+ = \alpha_i S_s^+ + \beta_i S_d^+ \quad (11)$$

$$(S^+)^m |k, k\rangle = \sqrt{\frac{m! \Gamma(m+2k)}{\Gamma(2k)}} |k, k+m\rangle \quad (12)$$

می‌توان تابع موج قسمت بوزونی را به صورت تجزیه اشمیت نوشت:

$$|\psi\rangle_{v,L,M_L}^B = \sum_{l=0}^m b_{l,k_s,k_d} |k_s, k_s+l, L, M_L\rangle |k_d, k_d+(m-l), L, M_L\rangle \quad (13)$$

ما آنتروپی درهم‌تنیدگی را در مدل برهمکنش بوزون به صورت زیر بدست آوردیم:

$$S^B = S_s = S_d = -\sum_{l=0}^m |b_{l,k_s,k_d}|^2 \log(|b_{l,k_s,k_d}|^2) \quad (14)$$

$$b_{l,k_s,k_d} = \frac{A_l \sqrt{\left(\frac{r! \Gamma(r+2k_s)}{\Gamma(2k_s)}\right) \times \left(\frac{(m-r)! \Gamma((m-r)+2k_d)}{\Gamma(2k_d)}\right)}}{\sqrt{\sum_{r=0}^m A_r \left(\frac{r! \Gamma(r+2k_s)}{\Gamma(2k_s)}\right) \times \left(\frac{(m-r)! \Gamma((m-r)+2k_d)}{\Gamma(2k_d)}\right)}} \quad (15)$$

$$A_l = \frac{1}{l!(m-l)!} \sum_{\pi \in S_m} \alpha_{\pi(1)} \alpha_{\pi(2)} \dots \alpha_{\pi(l)} \beta_{\pi(l+1)} \dots \beta_{\pi(m)} \quad (16)$$

نتایج

آنتروپی درهم‌تنیدگی برای بررسی تغییر شکل $U(5)$ کروی به $O(6)$ گاما ناپایدار در هسته‌های زوج و زوج اعمال می‌شود. شکل 1 چگونگی تغییر آنتروپی درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d را به عنوان تابعی از پارامتر کنترلی C_s از یک حد تقارن دینامیکی $U(5)$ به دیگری $O(6)$ نشان می‌دهد. از شکل 1 می‌توان دریافت که مقادیر آنتروپی درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d برای هر حالت در یک فاز برای $C_s < C_{s,crit}$ صفر است و برای $C_s > C_{s,crit}$ شروع به بزرگتر شدن می‌کند. آنتروپی درهم‌تنیدگی در $C_s = 1$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد. بنابراین در حد $U(5)$

$$E = h^k + \alpha \Lambda_1^0 + \beta v(v+3) + \gamma L(L+1) \quad (8)$$

پارامترهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ مقادیر حقیقی هستند. همچنین عدد کوانتومی k با استفاده از رابطه $N = 2K + v_s + v$ به تعداد کل بوزونهای سیستم مرتبط می‌شود. برای تعیین طیف انرژی هر هسته انتخابی در این ناحیه مطالعاتی باید مجموعه‌ای از معادلات غیر خطی بت-آنساتز با تعداد k مجهول حل گردد. برای تعیین ریشه‌های بت-آنساتز جهت تعیین ترازهای انرژی هسته مورد مطالعه با مقادیر v_s, v_d خاص، ابتدا با استفاده از مقادیر حاصل از برازش طیف انرژی به مقادیر تجربی قابل دسترس، مقدار کمیت‌ها تعیین شده و سپس معادله بالا به ازای حالت $i=1$ حل می‌شود. سپس با استفاده از برنامه‌های محاسباتی موجود از جمله Matlab سایر ریشه‌های این سیستم به طور کامل محاسبه می‌گردد. لازم به توضیح است که محاسبات مورد نظر به ازای مقادیر مختلف ثابت‌های حاصل از فرآیند برازش اطلاعات تجربی تا جایی تکرار می‌شود تا مقدار خطای محاسباتی که به صورت

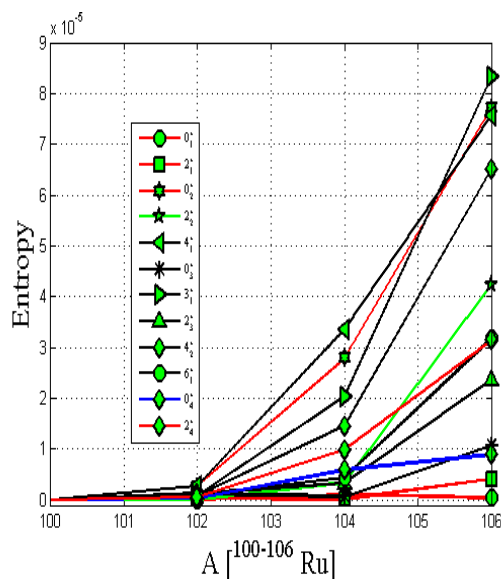
$$\sigma = \left(\frac{1}{N_{tot}} \sum_{i,tot} |E_{exp}(i) - E_{cal}(i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌شود به کمینه مقدار خود برسد. در ادامه، بر روی درهم‌تنیدگی در ناحیه گذار تمرکز می‌کنیم و نحوه تعیین درهم‌تنیدگی آنتروپی در IBM را ارائه می‌دهیم. ما فقط آنتروپی فون نویمان را به عنوان معیاری مناسب برای درهم‌تنیدگی در نظر خواهیم گرفت. یکی از ساده‌ترین کمیت‌ها برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی بین دو جسم، آنتروپی فون نویمان است. آنتروپی درهم‌تنیدگی را می‌توان با استفاده از مقادیر منفرد تجزیه اشمیت حالت نشان داد. هر حالت خالص دوبخشی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^m a_i |v_i\rangle_A \otimes |v_i\rangle_B \quad (9)$$

آنتروپی فون نویمان را می‌توان با استفاده از تجزیه اشمیت نوشت.

$$S_A = S_B = -\sum_{i=1}^m |a_i|^2 \log(|a_i|^2) \quad (10)$$



در هم تنیدگی و گذار فاز کوانتومی در هسته‌های گذاری باریوم

قپانوری، مریم^۱؛ امیری، نرجس^۲

^۱ سازمان انرژی اتمی، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، پژوهشگاه فیزیک پلاسما و گداحت هسته‌ای

^۲ دانشگاه تبریز، دانشکده فیزیک، گروه هسته‌ای

چکیده

یکی از جالب‌ترین ویژگی‌های نظریه کوانتومی، در هم تنیدگی کوانتومی است. در هم تنیدگی کوانتومی یک پدیده فیزیکی است که زمانی اتفاق می‌افتد که گروهی از ذرات برهم کنش می‌کنند، یا مجاورت فضایی مشترک دارند، به طوری که حالت کوانتومی هر ذره از گروه را نمی‌توان مستقل از حالت ذرات دیگر توصیف کرد. اخیراً، انتقال فاز کوانتومی در سیستم‌های هسته‌ای از طریق در هم تنیدگی کوانتومی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مشخص کردن خصوصیات سیستم بایستی یک پارامتر نظم معرفی شود. در هم تنیدگی کوانتومی را می‌توان به عنوان یکی از کاندیداهای اصلی برای پارامتر نظم در سیستم‌های هسته‌ای در نظر گرفت. این مقاله بر روی استفاده از آنتروپی در هم تنیدگی به عنوان یک سیگنال مناسب برای مطالعه انتقال فاز کوانتومی در ایزوتوپ‌های گذاری باریوم با عدد جرمی فرد متمرکز شده است. نتایج نشان می‌دهد که آنتروپی در هم تنیدگی یک ابزاری قوی برای شناسایی انتقال فازی شکلی در این ایزوتوپ‌ها است.

واژه های کلیدی: گذار فاز کوانتومی، در هم تنیدگی کوانتومی، مدل اندرکنش بوزون-فرمیونی (IBFM)، آنتروپی.

Entanglement and quantum phase transition in Ba Transitional Nuclei

Ghapanvari, Maryam¹; Amiri, Narjes²

¹Atomic Energy Organization, Research Institute for Nuclear Science and Technology, Institute of Plasma Physics and Nuclear Fusion

² Tabriz University, Faculty of Physics, Nuclear Group,

Abstract

In this paper, one of the most interesting features of quantum theory is quantum entanglement. Quantum entanglement is a physical phenomenon that occurs when a group of particles interact, or share spatial proximity such that the quantum state of each particle of the group cannot be described independent of the state of the others. Recently, quantum phase transition in nuclear systems is studied via quantum entanglement. An order parameter has to be introduced for characterizing the properties of the system. Quantum entanglement can be considered as one of main candidates for the order parameter in nuclear systems. This presentation is focused on utilizing the entanglement entropy as a suitable signal for the study of quantum phase transition in the Ba odd-A transitional isotopes. The results indicate that entanglement entropy is a potent tool for identifying shape phase transitions in these isotopes.

Keywords: Quantum phase transition, quantum entanglement, boson-fermion interaction model (IBFM), entropy.

PACS No. 21

مقدمه

جدا می‌شوند. براساس مکانیک کوانتومی، ذرات جدا شده از هم، حتی وقتی که هیچ برهمکنش شناخته شده‌ای بین آنها وجود نداشته باشد، برهم اثر می‌کنند و داشتن اطلاعات درباره یکی، منجر به کسب اطلاعات درباره دیگری می‌شود. کاربردهای متعددی از حالت‌های در هم تنیده کوانتومی پیشنهاد شده است. بتازگی تئوری اطلاعات کوانتومی نگرش جدیدی را برای مشاهده و مطالعه سیستم‌های هسته‌ای در هم تنیده مانند هسته‌ها که به عنوان یک

با گذشت بیش از چند دهه، هنوز خاصیت در هم تنیدگی چه از دیدگاه تئوری و چه از دیدگاه عملی بسیار جالب است. در واقع در هم تنیدگی یکی از حیرت‌انگیزترین جنبه‌های فرمولبندی مکانیک کوانتومی می‌باشد. در هم تنیدگی رفتار کوانتومی سیستم‌های دو یا بس‌ذره‌ای است که نخست با هم برهم کنش کرده و سپس از هم

دو نمونه مجزا را که فرمیونهایی در پوسته های $j=1/2$ یا $3/2$ قرار می گیرند را مورد بررسی قرار دادیم. لازم به ذکر است که در هسته های A فرد مانند هسته های زوج-زوج قسمت بوزونی گذار ارتعاشی به گامای ناپایدار را انجام می دهد.

با استفاده از از مولدهای جبرافین $SU(1,1)$ و اپراتورهای کازیمیر زیرجبرها، هامیلتونین های زیر را برای توصیف ناحیه گذار $U(5)$ O(6) در هسته های A فرد درنمونه های $j=1/2$ یا $3/2$ استفاده می شود [4,9]:

$$H = gS_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta C_2(SO^B(5)) + \delta C_2(SO^B(3)) + \gamma C_2(spin^{BF}(3))$$

$$H = gS_0^+ S_0^- + \alpha S_1^0 + \beta C_2(spin^{BF}(5)) + \gamma C_2(spin^{BF}(3)) \quad (1)$$

پارامترها مقادیر حقیقی هستند. این هامیلتونین به ازای $C_s = C_d$ تقارن دینامیکی O(6)، به ازای $C_d \neq 0$ و $C_s = 0$ برای توصیف حد تقارنی $U(5)$ و نهایتاً به ازای $C_s \neq C_d \neq 0$ برای مطالعه ناحیه انتقالی مورد استفاده قرار می گیرد. پارامترهای $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ مقادیر حقیقی هستند.

در ادامه، بر روی درهم تنیدگی در منطقه گذار فاز کوانتومی در هسته ها را بحث می کنیم و نحوه تعیین درهم تنیدگی آنتروپی در IBFM را ارائه می دهیم. ما فقط آنتروپی فون نویمان را به عنوان معیاری مناسب برای درهم تنیدگی در نظر خواهیم گرفت. یکی از ساده ترین کمیت ها برای اندازه گیری درهم تنیدگی بین دو جسم، آنتروپی فون نویمان است. آنتروپی درهم تنیدگی را می توان با استفاده از تجزیه اشمیت نشان داد. برای محاسبه آنتروپی درهم-تنیدگی، ویژه حالات را به صورت زیر در نظر می گیریم [4].

$$|\psi\rangle_{JM}^{BF} = |m, v_s, v_d, n_\Delta, JM\rangle = \theta S_{x_1}^+ S_{x_2}^+ S_{x_3}^+ \dots S_{x_m}^+ |lw\rangle_{JM}^{BF} \quad (2)$$

ویژه حالات معادله (2) را در نمونه $j=1/2$ می توان برحسب تجزیه اشمیت بازنویسی کرد بصورت

سیستم بس ذره ای در نظر گرفته می شود را فراهم می کند [1]. استفاده از اطلاعات کوانتومی در سیستم های هسته ای فرصت های جدید جالب توجهی را برای درک و تفسیر پدیده های اندرکنش قوی فراهم می کند [2]. انتقال فاز کوانتومی (QPT) در سیستم های هسته ای در ارتباط با درهم تنیدگی، اخیراً مورد مطالعه قرار گرفته است [3-8]. برای مشخص کردن ویژگی های سیستم، باید یک پارامتر نظم را معرفی کرد. درهم تنیدگی به عنوان یکی از جالب ترین ویژگی های نظریه کوانتومی، می تواند به عنوان یک پارامتر نظم در سیستم های هسته ای در نظر گرفته شود. بنابراین، اندازه گیری آن برای انتقال فاز کوانتومی مهم است. یکی از بهترین اندازه گیری ها برای درهم تنیدگی کوانتومی در سیستم های فیزیکی، آنتروپی نویمان است [3-8].

کارایی عملکرد مشاهده پذیرهای فیزیکی جهت بررسی QPT از طریق بررسی زنجیره های مختلف اثبات میشود. زنجیره باریوم یکی از این زنجیره ها است که به روشنی QPT را در ناحیه $SO(6)$ به $U(5)$ را نشان میدهد. بررسی و شناسایی هر هسته گذار در هر زنجیره ایزوتوپی به لحاظ پدیده شناختی و درک بهتر ساختار هسته ها حائز اهمیت است [9].

هدف از این مقاله، مطالعه انتقال فاز کوانتومی و ساختار هسته بر اساس درجه درهم تنیدگی است. با استفاده از اثر درهم تنیدگی، انتقال فاز کوانتومی را شناسایی و توصیف می کنیم. برای بررسی گذار فازی شکلی، ما آنتروپی درهم تنیدگی را با استفاده از ساختار جبری $SU(1,1)$ و از طریق تجزیه اشمیت برای ناحیه گذار فازی شکلی از ارتعاشی به گامای ناپایدار در مدل اندرکنش بوزون فرمیونی (IBFM) را بدست آوردیم. سپس به توصیف گذار فاز کوانتومی و ساختار هسته بر مبنای میزان درهم تنیدگی در زنجیره ایزوتوپیک باریوم پرداخته شد.

چارچوب تئوری کار

در هسته های A فرد، تقارن های بوز-فرمی متناسب با هریک از تقارن های دینامیکی IBM است. بنابراین، ساختار جبر بوزون بصورت $U(6)$ در نظر گرفته می شود در حالی که ساختار جبر فرمیونی بستگی به مقادیر تکانه زاویه ای تک فرمیون (j) دارد. ما

برای توصیف آنتروپی درهم تنیدگی، ما عملیات تریس را روی d بوزون و حالت های فرمیون منفرد انجام می دهیم که منجر به

$$Tr^{dF}(\rho) = \sum_{m_{j_f}=-3/2}^{m_{j_f}=+3/2} \sum_{l=0}^m \sum_L N_{j_f, m_{j_f}}^2 |a_{L, m_{j_f}}|^2 |b_{l, k_s, k_d}|^2 |k_s, k_s + l, L, M_L\rangle \langle k_s, k_s + l, L, M_L| \quad (8)$$

با استفاده از معادله (8)، آنتروپی درهم تنیدگی به دست می آید:

$$S^{dF} = - \sum_{m_{j_f}=-3/2}^{m_{j_f}=+3/2} \sum_L |C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 3/2} \eta_{v_{1J}}^{v, L}|^2 \log(|C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 3/2} \eta_{v_{1J}}^{v, L}|^2) - \sum_{l=0}^m |b_l|^2 \log(|b_l|^2) \quad (9)$$

نتایج

بعضی از هسته ها در منطقه جرمی دارای ویژگی های گذار بین حدهای کروی و تغییر شکل یافته گامای ناپایدار محوری می- باشند[9]. مطالعات تجربی و تئوری انجام شده بر روی طیف انرژی برای ایزوتوپ های باریوم، ویژگی های گذار U(5)-O(6) را نشان می دهد. در این کار ما حالت های پاریته مثبت هسته با عدد جرمی فرد $^{127-137}Ba$ با استفاده از مدل IBFM بررسی کردیم. حالتها پاریته مثبت $^{127-137}Ba$ عمدتاً بر روی مدار پوسته کروی $1g_{7/2}, 2d_{5/2}, 2d_{3/2}$ و $1s_{1/2}$ ایجاد می شوند[9].

ابتدا با استفاده از روابط (6) و (9)، مقادیر آنتروپی درهم تنیدگی ایزوتوپ های فرد $^{127-137}Ba$ محاسبه شد. نتایج برای پائین ترین حالات $\left(\frac{5}{2}\right)_1^+$ ، $\left(\frac{3}{2}\right)_1^+$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)_1^+$ در شکل (1) نشان داده شده است. از شکل (1) می توان دریافت که مقادیر آنتروپی درهم- تنیدگی با افزایش عدد جرمی کاهش می یابد و در ایزوتوپ های سنگینتر تقریباً به صفر می رسد.

مقادیر کنترل پارامتر بدست آمده برای این ایزوتوپ ها نیز محاسبه شد و از مقادیر 0.7 برای ^{127}Ba به 0.29 برای ^{137}Ba کاهش می- یابد. نتایج در شکل (2) نشان داده شده است. از مقادیر کنترل پارامتر بدست آمده می توان دریافت که ایزوتوپ های Ba یک گذار از حد گامای ناپایدار به حد ارتعاشی را نشان می دهد. مقادیر آنتروپی و کنترل پارامتر محاسبه شده یک تغییر شکل از حد O(6) گاما ناپایدار به شکل U(5) کروی در ایزوتوپ های فرد

$$|\psi\rangle_{JM}^{BF} = \sum_{m_{j_f}=-\frac{1}{2}}^{m_{j_f}=\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^m b_{l, k_s, k_d} C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, \frac{1}{2}} |k_s, k_s + l, L, M_L\rangle |k_d, k_d + (m-l), L, M_L\rangle \left| \frac{1}{2}, m_{j_f} \right\rangle \quad (3)$$

که

$$b_{l, k_s, k_d} = \frac{A_l \sqrt{\left(\frac{r! \Gamma(r+2k_s)}{\Gamma(2k_s)} \right) \times \left(\frac{(m-r)! \Gamma((m-r)+2k_d)}{\Gamma(2k_d)} \right)}}{\sqrt{\sum_{r=0}^m A_r \left(\frac{r! \Gamma(r+2k_s)}{\Gamma(2k_s)} \right) \times \left(\frac{(m-r)! \Gamma((m-r)+2k_d)}{\Gamma(2k_d)} \right)}} \quad (4)$$

$$A_l = \frac{1}{l!(m-l)!} \sum_{\pi \in S_m} \alpha_{\pi(1)} \alpha_{\pi(2)} \dots \alpha_{\pi(l)} \beta_{\pi(l+1)} \dots \beta_{\pi(m)}$$

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_s}{1-c_s^2 x_i} S_s^+ + \frac{c_d}{1-c_d^2 x_i} S_d^+ = \alpha_i S_s^+ + \beta_i S_d^+$$

ماتریس چگالی کل به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho = |\psi\rangle_{JM}^{BF} \langle \psi| = \sum_{m_{j_f}=-1/2}^{m_{j_f}=1/2} \sum_{l=0}^m |b_{l, k_s, k_d}|^2 C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 1/2} C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 1/2} |k_s, k_s + l, L, M_L\rangle \langle k_s, k_s + l, L, M_L| |k_d, k_d + (m-l), L, M_L\rangle \langle k_d, k_d + (m-l), L, M_L| \left| \frac{1}{2}, m_{j_f} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, m_{j_f} \right| \quad (5)$$

برای بررسی درهم تنیدگی بوزون با بقیه اجزای سیستم (بوزون d و فرمیون منفرد)، تریس روی بوزون d و فرمیون منفرد انجام شد که رابطه زیر بدست می آید:

$$Tr^{dF}(\rho) = \sum_{m_{j_f}=-1/2}^{m_{j_f}=1/2} \sum_{l=0}^m |b_{l, k_s, k_d}|^2 |C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 1/2}|^2 |k_s, k_s + l, L, M_L\rangle \langle k_s, k_s + l, L, M_L|$$

میزان آنتروپی درهم تنیدگی بصورت زیر بدست می آید

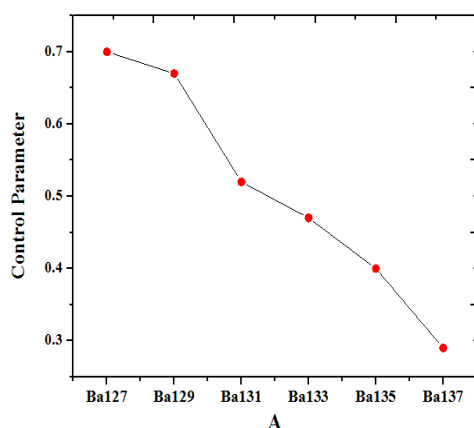
$$S_{d1/2}^{BF} = - \sum_{m_{j_f}=-1/2}^{m_{j_f}=1/2} |C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 1/2}|^2 \log(|C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 1/2}|^2) - \sum_{l=0}^m |b_{l, k_s, k_d}|^2 \log(|b_{l, k_s, k_d}|^2) \quad (6)$$

$$= S_{1/2}^{BF} + S^B$$

به منظور بررسی آنتروپی درهم تنیدگی در هسته های فرد- A با $j_f = 3/2$ ، ویژه حالات (رابطه (2)) این مدل را می توان برحسب تجزیه اشمیت بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle_{v_1 J M}^{BF} = \sum_{m_{j_f}=-3/2}^{m_{j_f}=+3/2} N_{j_f, m_{j_f}} |\psi\rangle_{v, m_{j_f}}^B |\psi\rangle_{(v_1=1/2, v_2=-1/2), j_f, m_{j_f}}^F$$

$$|\psi\rangle_{v, m_{j_f}}^B = \sum_L \frac{C_{M, M_L, m_{j_f}}^{J, L, 3/2} \eta_{v_{1J}}^{v, L}}{N_{j_f, m_{j_f}}} |\psi\rangle_{v, L, M_L}^B \quad (7)$$



شکل (2). مقادیر پارامتر کنترلی محاسبه شده برای ایزوتوپ‌های فرد باریوم.

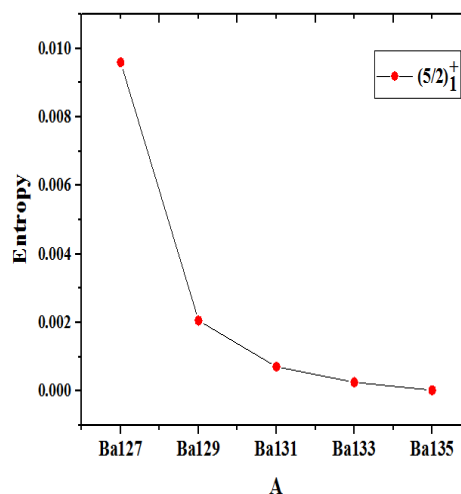
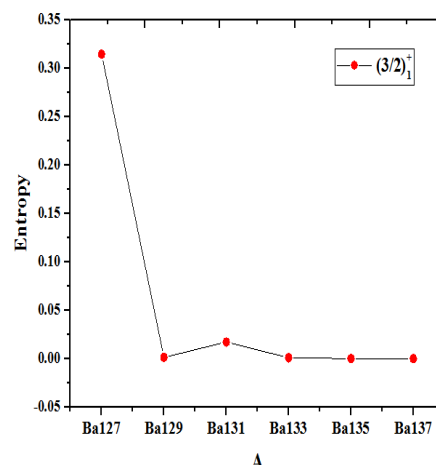
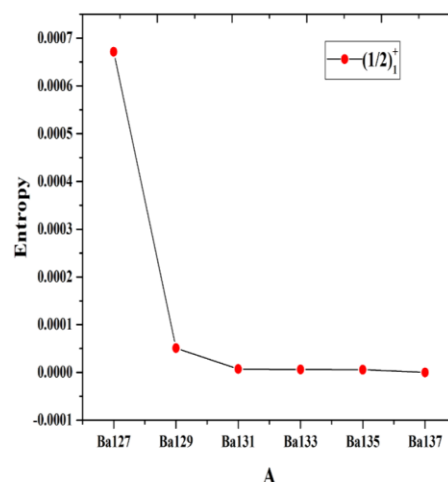
نتیجه گیری

در این مقاله، ما در مورد چگونگی استفاده از آنتروپی برای تشخیص انتقال فاز کوانتومی بحث کردیم. ما آنتروپی درهم تنیدگی را در مدل اندرکنش بوزون فرمیونی (IBFM) بررسی کردیم. مشخص شد که آنتروپی درهم تنیدگی یک پارامتر نظم مناسب برای تشخیص گذار فازی شکلی در سیستم‌های هسته‌ای است. نتایج نشان داد که هیچ درهم تنیدگی بین بوزون های s و d در حد $U(5)$ وجود ندارد و حداکثر مقدار درهم تنیدگی در حد $O(6)$ است.

مرجع‌ها

- [1] Pichler, T., Dalmonte, M., Rico, E., Zoller, P., & Montangero, S. (2016). Real-time dynamics in $U(1)$ lattice gauge theories with tensor networks. *Physical Review X*, 6(1), 011023.
- [2] Cloët, I. C., Dietrich, M. R., Arrington, J., Bazavov, A., Bishof, M., Freese, A., ... & Zohar, E. (2019). Opportunities for Nuclear Physics & Quantum Information Science. arXiv preprint arXiv:1903.05453.
- [3] Ring, P., & Schuck, P. (2004). The nuclear many-body problem. Springer Science & Business Media.
- [4] Jafarizadeh, M. A., Ghapanvari, M., & Amiri, N. (2022). Entanglement entropy as a signature of a quantum phase transition in nuclei in the framework of the interacting boson model and interacting boson-fermion model. *Physical Review C*, 105(1), 014307.
- [5] Preskill, J. (2015). Lecture notes for ph219/cs219: Quantum information. Accesible via <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229>
- [6] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., & Horodecki, K. (2009). Quantum entanglement. *Reviews of modern physics*, 81(2), 865.
- [7] Gühne, O., & Tóth, G. (2009). Entanglement detection. *Physics Reports*, 474(1-6), 1-75.
- [8] Amico, L., Fazio, R., Osterloh, A., & Vedral, V. (2008). Entanglement in many-body systems. *Reviews of modern physics*, 80(2), 517.
- [9] Jafarizadeh, M. A., Ghapanvari, M., & Fouladi, N. (2015). Algebraic solutions for $U(5)$ – $O(6)$ quantum phase transition in odd-mass-number nuclei. *Physical Review C*, 92(5), 054306.

باریوم را نشان می‌دهد. بنابراین که آنتروپی درهم تنیدگی یک پارامتر نظم مناسب برای تشخیص انتقال فاز شکلی در سیستم‌های هسته‌ای است.



شکل (1). تغییرات آنتروپی پایین‌ترین ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های فرد باریوم.

دینامیک همبستگی یک سیستم کیوبیتی جفت شده با یک زنجیره اسپینی کیوتریتی

کاظمی حسنونند، فضل الله

¹گروه فیزیک، دانشگاه آیت الله بروجردی

چکیده

در این مقاله دینامیک درهم تنیدگی یک سیستم دو کیوبیتی بدون برهمکنش که تحت تأثیر یک محیط کیوتریتی قرار دارند را بررسی می‌کنیم. برای این کار حالت بل را به عنوان حالت اولیه سیستم در نظر می‌گیریم، سپس دینامیک همبستگی سیستم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

Correlation dynamics of a qubit system interacting with a qutrit spin chain environment.

Kazemi Hasanvand, Fazlollah¹

¹ Department, Ayatollah Ozma Borujerdi University, Borujerd

Abstract

In this paper we study the correlation dynamics of a non-interacting two-qubit system which is embedded in a qutrit environment with a constant magnetic field. We consider a bell state as an initial state of the system and its correlation dynamics is studied in the mentioned environment.

PACS No.

مقدمه:

در یک میدان مغناطیسی قرار دارد، برهم‌کنش دارند را می‌نویسیم. در ادامه با در نظر گرفتن حالت بل به عنوان حالت اولیه سیستم مرکب کیوبیت-کیوبیت، دینامیک درهم تنیدگی و ناهم‌خوانی را مورد بررسی قرار داده و وابستگی درهم تنیدگی به پارامترهای مختلف را مطالعه می‌کنیم.

مدل:

سیستم شامل دو کیوبیت A و B است که با یک زنجیره اسپینی شامل N کیوتریت که در یک میدان مغناطیسی قرار دارد، برهم‌کنش دارند. هامیلتونی کل سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = H_{SE} + H_E, \quad (1)$$

$$H_{SE} = -\frac{J_0}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N S_{Ei}^z (S_A^z + S_B^z), \quad (2)$$

$$H_E = -\lambda \sum_{i=1}^N S_{Ei}^x - \frac{J}{\sqrt{N}} \sum_{k,k'=1}^N S_{Ek}^z S_{Ek'}^z. \quad (3)$$

S_A^z و S_B^z به ترتیب عملگرهای اسپین $\frac{1}{2}$ وابسته به سیستم در جهت محور Z و S_{Ei}^x و S_{Ei}^z به ترتیب عملگرهای اسپین $\frac{1}{2}$ وابسته به محیط در جهت محور Z و محور X هستند. که در آن J و J_0

درهم تنیدگی کوانتومی نقشی کلیدی در فرایند اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی دارد، بنابراین در پژوهش‌های نظری و تجربی مورد توجه زیادی قرار گرفته است [5-1]. از آنجایی که سیستم‌های کوانتومی به طور اجتناب ناپذیری با محیط اطراف خود برهم‌کنش دارند بررسی تأثیر محیط بر درهم تنیدگی، کنترل درهم تنیدگی در طول برهم‌کنش سیستم با محیط و پیدا کردن حالت‌هایی از سیستم که در مقابل اثر واهمدوسی مقاومت بیشتری نشان می‌دهند، اهمیت زیادی دارد [6]. در سال‌های اخیر تأثیر محیط بر سیستم‌های اسپینی کیوبیت-کیوبیت و کیوتریت-کیوتریت به طور وسیعی مطالعه شده است [9-7]. در این مقاله دینامیک درهم تنیدگی یک سیستم مرکب کیوبیت-کیوبیت که تحت تأثیر یک محیط اسپینی قرار دارد را با استفاده از روش تقریب میدان میانگین بررسی می‌کنیم. برای این کار ابتدا هامیلتونی کل شامل دو کیوبیت A و B که با یک زنجیره اسپینی شامل N کیوتریت که

ثابت‌های جفت شدگی تبادلی، λ شدت میدان عرضی و N تعداد درجات آزادی محیط اسپینی است. ماتریس چگالی گرمایی محیط به صورت زیر است:

$$\rho_E = \frac{\exp(-\frac{H_E}{T})}{Z} \quad (4)$$

که در آن T دما و تابع پارش Z به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z = \text{Tr}(\exp(-\frac{H_E}{T})) \quad (5)$$

ماتریس چگالی کل سیستم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\rho_T = \rho_s \otimes \rho_E \quad (6)$$

بنابراین حالت کل سیستم بعد از زمان t به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\rho_T(t) = U(\rho_s \otimes \rho_E)(0)U^\dagger \quad (7)$$

در این رابطه $U = e^{-iHt}$ عملگر تحول زمان و H هامیلتونی سیستم است. در ادامه دینامیک همبستگی‌های سیستم را بررسی می‌کنیم. ماتریس چگالی سیستم، که با محاسبه ردّ جزئی روی محیط به دست می‌آید به صورت زیر است:

$$\rho_s(t) = \text{Tr}_E(\rho_T(t)) \quad (8)$$

برای سهولت در محاسبه $\rho_s(t)$ بایستی جمله غیر خطی در هامیلتونی (3) را از بین ببریم برای این کار تعداد کیوتریت‌های محیط را زیاد فرض می‌کنیم و سپس تقریب میدان میانگین را به کار می‌بریم. هامیلتونی محیط H_E را با تقریب میدان میانگین به صورت زیر می‌نویسیم:

$$H_E^{mf} = -\lambda \sum_{i=1}^N S_{Ei}^x - 2mJ \sum_{i=1}^N S_{Ei}^z + m^2 J N \quad (9)$$

در رابطه (9)، m پارامتر نظم گذار فاز می‌باشد. اندازه m از 0 تا 1 تغییر می‌کند و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Theta}{4J} = \frac{\text{Sinh} \frac{\Theta}{2T}}{1 + 2\text{Cosh} \frac{\Theta}{2T}} \quad (10)$$

که در آن

$$\Theta = \pm \sqrt{\lambda^2 + 4m^2 J^2} \quad (11)$$

با استفاده از روابط (4)، (7)، (8) و (9) ماتریس چگالی سیستم در لحظه t را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\rho_s(t) = \frac{\exp(-\frac{m^2 J N}{T})}{Z} \text{Tr}_E[\exp\{-it(H_S + H_{SE} + H_E^{mf})\} \rho_s(0) \otimes \exp(-\frac{H_E^{mf}}{T}) \exp\{it(H_S + H_{SE} + H_E^{mf})\}] \quad (12)$$

که در آن:

$$\rho_s(0) = \sum_{k'=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{k,k'} |\alpha_k, \beta_{k'}\rangle \langle \beta_{k'}, \alpha_k| \quad (13)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \beta_{k'} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

سرانجام داریم:

$$\rho_s(t) = \frac{\exp(-\frac{m^2 J N}{T})}{Z} \prod_i \text{Tr}_E \{ \exp(iI) \exp(R) \exp(iI') \} [\sum_{k'=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{k,k'} |\alpha_k, \beta_{k'}\rangle \langle \beta_{k'}, \alpha_k|] \quad (14)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} I &= t[(\frac{u_j J_0}{\sqrt{N}} + 2mJ) S_{Ei}^z + \lambda S_{Ei}^x], \\ R &= \frac{(2mJ S_{Ei}^z + \lambda S_{Ei}^x)}{T}, \\ I' &= -t[(\frac{u_{j'} J_0}{\sqrt{N}} + 2mJ) S_{Ei}^z + \lambda S_{Ei}^x], \\ u_j, u_{j'} &= \alpha_k + \beta_{k'}, \\ k &= 1, 2 \quad k' = 1, 2 \quad j, j' = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (15)$$

و

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |00\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, |2\rangle = |01\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, |3\rangle = |10\rangle = \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |4\rangle &= |11\rangle = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

دینامیک همبستگی سیستم

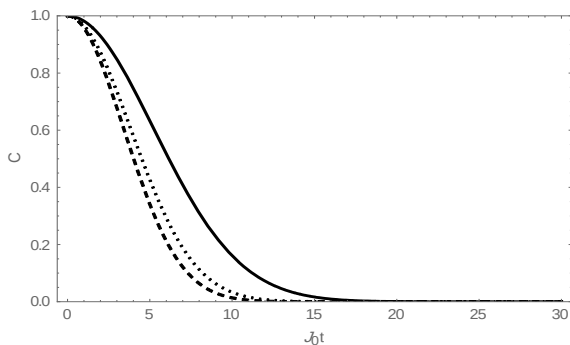
برای بررسی دینامیک همبستگی، حالت اولیه سیستم را به صورت حالت بل زیر در نظر می‌گیریم: [10]

$$\psi_s(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (16)$$

همچنین ناهمخوانی کوانتومی مربوط به حالت (17) از رابطه زیر به دست می آید: [11]

(24)

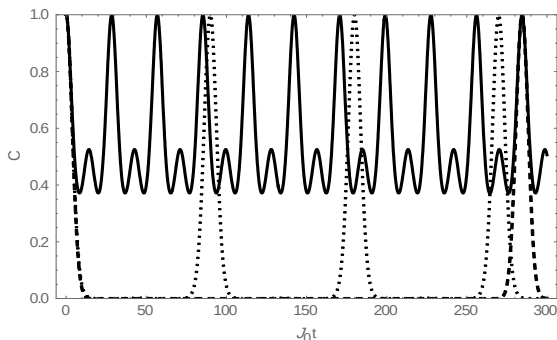
$$D(\rho_{AB}) = \left(\frac{1+|M_{14}|}{2}\right) \log_2(1+|M_{14}|) + \left(\frac{1-|M_{14}|}{2}\right) \log_2(1-|M_{14}|)$$



شکل 1: تلاقی بر حسب $J_0 t$ به ازاء $T=0.52$ (خط توپر)

$T=0.54$ (نقطه چین) $T=0.56$ (خط چین) $J=2$ ، $\lambda=1$ ، $N=10000$

در شکل 1 تلاقی بر حسب $J_0 t$ برای مقادیر متفاوت از دمای T رسم شده است. مشاهده می شود تلاقی به ازاء هر دمای مشخص بعد از مدت زمان معینی صفر می شود و با افزایش دما سرعت میرایی افزایش می یابد.



شکل 2: تلاقی بر حسب $J_0 t$ به ازاء $N=10$ (خط توپر)

$N=100$ (نقطه چین) $N=1000$ (خط چین) $J=2$ ، $T=0.54$ ، $\lambda=1$

در شکل 2 نمودار درهم تنیدگی بر حسب زمان به ازای مقادیر متفاوت N نشان داده شده است. با افزایش تعداد درجات آزادی محیط درهم تنیدگی در لحظه های اولیه سریع تر کاهش می یابد و با گذشت زمان دچار مرگ و سپس احیاء می شود. همچنین با افزایش فرکانس نوسانات درهم تنیدگی کاهش می یابد.

ماتریس چگالی تابع زمان سیستم در اثر برهم کنش با محیط به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rho_{AB}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{M_{14}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{14}^*}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

که در آن M_{14} به صورت زیر داده می شود:

$$M_{14} = \frac{1}{(1+2\cosh\frac{\Theta}{2T})^N} \left\{ \prod_{k=1}^N \text{tr}[\exp(i t[(\frac{J_0}{\sqrt{N}} + 2mJ)S_{Ei}^z + \lambda S_{Ei}^x]) \exp(\frac{(2mJS_{Ei}^z + \lambda S_{Ei}^x)}{T}) \exp(-i t[(\frac{-J_0}{\sqrt{N}} + 2mJ)S_{Ei}^z + \lambda S_{Ei}^x])] \right\} \quad (18)$$

با تعریف:

$$A = \alpha S_z + \beta S_x \quad (19)$$

که در آن:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

و با توجه به رابطه:

$$e^{-kA} = I_{3 \times 3} - \frac{\text{Sinh}(k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} A + \left(\frac{\text{Cosh}(k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) - 1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) A^2 \quad (21)$$

M_{14} به صورت زیر داده می شود:

$$M_{14} = \frac{1}{(1+2\cosh\frac{\Theta}{T})^N} \left\{ (2\cosh\frac{\Theta}{2T})^2 [\text{Cosh}(\frac{2JJ_0 mt}{2\sqrt{N}}) + i \frac{\Theta}{J} \text{Sinh}(\frac{2JJ_0 mt}{2\sqrt{N}})]^2 - 1 \right\}^N \quad (22)$$

تلاقی مربوط به حالت (17) به صورت زیر داده می شود:

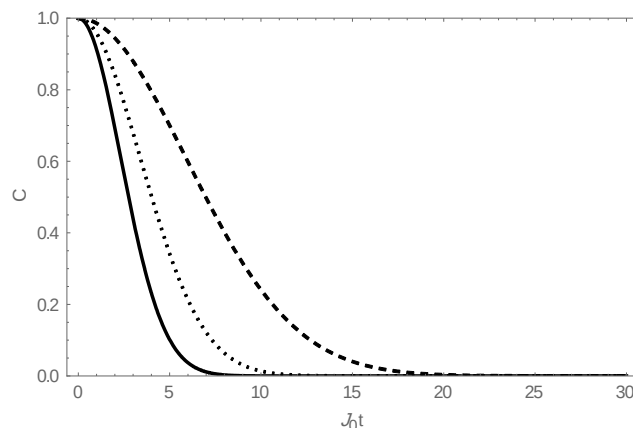
$$C(\rho_{AB}(t)) = \max\{0, |M_{14}|\} \quad (23)$$

اولیه سیستم مورد مطالعه قرار دادیم. نتایجی که در این مطالعه به دست آمد به شرح زیر است:

1- اثر میدان عرضی خارجی اعمال شده بر محیط را بر دینامیک درهم تنیدگی مورد مطالعه قراردادیم. مشاهده شد که با افزایش شدت میدان، تلاقی دیرتر صفر می شود. 2- با کاهش تعداد درجات آزادی محیط، زمان مرگ درهم تنیدگی کاهش و در بعضی مواقع مرگ درهم تنیدگی به طور کامل از بین می رود و همچنین فرکانس نوسانات درهم تنیدگی افزایش می یابد. 3- مشاهده می شود که با افزایش دما سرعت میرایی درهم تنیدگی افزایش می یابد.

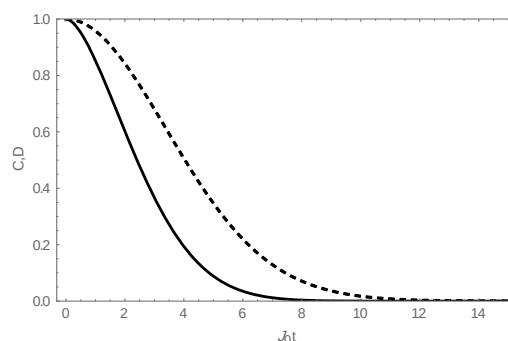
مرجع ها

- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki; "Quantum entanglement"; Rev. Mod. Phys. 81 (2009) 865-942.
- [2] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W.K. Wootters; "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels"; Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 1895-1899.
- [3] C. H. Bennett and S. J. Wiesner; "Communication via One- and Two-Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States"; Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 2881-2884.
- [4] C. H. Bennett; "Quantum Cryptography Using Any Two Nonorthogonal States"; Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 3121-3124.
- [5] M. A. Nielsen and I. L. Chuang; "Quantum Computation and Quantum Information"; Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [6] L. Aolita, F. de Melo and L. Davidovich; "Open-system dynamics of entanglement"; Rep. Prog. Phys. 78 (2015) 042001-1-79.
- [7] F. Kazemi. Hasanvand, N. Naderi; "Correlation dynamics of a qubit system interacting with a qutrit environment embedded in a magnetic field"; Eur. Phys. J. Plus, 136 (2021) 475-486.
- [8] M. X. San, G. X. Zhao, J. Y. Zhang and A. M. Wang; "Dynamics of quantum discord under decoherence from a spin environment"; Opt. Commun. 284 (2011) 555-560.
- [9] M. Jafarpour, F. Kazemi Hasanvand, and D. Afshar; "Dynamics of Entanglement and Measurement-Induced Disturbance for a Hybrid Qubit-Qutrit System Interacting with a Spin-Chain Environment: A Mean Field Approach"; Commun. Theor. Phys. 67 (2017) 27-32.
- [10] W. k. Wootters, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 2245
- [11] H. Ollivier and W. H. Zurek, "Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations"; Phys. Rev. Lett. 88 (2001) 017901.



شکل 3: تلاقی بر حسب $J_0 t$ به ازاء $\lambda_1 = 0.5$ (خط توپر) $\lambda_2 = 1$ (نقطه چین) $\lambda_3 = 1.2$ (خط چین). $T = 2.56$ ، $J = 2$ ، $h = 1$ ، $N = 10000$

در شکل 3 تلاقی بر حسب $J_0 t$ برای مقادیر متفاوت از شدت میدان عرضی λ رسم شده است. تلاقی به ازاء هر λ مشخص بعد از مدتی صفر می شود. با افزایش λ تلاقی دیرتر صفر می شود. بنابراین شدت میدان مغناطیسی می تواند در نقش یک عامل کنترل کننده واهمدوسی عمل کند.



شکل 4: تلاقی (خط چین) و ناهمخوانی (خط توپر) بر حسب $J_0 t$ به ازاء $T = 2.56$ ، $\lambda = 1$ ، $N = 1000$ ، $J = 2$.

در شکل 4 ناهمخوانی و تلاقی بر حسب پارامتر $J_0 t$ رسم شده اند هر دو معیار در شرایط یکسان بعد از مدتی صفر می شوند. ناهمخوانی سریع تر کاهش و صفر می شود و سرعت میرایی آن بیشتر است.

در این مقاله با استفاده از روش تقریب میدان میانگین دینامیک درهم تنیدگی و ناهمخوانی سیستم مرکب کیوبیت-کیوبیت، که با یک محیط اسپینی کیوتریتی برهم کنش دارد مورد بررسی قرار گرفت. تحول درهم تنیدگی و ناهمخوانی را برای حالت بل به عنوان حالت

تشخیص کانال‌های کوانتومی اکستریم با استفاده از شبکه‌های عصبی

ماستری فراهانی^۱، محمد مهدی^۱؛ معمارزاده، لاله^۱

^۱ دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چکیده

پارامتر بندی کامل مجموعه‌ی کانال‌های کوانتومی، در بُعد دلخواه هنوز ناشناخته است. از آنجایی که مجموعه‌ی کانال‌های کوانتومی، یک مجموعه‌ی محدب است، یافتن نقاط اکستریم معادل ساختن خود مجموعه است. ولی در فضای هیلبرت با بُعد $d > 2$ مجموعه‌ی نقاط اکستریم را به طور کامل نمی‌شناسیم. تشخیص اینکه یک کانال داده شده اکستریم است یا نه، معادل حل کردن یک دستگاه معادلات خطی است که تعداد آن به صورت d^2 افزایش می‌یابد. ما در این کار، قصد داریم با استفاده از روش‌های یادگیری ماشینی، به خصوص شبکه‌های عصبی، کانال‌های کیوبیتی و کیوتریتی اکستریم و غیراکستریم را تشخیص دهیم و در مورد نقش داده‌های استفاده شده برای آموزش، در عملکرد ماشین بحث کنیم.

واژه های کلیدی: کانال‌های کوانتومی اکستریم، یادگیری ماشینی، شبکه‌های عصبی

Detection of Extreme Quantum Channels, using Neural Networks

Masteri Farahani, Mohammad Mahdi¹; Memarzadeh, Laleh¹

¹ Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

The full characterization of the set of quantum channels, in arbitrary dimension is still unknown. Since, the set of quantum channels is a convex set, finding the extreme points is equivalent to constructing the whole set. But, in $d > 2$ dimensional Hilbert space we don't know the extreme points. Detecting that a given channel is extreme or not is equivalent to solving a system of linear equations, that its number increasing with order d^2 . In this work, we intend to detect extreme qubit and qutrit and non-extreme channels, using machine learning methods, specially neural networks, and discuss about the role of data, using for learning, in machine performance.

Keywords: Extreme quantum channels, Machine learning, Neural networks

مقدمه

دیگر، دسته‌بندی کردن^۱ است. مسئله‌ای که ما مدنظر داریم نیز، نوعی مسئله‌ی دسته‌بندی است.

ما می‌خواهیم ماشینی داشته باشیم که بتواند یک کانال کوانتومی را در ورودی بگیرد و در خروجی به ما بگوید که این کانال اکستریم است یا نه. در این کار، سعی کردیم تا شبکه‌ی عصبی‌ای بسازیم تا بتواند چنین کاری را برای کانال‌های کیوبیتی و کیوتریتی انجام دهد. در ابتدا، در بخش اول، مراحل ساختن شبکه‌ی عصبی برای تشخیص کانال‌های اکستریم کیوبیتی و در بخش دوم برای تشخیص کانال‌های اکستریم کیوتریتی شرح داده شد. نهایتاً در بخش سوم، نتیجه‌گیری کلی بیان شده است.

کلی‌ترین شکل تحول یک سیستم‌های کوانتومی، نگاشت‌های کاملاً مثبت رندگه‌دار، یا کانال‌های کوانتومی هستند [1]. مجموعه‌ی این نگاشت‌ها، یک مجموعه‌ی محدب است [2]. بنابراین، شناختن تمام عناصر این مجموعه، معادل است با یافتن نقاط اکستریم این مجموعه، که به دلیل پیچیدگی‌های جبری، در بُعد فضای هیلبرت بیشتر از ۲، حل نشده باقی مانده است [3,4].

امروزه، روش‌های یادگیری ماشینی، علی‌الخصوص شبکه‌های عصبی کاربردهای زیادی در در علم فیزیک پیدا کرده‌اند [5]. یکی از توانایی‌های اصلی شبکه‌های عصبی، تشخیص دادن یا به بیان

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (2)$$

اثر یک کانال کوانتومی بر روی این ماتریس چگالی را می توان به صورت زیر نوشت:

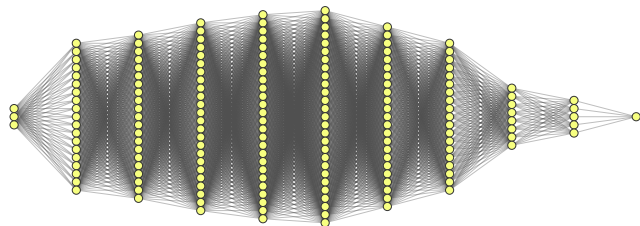
$$\phi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + \mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (3)$$

که در آن، $\mathbf{r}'$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r}' = M\mathbf{r} + \mathbf{t} \quad (4)$$

ماتریس M را «ماتریس آفین» و بردار $\mathbf{t}$ را «بردار انتقال» می نامند. بنابراین، یک کانال کیوبیتی، با ۹ پارامتر ماتریس آفین و ۳ پارامتر بردار انتقال، مجموعاً ۱۲ پارامتر، به طور کامل مشخص می شوند. شرط کاملاً مثبت بودن و ردنگه دار بودن، به صورت نامساوی های فوجیوارا-آلگوئت^۴، در این نمایش ظاهر خواهند شد که محدوده ی این ۱۲ پارامتر را مشخص می کند [7].

شرط اکستریم بودن یک کانال کیوبیتی، در نمایش آفین، برای مورد کانال های یکه نگه دار^۵ و غیریکه نگه دار^۶ به دست آمده اند [3]. بنابراین همه چیز برای ساختن یک داده ی مناسب آماده است.



شکل ۱: معماری شبکه ی عصبی. لایه های شبکه ی عصبی، به جز لایه ی اول (ورودی) و لایه ی آخر (خروجی)، را لایه های پنهان می نامند. تعداد نورون های موجود در هر لایه به صورت زیر است:

[12, 95, 105, 120, 130, 145, 117, 93, 42, 25, 1]

۱. اکستریم و غیر اکستریم یکه نگه دار: در این مرحله، داده های آموزش شبکه ی عصبی را با استفاده از ۵۰۰۰ عدد کانال تصادفی غیر اکستریم یکه نگه دار و ۵۰۰۰ عدد کانال تصادفی اکستریم یکه نگه دار تشکیل دادیم. هر بخش از داده ها (اکستریم و غیر اکستریم)، جداگانه برچسب گذاری شدند، تا به ماشین آموزش دهیم که این دو بخش، از هم جدا هستند. ۲۰ درصد داده ها را به عنوان «داده ی تست» جدا کردیم و شبکه ی عصبی را با ۸۰ درصد باقی مانده آموزش دادیم.

تشخیص کانال های اکستریم

در این بخش قصد داریم تا درباره ی یادگیری شبکه ی عصبی برای تشخیص کانال های اکستریم بحث کنیم. چیزی که از شبکه ی عصبی می خواهیم این است که بتواند کانال های کیوبیتی اکستریم را از غیراکستریم مجزا کند. تشخیص این مورد، به صورت الگوریتمی ممکن است و با استفاده از قضیه ی زیر می توان این کار را انجام داد. **قضیه ۱:** کانال کوانتومی ϕ به همراه مجموعه ی عملگرهای کراس $\{A_i\}_{i=1}^N$ را در نظر بگیرید.

$$\phi(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger, \quad \sum_i A_i^\dagger A_i = I \quad (1)$$

این کانال کوانتومی، یک کانال اکستریم است اگر و فقط اگر اعضای مجموعه ی $\{A_i^\dagger A_j\}_{i,j=1}^N$ مستقل خطی باشند [6].

تشخیص استقلال خطی چنین مجموعه ای، معادل حل کردن یک دستگاه معادله ی همگن است، که برای آن الگوریتم مشخص وجود دارد. اما، تعداد این معادلات برای فضای هیلبرت با بُعد d ، حداکثر برابر d^2 است.

در روش شبکه ی عصبی، بخش اصلی محاسبات در «لایه های پنهان»^۲ صورت می گیرد. و در رهیافت ما با افزایش بُعد فضای هیلبرت، بخش لایه های پنهان تغییری نمی کند (شکل ۱). در واقع با افزایش بُعد فضا، تنها تعداد نورون های لایه ی ورودی و در نتیجه تعداد محاسبات از لایه ی ورودی به اولین لایه ی پنهان افزایش می یابد. در بُعد های پایین میزان افزایش این تعداد در مقایسه با تعداد محاسبه در بخش لایه های پنهان ناچیز و قابل چشم پوشی است. بنابراین، استفاده از روش شبکه های عصبی می تواند کمک چشم گیری به تشخیص کانال های اکستریم کند.

کانال های کیوبیتی

در این بخش قصد داریم تا درباره ی تشخیص کانال های اکستریم کیوبیتی، با استفاده از شبکه های عصبی بحث کنیم. برای ساختن داده، به منظور آموزش ماشین در مورد تشخیص کانال های کیوبیتی اکستریم، از «نمایش آفین»^۳ استفاده می شود. ماتریس چگالی یک کیوبیت را می توان به صورت زیر نوشت:

⁵ Unital quantum channels
⁶ Non-unital quantum channels

² Hidden layers
³ Affine representation
⁴ Fujiwara-Algoet conditions

یکه‌نگه‌دارها و هم غیریکه‌نگه‌دارها را به عنوان داده‌ی یادگیری ماشین آماده کردیم. به بیان دیگر، همه نوع کانال اکستریم و غیر اکستریمی را در داده‌ی یادگیری ماشین قرار دادیم. طبیعتاً انتظار داریم در این مرحله دقت تشخیص بالا رود.

در این مرحله، دقت تشخیص ماشین، بر روی داده‌های تست، **۱۰۰ درصد** بود. یعنی در این مرحله، شبکه‌ی عصبی توانست به درستی همه‌ی اکستریم‌ها را از غیر اکستریم‌ها تشخیص دهد.

این مراحل سه‌گانه، اولاً نشان می‌دهند که شبکه‌های عصبی برای یادگیری، چه اندازه محتاج داده‌ی مناسب هستند. ثانیاً نشان‌دهنده‌ی این هستند که کانال‌های اکستریم غیریکه‌نگه‌دار، از اهمیت زیادی برای یادگیری برخوردار هستند. به این دلیل که وقتی این نوع کانال‌ها، در داده‌های یادگیری وجود نداشتند، دقت ماشین برای تشخیص، بسیار پایین بود.

کانال‌های کیوتربیتی

در این بخش، سعی کردیم تا آموزش شبکه‌ی عصبی را برای تشخیص کانال‌های اکستریم کیوتربیتی (بعد ۳ فضای هیلبرت) توضیح دهیم. چالش اصلی در این مورد، تولید داده‌های مناسب برای شبکه‌ی عصبی است، چرا که پارامتربندی کامل کانال‌های اکستریم کیوتربیتی، همچنان ناشناخته می‌باشد.

با الهام گرفتن از کانال میرایی دامنه^۷، ۳ دسته کانال اکستریم کیوتربیتی ساختیم. عملگرهای کراس این کانال‌ها، به ترتیب، در زیر آمده است:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 0 \\ \sqrt{\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

یکی از نمایش‌های مفیدی که کانال‌های کوانتومی دارند، ماتریس چوی^۸ است. ماتریس چوی مربوط به کانال ϕ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_\phi = (id \otimes \phi)|\Gamma\rangle\langle\Gamma| \quad (8)$$

آنچه، در بررسی عملگر یک شبکه‌ی عصبی مهم است، توانایی‌اش در تشخیص داده‌های تست است، که در فرآیند یادگیری آن‌ها را ندیده است. در این مرحله، ماشین توانست با **دقت ۹۹.۶ درصد**، داده‌های تست را به درستی تشخیص دهد. اما باید دقت کرد که در داده‌های یادگیری و تست، تنها کانال‌های یکه‌نگه‌دار وجود داشتند. اکنون خوب است که توانایی ماشین را برای تشخیص کانال‌های اکستریم غیریکه‌نگه‌دار بیازماییم. دقت شود که در فرآیند یادگیری، ماشین هیچ مثالی از این نوع کانال‌ها را ندیده است.

بنابراین ۱۰۰۰ عدد کانال کیوبیتی اکستریم غیریکه‌نگه‌دار تولید شدند و به شبکه‌ی عصبی داده شدند تا تشخیص‌شان دهد. شبکه‌ی عصبی توانست تنها، **۱۲۶ عدد** از این کانال‌ها را به درستی تشخیص دهد، یعنی با **دقت ۱۲.۶ درصد**. برای اینکه این درصد را افزایش دهیم، خوب است که در داده‌های یادگیری، تعدادی کانال یکه‌نگه‌دار قرار دهیم.

۲. اکستریم یکه‌نگه‌دار و غیر اکستریم دلخواه: در این مرحله، داده‌ها همانند قبل تولید شدند، با این تفاوت که در بخش غیراکستریم، کانال‌های غیریکه‌نگه‌دار نیز اضافه شدند. تعداد داده‌ها، مشابه مرحله‌ی ۱ است.

در این مرحله، دقت تشخیص ماشین، بر روی داده‌های تست، **۱۰۰ درصد** بود. اکنون، مشابه مرحله‌ی ۱، به ماشین، ۱۰۰۰ کانال اکستریم غیریکه‌نگه‌دار داده شد تا تشخیص‌شان دهد. این بار، شبکه‌ی عصبی توانست **۱۷۷ عدد** از این کانال‌ها را به درستی تشخیص دهد، یعنی با **دقت ۱۷.۷ درصد**.

دقت، در مقایسه با مرحله‌ی ۱، افزایش داشته است، که در نوع خود جالب توجه است. چراکه، ماشین در این مرحله، هیچ کانال اکستریم غیریکه‌نگه‌داری ندید و تنها از طریق کانال‌های غیر اکستریم، با کانال‌های غیریکه‌نگه‌دار آشنا شد. اما ظاهراً، همین آشنایی بر روی دقت تشخیص اکستریم‌های غیریکه‌نگه‌دار تأثیرگذار بوده است.

۳. اکستریم دلخواه و غیر اکستریم دلخواه: در این مرحله، تعداد داده‌های مشابه دو مرحله‌ی قبلی است. ولی، در این مرحله، هم

از نتایجی که در بالا به دست آمد، به نظر می‌رسد که کانال اکستریم A_i در یادگیری شبکه‌ی عصبی برای تشخیص بسیار مفید بوده است. به این دلیل که، هرگاه در داده‌های یادگیری، این کانال‌ها وجود داشتند، در هنگام تشخیص کانال‌های خارج از داده، شبکه‌ی عصبی بسیار خوب عمل کرده است، و در یک مورد که این کانال در داده‌ی یادگیری وجود نداشت، عملکرد شبکه‌ی عصبی، در تشخیص کانال‌های خارج از داده بسیار ضعیف بود.

نتیجه‌گیری

در مورد کانال‌های کیوبیتی دیده شد که وجود کانال‌های اکستریم غیریکه‌نگه‌دار در داده‌ی یادگیری، به چیز میزان زیادی در تشخیص ماشین درباره‌ی کانال‌های اکستریم کمک می‌کند.

سه کانال کیوتریت اکستریمی که، که غیریکه‌نگه‌دار نیز هستند، به ترتیب، هر کدام‌شان در داده‌های یادگیری غایب بودند، تا مشخص شود که کدام‌شان حاوی اطلاعات بیشتری از کانال‌های اکستریم است. نتیجه‌ای که به دست آمد این بود که، کانال با عملگرهای کراس A_i حاوی اهمیت بیشتری از کانال‌های دیگر است.

در آینده، می‌توان این بررسی را برای کانال‌های کیوتریتی اکستریم دیگری نیز انجام داد، و بیشتر به کاوش درباره‌ی دلیل نقش مؤثر دسته کانال‌های با عملگرهای کراس A_i پرداخت. همچنین می‌توان بُعد فضا را افزایش داد و توانایی شبکه‌ی عصبی در تشخیص کانال‌های اکستریم را مورد نظر قرار داد.

مرجع‌ها

- [1] Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum computation and quantum information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press.
- [2] Wilde, M. (2013). *Quantum Information Theory*. Cambridge University Press.
- [3] Ruskai, M. B., Szarek, S. J., & Werner, E. M. (2002). An analysis of completely-positive trace-preserving maps on M_2 . *Linear Algebra and Its Applications*, **347**(1-3), 159-187.
- [4] Mendl, C. B., & Wolf, M. S. (2009). Unital Quantum Channels – convex structure and revivals of Birkhoff's Theorem. *Communications in Mathematical Physics*, **289**(3), 1057-1086.
- [5] Mehta, P., Bukov, M., Wang, C., Day, A. G. R., Richardson, C. C., Fisher, C. G., & Schwab, D. J. (2019). A high-bias, low-variance introduction to Machine Learning for physicists. *Physics Reports*, **810**, 1-124.
- [6] Choi, M. (1975). Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **10**(3), 285-290.
- [7] Fujiwara, A., & Algoet, P. (1999). One-to-one parametrization of quantum channels. *Physical Review A*, **59**(5), 3290-3294.

که در آن، $|\Gamma\rangle$ حالت بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی^۹ است و id نگاشت واحد است. داده‌ها را در این بخش، با عناصر ماتریس چوی مشخص کردیم. معماری شبکه‌ی عصبی هم همانند قبل است (با این تفاوت که تعداد نوروهای ورودی افزایش داشته است و در این قسمت برابر ۱۶۲ عدد است. ۸۱ عدد برای بخش حقیقی عناصر ماتریس چوی و ۸۱ عدد برای بخش موهوی عناصر ماتریس چوی).

در ادامه، به سه صورت شبکه‌ی عصبی را آموزش دادیم و ارزیابی کردیم. ابتدا کانال‌های با عملگرهای کراس A_i و B_i را به تعداد ۳۰۰۰ عدد از هر کدام آماده کرده و سپس ۶۰۰۰ عدد کانال کیوتریتی غیراکستریم تولید کردیم و به هر دسته، برچسب جداگانه‌ای اختصاص دادیم. همانند بخش قبلی، ۲۰ درصد داده‌ها به عنوان داده‌ی تست جدا شدند و شبکه‌ی عصبی با ۸۰ درصد مابقی، یادگیری را آغاز کرد. در این حالت، شبکه‌ی عصبی توانست با دقت ۱۰۰ درصد همه‌ی داده‌ی تست را به درستی تشخیص دهد.

در مرحله‌ی بعدی، ۱۰۰۰ عدد کانال اکستریم با عملگرهای کراس C_i تولید کردیم (این کانال‌ها در داده‌ی یادگیری وجود نداشتند) و از شبکه‌ی عصبی خواسته شد تا این ۱۰۰۰ کانال را تشخیص دهد. در این مورد، شبکه‌ی عصبی توانست همه‌ی این ۱۰۰۰ کانال را به درستی به عنوان کانال اکستریم تشخیص دهد، که البته در نوع خود بسیار جالب است. چراکه اصلاً این کانال‌ها را شبکه‌ی عصبی ندیده بوده است.

سپس، داده‌های یادگیری با کانال‌های B_i و C_i تشکیل شد و ماشین توانست با دقت ۱۰۰ درصد، داده‌های تست را تشخیص دهد. سپس از شبکه‌ی عصبی خواسته شد تا ۱۰۰۰ عدد از کانال‌های A_i را تشخیص دهد. این بار ماشین توانست فقط ۸ عدد از این کانال‌ها را به درستی به عنوان کانال اکستریم تشخیص دهد. سپس، داده‌های یادگیری با کانال‌های C_i و A_i تشکیل شد، که در این حالت، شبکه‌ی عصبی باز هم با دقت ۱۰۰ درصد، داده‌های تست را تشخیص داد. همچنین، از ۱۰۰۰ کانال B_i توانست هر ۱۰۰۰ عدد را به درستی به عنوان کانال اکستریم تشخیص دهد.

⁹ Maximally entangled state

اندازه‌گیری اختلاف فاز طولی کوچک در جهت انتشار نور با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف واقعی

شادی محمدی

گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

بدست آوردن اختلاف فاز در جهت انتشار یک پرتویی که در محیط آزاد، فیبر و... منتشر می‌شود؛ معمولاً به روش تداخل‌سنجی انجام می‌شود. مقالات اخیر نشان دادند که این اختلاف فاز را می‌توان با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف بدست آورد که دقت اندازه‌گیری در این روش به طور قابل ملاحظه‌ای از روش مرسوم تداخل‌سنجی، بیشتر است. در این مقاله با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف حقیقی اختلاف فاز بین قطبش عمودی و افقی فوتون را بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: اندازه‌گیری ضعیف- تداخل‌سنجی

Measuring small longitudinal phase shifts in the direction of beam propagation using weak measurement with a real weak value

Shadi mohammadi

Department of Physics, sharif University of thechnology, Tehran

Abstract

Obtaining the phase shift in the propagation direction of a beam that is transmitted through various mediums such as free space, fiber, etc., is usually done using the interferometric method. However, recent articles have shown that this phase shift can be obtained using weak measurement, which offers significantly higher measurement precision compared to the conventional interferometric method. In this article, we utilize weak measurement with a real weak value to measure the phase shift between the vertical and horizontal polarizations of the photon.

Keywords: weak measurement- interferometry

مقدمه

زمانی که نور در فیبر منتشر می‌شود، در فیبر به دلایلی از جمله افزایش دما و ... ممکن است یک دوشکستی ایجاد شود و باعث ایجاد اختلاف فاز بین قطبش افقی و عمودی فوتونها شود. این اختلاف فاز معمولاً به روش تداخل‌سنجی بدست می‌آید. در بسیاری از کاربردهای فیبر این اختلاف فاز، مشکلات اساسی ایجاد می‌کند، برای مثال در رمزنگاری کوانتومی برپایه‌ی قطبش فوتون در پروتکل BB84، هنگامی که آلایس (فرستنده) حالت،

$|+\rangle = \frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}}$ را آماده و ارسال می‌کند و پایه‌ی اندازه‌گیری باب (گیرنده) نیز $|+\rangle$ و $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ باشد، آنگاه یکی از دلایلی که ممکن است باب حالت ارسال شده‌ی $|+\rangle$ را به اشتباه حالت $|-\rangle$ شناسایی کند، اختلاف فاز ایجاد شده، بین قطبش عمودی و افقی فوتون است، که اینکار باعث ایجاد اشکال در کلید کوانتومی آنها خواهد شد.

BB84، هنگامی که آلایس (فرستنده) حالت،

تحول $U = e^{-iH\Delta t}$ انجام می‌شود که در آن $H = gPA$ همپلتونی برهمکنش، P عملگر تکانه نشانگر، Δt مدت زمان برهمکنش و g ضریب اتصال بین سیستم و نشانگر است.

حالت ترکیبی سیستم و نشانگر با این عملگر تحول به صورت زیر است:

$$|\Psi\rangle = U |s(x)\rangle |\psi\rangle = \alpha |s_+\rangle |0\rangle + \beta |s_-\rangle |1\rangle \quad (1)$$

که در آن $|s_{\pm}\rangle \equiv |s(x \pm \tau)\rangle$ و $\tau = g\Delta t$ است.

تغییرات نشانگر برابر با τ است. اگر $\tau \ll \sigma$ باشد، موقعیت نشانگر اطلاعات کاملی در مورد نتیجه اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر A می‌دهد، زیرا همپوشانی $\langle s_+ | s_- \rangle$ برابر با 0 است و اندازه‌گیری از نوع قوی است و اگر $\tau \gg \sigma$ باشد، موقعیت نشانگر اطلاعات محدودی در مورد وضعیت سیستم ارائه می‌دهد، زیرا همپوشانی $\langle s_+ | s_- \rangle$ تقریباً 1 است و اندازه‌گیری از نوع ضعیف است.

حالت نهایی سیستم را به صورت،

$$|\phi\rangle = \mu |0\rangle + \nu |1\rangle$$

تعریف می‌کنیم به طوری که، $|\nu|^2 + |\mu|^2 = 1$ است. بنابراین حالت نشانگر به صورت زیر است:

$$|f\rangle = \langle \phi | e^{-i\tau PA} | s \rangle |\psi\rangle \quad (2)$$

$$\cong \langle \phi | \psi \rangle (1 - i\tau P A_W) | s \rangle$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$f(x) = \langle \phi | \psi \rangle s(x - \tau A_W) \quad (3)$$

حال با توجه به معادله (3) تغییرات نشانگر برابر τA_W است، به این معنی که با اندازه‌گیری ضعیف تغییرات نشانگر با ضریب A_W تقویت شده است.

A_W مقدار ضعیف مشاهده‌پذیر A است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_W = \frac{\langle \phi | A | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \quad (4)$$

مقدار ضعیف یک مشاهده‌پذیر را می‌توان با توجه به حالت اولیه و حالت نهایی سیستم به صورت حقیقی یا موهومی بدست آورد.

در مقالات [1,2] از اندازه‌گیری ضعیف برای بدست آوردن اختلاف فازهای کوچک و در مقالات [3,4] از اندازه‌گیری ضعیف برای تصحیح نرخ خطای کوانتومی در پروتکل‌های اشتراک‌گذاری کلید کوانتومی استفاده شده است.

مقاله [1] نشان داد که اگر اختلاف فاز ایجاد شده بین قطبش افقی و عمودی فوتون‌ها را با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف بدست آوریم، دقت آزمایش در این روش به طور قابل توجهی از روش مرسوم تداخل‌سنجی بیشتر است. در مقاله [1] یک شبیه‌سازی آزمایشی انجام شده است به طوری که یک دوشکستی در مسیر پرتو قرار می‌دهد که نمایشگر زمانی است که نور در فیبر منتشر شده و یک دوشکستی در فیبر ایجاد شده است. ما در این مقاله قصد داریم روشی برای بدست آوردن دقیق این اختلاف فاز به روش اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف حقیقی، برای مقاله [1] ارائه دهیم؛ به طوریکه در مقاله‌ی ذکر شده تنها دقت آزمایش برای اندازه‌گیری اختلاف فاز به روش اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف حقیقی بدست آمده است و مقدار دقیق این اختلاف فاز محاسبه نشده است.

اندازه‌گیری ضعیف

اندازه‌گیری ضعیف نوعی اندازه‌گیری است که بر پایه‌ی تئوری فرمول‌بندی دو بردار حالت تعریف می‌شود. در این اندازه‌گیری، حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری دیگر یکی از ویژه‌بردارهای مشاهده‌پذیری که می‌خواهیم اندازه‌گیری کنیم؛ نخواهد بود بلکه تغییر در حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری ناچیز است به طوری که می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

برای آشنایی بیشتر با اندازه‌گیری ضعیف، یک سیستم در حالت $|\psi\rangle$ و نشانگر یک دستگاه اندازه‌گیری را در حالت $|s(x)\rangle$ در نظر می‌گیریم [1] که در آن x درجه آزادی نشانگر است که ناظر برای خواندن نتیجه‌ی اندازه‌گیری آن را نگاه می‌کند، $s(x)$ تابع موج و σ عرض زمانی آن است. A مشاهده‌پذیری است که می‌خواهیم آن را اندازه‌گیری ضعیف کنیم. برای سادگی سیستم را به عنوان یک سیستم دو ترازه انتخاب می‌کنیم به طوریکه

$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ ، $A|0\rangle = |0\rangle$ ، $A|1\rangle = -|1\rangle$ و $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ است. اولین مرحله در فرآیند اندازه‌گیری، یک برهمکنش بین سیستم و نشانگر است؛ این برهمکنش با عملگر

بدست آوردن اختلاف فاز

در مقاله‌ی [1] با قرار دادن یک دوشکستی در مسیر یک پرتو، حالتی را شبیه سازی کرده‌است که معادل زمانی است که نور در فیبر منتشر شده و یک دوشکستی در فیبر ایجاد شده است. سپس به سه روش سعی کرده است دقت آزمایش را برای اختلاف فاز ایجاد شده بین قطبش عمودی و افقی فوتون بدست آورد. روش اول، بدست آوردن اختلاف فاز با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف حقیقی و روش دوم، بدست آوردن اختلاف فاز با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف موهومی و روش سوم، بدست آوردن اختلاف فاز با استفاده از روش مرسوم تداخل سنجی است.

در این مقاله قصد داریم روشی برای بدست آوردن دقیق اختلاف فاز برای روش اول مقاله‌ی [1] ارائه دهیم، در ادامه، آزمایش روش اول را شرح می‌دهیم و اختلاف فاز را بدست می‌آوریم. در این آزمایش حالت اولیه سیستم را $|\psi\rangle = |+\rangle$ و حالت نهایی را $|\phi\rangle = |-\rangle$ تعریف می‌کنیم.

نشانهگر را در این آزمایش تابع موج گاوسی پالس فرستاده شده و به‌طور کلی به صورت $s(t) = e^{\frac{-t^2}{4\sigma^2}}$ در نظر می‌گیریم. حالت $|\psi\rangle$ را با در نظر گرفتن تابع موج تک پالس فرستاده شده، بعد از عبور از جداکننده پرتو اول و سپس دوشکستی و جداکننده پرتو دوم به‌صورت

$$|\psi'\rangle = \frac{s(t+\tau)|0\rangle + s(t-\tau)|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

(شکل 1) خواهد شد. در واقع حالت $s(t)|0\rangle$ به حالت $s(t+\tau)|0\rangle$ و حالت $s(t)|1\rangle$ به حالت $s(t-\tau)|1\rangle$ تبدیل شده است.

N تعداد فوتون‌هایی است که در حالت $|\psi\rangle$ ارسال شده و n تعداد کل فوتون‌های آشکار شده می‌باشد. احتمال اینکه حالت نهایی سیگنال به‌صورت $|\phi\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ باشد، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p(t) = |\langle\phi|\psi'\rangle|^2 = \frac{1}{2} |s(t+\tau) - s(t-\tau)|^2 \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{-(t-\tau)^2}{4\sigma^2}} - e^{\frac{-(t+\tau)^2}{4\sigma^2}} \right)^2 = \frac{n(t)}{N}$$

برای از بین بردن تابعیت زمانی $p(t)$ از آن بر حسب زمان انتگرال می‌گیریم:

$$p' = \int p(t) dt = \frac{-e^{\frac{-\tau^2}{8\sigma^2}} + 1}{2} = \frac{n}{N} \quad (7)$$

τ را از رابطه‌ی فوق بدست می‌آوریم:

$$\frac{-e^{\frac{-\tau^2}{8\sigma^2}} + 1}{2} = \frac{n}{N} \quad (8)$$

$$e^{\frac{-\tau^2}{8\sigma^2}} = -\left(2\frac{n}{N}\right) + 1$$

$$\frac{-\tau^2}{8\sigma^2} = \ln\left(1 - \frac{2n}{N}\right)$$

چون τ بسیار کوچک است پس $\frac{n}{N} \ll 1$ است، از تقریب $\ln(1+x) \approx x$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{-\tau^2}{8\sigma^2} = -\frac{2n}{N} \quad (9)$$

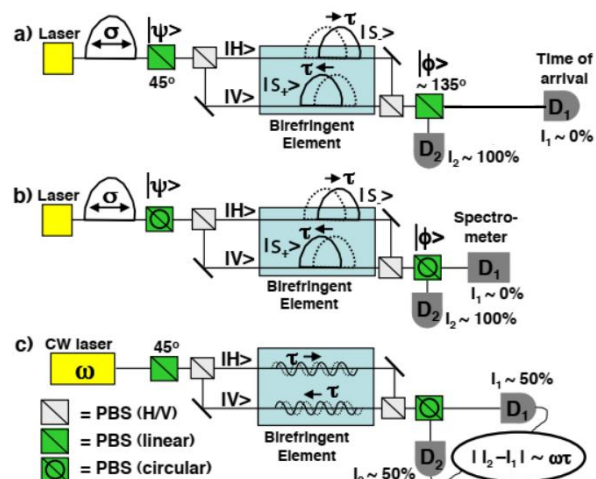
$$\tau = 4\sigma\sqrt{\frac{n}{N}}$$

$$\tau = 4\sigma\sqrt{p'}$$

در این صورت با دانستن تعداد فوتون‌های آشکار شده، τ را بدست می‌آوریم.

مراجع

- [1] Nicolas Brunner and Christoph Simon. "Measuring small longitudinal phase shifts: weak measurements or standard interferometry". In: Physical review letters 105.1 (2010), p. 010405
- [2] Lan Luo et al. "Precise Measurement of Polarization Variation Using Weak Measurement With Double Pointers". In: IEEE Photonics Journal (2023).
- [3] Hong-Wei Li, Zheng-Mao Xu, and Zhen-Qiang Yin. "Monitoring the intercept-resend attack with the weak measurement model". In: Quantum Information Processing 17 (2018), pp. 1–12.
- [4] James E Troupe and Jacob M Farinholt. "Quantum Cryptography with Weak Measurements". In: arXiv preprint arXiv:1702.04836 (2017).



شکل 1: اندازه‌گیری τ [1]

الف) با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف حقیقی

ب) با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف با مقدار ضعیف موهومی

ج) به روش تداخل‌سنجی

نتیجه‌گیری

با توجه به عنوان مقاله [1] که اندازه‌گیری اختلاف فاز طولی هست و روشی برای بدست آوردن این اختلاف فاز در آزمایش اول، عنوان نشده بود، می‌توان گفت کار نیمه تمام این مقاله را به اتمام رساندیم. در تلاش هستیم از روش عنوان شده برای بدست آوردن دقیق اختلاف فاز، برای تصحیح نرخ خطای کوانتومی در پروتکل‌های اشتراک‌گذاری کلید کوانتومی استفاده کنیم، برای مثال در پروتکل BB84 اگر آلیس هربار یکی از حالات $|0\rangle$ ، $|1\rangle$ ، $|+\rangle$ و $|-\rangle$ را در کانال کوانتومی ارسال کند و ما صرفاً حالتی که آلیس در پایه‌ی $|+\rangle$ ارسال کرده‌است و باب این حالات را در پایه‌ی $|-\rangle$ شناسایی کرده‌است را برای بدست آوردن τ (البته مواقعی که شنودکننده مزاحم وجود ندارد) در نظر بگیریم؛ می‌توان از آن برای تصحیح نرخ خطای مربوط به اختلاف فاز استفاده کرد. برای استفاده از اندازه‌گیری ضعیف در پروتکل‌های اشتراک‌گذاری کلید، حالت اولیه‌ی سیستم $|\psi\rangle$ حالتی است که آلیس ارسال کرده‌است و حالت نهایی سیستم $|\phi\rangle$ حالتی است که باب در آن پایه اندازه‌گیری کرده‌است.

بهینه‌سازی انتقال حالت کوانتومی و درهم‌تنیدگی در زنجیره‌های اسپینی XY با میدان مغناطیسی

موضوعی

زارع، محمدنابی؛ معمارزاده، لاله^۱؛ لنگری، عبدالله^۱

^۱دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف، خیابان آزادی، تهران

چکیده

تاکنون مطالعه گسترده‌ای روی زنجیره‌های اسپینی برای انتقال اطلاعات کوانتومی انجام شده است. در این مقاله یک زنجیره اسپین $1/2$ با برهمکنش XY را که در میدان مغناطیسی موضعی (غیر یکنواخت) قرار گرفته است جهت انتقال حالت و درهم‌تنیدگی کوانتومی بررسی می‌کنیم. مقدار بهینه میدان‌های مغناطیسی و همچنین زمان بهینه برای انتقال حالت کوانتومی و درهم‌تنیدگی در زنجیره‌های تا طول $N=20$ با استفاده از شبیه‌سازی عددی محاسبه شده است. با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی و استفاده از رهیافت یادگیری ماشینی مقادیر بهینه‌ی میدان و زمان برای زنجیره‌هایی تا طول $N=50$ به دست آمده است. محاسبات ما نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی موضعی، درهم‌تنیدگی زوج منتقل شده در زنجیره و مانستگی حالت نهایی به حالت مورد نظر را افزایش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: زنجیره اسپینی، انتقال حالت کوانتومی، درهم‌تنیدگی، بهینه‌سازی، یادگیری ماشینی

Optimizing quantum state and entanglement transfer through XY spin chains with local magnetic fields

Zare, Mohammadnabi¹; Memarzadeh, Laleh¹; Langari, Abdollah¹

¹ Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract

An extensive study has been done on spin chains for quantum information transfer. In this article, we investigate quantum state and entanglement transfer through a spin-1/2 XY chain with local magnetic fields. The optimized value of magnetic fields and also the optimized transfer time have been computed numerically up to the chain length $N=20$. The numerical data has been fed to a machine-learning algorithm to get the optimized values of magnetic fields and transfer time for chains up to $N=50$. Our results show that the local magnetic field increases the entanglement transfer of an entangled pair in the chain and the fidelity between the transferred and expected states.

Keywords: spin chain, quantum state transfer, entanglement, optimization, machine learning

مقدمه

عنوان یک کانال برای انتقال اطلاعات کوانتومی معرفی شد [1]. طی سال‌های بعد فیزیکدانان و ریاضیدانان دیگری انتقال حالت به صورت کامل را بررسی کرده و شرایط لازم برای این هدف را دسته بندی کردند [2 - 5]. در این مقاله هدف ما بررسی اثر میدان مغناطیسی موضعی بر کیفیت انتقال حالت و درهم‌تنیدگی در یک زنجیره اسپینی است. در ابتدا مدل مورد بررسی را معرفی و نتایج مربوطه را مرور می‌کنیم. سپس به بررسی اثر میدان مغناطیسی یکنواخت می‌پردازیم و به طور مشخص پس از بررسی تاثیر تقارن

یکی از نیازهای مهم و ضروری در پردازش اطلاعات کوانتومی این است که بتوان حالت‌های کوانتومی (به خصوص حالت‌های بیشینه درهم‌تنیده) را به نقاط مختلف شبکه‌های کوانتومی و یا بین پردازشگرهای مختلف کوانتومی انتقال داد و یا درهم‌تنیدگی را بین نقاط مختلف به اشتراک گذاشت. جهت انتقال حالت‌های کوانتومی سیستم‌های مختلفی پیشنهاد شده است. یکی از آن‌ها سیستم‌های اسپینی است که اولین بار توسط سوگاتو بوز^۱ در سال 2003 به

¹ Sougato Bose

و انتهای زنجیره ایجاد می شود و برحسب طول زنجیره رفتار نزولی دارد. در [۲] برای دسته خاصی از زنجیره های اسپینی نشان داده شده است که انتقال کامل حالت و درهم تنیدگی در طول های بیش از دو نیز میسر است. البته برای این کار لازم است جفت شدگی بین اسپین ها متفاوت و کاملاً قابل تنظیم باشد که همواره از نظر عملی ممکن نیست. به همین دلیل، ما در بخش بعدی جفت شدگی بین اسپین ها را یکنواخت فرض می کنیم و به بررسی اهمیت و نقش میدان خارجی بر کیفیت انتقال حالت و در هم تنیدگی می پردازیم.

بررسی نقش میدان مغناطیسی بر انتقال حالت

الف) تاثیر تقارن زنجیره روی انتقال حالت

از آنجا که وجود میدان های غیر یکنواخت در هامیلتونی رابطه (1) باعث می شود حل تحلیلی برای ویژه مقادیر و ویژه بردارهای هامیلتونی نداشته باشیم، در ابتدا اثر میدان را روی سیستمی ساده تر بررسی می کنیم؛ به این صورت که تنها دو میدان مغناطیسی با حاصل ضرب ثابت روی دو سر زنجیره اعمال می کنیم

$$B_1 = x, B_N = \frac{1}{x}, B_{i \neq 1, N} = 0. \quad (8)$$

در چنین سیستمی در زیر فضای تک برانگیخته، $N-1$ ویژه مقادیر ثابت و مستقل از x هستند و یک ویژه مقدار برابر با $x + \frac{1}{x}$ است. همچنین تمامی ویژه بردارها فرم صریح بر حسب x دارند [6]. در این سیستم رفتار تابع مانستگی در انتقال حالت را در حوالی $x=1$ که سیستم ساختاری کاملاً متقارن دارد بررسی کردیم. با افزودن اختلالی به شکل

$$B_1 = 1 + \epsilon, B_N = \frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon \quad (9)$$

نشان دادیم اگر $F(x, t)$ مانستگی حالت انتقال داده شده با حالت مورد نظر برای $B_1 = x$ در زمان t باشد، در تمامی زمان ها نامساوی $F(1 + \epsilon, t) \leq F(1, t)$ برقرار است. در چنین سیستمی با برهم زدن تقارن حول میدان های اعمالی مساوی روی دو سر زنجیره همواره مانستگی انتقال حالت کاهش می یابد؛ بنابراین نقطه ای با $B_1 = B_N = 1$ برای تابع مانستگی انتقال حالت، یک بیشینه محلی است. این بررسی علاوه بر اینکه نتیجه جالبی را در بر دارد به ما این امکان را می دهد که با استفاده از جواب تحلیلی که برای مسئله به دست آوردیم، نتایج شبیه سازی های سیستم های پیچیده تر را که بحث می کنیم، راستی آزمایی کنیم.

بر انتقال حالت و درهم تنیدگی، به بهینه سازی توابع مانستگی و درهم تنیدگی انتقال می پردازیم. در نهایت از کمیت های بهینه شده در زنجیره هایی با طول کوچک، با استفاده از رهیافت یادگیری ماشینی برای پیش بینی بیشینه مانستگی انتقال و درهم تنیدگی در زنجیره های نسبتاً بلندتر استفاده می کنیم.

مدل

زنجیره ای از ذرات با اسپین $1/2$ با برهمکنش XY در میدان خارجی در نظر می گیریم. هامیلتونی آن برحسب عملگرهای پائولی به صورت زیر است:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} J_i (\sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(i+1)} + \sigma_y^{(i)} \sigma_y^{(i+1)}) + \sum_{i=1}^N B_i \sigma_z^i \quad (1)$$

که روی هر اسپین میدان خارجی B_i اعمال می شود و J_i ضرایب جفت شدگی هستند. هامیلتونی با مولفه Z اسپین کل جابجا می شود،

$$[H, \sum_i \sigma_z^{(i)}] = 0, \quad (2)$$

بنابراین با شروع از یک حالت تک برانگیخته همواره در زیر فضای تک برانگیخته خواهیم بود. نتیجتاً فضایی که تحول در آن رخ می دهد به صورت خطی با N بزرگ می شود. اگر در ابتدا حالتی کوانتومی

به فرم کلی

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (3)$$

روی یکی از اسپین های انتهایی زنجیره (مثلاً اسپین شماره 1) قرار بگیرد که در آن

$$a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (4)$$

هستند. با قرار گرفتن بقیه اسپین ها در حالت پایه، حالت کلی سیستم در لحظه ابتدایی برابر است با

$$|\Psi(0)\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) |0\rangle^{\otimes N-1}. \quad (5)$$

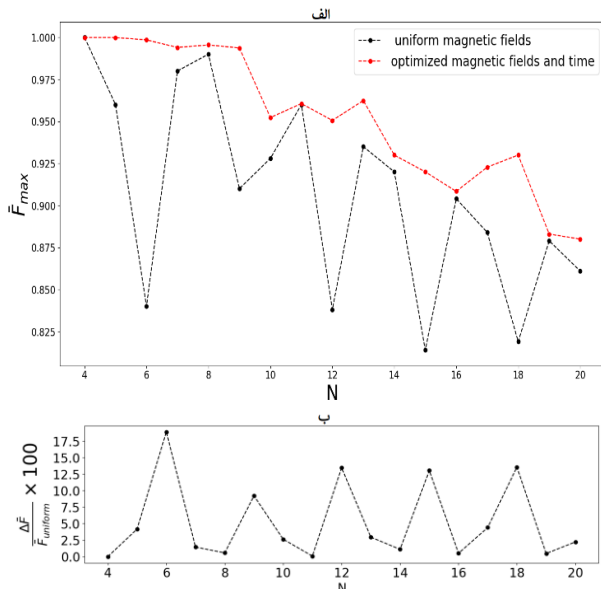
به این ترتیب حالت اسپین N ام پس از زمان t عبارت است از:

$$\sigma = \text{tr}_{1,2,\dots,N-1} (e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle \langle \Psi(0)| e^{iHt}). \quad (6)$$

شباهت این حالت با حالت مورد نظر که قصد انتقال آن را داشتیم عبارتست از:

$$F(|\psi\rangle, \sigma) = |\langle \psi | \sigma | \psi \rangle|. \quad (7)$$

در مرجع [۱] نشان داده شده است که اگر در هامیلتونی رابطه (۱) ضرایب جفت شدگی را برابر با واحد و میدان ها را یکنواخت و برابر با B بگیریم، مانستگی انتقال برای حالت (۵) با افزایش طول زنجیره کاهش می یابد. همچنین اگر یک زیر بخش از حالت بیشینه درهم تنیده توسط زنجیره منتقل شود درهم تنیدگی بین کیوبیت مرجع



شکل 1: الف: بیشینه مانستگي انتقال در دو حالت اعمال ميدان مغناطيسي يکنواخت (نمودار سياه) و اعمال ميدان و بررسي در زمان‌هاي بدست آمده از الگوريتم بهينه سازي (نمودار قرمز). ب: درصد نسبي افزايش مانستگي انتقال حالت با کمک بهينه سازي زمان و ميدان‌هاي مغناطيسي اعمال شده.

برای زنجیره‌هایی با طول‌های 4 تا 20 بیشینه‌ی متوسط مانستگي انتقالی حالت کوانتومی از اسپین 1 به اسپین N در شکل (1) و درهمتیدگی منتقل شده در شکل (2) آمده است. در شکل (1) دیده می‌شود که با افزایش طول زنجیره باز هم روند کاهشی در انتقال حالت دیده می‌شود ولی می‌توان با اعمال میدان مغناطيسي غير يکنواخت عملکرد زنجیره برای انتقال حالت در طول‌های مختلف را بهتر کرد. همچنین در نمودار شکل (2)، که درهمتیدگی منتقل شده بر حسب طول زنجیره را نشان می‌دهد، دیده می‌شود که با اعمال میدان مغناطيسي غير يکنواخت، درهمتیدگی حالت‌های منتقل شده بسیار به 1 نزدیک شده است. نکته قابل ذکر این است که در تمامی طول‌ها همواره میدان‌های بهینه کننده نسبت به مرکز زنجیره متقارن هستند.

ب) بهينه سازي تابع مانستگي و درهمتیدگی

در این بخش قصد داریم میدان مغناطيسي در هر نقطه از شبکه را برای انتقال بهینه حالت و درهمتیدگی بدست آوریم. مساله انتقال حالت برای حالت اولیه معادله (5) محاسبه شده است و برای محاسبه انتقال درهمتیدگی روی اسپین‌های شماره 1 و 2 حالتی بیشینه درهمتیدگی قرار می‌دهیم. پس از زمان مشخص، درهمتیدگی بین اسپین‌های N و $N-1$ را بررسی خواهیم کرد. سنجه درهمتیدگی که از آن استفاده می‌کنیم تابع هم‌توافقي^۲ است [7]. برای این سنجه نشان می‌دهیم درهمتیدگی عبارت است از

$$E = \quad (10)$$

$$4|g_{N-1}(t)|^2|g_N(t)|^2,$$

که در آن

$$g_{N-1}(t) = \langle 0 \dots 010 | \Psi(t) \rangle, \quad g_N(t) = \langle 0 \dots 001 | \Psi(t) \rangle. \quad (11)$$

برای محاسبه بیشینه مانستگي انتقال حالت و تابع هم‌توافقي از الگوریتم سریع گرادین کاهشی^۳ استفاده می‌کنیم. در این روش برای یک تابع محدب $f(x)$ با شروع از یک نقطه، قدم‌هایی به سمت نقطه کمینه برداشته می‌شود که جهت و اندازه این قدم‌ها را مشتق تابع f طبق رابطه (12) تعیین می‌کند. ضریب آلفا یک عدد ثابت است که با توجه به مساله قابل تنظیم است.

$$(12)$$

$$x^{i+1} = x^i - \alpha \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^i}$$

این الگوریتم را تا زمانی که اندازه قدم در هر مرحله کوچکتر شود و

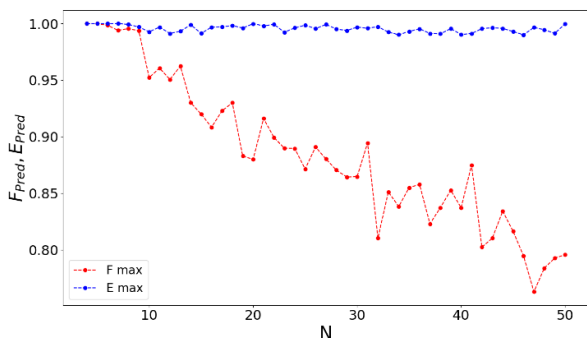
$$|x^{i+1} - x^i| < k, \quad (13)$$

ادامه می‌دهیم. k عددی کوچک و یک پارامتر کنترلی برای توقف است که دقت جواب را مشخص می‌کند. تابع مانستگي و همچنین تابع درهمتیدگی E دارای تعداد زیادی اکسترمم محلی هستند؛ بنابراین، نیاز است نقطه شروع الگوریتم را با نقاط مختلف انجام دهیم و هر بار یکی از اکسترمم‌های توابع مورد نظر را بیابیم. با مقایسه تمامی اکسترمم‌ها، اکسترمم سرتاسری توابع مورد نظر به دست می‌آیند و میدان‌های مغناطيسي و زمان‌های متناظر با آن اکسترمم سرتاسری، جواب مساله در هر طول از زنجیره خواهد بود.

³ gradient descent

² concurrence

شبکه عصبی میدان‌های مغناطیسی روی هر اسپین و زمان مورد نیاز برای بهینه کردن توابع مانستگی انتقال حالت و درهمتندگی است. با جای‌گذاری این میدان‌ها و زمان در روابط (7) و (10) مقدار بیشینه توابع مانستگی و درهمتندگی بدست می‌آید.



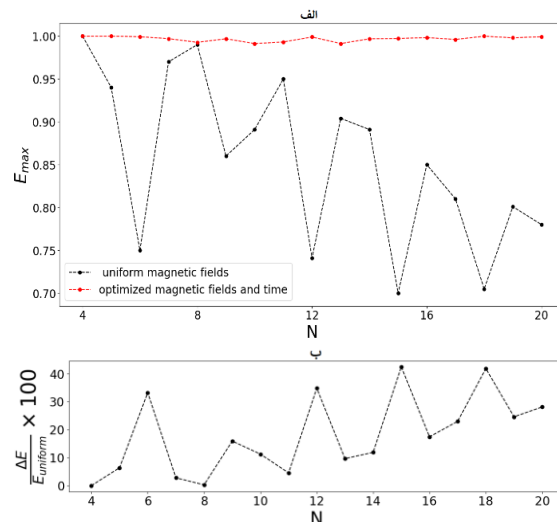
شکل 3: بیشینه مانستگی انتقال حالت (نمودار قرمز) و درهمتندگی (نمودار آبی) بر حسب طول زنجیره، پیش بینی شده با الگوریتم یادگیری ماشینی.

نتیجه‌گیری

در این مقاله تاثیر اعمال میدان‌های مغناطیسی غیریکنواخت را بر مانستگی انتقال حالت و درهمتندگی در زنجیره‌ی اسپینی XY بررسی کردیم. در ابتدا با اعمال دو میدان وارون بر روی دو سر زنجیره با حل تحلیلی تاثیر تقارن را روی انتقال حالت مشاهده کردیم. سپس در حالتی کلی‌تر با الگوریتم گرادیان کاهشی بیشینه توابع مانستگی انتقال و درهمتندگی را یافتیم. نتیجه این بهینه سازی تایید می‌کند که بیشینه کمیت‌های مانستگی و درهمتندگی در سیستمی متقارن اتفاق می‌افتد. در نهایت با کمک شبکه‌های عصبی توانستیم بیشینه مانستگی و بیشینه درهمتندگی انتقال بین دو سر زنجیره را برای میدان‌ها و زمان‌های مختلف بدون نیاز به هزینه محاسباتی زیاد برای بهینه سازی، پیش بینی کنیم.

مرجع‌ها

- [1] S. Bose, Phys. Rev. Lett. **91**, 207901 (2003), quant-ph/0212041.
- [2] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert and A. J. Landahl, Phys. Rev. Lett. **92**, 187902 (2004)
- [3] A. Bayat and V. Karimipour Phys. Rev. A **71**, 042330 (2005).
- [4] A. Bayat and V. Karimipour, Phys. Rev. A **75**, 022321 (2007).
- [5] A. Kay, Tailoring spin chain dynamics for fractional revivals, Quantum **1**, 24 (2017).
- [6] S. Kouachi, Eigenvalues and eigenvectors of tridiagonal matrices, Electronic J. Linear Algebra **15** (2006), 115–133.
- [7] Wootters, W. K. (1998), Phys. Rev. Lett. **80**, 2245.



شکل 2: الف: درهمتندگی منتقل شده در دو حالت اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت (نمودار سیاه) و اعمال میدان غیریکنواخت و بررسی در زمان‌های بدست آمده از الگوریتم بهینه سازی (نمودار قرمز) بر حسب طول زنجیره ب: درصد نسبی افزایش درهمتندگی انتقالی با کمک بهینه سازی زمان و میدان‌های مغناطیسی اعمال شده بر حسب طول زنجیره.

ج) پیش‌بینی بیشینه مانستگی انتقال حالت و درهمتندگی

نتایج بدست آمده در بخش قبل، مبتنی بر تحول حالت اولیه به صورت عددی است. با افزایش طول زنجیره مدت زمان اجرای برنامه به صورت توانی افزایش می‌یابد. برای بررسی طول‌های بیشتر ما از الگوریتم یادگیری ماشینی استفاده می‌کنیم. در قدم بعدی از زمان‌های بهینه و همچنین مجموعه‌ی میدان‌های بدست آمده برای هر طول N از الگوریتم بهینه سازی برای طول‌های محدود 4 تا 20، به عنوان داده‌های آموزش^۴ استفاده می‌کنیم و با کمک یک شبکه عصبی با در نظر گرفتن تابع هزینه به فرم $\text{Log}(\cosh(y))$ برای زنجیره‌هایی با طول بیشتر، بیشینه‌ی مانستگی انتقال حالت و درهمتندگی را مشخص می‌کنیم. برای آزمودن مدل نیز از داده‌های بیشینه مانستگی و درهمتندگی برای طول‌های 21 تا 28 استفاده شد که با استفاده از سنجه RMSE^۵ خطای موجود در پیش بینی برای مانستگی 1.2×10^{-2} و برای درهمتندگی 8×10^{-3} است. در نمودار (3) این دو کمیت بدست آمده از میدان‌ها و زمان پیش بینی شده، بر حسب طول زنجیره رسم شده است. لازم به ذکر است که خروجی

⁵ Root Mean Square Error

⁴ training data

کنترل دینامیک اطلاعات فیشر کوانتومی سامانه دو کیوبیتی توسط میدان کلاسیکی در یک کاواک نشت کننده

نیکدل یوسفی^۱، نگار^۱؛ مرتضی پور، علی^۲

^{۱,۲}دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک دانشگاه گیلان، خیابان نامجو، رشت

چکیده

در این مقاله، طرحواره‌ای از یک سامانه دو کیوبیتی را در یک کاواک نشت کننده در نظر می‌گیریم. به طوری که هر یک از کیوبیت ها به طور مجزا با یک میدان کلاسیکی برهم کنش می‌کند. نشان می‌دهیم که اعمال و دستکاری شدت میدان کلاسیکی، می‌تواند بر کنترل دینامیک اطلاعات فیشر کوانتومی مرتبط با پارامتر کدگذاری شده در بردار حالت اولیه کیوبیت ها تاثیر گذار باشد. ضمن اینکه به ازای افزایش میدان کلاسیکی، می‌توان به بیشینه دقت ممکن در برآورد کوانتومی پارامتر مورد نظر دست یافت.

واژه های کلیدی: اطلاعات فیشر کوانتومی- کاواک نشت کننده- کیوبیت

Dynamical control of quantum Fisher information of two-qubit system by classical field in a leaky cavity

Negar, Nikdel Yousefi¹; Morteza pour, Ali²

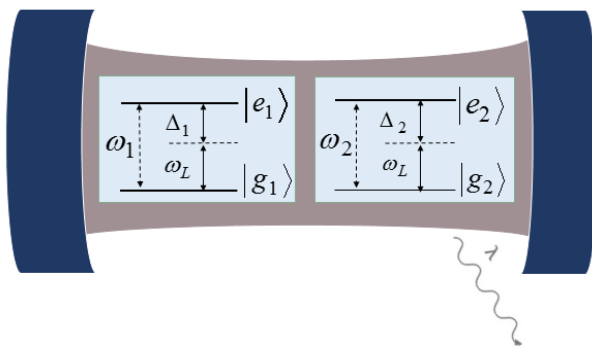
^{1,2} Department of Physics, University of Guilan, Raht,

Abstract

In this paper, we consider a schematic of a two-qubit system in a leaky cavity. So that each qubit interacts separately with a classical field. We show that applying and manipulating of the intensity of the classical field can affect the control of the dynamics of the quantum Fisher information encoded in the initial state of qubits. While increasing the classical field, it is possible to achieve the desired quantum precision.

Keywords: leaky cavity-quantum Fisher information-qubit

PACS No. (11 Times New Roman, italic)



شکل (۱): طرحواره‌ای از یک سامانه دو کیوبیتی در یک کاواک نشت کننده. به طوری که هر یک از کیوبیت ها به طور مجزا با یک میدان کلاسیک با فرکانس ω_L برهم‌کنش می‌کند.

کلاسیکی از فرکانس گذار کیوبیت و همچنین $\omega_{ef} = \sqrt{\Delta_j^2 + 4\Omega^2}$ فرکانس گذار کیوبیت در ویژه حالت های پوشیده است. بعلاوه $\hat{\rho}_z = |E\rangle\langle E| - |G\rangle\langle G|$ ماتریس پائولی، $(\hat{\rho}_+ = |E\rangle\langle G|, \hat{\rho}_- = |G\rangle\langle E|)$ عملگر بالابرنده (پایین برنده) و a_k ($a_k^\dagger$) عملگرهای فانی (خلق) مد k -آم با فرکانس ω_k می-باشد. ضمن اینکه g_k شدت جفتیدگی بین کیوبیت و مد k -آم، $r_j = \alpha_j / \alpha_T$ و $\alpha_T = (\alpha_1 + \alpha_2)^{1/2}$ ، مجموع و پارامتر نسبی است که در آن $r_1^2 + r_2^2 = 1$.

فرض می‌کنیم بردار حالت اولیه سامانه، در یک برهم‌نهی هم‌دوس از حالت های اولیه کیوبیت و همچنین حالت های خلاء کاواک باشد:

$$|\Psi(0)\rangle = (\cos[\theta/2]|A\rangle + e^{i\phi}\sin[\theta/2]|B\rangle)|0\rangle \quad (2)$$

در چنین شرایطی بردار حالت کل سامانه در لحظه دلخواه t به صورت زیر نوشته می‌شود

$$|\Psi(t)\rangle = \cos[\theta/2]C(t)|A\rangle|0\rangle + e^{i\phi}\sin[\theta/2]|B\rangle|0\rangle + \cos[\theta/2]\sum_k C_k(t)|B\rangle|1_k\rangle. \quad (3)$$

که در آن $|0\rangle = \hat{a}_k|1_{k'}\rangle\delta_{kk'}$ مد حالت خلاء و $|1_k\rangle$ نشاندهنده-ی حالتی با یک فوتون منفرد در مد k -آم است. بعد از عمل رد-گیری بر روی همه درجات آزادی محیطی، حالت کوانتومی سامانه دو کیوبیتی در ویژه پایه های $|G\rangle|G\rangle, |G\rangle|E\rangle, |E\rangle|G\rangle, |E\rangle|E\rangle$ به صورت

مقدمه

پیشرفت در حوزه متروولوژی کوانتومی به شدت به پیشرفت در تکنیک های اندازه‌گیری وابسته است، هر چقدر میزان اندازه‌گیری دقیق‌تر باشد به همان اندازه خروجی اندازه‌گیری قابل اطمینان تر خواهد بود. با این حال طی فرایند اندازه‌گیری، سامانه های کوانتومی با فرآیند واهمدوسی و در نتیجه آن کاهش دقت برآورد پارامتر کوانتومی در خروجی مورد نظر مواجه می‌شوند. از این حیث، استراتژی‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شوند تا از سامانه های کوانتومی در برابر این واهمدوسی‌ها محافظت کنند. افزایش درجه حساسیت و دقت در برآورد پارامترهای کوانتومی با بهره برداری از خواص کوانتومی از اهداف اصلی متروولوژی کوانتومی محسوب می‌شود [1]. نظریه برآورد کوانتومی چارچوبی را ارائه می‌دهد که در آن اطلاعات فیشر کوانتومی به عنوان یک کمیت قابل اطمینان در ارزیابی دقت یک پارامتر ناشناخته در سامانه کوانتومی محسوب می‌شود. از این حیث، در این مقاله به بررسی کنترل دینامیک اطلاعات فیشر کوانتومی یک سامانه دو کیوبیتی در یک کاواک نشت کننده می‌پردازیم. در ادامه به معرفی و حل مدل می‌پردازیم.

معرفی مدل پیشنهادی و حل آن

طرحواره‌ای از یک سامانه دو کیوبیتی را در یک کاواک نشت کننده مطابق شکل (1) در نظر می‌گیریم، به طوری که هر یک از کیوبیت ها با فرکانس گذار ω_j ($j=1,2$) به طور مجزا با یک میدان کلاسیکی با فرکانس ω_L برهم‌کنش می‌کند. هامیلتونی موثر این سامانه در ویژه حالت های پوشیده تحت تقریب های دوقطبی و موج چرخان به صورت ($\hbar=1$):

(1)

$$\hat{H}_{eff} = \frac{\chi_1}{2}\hat{\rho}_z^{(1)} + \frac{\chi_2}{2}\hat{\rho}_z^{(2)} + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + (\alpha_1 \cos^2[\eta_1/2]\hat{\rho}_+^{(1)} + \alpha_2 \cos^2[\eta_2/2]\hat{\rho}_+^{(2)})e^{+i\omega_L t} \sum_k g_k \hat{a}_k + H.c.$$

نوشته می‌شود که در آن $\eta_j = \text{Arc tan}[2\Omega/\Delta_j]$ و $\Delta_j = \omega_j - \omega_L$ و $\chi_j = \sqrt{\Delta_j^2 + 4\Omega^2}$ ،

(7) و (8) به معادله‌ی

$$\dot{C}_i(t) = -\cos^4[\eta/2] \int_0^t dt' F(t-t') (\alpha_i^2 C_i(t') + \alpha_i \alpha_j C_j(t')), j \neq i \quad (10)$$

تغییر می‌یابد که در آن $F(t-t') = G(t-t') e^{i\xi(t-t')}$ در ابتدا به دنبال حل پایا در رابطه (10) هستیم، یعنی $C_j(t \rightarrow \infty)$ که می‌توان آن را با تنظیم $\dot{C}_j = 0$ در رابطه (10) محقق کرد که منجر به حالت زیر-تابشی^۱

$$|\psi_-\rangle = r_2 |E\rangle \langle G| - r_1 |G\rangle \langle E|. \quad (11)$$

می‌شود. اگر حالت اولیه سامانه کیوبیتی را در دو بخش در نظر بگیریم: حالت زیر-تابش و حالت عمود بر آن (حالت فوق-تابشی) $|\psi_+\rangle$ است که برخلاف حالت زیر-تابشی با دامنه احتمال $\mathbb{C}(t)$ با زمان تحول می‌یابد که به صورت

$$\dot{\mathbb{C}}(t) = -\alpha_T^2 \cos^4[\eta/2] \int_0^t F(t-t') \mathbb{C}(t') dt'. \quad (12)$$

است. با فرض اینکه عبارتی تحلیلی برای $\mathbb{C}(t)$ بدست آمده باشد، می‌توان نشان داد که دامنه‌های احتمال $C_i(t)$ به صورت

$$\begin{aligned} C_1(t) &= r_2 \beta_- + r_1 \mathbb{C}(t) \beta_+, \\ C_2(t) &= -r_1 \beta_- + r_2 \mathbb{C}(t) \beta_+ \end{aligned} \quad (13)$$

است که در آن تعریف $\beta_{\pm} \equiv \langle \Psi_{\pm} | \Psi(0) \rangle$ در نظر گرفته شده است.

اطلاعات فشر کوانتومی

مطالعه در حوزه‌ی پردازش اطلاعات کوانتومی و بهینه سازی روند دریافت و استخراج اطلاعات، نیاز به پژوهش‌های نظری عمیقی را در حوزه‌ی برآورد کوانتومی به خود اختصاص داده است. از این حیث، نظریه برآورد کوانتومی به دنبال ارائه بهترین رهیافت در بیشینه دقت ممکن در برآورد یک یا چند پارامتر کوانتومی است. بطوری‌که بنا بر نامساوی کریمر-رائو، خطای ممکن در اندازه

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C_1(t)|^2 & C_1(t)C_2^*(t) & 0 \\ 0 & C_1^*(t)C_2(t) & |C_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-|C_1(t)|^2-|C_2(t)|^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

بدست می‌آید. با جایگذاری معادله (3) در معادله شرودینگر، معادلات دیفرانسیل زیر را برای دامنه‌های احتمال $C_1(t)$ و $C_2(t)$ بدست می‌آوریم

$$\dot{C}_j(t) = -i\alpha_j \cos^2[\eta_j/2] e^{i\omega_L t} \sum_k g_k C_k(t) e^{-i(\omega_k - \chi_j)t}, (j=1,2) \quad (5)$$

و

$$\begin{aligned} \dot{C}_k(t) &= -ig_k^* e^{-i\omega_L t} (\alpha_1 \cos^2[\eta_1/2] e^{i(\omega_k - \chi_1)t} C_1(t) + \\ &\alpha_2 \cos^2[\eta_2/2] e^{i(\omega_k - \chi_2)t} C_2(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

با جایگذاری رابطه (6) در رابطه (5) دو معادله دیفرانسیلی انتگرالی برای مشتق دامنه‌های احتمال $C_1(t)$ و $C_2(t)$ به صورت

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= -\int_0^t dt' G(t-t') (\alpha_1^2 \cos^4[\eta_1/2] C_1(t') \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 \cos^2[\eta_1/2] \cos^2[\eta_2/2] e^{-i\xi_{21}t'} C_2(t')) e^{i\xi_1(t-t')}, \end{aligned} \quad (7)$$

و

$$\begin{aligned} \dot{C}_2(t) &= -\int_0^t dt' G(t-t') (\alpha_2^2 \cos^4[\eta_2/2] C_2(t') \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 \cos^2[\eta_1/2] \cos^2[\eta_2/2] e^{-i\xi_{21}t'} C_1(t')) e^{i\xi_2(t-t')}, \end{aligned} \quad (8)$$

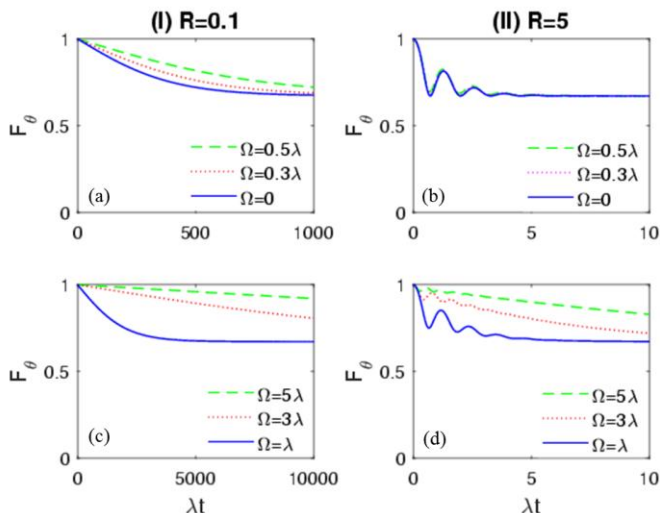
بدست می‌آید. در این رابطه تابع $G(t-t')$ حافظه سیستم را نشان می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G(t-t') = \int d\omega J(\omega) e^{i(\omega_L + \omega_c + \omega)t'}, \quad (9)$$

که در آن $J(\omega) = w^2 \lambda / \pi[(\omega - \omega_c)^2 + \lambda^2]$ تابع چگالی طیفی لورنتسی است که در آن w مرتبط با فرکانس رابی خلاء $(R = \alpha_T W)$ و λ پارامتر نشت کاواک است. در رابطه بالا ω_c فرکانس مرکزی کاواک و $\xi_j = \chi_j - \omega_c$ و $\xi_{21} = \chi_2 - \chi_1$ [2].

مجموع معادلات دیفرانسیلی جفت شده بالا را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد. به ازای مورد کیوبیت‌های مشابه با فرکانس‌های گذار یکسان $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega_0$. بنابراین $\chi_1 = \chi_2 \equiv \chi$ ، $\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta$ ، $\eta_1 = \eta_2 \equiv \eta$ و $\xi_1 = \xi_2 \equiv \xi$. در این صورت مجموعه معادلات

¹ Sub-radiant



شکل (2): دینامیک رفتار اطلاعات فیشر کوانتومی F_θ به ازای فرکانس های رابی مختلف میدان لیزری جفت کننده Ω . ستون (I) و (II) به ترتیب مربوط به رژیم جفت شدگی ضعیف $R=0.1$ و رژیم جفت شدگی قوی $R=5$ است. مقادیر سایر پارامترها عبارتند از: $r=0.3, \Delta=\Delta_L=0$

کلی مشاهده می شود که اعمال فرکانس های میدان کلاسیکی بالاتر، باعث می شود تا سامانه دیرتر به حالت پایا برسد پندل (c).

نتیجه گیری

در این تحقیق مشاهده نمودیم که اعمال و دستکاری شدت میدان کلاسیکی، تاثیر بسزایی بر کنترل دینامیک اطلاعات فیشر کوانتومی سامانه دو کیوبیتی در یک کاواک نشت کننده دارد. به طوری که به ازای افزایش میدان کلاسیکی، می توان به بیشینه دقت ممکن در برآورد کوانتومی پارامتر مورد نظر دست یافت.

مرجع ها

- [1] Huang, Z., & Situ, H. (2017), "Non-Markovian dynamics of quantum coherence of two-level system driven by classical field"; *Quantum Information Processing*, **16**, 1-17.
- [2] Mortezaipoor, A., Nourmandipour, A., & Gholipour, H. (2020), "The effect of classical driving field on the spectrum of a qubit and entanglement swapping inside dissipative cavities"; *Quantum Information Processing*, **19**, 1-16.
- [3] Nourmandipour, A., Vafafard, A., Mortezaipoor, A., & Franzosi, R. (2021), "Entanglement protection of classically driven qubits in a lossy cavity"; *Scientific Reports*, **11**(1), 16259.
- [4] Rafiee, M., Nourmandipour, A., & Mancini, S. (2017), "Universal feedback control of two-qubit entanglement"; *Physical Review A*, **96**(1), 012340.

گیری یک پارامتر تصادفی همواره بزرگتر و یا مساوی عکس اطلاعات فیشر کوانتومی تعریف می شود که به صورت

$$\delta\theta_{est} \geq \frac{1}{\sqrt{vF_\theta}} \quad (14)$$

است [3,4]. در اینجا F_θ اطلاعات فیشر کوانتومی و v تعداد دفعات فرآیند اندازه گیری است که در آن $F_\theta = \text{Tr}[\rho_\theta L_\theta^2]$ و L_θ عملگر مشتق لگاریتمی متقارن می باشد که توسط رابطه $\partial_\theta \rho_\theta = \frac{1}{2}[L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta]$ مشخص می شود. بنابراین با بکارگیری تجزیه طیفی ماتریس چگالی $\rho_\theta = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ ، تعریف کلی اطلاعات فیشر کوانتومی به صورت

$$F_\theta = \sum_n \frac{(\partial_\theta \lambda_n)^2}{\lambda_n} + 2 \sum_{n \neq m} \frac{(\lambda_n - \lambda_m)^2}{\lambda_n + \lambda_m} |\langle\psi_n|\partial_\theta \psi_m\rangle|^2 \quad (15)$$

در نظر گرفته می شود که در آن اولین و دومین جمله شامل جمع بر روی همه مقادیر که در آن $\lambda_n \neq 0$ و $\lambda_n + \lambda_m \neq 0$ در نظر گرفته می شوند.

بحث و بررسی

در این بخش قصد داریم تا تاثیر شدت میدان کلاسیکی اعمالی را بر کنترل دینامیک اطلاعات فیشر کوانتومی مرتبط با پارامتر θ در حالت اولیه کیوبیت ها را مورد بررسی قرار دهیم. در شکل (2) تاثیر مقادیر مختلف فرکانس رابی میدان کلاسیکی جفت کننده (Ω) بر دینامیک اطلاعات فیشر کوانتومی F_θ نمایش داده شده است. ستون (I) مربوط به رژیم جفت شدگی ضعیف $R=0.1$ و ستون (II) مربوط به رژیم جفت شدگی قوی $R=5$ می باشد.

ملاحظه می شود که دینامیک F_θ تحت تاثیر اعمال میدان کلاسیکی جفت کننده است، به طوری که افزایش شدت آن، حفاظت بیشتر F_θ را در بر خواهد داشت و به موجب آن روند برآورد پارامتر θ در سامانه بهبود می یابد. به طوری که با اعمال میدان های ضعیف تر، تغییر آنچنانی در دینامیک سامانه مشاهده نمی شود، بلکه افزایش شدت میدان کلاسیکی، می تواند به کنترل بهتر دینامیک اطلاعات فیشر در هر دو رژیم جفت شدگی ضعیف و قوی منجر شود، که در نتیجه آن به یک برآورد بهینه برای پارامتر θ بیانجامد. ضمن اینکه در ستون (I)، به عنوان یک نتیجه

مطالعه اثر پارامترهای محیطی بر روی زمان حد سرعت کوانتومی در سیستم های کوانتومی باز

شهری^۱، یاسین^۱؛ هادی پور^۱، مریم^۱ حدادی^۲، سعید^۲؛ دولتخواه^۳، هژیر^۳ حاصلی^۳، سروش^۱

^۱دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی ارومیه، انتهای خیابان بند، ارومیه

^۲گروه فیزیک، دانشگاه سمنان

^۳گروه فیزیک دانشگاه کردستان

چکیده

در این بررسی به مطالعه زمان حد سرعت کوانتومی در سیستم های کوانتومی باز می پردازیم و تأثیر پارامترهای محیطی را بر روی این زمان مطالعه خواهیم کرد. مدلی که در این کار مورد استفاده قرار می گیرد یک سیستم دو ترازه در داخل یک کاواک با کیفیت است. در این کار نشان داده خواهد شد که اثرات حافظه ای باعث افزایش سرعت تحول کوانتومی خواهد شد. همچنین نشان داده خواهد شد که در حالت تشدید زمانی که فرکانس گذار سیستم دو ترازه با فرکانس مرکزی کاواک برابر است تحول بدون توجه به ماهیت تحول از جنبه ی حافظه دار بودن کند تر از حالت غیر تشدید رخ خواهد داد.

واژه های کلیدی: زمان حد سرعت کوانتومی، سیستم های کوانتومی باز، اثرات حافظه ای

Study the effects of environmental parameters on quantum speed limit time in open quantum systems

Y. Shahri¹; M. Hadipour¹ S. Haddadi²; H. Dolatkah³
S. Haseli²

¹ Department of Physics ,Urmia university of technology

² Department of Physics, Semnan university

³ Department of Physics, University of Kurdistan

Abstract

In this work we study the quantum speed limit time for open quantum systems and investigate the effects of environmental parameter on it. Here, we consider a model in which a two level system (atom) located in high -Q cavity and interacts with it. It will be shown that the memory effects can lead to quantum speed-up. It will also be shown that the in resonance case where the transition frequency of atom equal to central frequency of cavity the quantum speed limit time is longer than off- resonance case.

Keywords: quantum speed limit time, open quantum systems, memory effects

PACS No.3

مقدمه

در زمینه های مختلف مکانیک کوانتومی از قبیل ارتباطات کوانتومی [1] محاسبات کوانتومی [2] و متروالوژی کوانتومی [3] کاربرد دارد. اولین تعریف برای زمان حد سرعت کوانتومی برای سیستم های کوانتومی بسته ارائه

کوتاه ترین زمان ممکن برای تحول یک سیستم کوانتومی از یک حالت اولیه دلخواه به حالت نهایی به عنوان زمان حد سرعت کوانتومی شناخته می شود. دانستن این زمان

معرفی شده زمان حد سرعت کوانتومی در رژیم غیر مارکوفی کوتاه تر از رژیم مارکوفی است.

مدل

یک سیستم دوترازه با حالت برانگیخته $|e\rangle$ و حالت پایه $|g\rangle$ در نظر گرفته می شود. این سیستم با یک محیط برهمکنش می کند که محیط به صورت یک کاواک با کیفیت بالا در نظر گرفته می شود [10 و 11]. هامیلتونی مدل به صورت زیر تعریف می گردد

(1)

$$H = \frac{1}{2} \omega_+ \sigma_+ \sigma_- + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k (g_k \sigma_+ b_k + g_k^* \sigma_- b_k^\dagger).$$

در این کار چگالی طیفی محیط، به صورت لورنتسی در نظر گرفته شده است

(2)

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma \lambda^2}{(\omega - \omega_c - \delta)^2 + \lambda^2}$$

که در آن $\delta = \omega_0 - \omega_c$ پارامتر تنظیم کننده تشدید است به این معنی که مقدار صفر این پارامتر نشان دهنده موقعیت تشدید است. ω_c فرکانس مرکزی حفره است. حالت سیستم در زمان t را می توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\rho(t) = \Lambda_t \rho(\cdot) = \begin{pmatrix} \rho_{11}|k(t)|^2 & \rho_{12}k(t) \\ \rho_{21}k_t^* & 1 - \rho_{11}|k(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

جایی که Λ_t به عنوان نگاشت دینامیکی کوانتومی شناخته می شود که حالت اولیه در زمان $t=0$ را به حالت سیستم در زمان t نگاشت می کند. جایی که

(4)

$$k(t) = e^{-(\lambda - i\delta)t/\tau} \left[\cosh\left(\frac{\Omega t}{\tau}\right) - \frac{\lambda - i\delta}{\Omega} \sinh\left(\frac{\Omega t}{\tau}\right) \right],$$

$$\Omega = \sqrt{(\lambda - i\delta)^2 - \gamma\lambda} \quad \text{که}$$

بر این اساس بروئر و همکاران یک معیار غیرمارکوفی را پیشنهاد کردند که به صورت زیر تعریف می شود [12]

شده است [۵ و ۶]. در مرجع [6] یک حد جامع برای زمان حد سرعت کوانتومی در سیستم های کوانتومی بسته به صورت $\tau \geq \max\left\{\frac{\pi\hbar}{\gamma E}, \frac{\pi\hbar}{\gamma \Delta E}\right\}$ داده شده است. البته تلاش های بسیار دیگری برای معرفی یک حد جامع برای زمان حد سرعت کوانتومی صورت گرفته است که پایه بیشتر اینها بر مبنای متریک های هندسی می باشد [7 و 8]. یک سیستم کوانتومی واقعی با محیط اطراف خود برهمکنش می کند.

مطالعه سیستم های کوانتومی باز از جنبه های مختلف موضوع بسیاری از تحقیقات جدید در زمینه اطلاعات کوانتومی در سال های اخیر بوده است. یک ره یافت جذاب برای مواجهه با سیستم های کوانتومی باز، از طریق شارش اطلاعات بین سیستم و محیط اطراف آن است. از این نقطه نظر دینامیک سیستم های کوانتومی باز به دو دسته مارکوفی و غیرمارکوفی تقسیم می شوند. زمانیکه اطلاعات به صورت پیوسته از سیستم وارد محیط می شوند دینامیک سیستم از نوع مارکوفی است در حالیکه اگر در برخی لحظات بازگشت اطلاعات از محیط به سیستم ملاحظه شود دینامیک سیستم غیر مارکوفی است. در مرجع [9] نشان داده شده است که در دینامیک غیر مارکوفی سرعت تحول سیستم بالاتر است به این معنی که برای این نوع تحول زمان حد سرعت کوانتومی کوتاه تر از تحول مارکوفی است.

در این کار به بررسی زمان حد سرعت کوانتومی در سیستم های کوانتومی باز می پردازیم. اثر هر دو دینامیک مارکوفی و غیر مارکوفی را بر روی زمان حد سرعت کوانتومی مطالعه می کنیم. نشان خواهیم داد در مدل

(7)

$$\tau_{QSL} = \max \left\{ \frac{1}{\Phi_{\tau}^{op}}, \frac{1}{\Phi_{\tau}^{tr}}, \frac{1}{\Phi_{\tau}^{hs}} \right\} \sin^2[\theta(\rho(\cdot), \rho(t))] \text{tr}[\rho(\cdot)^2]$$

که در آن τ زمان واقعی تحول و عبارت های مخرج به صورت زیر است

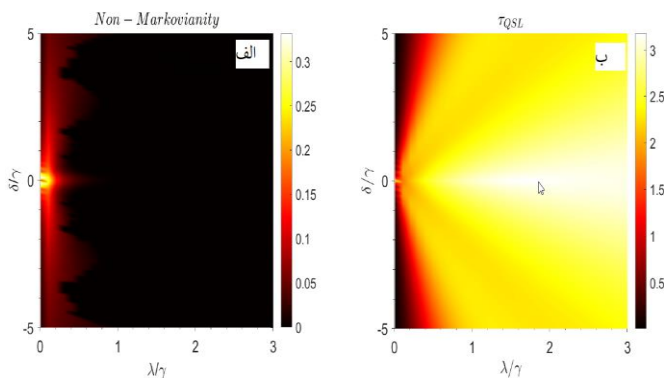
$$\Phi_{\tau}^{op} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \|\rho(\cdot(t))\|_{op} \quad (8)$$

$$\Phi_{\tau}^{tr} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \|\rho(\cdot(t))\|_{tr}$$

$$\Phi_{\tau}^{hs} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \|\rho(\cdot(t))\|_{hs}$$

اجازه دهید یک سیستم دوترازه کلی را در نظر بگیریم. در نمایش بلوخ، حالت اولیه دو ترازه کلی را در نمایش بلاخ به صورت زیر نوشت

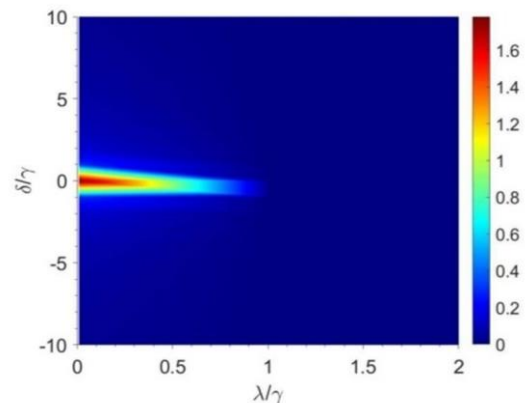
$$\rho(\cdot) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix} \quad (9)$$



شکل ۲: الف) غیر مارکوفی بودن به عنوان توابع δ/γ و λ/γ برای زمان $\tau=30$ و (ب) زمان QSL با $r_x = r_y = r_z = 0.5$ برای زمان $\tau=30$

$$N(\Lambda) = \max_{\rho_1(\cdot), \rho_2(\cdot)} \int_{w_t > \Lambda} w_t dt, \quad (5)$$

به طوریکه $w_t = d/dt(D(\rho_1(t), \rho_2(t)))$ می باشد که $D(\rho_1(t), \rho_2(t))$ فاصله ردی بین حالت ها در زمان t است.



شکل ۱) غیر مارکوفی بودن (6) به عنوان توابع تنظیم پارامتر δ و پهنای محیط λ

در شکل (۱) درجه غیر مارکوفی بودن بر حسب دو پارامتر δ و λ رسم شده است. هدف از نشان دادن این نمودار مشخص کردن محدوده غیر مارکوفی بودن برای این پارامتر ها برای بررسی زمان حد سرعت کوانتومی در محدوده غیر مارکوفی است.

در مرجع [13] نویسندگان زمان حد سرعت کوانتومی را برای حالت های اولیه مختلط ارائه کرده اند. آنها از تابع خلوص نسبی برای تعریف زمان حد سرعت کوانتومی کرده اند که بصورت زیر تعریف می گردد

$$\theta(\rho(\cdot), \rho(t)) = \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{tr}[\rho(\cdot)\rho(t)]}{\text{tr}[\rho(\cdot)^2]}} \right) \quad (6)$$

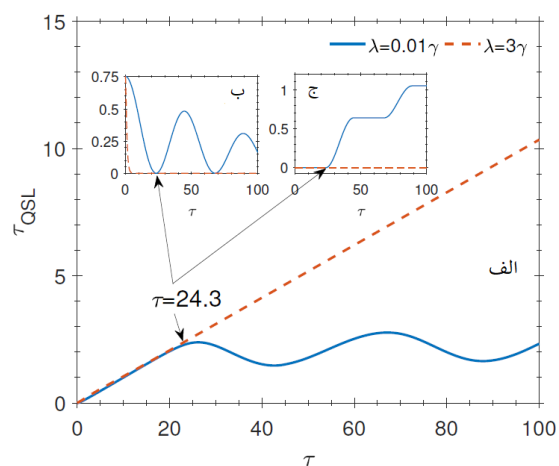
براساس متریک معرفی شده در معادله (7) یک رابطه جامع برای زمان حد سرعت کوانتومی برای حالت های اولیه مخلوط به شرح زیر بدست می آید.

شده است. همانطور که انتظار می رود، زمان حد سرعت کوانتومی برای دینامیک غیرمارکوفی کوتاهتر از دینامیک مارکوفی است. در شکل (۳) مولفه های بردار بلاخ به گونه ای انتخاب شده اند که حالت اولیه دلخواه در نظر گرفته شده مخلوط باشد.

شکل (۳) ب تغییرات زمانی فراوانی حالت های برانگیخته $P\tau$ را برای دو رژیم مارکوفی و غیرمارکوفی نشان می دهد. در شکل (۳) ج درجه غیرمارکوفی بودن بر حسب زمان تحول واقعی نمودار نشان داده شده است. همانطور که برای $\lambda=3\gamma$ انتظار می رود درجه غیرمارکوفی بودن برای تمام زمانها صفر است. این در حالی است که برای $\lambda=.01\gamma$ در $\tau=24/3$ ماهیت غیرمارکوفی تحول آشکار می گردد. نکته جالب در شکل ۳ این است که با آشکار شدن ماهیت غیرمارکوفی تحول در $\tau=24/3$ رفتار غیریکنواخت جمعیت حالت های برانگیخته آغاز می شود و زمان حد سرعت کوانتومی کوتاهتر از زمان حد سرعت کوانتومی در تحول مارکوفی خواهد بود.

نتیجه گیری

در این کار به مطالعه زمان حد سرعت کوانتومی در دو رژیم مارکوفی و غیر مارکوفی پرداخته شده است. به عنوان نتیجه اصلی کار، می توان گفت که زمان حد سرعت کوانتومی در رژیم غیر مارکوفی کوتاه تر از این زمان در رژیم مارکوفی است. در رژیم غیر مارکوفی تا قبل از ظاهر شدن اثرات غیر مارکوفی بودن زمان حد سرعت کوانتومی در دو رژیم مارکوفی و غیر مارکوفی یکسان است اما با ظهور اثرات غیرمارکوفی بودن زمان



شکل 3: (الف) زمان QSL (ب) جمعیت حالت های برانگیخته، و (ج) غیرمارکوفی بودن در مقابل زمان تحول واقعی τ برای هر دو مارکوفی ($\lambda=3\gamma$) و غیرمارکوفی رژیم های ($\lambda=0.01\gamma$) درمورد رزونانس $\delta/\gamma=0$ برای دو نمودار (الف) و (ب) تنظیم کردیم $r_x = r_y = r_z = 0.5$

با در نظر گرفتن مولفه های بردار بلاخ و استفاده از رابطه (۳) می توان حالت سیستم را در زمان t به دست آورد. در شکل (۲) زمان حد سرعت کوانتومی و درجه غیرمارکوفی بودن بر حسب پارامتر های محیطی λ/γ و δ/γ رسم شده است.

با مقایسه شکل (۲) الف و شکل (۲) ب می توان دریافت که زمان حد سرعت کوانتومی در رژیم غیرمارکوفی کوتاهتر از زمان حد سرعت کوانتومی در رژیم مارکوفی است، که نشان می دهد اثرات غیرمارکوفی می توانند باعث افزایش سرعت تحول کوانتومی شوند. در شکل (۳) مولفه های بردار بلاخ به گونه ای انتخاب شده اند که حالت اولیه دلخواه در نظر گرفته شده مخلوط باشد.

در شکل (۳) الف زمان حد سرعت کوانتومی رابه عنوان تابعی از زمان واقعی τ در هر دو رژیم مارکوفی ($\lambda=3\gamma$) و غیر مارکوفی ($\lambda=.01\gamma$) برای $\delta=0$ رسم

حد سرعت کوانتومی کوتاه تر از زمان در رژیم مارکوفی

خواهد شد.

مرجع ها

- [1] J.D. Bekenstein, **Phys. Rev. Lett.** **46** (1981) 623.
- [2] S. Lloyd, **Nature (London)** **406** (2000) 1047.
- [3] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, **Nat. Photonics** **5** (2011) 222.
- [4] L. Mandelstam, I. Tamm, The Uncertainty Relation Between Energy and Time in Non-relativistic Quantum Mechanics Selected Papers, **Springer**, Berlin, 1991, pp. 115–123 .
- [5] N. Margolus, L.B. Levitin, **Physica D** **120** (1998) 188.
- [6] L.B. Levitin, T. Toffoli, **Phys. Rev. Lett.** **103** (2009) 160502
- [7] F. Campaioli, FA Pollock, FC Binder, K. Modi, **Phys. Rev. Lett.** **120** (2018) 060409.
- [8] A. Rivas, SF Huelga, Open Quantum Systems, an Introduction, **Springer**, Heidelberg, 2012.
- [9] S. Deffner, E. Lutz, **Phys. Rev. Lett.** **111** (2013) 010402.
- [10] JG Li, J. Zou, B. Shao, **Phys. Rev. A** **81** (2010) 062124.
- [11] K. Xu, W. Han, YJ Zhang, H. Fan, Chin. **Phys. B** **27** (2018) 010302.
- [12] HP Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, **Phys. Rev. Lett.** **103** (2009) 210401.
- [13] SX Wu, CS Yu, **Phys. Rev. A** **98** (2018) 042132.

عدم تسریع محاسباتی برای دو مسئله مهم هندسه محاسباتی در کامپیوترهای کوانتومی

هاشمیان میمندى، سجاد^۱

^۱ دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر، کرمان

چکیده

در این مقاله، ما به بررسی مسئله نزدیک ترین همسایگی و دایاگرام ورونی در هندسه محاسباتی می پردازیم و نشان می دهیم که وجود هرگونه بهبود نمایی در محاسبات کوانتومی برای این مسئله ممکن نیست. با استفاده از کران های پایین خصمانه، ما اثبات می کنیم که هیچ الگوریتم کوانتومی با بهبود نمایی نمی تواند این مسئله را حل کند. برای این منظور، یک کاهش به مسئله زوجیت تعداد یک ها در یک دنباله ارائه می دهیم.

واژه های کلیدی: هندسه محاسباتی، پیچیدگی محاسباتی، تسریع کوانتومی.

Computational deficiency for two important computational geometry problems in quantum computing Hashemian Meymandi, Sajjad¹

¹ Department of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University, Kerman

Abstract

In this paper, we investigate nearest neighbor and Voronoi diagrams in computational geometry and show that there is no quantum supremacy for this matter. Using adversarial lower bounds, we prove that no representation improved quantum algorithm can solve this problem. For this purpose, a reduction to Hamming weight is provided.

Keywords. Computational geometry, Computational Complexity, Quantum Supremacy.

PACS No. 03.67.Ac

مقدمه

در حوزه هندسه محاسباتی، مسئله نمودار ورونی از مسائل مهم و پرکاربرد هستند. این مسائل در علوم داده و پردازش های گرافیکی کاربردهای متنوعی دارند. در مسائلی که نیاز به پیدا کردن نزدیک ترین همسایگی بین دو مجموعه از نقاط داریم، مانند جستجوی داده های شبیه بین تصاویر [۱]، متن ها [۲] یا ویژگی های داده ها [۳] و داده های فضایی [۴] مثل جغرافیا، بیوانفورماتیک و شبکه های اجتماعی، این مسئله بسیار کاربردی است.

در پردازش های گرافیکی، دیاگرام ورونی به عنوان یکی از روش های محاسباتی برای تولید سطوح سه بعدی استفاده می شود [۵]. با استفاده از نمودار ورونی، می توان سطوح پیچیده تر را با دقت بالا و سرعت بیشتری رندر کرد [۶]. در طراحی و تحلیل ساختارهای سه بعدی مانند مدل های سه بعدی مولکول ها [۷]، معماری ساختمان ها [۸] و شبکه های عصبی [۹]، نمودار ورونی به عنوان یک ابزار قدرتمند برای مدلسازی و تحلیل استفاده می شود. نمودار ورونی در شبکه های ترکیبی مانند شبکه های مسیریابی و شبکه های

ارتباطی نقش مهمی دارد. با استفاده از ورونی نمودار، می توان به طور موثر مسیرها و ارتباطات بین نقاط را مدلسازی و بهینه سازی کرد [۱۰]. تا به حال، روش های مختلفی برای حل این مسائل ارائه شده است [۱۱] [۱۲]. اما در این مقاله، ما به بررسی محدودیت های موجود در حل کوانتومی این مسئله می پردازیم. به عبارت دیگر، ما به دنبال اثباتی هستیم که نشان دهد در حل مسئله نمودار ورونی، بهبود نمایی در محاسبات کوانتومی وجود ندارد. برای این منظور، ما از کران های پایین خصمانه [۱۳] استفاده می کنیم و با استفاده از یک کاهش به مسئله زوجیت تعداد یک ها در یک دنباله، اثبات می کنیم که هیچ الگوریتم کوانتومی با بهبود نمایی برای حل مسئله نمودار ورونی وجود ندارد.

در این مقاله، ابتدا به معرفی مسئله نمودار ورونی می پردازیم و سپس به بررسی کران های پایین خصمانه و اثبات عدم وجود بهبود نمایی در محاسبات کوانتومی می پردازیم. در انتها، نتایج و استنباط ها را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

کارهای پیشین

استفاده و بررسی از محاسبات کوانتومی در هندسه محاسباتی از دیرباز مورد توجه بوده است [۱۴] اما با این حال ادبیات محدودی در این زمینه وجود دارد و مسائل زیادی هنوز مورد بررسی قرار نگرفته اند. همینطور بیشتر توجه این حوزه متوجه مسائلی است که پیشرفت و تسریع حداکثر چندجمله‌ای را نتیجه داده اند [۱۵] [۱۶]. در کارهای پیشین مسائل مربوط به تحذب همانند مسئله پوش محدب، کوچکترین دایره مشمول همه نقاط، پوشش مثلث‌ها و ... بررسی شده اند. همچنین مسائل مربوط به برخورد و اشتراک نواحی و پاره‌خط‌ها هم مورد بررسی قرار گرفته است. مسائل مربوط به مجاورت نیز از مهم ترین مسائلی هستند که در این حوزه بررسی شده اند. تمامی این سوالات از سوالات ابتدایی این حوزه هستند و بنظر مطالعه دقیقی روی مسائل بزرگتر و پیچیده تر هندسه محاسباتی انجام نشده است.

مفاهیم اولیه

در این بخش به شرح پیشنیازها و تعریف دقیق تری مسائل می پردازیم.

تعریف (نزدیک ترین همسایگی). [۱۲] اگر (X, d) یک فضای متریک باشد و K مجموعه اندیس اعداد ۱ تا n باشد و زیرمجموعه مرتب از نقاط $P = \{p_k | k \in K, p_k \in X\}$ داده شده باشند. برای یک نقطه پرس وجو q ، محاسبه مجموعه $R_q = \{p | p \in \inf_{r \in P} d(r, q)\}$ مورد نظر است.

مسئله نزدیک ترین همسایگی به دنبال یافتن نزدیک ترین همسایه یا همسایگی برای هر نقطه در یک مجموعه از نقاط است. به طور دقیق تر، در این مسئله، برای هر نقطه در مجموعه، باید نقطه‌ای را پیدا کنیم که فاصله آن با نقطه مورد نظر حداقل باشد.

تعریف (نمودار ورونی). [۱۱] اگر (X, d) یک فضای متریک باشد و K مجموعه اندیس اعداد ۱ تا n باشد و زیرمجموعه مرتب از نقاط فضا یعنی $P = \{p_k | k \in K, p_k \in X\}$ داده شده باشند. می خواهیم افزای از X به نواحی R_k پیدا کنیم بطوری که:

$$R_k = \{x | x \in X, p_k = \inf_{r \in P} d(r, x)\}$$

مسئله نمودار ورونی به بررسی و تحلیل ساختارهای دایاگرامی در یک گراف می پردازد. در این مسئله، هدف ما این است که یک گراف را به صورت دایاگرامی نمایش دهیم و خواص و ویژگی های آن را بررسی کنیم.

تعریف (زوجیت تعداد یک‌ها). [۱۷] یک دنباله دودویی همانند S به طول

n داده شده است. سوال زوجیت تعداد یک‌ها در این دنباله است.

مسئله زوجیت تعداد یک‌ها با توجه به سادگی که دارد از اولین مسائل مورد بررسی در زمینه پیچیدگی محاسباتی است. کار کردن با این مسئله ساده است و البته همچنان می تواند در اثبات نتایج تاثیرگذار باشد.

در مدل پرس وجو، الگوریتم‌ها تنها با پرسش از عناصر ورودی به ورودی دسترسی پیدا می کنند و پیچیدگی الگوریتم با تعداد پرسش‌هایی که انجام می دهد اندازه گیری می شود. بسیاری از الگوریتم‌های کوانتومی را می توان به طور طبیعی در این مدل بیان کرد [۲۰]. از معروف ترین نمونه می توان به الگوریتم گروور [۱۸] برای جستجوی فهرست از n عنصر با جست وجوهای کوانتومی $O(\sqrt{n})$ اشاره کرد و همینطور الگوریتم دوره یابی که اساس الگوریتم تجزیه شور است [۱۹]. در مدل های پرس وجو، نه تنها می توان الگوریتم های کوانتومی کارآمد ساخت، بلکه می توان کران های پایین تری را برای تعداد پرس وجوهای که هر الگوریتم کوانتومی به آن نیاز دارد، اثبات کرد. کران های پایین در مدل پرس وجو کوانتومی شهودی را در مورد محدودیت های محاسبات کوانتومی ارائه می دهد.

قضیه (کران های پایین خصمانه). [۱۳] برای هر مسئله به شکل تابعی $f: S \rightarrow \mathbb{Z}_2$ با دسترسی به اوراکل O_S برای هر ورودی $s \in S$ ، یک کران پایین برای تعداد پرسش ها از اوراکل معرفی می کنیم. اگر دو زیر مجموعه دلخواه $X \subseteq \{s | f(s) = 1\}$ و $Y \subseteq \{s | f(s) = 0\}$ و رابطه ی $R \subseteq X \times Y$ که به شکل زیر تعریف می شود:

$$xRy \Leftrightarrow \exists i O_x(i) \neq O_y(i), \forall j \neq i O_x(j) = O_y(j)$$

حال رابطه R_i را به این صورت تعریف کنید که:

$$xR_i y \Leftrightarrow O_x(i) \neq O_y(i), \forall j \neq i O_x(j) = O_y(j)$$

یعنی داشته باشیم $R = \cup R_i$. حال اگر گراف دو بخشی متناظر با R را در نظر بگیریم و کمینه درجه رئوس بخش X و Y را به ترتیب Δ و Δ' بنامیم و از سوی دیگر برای R_i ها به همین ترتیب بیشنه درجه را δ_i و δ'_i بنامیم و سپس تعریف کنیم $\delta = \max \delta_i$ و $\delta' = \max \delta'_i$ آنگاه حداقل تعداد پرسش برای حل این مسئله برابر با $\Omega(\sqrt{\frac{\Delta \cdot \Delta'}{\delta \cdot \delta'}})$ خواهد بود.

بررسی بهبود کوانتومی

قضیه برای «زوجیت تعداد یک‌ها» تسریع نمایی در محاسبات کوانتومی ممکن نیست.

اثبات. از حدهای خصمانه استفاده می کنیم. بدین ترتیب که X را همه رشته‌ها با وزن همینگ زوج و Y را باقی رشته‌ها، یعنی رشته‌هایی با وزن فرد

- [2] Kwon, Oh-Woog, and Jong-Hyeok Lee. "Text categorization based on k -nearest neighbor approach for web site classification." *Information Processing & Management* **39.1** (2003): 25-44.
- [3] Park, Chan Hee, and Seoung Bum Kim. "Sequential random k -nearest neighbor feature selection for high-dimensional data." *Expert Systems with Applications* **42.5** (2015): 2336-2342.
- [4] Dhanabal, Subramaniam, and S. J. I. J. C. A. Chandramathi. "A review of various k -nearest neighbor query processing techniques." *International Journal of Computer Applications* **31.7** (2011): 14-22.
- [5] Santamarfa-Ibirika, Aitor, et al. "Procedural playable cave systems based on voronoi diagram and delaunay triangulation." **2014** International Conference on Cyberworlds. IEEE, 2014.
- [6] Liu, Xiaohan, et al. "Parallel computation of 3D clipped Voronoi diagrams." *IEEE transactions on visualization and computer graphics* **28.2** (2020): 1363-1372.
- [7] Lindow, Norbert, et al. "Accelerated visualization of dynamic molecular surfaces." *Computer Graphics Forum*. Vol. **29**. No. **3**. Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd, 2010.
- [8] Nowak, Anna. "Application of Voronoi diagrams in contemporary architecture and town planning." *Challenges of Modern Technology* **6.2** (2015): 30-34.
- [9] Ma, Chunwei, et al. "Progressive Voronoi Diagram Subdivision: Towards A Holistic Geometric Framework for Exemplar-free Class-Incremental Learning." *arXiv preprint arXiv:2207.14202* (2022).
- [10] Bhattacharya, Priyadarshi, and Marina L. Gavrilova. "Voronoi diagram in optimal path planning." **4th** International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD 2007). IEEE, 2007.
- [11] Aurenhammer, Franz, et al. *Voronoi Diagrams And Delaunay Triangulations*. Singapore, World Scientific Publishing Company, 2013.
- [12] Dasgupta, Sanjoy, and Samory Kpotufe. "Nearest Neighbor Classification and Search." *Beyond the Worst-Case Analysis of Algorithms*, edited by Tim Roughgarden, Cambridge University Press, Cambridge, 2021, pp. 403-423.
- [13] Ambainis, Andris. "Quantum lower bounds by quantum arguments." *Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing*. 2000.
- [14] Sadakane, Kunihiko, Noriko SUGAWARA, and Takeshi Tokuyama. "Quantum computation in computational geometry." *Interdisciplinary Information Sciences* **8.2** (2002): 129-136.
- [15] Volpato, Nilton, and Arnaldo Moura. "Tight Quantum Bounds for Computational Geometry Problems." *International Journal of Quantum Information* **7.05** (2009): 935-947.
- [16] Buhrman, Harry, et al. "Limits of quantum speed-ups for computational geometry and other problems: Fine-grained complexity via quantum walks." *arXiv preprint arXiv:2106.02005* (2021).
- [17] Knuth, Donald Ervin. "Bitwise tricks & techniques; binary decision diagrams." *The Art of Computer Programming* **4.1** (2009).
- [18] Grover, Lov K. "A fast quantum mechanical algorithm for database search." *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1996.
- [19] Shor, Peter W. "Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer." *SIAM review* **41.2** (1999): 303-332.
- [20] Buhrman, Harry, Richard Cleve, and Avi Wigderson. "Quantum vs. classical communication and computation." *Proceedings of the thirtieth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1998.

تعریف می‌کنیم. آنگاه Δ و Δ' برابر با طول رشته خواهند بود و مقدار n را خواهند گرفت. مقادیر δ و δ' براساس همسایگی‌هایی مشخص می‌شوند که در بیت i ام متفاوت باشند و این برابر ۱ است. بنابراین برای این مسئله به $\Omega(n)$ پرسش کوانتومی نیاز است.

قضیه) برای «نزدیک‌ترین همسایگی» تسریع نمایی در محاسبات کوانتومی ممکن نیست.

اثبات. با توجه به این که مسئله «نزدیک‌ترین همسایگی» خود در زمان چندجمله‌ای در سیستم محاسبات کلاسیک قابل حل است، حکم را با ارائه یک کاهش از «زوجیت تعداد یک‌ها» به «نزدیک‌ترین همسایگی» ثابت خواهیم کرد. برای این کار رشته دودویی دلخواه S به طول n را در نظر بگیریم. حال برای i امین بیت ۱ در S ، نقطه $\frac{(-1)^n}{n}$ را به مجموعه نقاط P اضافه کنید. در نتیجه مسئله زوجیت تعداد یک‌ها برابر با تعیین علامت نزدیک‌ترین همسایگی نقطه پرس و جو $q = 0$ است. از آنجا که تعیین علامت یک عدد از $O(1)$ قابل محاسبه است، حکم ثابت می‌شود.

قضیه) برای «نمودار ورونی» تسریع نمایی در محاسبات کوانتومی ممکن نیست.

اثبات. با توجه به این که مسئله «نمودار ورونی» خود در زمان چندجمله‌ای در سیستم محاسبات کلاسیک قابل حل است، حکم را با ارائه یک کاهش از «نزدیک‌ترین همسایگی» به «نمودار ورونی» ثابت خواهیم کرد. کافیهست برای پیدا کردن نزدیک‌ترین نقطه به نقطه پرس و جو، عضویت آن در افرازهای نمودار ورونی را بررسی کنیم. طبق تعریف نقطه متناظر نزدیک‌ترین نقطه در P به q خواهد بود.

کارهای آتی

در این مقاله، کران‌های پایینی برای محاسبه نزدیک‌ترین همسایگی و دایاگرام ورونی ارائه شده است. اما همچنان می‌توان بهبودهای بیشتری برای آن‌ها انجام داد و انتظار تسریع‌های چندجمله‌ای می‌رود. برای محاسبه نزدیک‌ترین همسایگی در این زمینه کارهایی شده است [۱۶] اما برای مسئله نمودار ورونی بنظر نمی‌رسد تا به امروز الگوریتمی ارائه شده باشد. همچنین انتظار می‌رود در آینده این روش‌ها را برای مسائل مشابه دیگر نیز تعمیم داد. برای مثال می‌توان به مسئله نزدیک‌ترین همسایگی و مسئله دایاگرام ورونی در فضاهای وزن‌دار پرداخت.

مرجع‌ها

- [1] Li, Ying, and Bo Cheng. "An improved k -nearest neighbor algorithm and its application to high resolution remote sensing image classification." **2009 17th** International Conference on Geoinformatics. Ieee, 2009.